BIBLIOTEKA TECHNICZNA
przy P. P. M. Oddział w Gdańsku
Wrzeszcz, ul. Grunwaldzka 114

BIBLJOTEKA PRZEGLĄDU MIERNICZEGO

Inż. ST. KLUŹNIAK

PROF. PAŃSTWOWEJ SZKOŁY MIERNICZEJ W WARSZAWIE.

GEODEZJA

NIŻSZA

BIBLIOTEKA TECHNICZNA
przy P. P. M. Oddział w Gdańsku
Wrzeszcz, ul. Grunwaldzka 114

422

WARSZAWA
NAKŁADEM W. KRZYSZKOWSKIEGO i AUTORA
ROK 1928.

BIBLIOTEKA TECHNICZNA
przy P. P. M. Oddział w Gdańsku
Wrzeszcz, ul. Grunwaldzka 114

PRZEDMOWA.

Brak w polskiej literaturze technicznej obszerniejszego podręcznika z dziedziny geodezji skłonił mnie do podjęcia tej pracy.

Ilość nadsyłanych w czasie druku zgłoszeń przekonała mnie o istotnej potrzebie podręcznika obszernego, wobec czego uznałem za stosowne rozszerzyć pierwotnie zaprojektowany zakres wydawnictwa.

Instytucjom i osobom, które przyszły mi z pomocą, a w szczególności dyrektorowi Państwowej Szkoły Mierniczej w Warszawie, p. Antoniemu Fabjanowi, którego poparcie w wielkim stopniu przyczyniło się do wydania tej pracy, redaktorowi Przeglądu Mierniczego p. Wacławowi Krzyszkowskiemu, który zechciał podzielić ze mną trudy, związane z wydawnictwem, składam gorące podziękowanie.

Uważam również za swój miły obowiązek złożyć na tem miejscu podziękowanie p. Marji Rudnickiej za staranną korektę stylistyczną i drukarską, oraz p. Ludwikowi Berbeckiemu i firmom „Gerlach“ i „Breithaupt“ za użyczenie klisz.

AUTOR.

Warszawa w marcu 1928 r.

ŹRÓDŁA.

Bik, Niższaja Geodezija.
Eggert, Einführung in die Geodäsie.
Erenfeucht, Miernictwo.
Galle, Geodäsie.
Hammer, Lehrbuch der elementaren praktischen Geometrie.
Hartner-Doležal, Niedere Geodäsie.
Jordan, Handbuch der Vermessungskunde.
Kolanowski, Rzuty kartograficzne.
Kucharzewski, Planimetry polskie i ich wynalazcy.
Laśka, Geodezja.
Laussedat, Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographique.
Sanquet, Le tacheométre Sanquet (autoreducteur).
Schewior, Das Feldmessen.
Sienkiewicz, Pomiary stolikowe.
Sołowjew, Kurs nizszej gieodezii.
Warchałowski, 1) Niwelacja ścisła. 2) Rachunek wyrównawczy we tody najmniejszych kwadratów.
Wejgel, Rachunek wyrównawczy.
Wojtan, Miernictwo.

BIBLIOTEKA TECHNICZNA
przy P. P. M. Oddział w Gdańsku
Wrzeszcz, ul. Grunwaldzka 114
Nr. 81

Nr. 42
422

SPIS RZECZY.

Paragraf		Str.
	Wstęp	1
1.	Istota i zadania geodezji	1
2.	Istota geodezji wyższej i jej zadania	2
3.	Zarys historyczny badań geodezyjnych	4
4.	Istota kartografji	6
	ROZDZIAŁ I.	
	Wiadomości ogólne.	
5.	Miary	10
6.	Miary normalne	13
7.	Miary kątowe	14
8.	Wpływ kulistości ziemi na wyniki pomiarów	17
9.	Wpływ kulistości ziemi na określanie wysokości	19
10.	Rzut poziomy terenu i plan	21
11.	Skala planu a znaki umówione	22
12.	Typy map i planów	23
13.	Podstawowe pojęcia o pomiarach, wykonywanych w celu sporządzenia planu	25
14.	Pomiary wysokościowe	26
15.	Układy spółrzędnych prostokątnych i biegunowych	28
16.	Wyznaczanie spółrzędnych prostokątnych punktów	31
17.	Metody pomiarowe	34
18.	Skale i podziałki	38
19.	Podziałki linjowe	39
20.	Zamiana skal	40
21.	Użycie podziałek	42
22.	Podziałki poprzeczne (transwersalne)	42
23.	Podstawy wykreślenia planów	48
24.	Uwagi o pisowni przy rachunkach	53
25.	Rachunki geodezyjne	55
26.	Rachunek przybliżony	56
27.	Suwak	57
28.	Logarytmy małych kątów i ich funkcyj oraz logarytmy Gaussa	60
	ROZDZIAŁ II.	
	Pomiary linjowe.	
29.	Stabilizacja punktów	64
30.	Ogólne uwagi o pomiarach linjowych	68

Paragraf		Str.
31.	Odchylenia poprzeczne przy pomiarach długości	72
32.	Tyczenie prostych	74
33.	Przyrządy do pomiarów długości	77
34.	Komparacja miar	79
35.	Uwzględnianie poprawki długości taśmy lub łaty przy pomiarze	84
36.	Pomiar długości taśmą stalową	85
37.	Pion	87
38.	Dwukrotne pomiary długości	88
39.	Pomiar kątów pochylenia terenu	88
40.	Śródwaga	90
41.	Obliczenie rzutu poziomego długości prostej o znanym kącie pochylenia	92
42.	Zapis pomiaru kątów pochylenia odcinków prostych	94
43.	Dokładność pomiaru długości a kąty pochylenia	95
44.	Wpływ temperatury na wyniki pomiaru długości taśmą stalową	96
45.	Pomiar długości łatami	97
46.	Pomiar schodkami	101
47.	Przyrządy do przybliżonego pomiaru długości	102
48.	Zagadnienia na pomiar i tyczenie prostych	105
49.	Węgielnice	110
50.	Węgielnice bębenkowe	111
51.	Węgielnica zwierciadlana	114
52.	Dokładność węgielnic i wnioski, dotyczące długości prostopadłych	117
53.	Węgielnica pryzmatyczna Bauernfeinda	119
54.	Pryzmat pięciościenny	122
55.	Krzyż zwierciadlany	123
56.	Krzyż pryzmatyczny Bauernfeinda	124
57.	Podwójny pentagon	126
58.	Zastosowanie węgielnic	126
59.	Kontrola domiarów	129
60.	Obliczanie długości i położenia spodka prostopadłej, spuszczonej z wierzchołka Δ-a na podstawę	130
61.	Obliczyć spółrzędne wierzchołków Δ-a, gdy jeden z boków jest przyjęty za oś x, zaś za początek układu spółrzędnych obieramy jeden z wierzchołków Δ-a	132
62.	Mając długość i azymut odcinka, oraz spółrzędne punktu początkowego danego odcinka, określić spółrzędne końca danego odcinka	133
63.	Ze spółrzędnych dwu punktów obliczyć długość i azymut łączącego je odcinka	135
64.	Wyznaczanie punktów na danej prostej	138
65.	Obliczenie spółrzędnych punktu, leżącego na domiarze do danej prostej	143
66.	Określić spółrzędne punktu, którego odległość od dwu innych punktów o danych spółrzędnych jest znana	145
67.	Określić spółrzędne punktu przecięcia się dwu prostych, przechodzących przez punkty o danych spółrzędnych	146
68.	Orjentowanie pomiaru linjowego	150
69.	Azymut geograficzny i magnetyczny	152
70.	Zmiany eleklinacji magnetycznej	153
71.	Busole	154
72.	Busola Schmalkaldera	155
73.	Busola z przeziernikami	156
74.	Sprawdzenie busoli	159

ROZDZIAŁ III.

Pomiary busolowe.

75.	Dokładność określenia azymutu; jej wpływ na położenie punktu	162
76.	Pomiar busolowy poligonów	163

Paragraf Str.

77. Ustalenie skali i sporządzenie planu przy zdjęciu busolowem 164
78. Rozrzucenie odchyłki na punkty poligonowe 167
79. Odnalezienie błędu w pomiarze lub wykreśleniu boku 168
80. Odnalezienie błędu w azymucie 168
81. Pośrednie określanie odległości i położenia punktów zapomocą busoli . 169
82. Określenie kąta zapomocą busoli 170
83. Tablice tangensów w zastosowaniu do wykreślania planów 173
84. Tablice cięciw 174

ROZDZIAŁ IV.

Kątomierze.

85. Ogólne uwagi 175
86. Gonjometr 177
87. Nonjusz 178
88. Sprawdzenie gonjometru 181
89. Ekscentryczność alhidady 183
90. Pomiar kątów przy pomocy gonjometru 186
91. Odchyłka kątowa 188
92. Sporządzanie planu na zasadzie pomiaru gonjometrem i taśmą . . . 188
93. Wady gonjometru jako kątomierza 190
94. Teodolit 190
95. Statywy 193
96. Przyrządy optyczne 194
97. Lupa 195
98. Soczewki złożone 197
99. Lupa Wilsona 198
100. Luneta Keplera 198
101. Przesuwanie okularu 199
102. Wielkość rzeczywistego obrazu o długość lunety 200
103. Zmiana długości lunety 201
104. Powiększenie lunety 202
105. Określenie powiększenia lunety 205
106. Miejsce oka 208
107. Pole lunety 209
108. Jasność obrazu 210
109. Okulary 211
110. Obserwacje przy użyciu lunety. Paralaksa nitek 214
111. Badanie lunet 214
112. Pryzmat okularowy 216
113. Libele 217
114. Libele rurkowe 217
115. Badanie libeli 219
116. Wrażliwość (czułość) libeli 221
117. Główne linje i punkty libeli 222
118. Odchylenie środka bańki libeli od punktu głównego 222
119. Pomiar małych kątów wychylenia libeli o podziale bieżącym 223
120. Pomiar kąta pochylenia libeli o podziale dwustronnym 224
121. Równanie libeli 225
122. Styczna do libeli, równoległa do podstawy 226
123. Libela Gouliera 227
124. Rektyfikacja libeli rurkowej 227
125. Ustawienie płaszczyzny do poziomu 230
126. Wichrowatość osi libeli nasadkowych i wiszących 230
127. Libela pudełkowa 231
128. Układ osiowy teodolitu 232

Paragraf Str.

129. Konstrukcja repetycyjnego teodolitu 234
130. Typy teodolitów 236
131. Sprawdzenie i rektyfikacja teodolitu 239
132. Błąd kolimacyjny lunety 240
133. Błąd kolimacji, a odczyt z limbusu 242
134. Pomiar kierunków i kątów wobec błędu kolimacyjnego lunety . . . 242
135. Usunięcie błędu kolimacyjnego 244
136. Błąd położenia osi obrotu lunety 245
137. Nierównoległość osi obrotu lunety do limbusu, a jej wpływ na odczyt . 246
138. Rektyfikacja 248
139. Pomiar kątów poziomych 248
140. Ekscentryczny pomiar kąta 249
141. Niedokładność poziomowania teodolitu 250
142. Błąd celu 253
143. Metody pomiarów kątów 254
144. Jednokrotny pomiar kąta 255
145. Pomiar repetycyjny kąta 257
146. Metoda kierunkowa 259
147. Koło wierzchołkowe 262

ROZDZIAŁ V.

Wyrównanie spostrzeżeń bezpośrednich.

148. Klasyfikacja błędów 266
149. Własności błędów przypadkowych 268
150. Charakterystyka dokładności pomiaru 269
151. Zadania nauki o wyrównaniu błędów pomiaru, oraz jej podział . . . 271
152. Spostrzeżenia bezpośrednie 272
153. Średni błąd średniej arytmetycznej 277
154. Wyrażenie średnich błędów: pojedynczego spostrzeżenia m i średniej arytmetycznej M w zależności od błędów pozornych 279
155. Średnia arytmetyczna i suma kwadratów błędów pozornych w zależności od odchyleń liczby przybliżonej od wyników spostrzeżeń 280
156. Średnie błędy funkcyj wyników spostrzeżeń bezpośrednich 282
157. Średni błąd iloczynu wielkości o znanym średnim błędzie przez stały czynnik 283
158. Średni błąd sumy lub różnicy 284
159. Średni błąd jednomianu 287
160. Błąd średni dowolnej funkcji 290
161. Przejście od spostrzeżeń niejednakowo do jednakowo dokładnych . . . 299
162. Wagi 301
163. Błędy średnie 304
164. Warunek minimum dla spostrzeżeń o różnej dokładności 307
165. Wartość najprawdopodobniejsza x i suma pvv w zależności od odchyleń 307
166. Waga funkcyj 311
167. Błędy różnic 315

ROZDZIAŁ VI.

Poligony zamknięte.

148a. Odchyłka kątowa 322
149a. Obliczenie spółrzędnych punktów poligonowych 324
150a. Błędy w obliczeniach przyrostów. Tablice Gaussa 326
151a. Rozrzucenie odchyłki linjowej 327
152a. Przykład 333

Paragraf		Str.
153a.	Wyrównanie większych zamkniętych poligonów	334
154a.	Wyrównanie siatki o jednym poligonie związkowym	335
155a.	Kontrola rachunku	338
156a.	Wyrównanie sieci poligonów z wewnętrznym punktem węzłowym	340
	O błędach i dokładności pomiarów długości	
157a.	Błędy systematyczne, przypadkowe i różnice wyników pomiaru długości	359
158a.	Poligony drugorzędne	369
159a.	Pomiary poligonowe na większych obszarach	373
159a.	Szkic sieci poligonowej i linji pomiarowych	374
160a.	Pomiar sytuacyjny	375
161a.	Dalekomierz Reichenbacha	376
162a.	Stałe dalekomierza Reichenbacha	377
163a.	Określenie odległości z dalekomierza przy pochyłym celu	379
164a.	Dalekomierz Porro	381
165a.	Pomiar szczegółów zapomocą dalekomierza	382
166a.	Wykres	384
167a.	Nanoszenie wyników pomiaru na plan	385

ROZDZIAŁ VII.

Obliczanie powierzchni i podział figur.

168.	Obliczanie powierzchni	386
169.	Analityczne obliczenie powierzchni	386
170.	Błędy powierzchni najprostszych figur, obliczonych z wymiarów w terenie	391
171.	Powierzchnia z trapezów	392
172.	Powierzchnia zamkniętego poligonu ze spółrzędnych	397
173.	Wzory skrócone na powierzchnie trójkątów i czworoboków	399
174.	Graficzne obliczenia powierzchni	401
175.	Podstawy graficznego obliczenia powierzchni	401
176.	Błąd graficznego określenia powierzchni	406
177.	Zamiana figur	408
178.	Zamiana na Δ-y i trapezy	409
179.	Zamiana figur metodą Zaręby	410
180.	Graficzne obliczenie powierzchni figur krzywolinjowych	412
181.	Obliczenie powierzchni czworokątów o danych bokach	413
182.	Mechaniczne obliczenie powierzchni	414
183.	Planimetr biegunowy kompensacyjny	416
184.	Teorja planimetru biegunowego	417
185.	Geometryczna interpretacja stałej C planimetru	422
186.	Określenie powierzchni przy biegunie nazewnątrz figury	423
187.	Analiza wzoru na wartość podziałki planimetru	424
188.	Użycie planimetru biegunowego	427
188a.	Określenie stałych planimetru	429
183b.	Sprawdzenie planimetru	434
189.	Powiechnie małych figur i dokładność obliczenia	438
190.	Odmiana planimetrów biegunowych	439
191.	Planimetr biegunowy tarczowy	440
192.	Planimetr rolkowy Homana-Coradiego	442
193.	Planimetr Prytza	445
194.	Wskazówki, dotyczące obliczeń powierzchni	446
195.	Rejestr pomiarowy	449
196.	Podział figur	449
197.	Podział graficzny	450
198.	Analityczny podział figur	456
199.	Projektowanie kompleksów i grup parcel	466
200.	Regulacja granic	481

ROZDZIAŁ VIII.

Niwelacja.

Paragraf		Str.
201.	Klasyfikacja pomiarów wysokościowych	483
202.	Niwelacja	483
203.	Niwelacja wprzód	484
204.	Niwelacja ze środka	486
205.	Wpływ refrakcji na wyniki niwelacji	487
206.	Przyrządy niwelacyjne	489
207.	Łaty niwelacyjne	490
208.	Niwelatory hydrostatyczne	491
209.	Niwelatory wahadłowe	491
210.	Niwelatory z libelą	492
211.	Niwelatory ze stałą lunetą	494
212.	Sprawdzenie i rektyfikacja niwelatora ze stałą lunetą, libelą na dźwigarkach i śrubą elewacyjną	496
213.	Sprawdzenie niwelatora ze stałą lunetą bez śruby elewacyjnej	499
214.	Niwelatory z przekładaną lunetą	500
215.	Niwelator typu niemieckiego o śrubie elewacyjnej i libeli połączonej z lunetą przekładaną	506
216.	Niwelator szwajcarski z przekładaną lunetą i libelą nasadkową, ze śrubą elewacyjną firmy Kerna	508
217.	Niwelator Wilda	510
218.	Niwelatory kieszonkowe	511
219.	Przewaga libeli	513
220.	Przewaga libeli niwelatora, a powiększenie lunety	514
221.	Odległość od niwelatora do łaty	516
222.	Niwelacja wprzód a niwelacja ze środka	517
223.	Punkty niwelacyjne	519
224.	Prace niwelacyjne	521
225.	Tyczenie trasy	522
226.	Wytyczenie prostych odcinków osi trasy	524
227.	Dziennik pomiarowy trasy	525
228.	Tyczenie łuków	527
229.	Punkty główne łuku	530
230.	Tyczenie punktów pośrednich na łuku	532
231.	Tyczenie od stycznych	532
232.	Tyczenie od cięciwy	535
233.	Tyczenie łuku metodą biegunową	535
234.	Tyczenie łuków metodą angielską (siecznych)	537
235.	Tyczenie łuków metodą stałych spółrzędnych	538
236.	Tyczenie łuku metodą opisanego poligonu	539
237.	Tyczenie łuku metodą wpisanego poligonu	540
238.	Zagadnienia	540
239.	Wytyczenie pikietów na krzywej i punktów poprzecznych na łukach	542
240.	Krzywa przejściowa. Tabele dla tyczenia tras	544
241.	Przebieg niwelacji podłużnej i poprzecznej	549
242.	Wskazówki praktyczne	552
243.	Dziennik niwelacji	554
244.	Zastosowanie łat z dekatycznem uzupełnieniem	557
245.	Kontrole odczytów z jednostronnych łat	560
246.	Odchyłka w niwelacji	561
247.	Suma różnic wysokości w zamkniętym ciągu niwelacyjnym	562
248.	Wyrównywanie ciągów niwelacyjnych	562
249.	Wykreślanie profilów	564
250.	Profile poprzeczne	566
251.	Projektowanie niwelety	567

Paragraf Str.

252. Przecięcie się niwelety z terenem 569
253. Tyczenie punktów o danej wysokości i profilów 574
254. Niwelacja terenu 578
255. Metoda profilów podłużnych i poprzecznych 586
256. Niwelacja schodkami 587
257. Niwelacja terenu na podstawie planu sytuacyjnego 587
258. Warstwice (izohypsy) 588
259. Wykreślanie warstwic 592
260. Plan warstwicowy 596
261. Skala pochyłości 597
262. Wykreślanie profilu na podstawie planu warstwicowego 598
263. Określenie wododziałów 600
264. Przecięcie się projektowanej płaszczyzny z terenem 600
265. Obliczanie mas 602
266. Niwelacja rzeki 606
267. Ortometryczne wysokości 608
268. Niwelacja precyzyjna 610
269. Techniczna niwelacja reperów 615

ROZDZIAŁ IX.

Geometryczny, trygonometryczny i tachymetryczny pomiar wysokości.

270. Geometryczny pomiar wysokości 618
271. Trygonometryczny pomiar wysokości 620
272. Niwelacja trygonometryczna 623
273. Wpływ krzywizny ziemi i refrakcji na wyniki niwelacji trygonometrycznej 626
274. Redukcje celowych 631
275. Użycie koła wierzchołkowego (pionowego) dla pomiaru kątów pochylenia 632
276. Obliczenie kątów pochylenia i rektyfikacja koła pionowego 634
277. Pomiar kątów pionowych z uwzględnieniem wychyleń bańki libeli . . 635
278. Tachymetrja 636
279. Dalekomierz Porro 638
280. Dalekomierze o dwu nitkach, stałej i ruchomej 640
281. Tachymetryczne określenie różnicy wysokości 641
282. Pomoce do obliczeń tachymetrycznych 642
283. Przebieg pomiaru tachymetrycznego 648
284. Wyciąg czynności przy opracowaniu polowego materjału 653
285. Przykład protokółu polowego i obliczenia tachymetrji 655
286. Wpływ błędów odczytu na łacie i kąta pochylenia na obliczenie różnicy wysokości 656
287. Tachymetry autoredukcyjne 657
288. Sprawdzenie przyrządu Hammer-Fennela 662
289. Tachymetry Kreutera i Wagner-Fennela 664
290. Tachymetr Puller-Breithaupta 666
291. Autoredukcyjny tachymetr Sanguet 671
292. Sprawdzenie tachymetru Sanguet 674
293. Logarytmiczny tachymetr Tichy-Starke 677
294. Niwelatory-tachymetry ze śrubami elewacyjnemi 684
295. Niwelatory-tachymetry 691

ROZDZIAŁ X.

Fizyczna niwelacja.

296. Niwelacja barometryczna 692
297. Barometryczny pomiar wysokości 694

Paragraf Str.
298. Barometry rtęciowe 698
299. Poprawka na wysokość i szerokość geograficzną 700
300. Poprawka na depresję włoskowatą 702
301. Termohypsometry 702
302. Aneroidy 704
303. Aneroid Goldschmidta 705
304. Mikroskopowy aneroid Reitz-Deutschbein'a 707
305. Poprawki aneroidu Naudet i Bohnego 707
306. Przebieg niwelacji barometrycznej 709
307. Niwelacja dwoma aneroidami 710
308. Obliczenie niwelacji barometrycznej według wzoru Babinet'a 711
309. Niwelacja jednym aneroidem 715

ROZDZIAŁ XI.

Pomiary stolikowe.

310. Stolik mierniczy 717
311. Ustawienie stolika 719
312. Sprawdzenie stolika 719
313. Przyrządy stolikowe 720
314. Elementarne zagadnienia, rozwiązywane na stoliku 727
315. Wpływ błędu centrowania 730
316. Błąd wykreślenia 731
317. Wcięcie wprzód 732
318. Wcięcie boczne 732
319. Zagadnienie Hanzena 733
320. Wcięcie wstecz 734
321. Metoda Bonenbergera-Bessela 736
322. Punkt Collinsa a długość orjentującej prostej w metodzie Bonenbergera-Bessela 738
323. Metoda Lehmana 739
324. Rozwiązanie zagadnienia Pothenota na stoliku zapomocą kalki . . . 743
325. Pomiary stolikowe. Punkty główne 743
326. Zdjęcia szczegółów i metody pomiaru 746
327. Triangulacja stolikowa 749
328. Pomiary stolikowe, oparte o sieć poligonów 752
329. Pomiary warstwicowe na stoliku 752

ROZDZIAŁ XII.

Wyrównanie spostrzeżeń pośrednich metodą najmniejszych kwadratów.

330. Spostrzeżenia pośrednie 756
331. Równania błędów 757
332. Przykład 761
333. Wyrównanie spostrzeżeń pośrednich 762
334. Równania normalne 763
335. Obliczanie spółczynników równań normalnych 765
336. Kontrola sumowa 766
337. Przykład 767
338. Rozwiązanie układu równań normalnych 773
339. Kontrola budowy i rozwiązania równań normalnych 779
340. Kontrola sumowa w wypadku spostrzeżeń jednakowo dokładnych . . 783
341. Schemat rozwiązania równań normalnych 785
342. Średnie błędy i wagi niewiadomych, określonych z równań normalnych . 786

Paragraf Str.

343. Średnie błędy i wagi, wyznaczone z symboli Gaussa 793
344. Waga przedostatniej niewiadomej, wyrażona zapomocą wagi ostatniej niewiadomej 794
345. Średni błąd spostrzeżenia o jednostce wagi 796

ROZDZIAŁ XIII.

Triangulacja niższych rzędów.

346. Historja powstania triangulacji, jako działu geodezji 798
347. Potrzeba oparcia pomiarów na punktach stałych 800
348. Triangulacje wyższych i niższych rzędów 802
349. Triangulacja lokalna 804
350. O dokładności pomiaru kątów w trójkątach i o ilości trójkątów w danym terenie 808
351. Kształt trójkątów 811
352. Obranie podstawy i punktów sieci lokalnej w terenie 813
353. Utrwalenie punktów triangulacyjnych w terenie 816
354. Pomiar kątów 828
355. Metoda kierunkowa 829
356. Metoda repetycyjna pomiaru kątów 831
357. Metoda Schreibera pomiaru kątów we wszelkich kombinacjach . . . 834
358. Obliczenie średniego błędu kąta, pomierzonego i wyrównanego metodą Schreibera 841
359. Uzasadnienie wyrównania wyników pomiaru kątów metodą Schreibera . 842
360. Teodolity mikroskopowe ze śrubą mikrometryczną 844
361. Mikroskopy skalowe. 850
362. Nowy teodolit Zeissa 852
363. Teodolit Wilda 855
364. Pośrednie pomiary kątowe 859
365. Dośrodkowanie kątów lub kierunków mimośrodkowo pomierzonych . . 861
366. Dośrodkowanie celu 866
367. Błędy dośrodkowania 867
368. Pomiary miejscowe. 870
369. Pomiar bazy łatami 875
370. Obliczenie długości bazy. 879
371. Pomiar bazy taśmą precyzyjną 880
372. Przyrząd Jaederina do pomiaru baz 883
373. Pomiar bazy przyrządem Jaederina 888
374. Orjentowanie lokalnej sieci triangulacyjnej 894
375. Przebieg wyznaczenia azymutu geograficznego boku trójkąta lub poligonu z obserwacji odpowiadających wysokości słońca 902
376. Równania warunkowe w siatce trygonometrycznej 904
377. Warunki figur zamkniętych 904
378. Warunki sumy lub różnicy 906
379. Warunek poziomu (horyzontu) 906
380. Warunek boku 907
381. Równania baz 912
382. Liczba równań warunków w sieci 913
383. Dobór równań warunkowych 915

ROZDZIAŁ XIV.

Wyrównanie triangulacji niższych rzędów.

384. Rozwiązanie układu równań warunkowych 917
385. Rozwiązanie układu równań normalnych 321
386. Kontrole rachunku 923

Paragraf		Str.
387.	Schemat Gaussa w zastosowaniu do równań normalnych korelat	926
388.	Konieczność doboru niezależnych równań warunkowych	927
389.	Średni błąd spostrzeżenia o jednostce wagi ze spostrzeżeń warunkowych	928
390.	Wyrównanie trójkąta	929
391.	Wyrównanie czworoboku geodezyjnego (skrócone)	930
392.	Wyrównanie układu centralnego w wypadku spostrzeżeń kierunkowych	934
393.	Wyrównanie przybliżone	945
394.	Przybliżone wyrównanie układu centralnego	946
395.	Obliczenie i uzupełnienie sieci	950
396.	Przykład	952
397.	Wyrównanie stanowiska	957
398.	Uzupełnianie sieci trygonometrycznych	960
399.	Rejestr kierunkowy	963
400.	Wcięcie wstecz	965
401.	Rozwiązanie zagadnienia Snelliusa sposobem Collinsa	970
402.	Zagadnienie Hanzena	972
403.	Podstawy wyrównania wcięć, jako określenia punktu przy spostrzeżeniach pośrednich	976
404.	Wielokrotne wcięcie wprzód zapomocą pomiaru kierunków	982
405.	Wielokrotne wcięcie wstecz przy pomiarze kierunków	986
406.	Wcięcie skombinowane	990
407.	Wielokrotne wcięcia wstecz przy pomiarze kątów	1000
408.	Wyrównanie graficzne wcinanych punktów	1004
409.	Diagram Horsky'ego	1008
410.	Zmiany azymutów i długości prostych, określone z diagramu Horsky'ego po wyrównaniu punktu	1013
411.	Wyrównanie graficzne wcięcia wstecz	1014
412.	Graficzne wyrównanie wcięcia skombinowanego	1014
413.	Przybliżone wyrównanie wcięcia wprzód z trzech punktów	1015
414.	Wplatanie łańcucha Δ-ów do dwu boków o wspólnym wierzchołku	1017
415.	Wplatanie łańcucha trójkątów między punkty wyższego rzędu	1020
416.	Równania baz w triangulacji lokalnej	1026

ROZDZIAŁ XV.

Poligonizacja.

417.	Ścisłe i przybliżone metody wyrównywania poligonów	1033
418.	Wpływ błędów pomiaru kątów i azymutów na poligon jednokierunkowy	1035
419.	Ścisłe wyrównywanie poligonu	1039
420.	Ścisłe wyrównanie jednokierunkowego poligonu	1050
421.	Wyrównanie jednokierunkowego poligonu metodą pruską	1063
422.	Wyrównanie wygiętego poligonu	1069
423.	Poligony busolowe	1072
424.	Graficzna odchyłka kątowa poligonu	1074
425.	Średni błąd wyrównanych kątów poligonu	1078
426.	Wpływ wyrównania kątów na położenie ostatniego punktu poligonu	1079
427.	Przyrządy do ścisłego pomiaru poligonów	1081
428.	Nawiązywanie poligonów do punktów trygonometrycznych	1083
429.	Zagadnienie Mareka	1084
430.	Metody wyrównywania sieci poligonowych	1087
431.	Przybliżone wyrównanie poligonów, przecinających się w kilku punktach węzłowych	1088

ROZDZIAŁ XVI.

Wyrównanie związku niwelacyjnego.

432.	Wyrównanie sieci niwelacyjnej metodą spostrzeżeń warunkowych	1093
433.	Wyrównanie sieci metodą spostrzeżeń pośrednich	1097

ROZDZIAŁ XVII.

Miernictwo górnicze.

Paragraf		Str.
434.	Warunki pracy	1099
435.	Znaki miernicze	1101
436.	Przyrządy do pomiaru długości i przebieg pomiaru	1101
437.	Przyrządy do określania azymutu i kąta pochylenia linki	1104
438.	Użycie kompasów przy działaniu mas, wywierających wpływy magnetyczne	1106
439.	Teodolity, stosowane w miernictwie górniczem	1107
440.	Ekscentryczność lunety	1111
441.	Teodolity wiszące	1112
442.	Orjentowanie pomiaru w kopalni	1114
443.	Pomiar teodolitowy w pochylniach	1116
444.	Niwelacja w kopalni	1117

ROZDZIAŁ XVIII.

Wykreślanie odrysów ze zmianą skali.

445.	Zmiana skali	1119
446.	Linjał redukcyjny	1120
447.	Cyrkiel proporcjonalny	1120
448.	Pantograf	1122
449.	Pantograf Coradiego	1123
450.	Teorja pantografu	1124

UZUPEŁNIENIA.

Tabele od 1 do XII	str. 1128 do 1142
Protokół pomiaru i obliczenia azymutu	1141

SPIS BŁĘDÓW.

Strona	Wiersz od góry	Wiersz od dołu	Wydrukowano	Zmienić na
263	4		360	300
296	20		$\sqrt{m^{\varepsilon}_1 + m^{\varepsilon}_2}$	$\sqrt{m^2_1 + m^2_2}$
296		1	$b^2 m_a$	$b^2 m^2_a$
359	2		158	157 a
369	1		157	158 a
429		16	187	188 a
434		10	188	188 b
474		14	8000	800
521		2	p rze	parze
615		5	569	269
712			X	IX
779	12		kontrala	kontrola
788	1	10	$m_2 = \pm$	$m_x = \pm$
808	1		320	350
830	tabela		$K h$	$K L$
944	12		log sin ζ	log cos γ
991		7 i 8	log ΔYa, log ΔXa	log ΔY_{ap}, log ΔX_{ap}
1030	1		$c =$	$e =$

W rozdziale VI przy §§-ach dopisać literę a.

Strona	Wiersz od góry	Wiersz od dołu	Wydrukowano	Powinno być
118		6	$d = 1 -$	$d = l -$
162		13	γ	φ
220		14	$n_1 - n_1,\ n_2 - n_2,\ n_3 - n_3$	$n_1 - n,\ n_2 - n_1,\ n_3 - n_2$
311	9		$p_1\ v_1^{\varepsilon}$	$p_1\ v_1^2$
311	10		$p_2\ v_2^1$	$p_2\ v_2^2$
387	3		$ctg\ \alpha +$	$ctg\ \gamma +$
401	8		$- \Delta\ y_{ab}$	$- \Delta\ x_{ab}$
460	15		$\frac{a + x_1}{2\ p}$	$\frac{2\ p}{a + x_1}$
522		3 i 8	rys. 448, 449	rys. 489, 488
530		1	$\Delta\ WAS$	$\sphericalangle\ WAS$
537		7	$(r - y^2)$	$(r - y)^2$
643		5	nis	sin
774	2		$[p\,c\,c]$	$[p\,b\,c]$
775	6		$[p\,b\,c]$	$[p\,b\,c\ .\ 1] : [p\,b\,b\ .\ 1]$
789	14		$+ \mid p\,c\,l]\ Q_{1.3}$	$[p\,c\,l]\ Q_{13}$
811		9	$\left(\frac{m_a}{b}\right)^2$	$\left(\frac{m_a}{a}\right)^2$
846		16	$10''$	$10'$
911		17	wypisane są	wypisuje się
914		18	$l = 280$	$l = - 280$
914		12	$3\ p\ 4$	$3\ p - 4$
920	4		$\left[\frac{aq}{p}\right] k_q$	$\left[\frac{bq}{p}\right] k_q$
922		3	$[d\,d\ .\ 2]\ k_1 + [l_1\ .\ 2]$	$[d\,d\ .\ 3]\ k_1 + [l_1\ .\ 3]$
925	10		§ 383	§ 384
931		3	l_4	$+ l_4$
932	6		k_2	k_3

Strona	Wiersz od góry	Wiersz od dołu	Wydrukowano	Powinno być
934	ostatnia kolumna		00,00	0,00
			35,25	35,31
			50,40	48,70
			05,07	5,13
			16,10	16,80
			00,00	0,00
			25,77	26,47 i t. d.
935		12	$+ r_{10-9} v_{10} + v_{10-9} v_9$	$\ldots - r_{10-9} v_{10} + r_{10-9} v_9$
936	2		$+ 22{,}5_{21}$	$+ 22{,}5\ v_{20}$
939	2		§ 383	§ 384
940		4	$+ \xi_{8+1}\ v_8$	$- \xi_{8+1}\ v_8$
943			$- 1{,}130 = k_3$	$- 1{,}130 = k_2$
944	1		$(A\ B)$	$(B\ A)$
971	13		δ i β	δ i γ
979	2		$+\frac{r_{\Delta y}}{r_{tg\varphi}}$	$+\frac{r_{\Delta y}}{r_{tg\varphi}}\ dy$
986	rysunek		$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$	$\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5$
988	10		$l_n = \alpha_2 + \mu_0 - \psi_1'$	$l_n = \alpha_n + \mu_0 - \psi'_n$
990	11 i 13		A, B i α	A, B i L
992	5		$\frac{1}{4}\ (\pi + \psi')$	$\left(\frac{1}{4}\ \pi + \psi'\right)$
995		4	$-\frac{[b\,b]^2}{[a\,a]}$	$-\frac{[a\,b]^2}{[a\,a]}$
1019		1 i 2	$v_\alpha\ v_\gamma\ v_{\alpha 1}\ v_{\gamma 1}$	$r_\alpha\ r_\gamma\ r_{\alpha 1}\ r_{\gamma 1}$
1020	1, 2, 4		$v_\alpha\ v_\gamma\ v_{\alpha 2}\ v_{\gamma 2}$	$r_\alpha\ r_\gamma\ r_{\alpha 2}\ r_{\gamma 2}$
1067	5		km	km^2

WSTĘP.

§ 1. Istota i zadania geodezji.

Geodezja[1]) jest działem nauk matematycznych, zadanie którego polega na dokonywaniu pomiarów na powierzchni ziemi w celu ich dalszego opracowania dla pewnych praktycznych potrzeb.

Nauka ta ma bardzo rozległe pole działania: korzysta z niej każdy wojskowy, dla którego dobra mapa jest przedmiotem nieodzownej potrzeby, tak w czasie wojny, jak pokoju; opiera o nią swe prace inżynierja wodna, lądowa i górnicza; prace naukowe, mające na celu badanie kształtu ziemi, również wchodzą w zakres geodezji.

Jeżeli dodać, że każda nieruchomość w państwie jest przedstawiona na planach, że granice tych nieruchomości bardzo często podlegają zmianom bądź to na skutek podziałów, bądź to na skutek zarządzeń państwowych, regulujących tak stan własności jak posiadania rolnego, że wreszcie względy skarbowe zniewalają do utrzymywania kontroli nad stanem podatkowym nieruchomości—to zrozumiemy, jak rozległym jest zakres prac, w których geodezja ma swe zastosowanie.

Każdy pomiar jest czynnością, ustalającą stosunek pewnych wielkości do innych, przyjętych za jednostkowe. Ustalenie tego stosunku dokonywanem jest z pewnym stopniem przybliżenia, a ustalenie norm dla tych przybliżeń, lub dla funkcyj tak określanych stosunków, jest pracą znacznie bardziej skomplikowaną niż samo porównywanie wielkości określanych z wielkościami, przyjętemi za jednostkowe. Wszelkie dowolności zastępuje tutaj ścisły rachunek.

Wskutek konieczności ustalania stosunku jednych wielkości do innych jedynie z pewnem przybliżeniem, t. j. z pewnym błędem, geodezja styka się bezpośrednio i stale tak z teorją błędów, jak z metodami wyrównań wyników spostrzeżeń i pomiarów, bez względu na to, czy te wyniki otrzymane zostały z bezpośrednich spostrzeżeń (co spotykamy przy pomiarach długości, gdy określana odległość między dwoma punktami ustala się przez układanie na danej prostej pewnego odcinka, przyjętego za jednostkę, lub wielkość znaną, do czasu, kiedy ustaloną zostanie mierzona długość, t. j. jej stosunek do jednostki), czy też ze spostrzeżeń pośrednich (co spotykamy, np., przy określeniu długości jednego boku $\triangle$—a, gdy danym jest

---

[1]) Wyraz „Geodezja“ w języku greckim oznaczał podział ziemi.

inny bok i dwa kąty, lub też przy określaniu powierzchni figury z pomiarów długości pewnych odcinków). To też za właściwy przedmiot geodezji uważać należy tak dokonywanie pomiarów o danym stopniu ścisłości, jak również wskazanie metod, zezwalających na uzgodnienie wyników pomiarów z wymaganiami teorji.

W literaturze naukowej ustalił się podział przedmiotu na geodezję wyższą, topografję i niższą geodezję (miernictwo).

Ściśle odgraniczenie niższej geodezji od topografji nie jest możliwe; w miernictwie i w topografji spotykamy się z temi samemi określeniami, metodami pracy, narzędziami; właściwie—topografja jest do pewnego stopnia działem geodezji niższej.

Do nauk, z któremi geodezja niższa styka się bezpośrednio, zaliczamy: matematykę, fizykę, meteorologję, astronomję, geodezję wyższą, kartografję. O ile zastosowanie matematyki i fizyki do topografji nie wymaga osobnego omówienia, co również dotyczy i meteorologji (specjalnie jej działu o refrakcji), o tyle ustalenie związku, zachodzącego pomiędzy geodezją wyższą, astronomją i kartografją, wymaga rozpatrzenia.

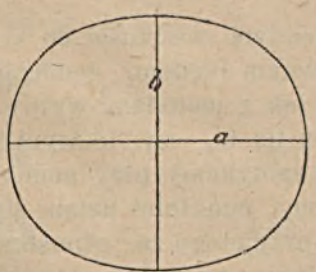
§ 2. Istota geodezji wyższej i jej zadania.

Geodezja wyższa jest nauką, badającą kształt i wymiary kuli ziemskiej oraz metody wyznaczania położenia punktów na powierzchni ziemi.

Obecne badania kształtu ziemi i wyznaczania na niej położenia punktów opierają się o teorję powierzchni poziomowych, t. j. takich, które wszędzie są prostopadłe do pionu, t. j. kierunku siły ciężkości. Powierzchnie te mają następujące własności:

1) nie mogą ani przecinać się, ani być stycznemi do siebie;
2) krzywizna tych powierzchni zmienia się w sposób ciągły;
3) wklęsłość tych powierzchni zwrócona jest ku środkowi ziemi i
4) każda poziomowa powierzchnia odbiega bardzo nieznacznie od elipsoidy obrotowej o mniejszej osi, kryjącej oś ziemi, i o nieznacznem spłaszczeniu (rys. 1).

Za idealny kształt kuli ziemskiej przyjmujemy ciało, zwane geoidą, utworzone przez powierzchnię mórz i oceanów, przedłużoną pod lądami.



Rys. 1.

Ze względów praktycznych odnosimy jednak położenie punktów, znajdujących się na powierzchni ziemi, nie do geoidy, a do zbliżonej do niej elipsoidy obrotowej, o połowach a i b osi oraz o spłaszczeniu p. Wśród całego szeregu stosowanych elipsoid najbardziej nas interesują elipsoidy:

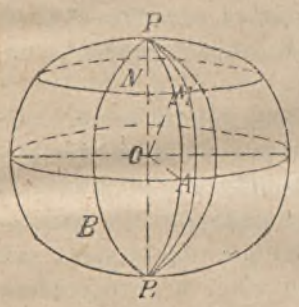
		a	b	$p=\frac{a-b}{a}$
1.	Clarcka	6378249 *m.*	6356515	1 : 293,5
2.	Bessela	6377397	6356079	1 : 299,2
3.	Hayforda	6378283	6356868	1 : 291,8

Elipsoidy powyższe posiadają odmienne daty, gdyż zostały obliczone na zasadzie coraz to innych pomiarów; widzimy jednak, że odbiegają od

siebie bardzo nieznacznie. Ważną jest rzeczą stwierdzenie zasadniczej różnicy między każdą z elipsoid a powierzchnią poziomową, mianowicie: powierzchnia poziomowa wszędzie jest prostopadłą do kierunku siły ciężkości, t. j. pionu, który jest uzależniony od układu mas o tej lub innej gęstości w otoczeniu danego punktu i wskutek tego może odbiegać dość znacznie od prostopadłej (normali) do elipsoidy, przechodzącej przez ten sam punkt.

Jak więc widzimy, w zakres prac, dotyczących określania kształtu powierzchni ziemi, wchodzą badania nad zakłóceniami kierunku pionu.

Co się tyczy określania położenia punktów na powierzchni ziemi, to wyznacza się ono przez długość i szerokość geograficzną.

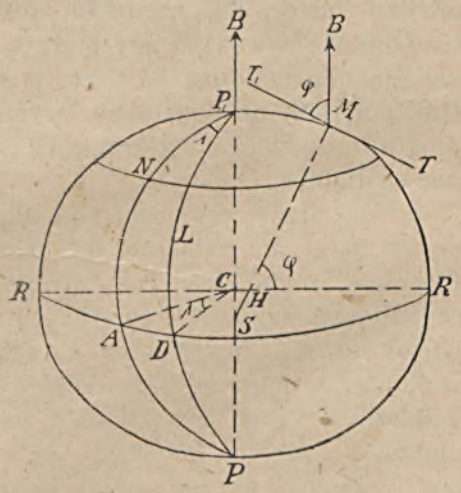


Rys. 2.

Płaszczyznami odniesienia są—płaszczyzna południka, przyjętego za pierwszy, oraz płaszczyzna równika. Południki otrzymujemy jako elipsy przecięcia się elipsoidy ziemskiej z płaszczyznami, poprowadzonemi przez oś ziemi; równik jest kołem przecięcia się płaszczyzny, poprowadzonej przez środek ziemi prostopadle do osi, zaś równoleżnikami są koła na elipsoidzie, leżące w płaszczyznach równoległych do równika.

Szerokością geograficzną danego punktu *M* jest kąt, utworzony przez kierunek pionu danego punktu na ziemi z płaszczyzną równika *RR;* na rysunku 3-im mamy: południk punktu *M* wykreślony jako elipsa *P, M, R, P, R,* oś ziemi *PP*, *C* — środek ziemi, *MS* — kierunek pionu.

$\sphericalangle MHR = \varphi$ oznacza szerokość geograficzną punktu *M*. Jeżeli przez punkt *M* poprowadzimy $MT \perp MS$, to *MT* daje przekrój płaszczyzny poziomej przez płaszczyznę południka. Jeżeli wyobrazimy sobie oś ziemi przedłużoną do nieskończoności, to otrzymana prosta przetnie kulę niebieską w biegunie świata *B*. Poprowadzimy przez punkt *M* prostą *B* w kierunku na biegun świata; prosta *MB*, z powodu nieskończenie wielkiej odległości ziemi od bieguna świata, będzie równoległą do osi ziemi *PP*, a więc $MB \parallel CR$, że zaś $T_1T \perp MH$, więc $\sphericalangle BMT_1 = \sphericalangle MHR = \varphi$, t. j. szerokość geograficzna danego punktu jest równą wysokości bieguna, t. j. kątowi, tworzonemu przez kierunek na biegun świata z poziomem danego punktu.



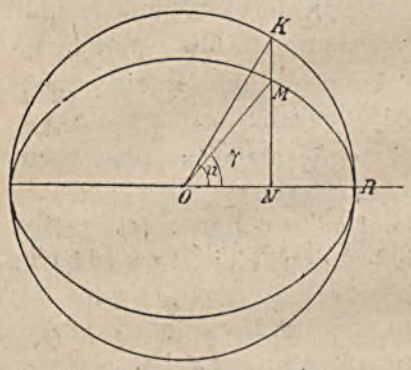
Rys. 3.

Ponieważ jednak, jak wiadomo z kosmografji, wysokość bieguna jest średnią arytmetyczną wysokości górnej i dolnej kulminacji niezachodzącej gwiazdy (gdyż taką gwiazdę obserwować można w obydwu kulminacjach), przeto szerokość geograficzna może być w ten sposób wyznaczona.

Wyznaczenie szerokości i długości geograficznej wchodzi w zakres astronomji praktycznej.

Jeżeli za pierwszy południk przyjmiemy południk punktu N, to przez długość geograficzną punktu L będziemy rozumieć kąt λ dwuścienny, zawarty między płaszczyznami południków punktu L i pierwszego (rys. 3).

Kąt ten wymierza się łukiem AD równika lub odpowiednim łukiem dowolnego równoleżnika.



Rys. 4.

Długość geograficzna określa się przez różnicę czasu miejsca obserwacji i pierwszego południka.

Zaznaczyć wreszcie wypada, że spotykamy w geodezji, prócz szerokości geograficznej, terminy szerokość geocentryczna i zredukowana.

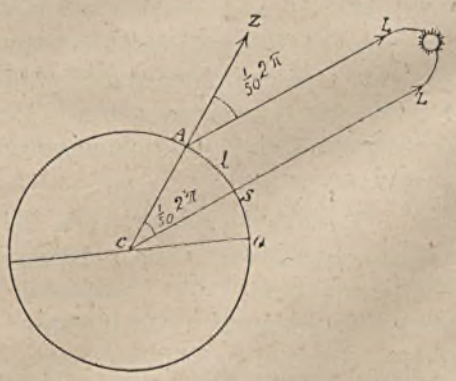
Jeżeli zakreślimy dokoła środka elipsoidy kulę o promieniu OA równym połowie większej osi elipsoidy i przez punkt M danego południka prowadzimy NK prostopadle do równika do przecięcia się z zakreślonym kołem w punkcie K, to, po połączeniu O i K, otrzymamy $\sphericalangle KOA = u$, zwany szerokością zredukowaną.

Geocentryczną zaś szerokość punktu M otrzymamy po połączeniu punktu M ze środkiem elipsoidy, jako $\sphericalangle MOA = \varphi$.

§ 3. Zarys historyczny badań geodezyjnych.

Zjawisko znikania okrętów na horyzoncie w miarę oddalania się od miejsca obserwacji nasunęło starożytnym grekom myśl o kulistości ziemi. Grekom też zawdzięczamy piersze badania na tem polu, jak również i terminologję geograficzną, bowiem terminy „długość“ i „szerokość geograficzna“ Grecy ustalili na podstawie swych podróży po morzu śródziemnem, którego długość odpowiadała kierunkowi wschód-zachód, szerokość kierunkowi północ-południe.

Z chwilą przyjęcia kuli dla określenia kształtu ziemi, naturalny bieg myśli dążył do ustalenia jej promienia. Pierwsze racjonalne rozwiązanie tego zagadnienia uzyskał Eratosthenes w 3-im wieku przed Chrystusem. Wiedząc, że w dniu przesilenia letniego odbicie słońca widocznem jest w Sjennie na dnie głębokiej studni, a więc że słońce jest w zenicie, w tym samym dniu zmierzył w Aleksandrji, leżącej na północ na południu Sjenny w odległości 5000 stadjów, odległość zenitalną słońca równą $\frac{1}{50} 2\pi$, co wyznaczyło różnicę szerokości



Rys. 5.

geograficznych obydwu miejscowości, gdyż $\sphericalangle ZAL = \sphericalangle ACS = \sphericalangle ACQ - \sphericalangle SCQ$, przyjmujące za równoległe kierunki z A i S do słońca.

Przyjmując obwód południka za $2\pi R$ z proporcji $2\pi R : l = 2\pi : \frac{1}{50} 2\pi$, gdzie $l = 5000$ stadjów, otrzymujemy $R = \frac{50\, l}{2\pi} = 39790$ stadjów.

Jak widzimy, zagadnienie zostało rozwiązane dzięki otrzymaniu długości łuku południka i różnicy szerokości geograficznych końców tego łuku, t. j. kąta, utworzonego przez piony dwu punktów na łuku. Metoda ta ma do dzisiejszego dnia zastosowanie; przytem w ciągu tego okresu czasu nastąpiło zróżniczkowanie czynności, mianowicie obecnie długość łuku południka określa geodezja, kąt zaś między pionami końców tego łuku określają obserwacje astronomiczne.

Poza powyższą metodą interesujące rozwiązanie podał Rayt przez zastosowanie kąta obniżenia poziomu, t.j. kąta między styczną do poziomu PP miejsca obserwacji a kierunkiem na horyzont. Rayt ze szczytu K góry o wysokości $KN = h$ nad poziomem morza określił wielkość kąta τ pomiędzy styczną PP do poziomu a kierunkiem KM na horyzont na morzu,

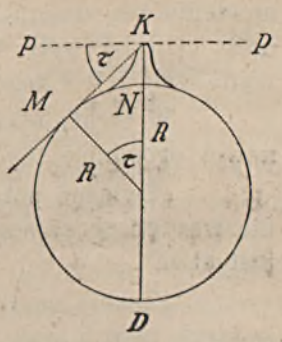
$KM = R\ tg\ \tau$ $\qquad KM^2 = KD.\ KN$

$R^2\ tg^2\ \tau = (2R + h)\, h = 2Rh + h^2$

Ponieważ h^2 jest wyrazem, nie mającym wobec $2Rh$ praktycznego znaczenia, przeto $R^2\ tg^2\ \tau = 2Rh$

$$R = 2h\ ctg^2 \tau$$

Metoda ta jednak dzięki małej dokładności przy wyznaczaniu kąta τ (wskutek refrakcji), nie ma praktycznej wartości.



Rys. 6.

Okres rozwoju geodezji po bardzo długim zastoju przypada na wiek XVII, dzięki udoskonaleniu narzędzi do pomiaru kątów przez Picarda oraz zastosowaniu triangulacji (trójkątowania) do pomiaru długości łuków południków. Triangulacją nazywamy dział geodezji, traktujący o wyznaczaniu położenia szeregu punktów, związanych △-ami, w których są pomierzone wszystkie kąty i długość jednego lub kilku boków. Praca Newtona „Zasady filozofji naturalnej", gdzie stwierdził, iż ciecz, której cząsteczki podlegają tylko sile wzajemnego przyciągania, przyjmuje kształt kuli, zaś poddana ruchowi wirowemu, przekształca się w elipsoidę, oraz jego hypoteza, że ziemia początkowo była ognisto-płynną wirującą masą, — skierowały geodezję na nowe tory i już badania i pomiary z pierwszej połowy osiemnastego wieku stwierdziły niezbicie, że słuszności teorji Newtona nie można zaprzeczyć, gdyż długość łuków południków jednakowej wartości kątowej wzrasta w miarę posuwania się ku północy, co odpowiada kształtowi ziemi, jako elipsoidzie o biegunowem spłaszczeniu, gdyż skoro na biegunach krzywizna ma być mniejszą, to promień krzywizny jest większym, a więc temu samemu kątowi odpowiadać musi dłuższy łuk.

Badanie wymiarów elipsoidy przez Delambre'a, na zasadzie pomiarów w Peruwji i Francji, dało spłaszczenie $^1/_{334}$.

Za jednostkę długości w pomiarach tych była przyjęta toaza, i długość ćwiartki południka obliczono w toazach; ponieważ konstytuanta francuska

ustaliła nową jednostkę długości, równą dziesięciomiljonowej części ćwiartki południka, zwaną metrem, przeto uzyskana została podstawa do wyrażenia metra w toazach, jako już istniejących jednostkach. Stąd powstał *mètre des archives*, pierwszy wzorzec metra. Wprowadzenie metra do międzynarodowych pomiarów miało ogromne znaczenie. Jaką wagę przywiązywano do nowej jednostki, wyjaśnia to szczegółowo Śniadecki, pisząc:

„Tym sposobem zagruntowali pasmo miar i wag na wiecznie trwałych fenomenach natury, t. j. na rozległości ziemi i na sile ciężkości; wprowadzili w podziały tych miar i wag użycie arytmetyki dziesiętnej i najprościejszej w swoich prawidłach i najdogodniejszej do ścisłego wyrażenia najdrobniejszych podziałów i stosunków".

„Zginęły dla nas miary i wagi starożytnych narodów; wygrzebujemy je albo z rozwalisk i gruzów, albo z małych szczątków i dzieł i robót, albo z ciemnych i niedokładnych napomknień dziejopisów; a w znalezieniu i ustanowieniu ich stosunku więcej ma wpływu domysł, niż przekonanie i pewność. Gdyby były te miary i wagi zafundowane na fenomenie natury, wydobycie ich z tego fenomenu byłoby dla nas łatwe i pewne.

W teraźniejszym składzie towarzystw ludzkich nietylko narody, ale nawet prowincje tego samego państwa różnią się w miarach i wagach".

„Związać potrzeby ludzkie z fenomenami natury i wyciągnąć miarę pierwszych ze stosunku ostatnich jest myśl wielka i godna rozumującego jestestwa".

„Zrobić nam na przyszłość niepotrzebne wszelkie tablice zamiany jednych miar i wag na drugie, uwolnić pamięć od mnóstwa i zagmatwania tylu ułamków i stosunków, jest to ująć mechanicznej pracy, a przyczynić czasu władzom umysłowym człowieka".

§ 4. Istota kartografji.

Wiadomo powszechnie, że układ punktów i linij na płaszczyźnie można przedstawić w postaci planu, a więc rysunku, mającego tę własność, że skala jego t. j. stosunek długości wszystkich odcinków tego planu do długości odpowiadających im odcinków na płaszczyźnie, jest wielkością stałą. Podobnież można odwzorować linje jednej kuli na kuli o innym promieniu. Gdyby więc kula ziemska była kulą, a nie bryłą, zbliżoną do elipsoidy, wówczas globus dawałby wierny obraz kuli ziemskiej oraz znajdujących się na niej szczegółów. Ale i wówczas odwzorowywanie powierzchni ziemi na globusach byłoby niepraktycznem, gdybyśmy chcieli otrzymać bardziej szczegółowy obraz powierzchni ziemi, ponieważ wypadłoby budować zbyt wielkie globusy. Z tego też powodu w powszechnem użyciu mamy mapy (karty), które są odwzorowaniem części powierzchni ziemi na płaszczyźnie. Wyobraźmy sobie, że pewien globus chcemy odwzorować na płaszczyźnie. Rozwinięcie równika na płaszczyznę jest możliwe, ale gdy, po rozcięciu wzdłuż jednego z południków, powierzchnię globusu będziemy rozwijać na płaszczyznę, powstaną pęknięcia, skurczenia lub roz-

ciągnięcia, co nas przekona, że kula nie da się rozwinąć na płaszczyznę. Z tego powodu nie możemy otrzymać map, wolnych od zniekształceń, takich czy innych. Licząc się z tym faktem, kartograf przy wykonaniu mapy dąży do wypełnienia jednego z głównych warunków, jak np. zachowanie podobieństwa nieskończenie małych części mapy do odpowiedniej części powierzchni ziemi, lub do zachowania stałego stosunku powierzchni dowolnej części mapy do odpowiedniej części powierzchni ziemi.

Spółrzędne geograficzne punktów, leżących na powierzchni ziemi, mogą być przez nas ustalone. Wyznaczenie tych punktów na mapie wówczas tylko będzie możliwem, gdy na niej będą nakreślone południki i równoleżniki.

Dział kartografji, traktujący o odwzorowaniu na płaszczyźnie siatki geograficznej, t. j. siatki południków i równoleżników przy zachowaniu tych czy innych warunków, stawianych danej mapie, nazywa się teorją rzutów kartograficznych.

Ponieważ odwzorowanie powierzchni elipsoidy na powierzchnię, rozwijalną na płaszczyznę, lub wprost na płaszczyznę, jest skomplikowanem analitycznie i ponieważ mapy sporządzają się w skali najczęściej tak małej, że zniekształcenia, powstające przy odwzorowaniu elipsoidy, mniej się różnią od zniekształceń przy odwzorowaniu ziemi, traktowanej jako kula, niż zniekształcenia map, powstające wskutek nieuniknionych nieścisłości w samej grafice map, przeto najczęściej przyjmujemy, że bryła ziemska jest kulą, co znacznie upraszcza odwzorowanie. Co się tyczy wymiarów tej kuli, to promień jej tak się obiera, by powierzchnia kuli równała się powierzchni elipsoidy, co np. dla elipsoidy Bessela zachodzi przy promieniu kuli równym około 6370 *km*.

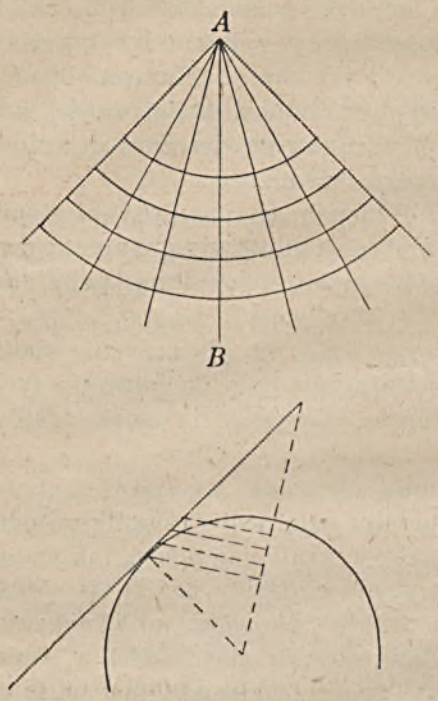
Kształt południków i równoleżników siatki geograficznej może być najróżnorodniejszy — mamy więc siatki geograficzne w postaci siatki linij prostych, przecinających się pod kątem prostym, jak np. w rzutach izocylindrycznych i Mercatora, spotykamy siatki, w których południki są prostemi, a równoleżniki spółśrodkowemi kołami, jak to ma miejsce w rzutach stożkowych; są rzuty, w których tak południki, jak równoleżniki, odwzorowują się w postaci krzywych, i t. d.

Dla ustalenia pewnego poglądu na metody budowy siatek geograficznych — rozpatrzymy rzuty: stożkowy, izocylindryczny, ortograficzny i stereograficzny.

Wyobraźmy sobie pas ziemi, leżący po obydwu stronach pewnego równoleżnika. Jeżeli przez dowolny punkt danego równoleżnika poprowadzimy styczną do południka do przecięcia się z osią ziemi, otrzymany odcinek przyjmiemy za tworzącą stożka i przez obrót tego odcinka dokoła osi zatoczymy stożek, styczny do kuli wzdłuż danego równoleżnika, to przecięcie się przedłużonych płaszczyzn równoleżników i południków da nam siatkę geograficzną na stożku.

Wyobraźmy sobie ten stożek rozciętym wzdłuż jednej z tworzących i rozwiniętym na płaszczyznę; ponieważ punkty każdego równoleżnika na stożku były jednakowo odległe od wierzchołka stożka, więc, po rozwinięciu na płaszczyznę, otrzymamy równoleżniki w postaci łuków spółśrodkowych kół; południki, jako tworzące stożka, ułożą się na płaszczyźnie w postaci prostych.

Oczywiście bez zniekształceń odwzoruje się równoleżnik styczności, inne, w miarę oddalania się od niego, będą coraz bardziej wydłużone.

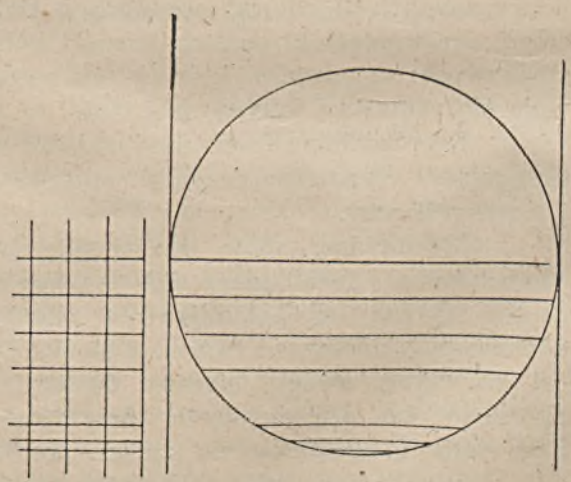


Rys. 7.

Rzut stożkowy możemy zbudować nieco inaczej; mianowicie, jak poprzednio, rozwiniemy równoleżnik styczności, na średnim południku naniesiemy długości stopni południków na kuli, poczynając od równoleżnika styczności, i przez otrzymane punkty poprowadzimy spółśrodkowe z równoleżnikiem styczności koła. Na równoleżniku styczności od głównego południka naniesiemy łuki, odpowiadające np. 5° łuku tego równoleżnika, i punkty podziału połączymy z wierzchołkiem stożka; otrzymamy w ten sposób południki w kształcie prostych.

Rzut walcowy przenosi np. południki i równoleżniki z kuli na styczny z nią wzdłuż równika walec, w ten sposób, że równoleżniki na walcu otrzymujemy jako koła przecięć płaszczyzn równoleżników z powierzchnią walca; południki na walcu będą prostemi, równoległemi do tworzącej walca. W rzucie tym występują wyraźnie zniekształcenia w długości równoleżników: około równika ich łuki są najmniej, około biegunów najbardziej zwiększone.

Siatka geograficzna, po rozwinięciu walca na płaszczyznę, będzie siatką prostych, wzajemnie prostopadłych, o stałych odległościach między południkami, niezależnie od szerokości geograficznej, i coraz bardziej zmniejszających się odległościach między równoleżnikami w miarę zbliżania się ku biegunom.



Rys. 8.

Przejdziemy do rzutu ortograficznego biegunowego, przy którym płaszczyzną obrazu będzie płaszczyzna równika, oko obserwatora zaś, umieszczone w nieskończoności na przedłużeniu osi ziemskiej, odrzutuje równoleżniki na równik w postaci kół spółśrodkowych, odległości między ktoremi zmniejszają się na krańcach w miarę zbliżania się do koła równikowego.

Południki odrzutują się w postaci prostych, rozchodzących się promienisto ze środka równika.

Największe zniekształcenia zajdą w pobliżu równika.

W podobny sposób otrzymujemy rzuty stereograficzne, jeżeli oko umieszczone jest na powierzchni ziemi np. na biegunie, w rzucie biegunowym,—i równik obrany za płaszczyznę obrazu. Tak więc rzut stereograficzny biegunowy, w którym półkula, leżąca po innej stronie równika, niż oko, umieszczone na biegunie, da w rzucie południki, jako promienie równika, a równoleżniki, jako współśrodkowe koła.



Rys. 9.

Czytelnika, pragnącego szczegółowo zapoznać się z typami, teorją i wykreślaniem siatek kartograficznych — odsyłamy do książki inż. Kolanowskiego „Rzuty Kartograficzne".

Szczegółowe badania poszczególnych rzutów wchodzą w zakres teorji rzutów kartograficznych; kartografja zaś bada metody pracy przy tworzeniu map.

Zadaniem kartografa jest przedstawienie wyników pomiarów polowych w postaci map wojskowych, geograficznych, geologicznych, gleboznawczych, komunikacyjnych i t. d.

Z powyższego wynika, że:

1) geodezja wyższa ma zastosowanie w pomiarach, przy których uwzględniamy krzywiznę powierzchni ziemi; metody, zapomocą których uzyskujemy spółrzędne geograficzne poszczególnych punktów, wchodzą w zakres geodezji wyższej;

2) topografja zajmuje się pomiarami większych przestrzeni, nawiązanemi do punktów o znanych spółrzędnych geograficznych i mającemi na celu zgromadzenie materjału polowego, na zasadzie którego sporządzane będą nowe mapy wojskowe;

3) kartografja ma na celu sporządzanie oryginałów map i ich reprodukcję.

Geodezja niższa (miernictwo) bada: 1) pomiary mniejszych obszarów, wykonywane dla celów gospodarczych i technicznych oraz 2) metody dalszego opracowania wyników pomiarów dla pewnych wytkniętych celów.

Do celów tych zaliczamy: 1) ustalanie powierzchni mierzonych obszarów, 2) projektowanie podziałów zgodnie z określonemi warunkami, 3) ustalanie, względnie wznawianie granic nieruchomości zgodnie z ich stanem poprzednim, 4) ustalenie podstaw dla wymiaru podatków gruntowych, 5) sporządzanie planów dla potrzeb budownictwa drogowego i wodnego, meljoracyj rolnych, górnictwa, przebudowy ustroju rolnego i t. d.

Zadaniem tomu niniejszego jest podanie wiadomości z geodezji niższej w zakresie, niezbędnym dla studjujących ten przedmiot.

ROZDZIAŁ I.

WIADOMOŚCI OGÓLNE.

§ 5. Miary.

Pomierzyć pewną wielkość — oznacza znaleźć jej stosunek do innej, przyjętej za jednostkę. Podstawą więc każdego pomiaru jest miara jednostkowa. Jednostki te w różnych krajach były różne; początkowo widzimy znaczną dowolność w obraniu tej lub innej wielkości za jednostkę; tak np., do historji wielkich pomiarów geodezyjnych przeszedł łokieć arabski o 27 calach, zaś każdy cal wynosił długość sześciu ziarn jęczmienia. W każdym bądź razie zawsze za jednostkę miary długości obierana była wielkość, brana z natury, jak łokieć, stopa, sażeń i t. p. Miary te, pochodzenia jednakowego, różniły się wszak pomiędzy sobą, to też z czasem, przyjmując jakąkolwiek z nich, ustalono natychmiast wzorzec takiej miary, aby przez porównanie z nim miar stosowanych, ujednostajniać system miar w danym kraju. Stąd powstały wzorce stóp (pied du roi), łokci i t. p., ustalane przez panujących (Ludwik XIII i inni).

Wzorce tego rodzaju oraz ich kopje, rozsyłane wszędzie, gdzie miały mieć zastosowanie, często utrwalane były w sposób, dostępny dla użytkowania przez szerszy ogół, jak np. długość łokcia chełmińskiego, utrwalonego w Chełmnie na kościele w postaci dwu wmurowanych żelaznych ostrzy, odległość między któremi była właściwą miarą.

Z biegiem czasu różnorodność stosowanych miar stała się jednak uciążliwa i już w XVII wieku zaczęto rozważać konieczność stworzenia jednostki miary, którąby mogła być wznowiona w razie zagubienia jej wzorca oraz przyjęta za międzynarodową. Huygens zaproponował przyjąć za taką jednostkę długość wahadła sekundowego dla określonego miejsca na ziemi. Myśl ta była między innemi brana pod rozwagę przez konstytuantę francuską, która zatwierdziła wszakże metr, jako dziesięciomiljonową część ćwiartki południka, gdyż miara ta w jednakowe warunki stawiała wszystkie narodowości. Metr zaczął się na dobre ustalać w życiu; jakkolwiek późniejsze badania stwierdziły, że za czasów wielkiej rewolucji francuskiej długość ćwiartki południka została ustalona przez Delambra jedynie z pewnem przybliżeniem i że ta długość z biegiem czasu coraz dokładniej ustalaną będzie

w miarę rozwoju nauki i techniki, to jednak ustalona jednostka pozostała bez zmiany, tem bardziej, że obawie jej uszkodzenia przeciwstawiono fakt, iż w różnych krajach przechowywane będą kopje tej miary, dokładnie z oryginałem porównane.

Za jednostkę długości przez Francję, a następnie i przez inne państwa, obecnie i przez Polskę — przyjęty więc został metr i miary pochodne, t. j.

Metr = 1 *m* = 10 *dm* = 100 *cm* = 1000 *mm*, oraz wielokrotna:

Kilometr = 1 *km* = 1000 *m*.

Dla pomiarów zaś bardzo małych długości przyjęto mikron

1 μ = 0.001 *mm*.

Za miary powierzchni przyjęto:

Metr kwadratowy = 1 m^2 = 100 dm^2 = 10000 cm^2 = 1000000 mm^2.

Ar = 1 *a* = 100 m^2.

Hektar = 1 *ha* = 100 *a* = 10000 m^2.

Za miary sześcienne:

Metr sześcienny = 1 m^3 = 1000 dm^3 = 1000000 cm^3 = 1000000000 mm^3.

Litr = 1 *l* = 1 dm^3.

Za wagi:

Kilogram = *kg* jako waga 1 dm^3 wody dystylowanej w próżni przy 4° Cels.

Gram = 1 *g* = $^1/_{1000}$ *kg*.

Quintal (Cetnar metryczny) = 1 *Q* = 100 *kg*.

Tonna = 1 *t* = 1000 *kg*.

Ponieważ na terenie Rzeczypospolitej Polskiej w ciągu dłuższego okresu czasu mapy i plany sporządzane były w miarach nowopolskich, rosyjskich, austrjackich i pruskich, przeto podajemy te miary, jak również angielskie.

1 pręt nowopolski = 0,96719 pręta koronnego
= 0,99959 miary chełmińskiej starej
= 0,98423 „ „ nowej
= 0,88659 pręta litewskiego
= 4,32000 metra
= 7,5 łokcia.

Przy pomiarach miejskich spotyka się dotąd łokieć nowopolski:

1 *ł* = 2 stopom,

1 stopa = 12 calom,

1 cal = 10 punktom.

Pręt nowopolski dzieli się na 10 pręcików, pręcik na 10 ławek, ławka na 10 ławeczek.

Miary powierzchni nowopolskie:

Pręt kwadratowy = 7,5 *ł* × 7,5 *ł*.

Mórg = 300 pr^2.

Włóka = 30 morgom.

Miary nowopolskie ustalono w 1818 roku.

Biblioteka Zakładowa

Miary rosyjskie.

Sażeń = 7 stóp (wprowadzony w Królestwie Polskiem w 1887 r.),
1 stopa = 12 calom angielskim,
1 cal ang. = 12 linjom,
1 linja = 12 punktom,
1 sażeń = 2,13358079 *m*,
Mila = 7 wiorstom,
wiorsta = 500 sażeniom.
Diesiatina (dziesięcina) = 2400 saż.^{2}

Miary austrjackie:

1 klafter wiedeński = 6 stopom; 1 klaft. = 1,79648384 *m*.,
1 stopa = 12 calom,
1 joch (mórg) = 1600 klaft. = 0,5754642 *ha*.

Miary pruskie:

1 cal pruski = 0,026 1545 *m*,
1 pręt „ = 3,766 2420 *m* (preussische Ruthe),
1 mórg „ = 0,255 3224 *ha*.

Miary angielskie:

1 yard = 3 stopom = 0,914 3918 *m*,
1 cal = 2,539 977 *cm*,
1 mila = 1,609 33 *km*,
1 akr = 40,467 84 *a*.

Miary międzynarodowe:

1 mila morska = 1,8551 *km*,
1 mila geograficzna = 7,42 *km* = $^1/_{15}{}^0$ równika.

Tabelki porównawcze spotykanych najczęściej miar:

Metr	Pręt	Łokieć	Sażeń
1	0,231 481 481	1,736 111 111	0,468 699 880
2,133 561 455	0,493 879 966	3,704 099 748	1
4,320 000 000	1	7,500 000 000	2,024 783 485
0,576 000 000	0,133 333 333	1	0,269 971 131

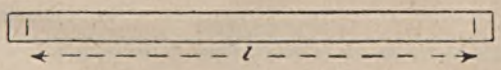
Metr kwadr.	Sażeń kwadr.	Pręt kwadr.	Łokieć kwadr.
1	0,219 679 578 4	0,053 583 676 3	3,014 081 790 1
4,552 084 482 6	1	0,243 917 421 3	13,720 354 946 3
18,662 400 000 0	4,099 748 164 0	1	56,250 000 000 0
0,331 776 000 0	0,072 884 411 0	0,017 777 777 8	1

Hektar	Dziesięcina	Mórg nowopolski
1	0.915 332	1.786 123
1.092 500	1	1.951 339
0.559 872	0.512 469	1

§ 6. Miary normalne.

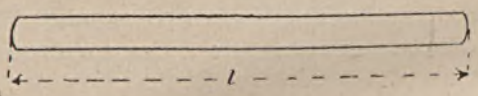
Wzorce metrów (miary normalne) zostały sporządzone przez Międzynarodowy Komitet miar i wag ze stopu 90% platyny i 10% irrydjum.

Spotykamy dwa typy miar normalnych, różniące się pod względem kształtu: étalons à traits i étalons à bouts, t.j. miary kreskowane i końcowe. Miara kreskowana jest sztabą metalową, na której oznaczono końce miary dwiema kreskami, prostopadłemi do osi sztaby.



Rys. 10.

Miary końcowe są łatami (sztabami), zakończonemi przez powierzchnie sferyczne; za miarę należy uważać odległość między środkami powierzchni sferycznych, liczoną wzdłuż osi miary.



Rys. 11.

Metry normalne są sztabami o przekroju kształtu litery X. Na powierzchni *ab* wzorca, przy dwóch jej końcach, są nacięte trzy poprzeczne (co 0.5 *mm.*) kreski i dwie podłużne (w odległości 0.2 *mm.*). Długość miary określa się odległością między środkami odcinków średnich kresek, zawartemi między kreskami podłużnemi. Szerokość samych kresek nie przekracza 0.008 *mm.*



Rys. 12.

Dla państw, które zawarły konwencję, sporządzono 30 metrów—prototypów, rozesłanych po porównaniu z metrem międzynarodowym, przechowywanym w biurze miar i wag w Pavillon de Breteuil, w Sévres pod Paryżem, oraz po sporządzeniu dla każdego z nich certyfikatu.

Do porównania tych miar służą t. zw. komparatory; są to przyrządy, zezwalające na odczytywanie do 0.001 mikrona. Tak wysoka dokładność odczytu wymaga bardzo skrupulatnego przechowywania samej miary; to też metr normalny jest układany zawsze na podstawkach w ten sposób, że $e = 0.39\ l$, (e oznacza długość każdego końca poza podstawkami, odległemi o l_1).

Kształt miary, bardzo odpornej na zgięcie, równomiernie wrażliwej na zmiany temperatury, oraz stop, z którego sporządzona została—o dokład

nie określonym spółczynniku rozszerzalności — dają gwarancję właściwego ustalania jej długości przy zmianie temperatury.

W końcu ubiegłego stulecia do narzędzi precyzyjnych zaczęto używać stopu 36% niklu i 64% stali, zwanego invarem, a to z powodu bardzo nieznacznej wielkości spółczynnika jego rozszerzalności linjowej, sięgającej około 0.000 001, a więc prawie 10 razy mniejszej, niż spółczynnik platyny, uważanej poprzednio za metal o najmniejszym spółczynniku rozszerzalności.

W Głównym Urzędzie miar i wag przechowywany jest metr invarowy № 32. Równanie tego metra:

$$L_{inv.\ №\ 32} = 1\ m. - 12.5\ \mu + (1^{\mu}.311 - 0^{\mu}.0.00312\ T)\ T$$

daje możność ustalenia jego długości przy każdej temperaturze T, liczonej od 0^{0} C.

§ 7. Miary kątowe.

Najczęściej stosowanym podziałem obwodu koła jest podział na 360^{0}, stopnia na minuty: $1^{0} = 60'$, minuty na sekundy: $1' = 60''$, tak więc $360^{0} = 21\ 600' = 1\ 296\ 000''$ (stary podział).

Nowy podział koła jest oparty na dziesiętnym systemie, mianowicie obwód koła jest podzielony na 400 części, zwanych degrés, tak że kąt prosty wynosi 100 degrés.

Degré zawiera 100 minut, minuta 100 sekund. Jest więc

$$400d = 40\,000' = 4\,000\,000''$$

Dla rozróżnienia obydwu podziałów stosujemy oznaczenie:

w starym $1^{0}\ 1'\ 1''$
w nowym $1d\ 1'\ 1''$

Przejście od starego podziału do nowego wynika z równania

$$90^{0} = 100d \text{ skąd}$$

$$1^{0} = \frac{10d}{9} \qquad 1d = \frac{9^{0}}{10}$$

$$1' = \frac{100'}{54} \qquad 1' = \frac{54'}{100}$$

$$1'' = \frac{1000''}{324} \qquad 1'' = \frac{324'}{1000}$$

Prócz powyższych podziałów spotyka się podział skombinowany, a mianowicie obwód koła jest podzielony na 360^{0}, stopnie dzielą się na części dziesiąte, setne i t. d.

W miernictwie polskiem utrzymuje się stary podział.

W analizie stosowana jest miara łukowa, albo analityczna.

Przypuśćmy, że zakreślono koło o promieniu $r = 1$; oznaczmy literą l długość łuku, odpowiadającego φ^0 kątowym tego koła. Z proporcji

$l : \varphi^0 = 2\pi r : 360^0$, ponieważ $r = 2$, mamy:

$l : \varphi^0 = \pi : 180$, skąd otrzymujemy:

$$l = \frac{\pi}{180^0}\varphi^0 = \frac{\varphi^0}{\frac{180^0}{\pi}} \text{ oraz } \varphi^0 = \frac{180^0}{\pi} l$$

Liczba $\frac{180^0}{\pi}$ oznacza kąt, któremu odpowiada łuk, równy promieniowi.

Kąt ten oznaczamy literą ρ. Jest więc

$$\rho^0 = \frac{180^0}{\pi} = 57^0, 29578 \ldots \text{ lub w minutach}$$

$$\rho' = \frac{180 \cdot 60'}{\pi} = 3437,75 \ldots \text{ lub w sekundach}$$

$$\rho'' = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60''}{\pi} = 206264,8''$$

Stąd wielkość kąta, odpowiadającego łukowi o znanej długości l, wyrażonej w jednostkach, równych promieniowi, t. j. w radjanach, będzie

$$\varphi^0 = \rho^0 l = 57^0,3\, l$$
$$\varphi' = \rho' l = 3437,75'\, l$$
$$\varphi'' = \rho'' l = 206264,8''\, l$$

t. j., aby od miary łukowej przejść do kątowej, należy miarę łukową pomnożyć przez ρ.

I odwrotnie długość łuku l, odpowiadającą kątowi środkowemu, obliczymy, jako

$$l = \frac{\varphi^0}{\rho^0} = \frac{\varphi'}{\rho'} = \frac{\varphi''}{\rho''}$$

t. j., aby od miary kątowej przejść do łukowej, należy miarę kątową podzielić przez ρ.

$$l = \frac{\varphi^0}{57^0,3} = \frac{\varphi'}{3438'} = \frac{\varphi''}{206265''}$$

lub w ułamkach dziesiętnych:

$$l = \begin{matrix} 0,017\ 453\ 292 & ^0 \\ 0,000\ 290\ 888 & \varphi' \\ 0,000\ 004\ 848 & '' \end{matrix}$$

Dla nowego podziału:

$$\rho^d = \frac{200^d}{\pi} = 63,6620^d$$

$$\rho' = \frac{200 \cdot 100}{\pi} = 6366,20'$$

$$\rho'' = \frac{200 \cdot 100 \cdot 100}{\pi} = 636620''$$

Dla skombinowanego podziału:

$$\rho^0 = \frac{180^0}{\pi} = 57^0,29578$$

$$\rho' = \frac{180 \cdot 100'}{\pi} = 5729,'578$$

$$\rho'' = \frac{180 \cdot 100 \cdot 100}{\pi} = 572957,''8$$

Ponieważ dla starego podziału łuki, odpowiadające przy promieniu $r = 1$ jednej sekundzie, minucie, stopniowi, są równe:

arc 1″ = 0,000 004 848
arc 1′ = 0,000 290 888
arc 1° = 0,017 453 292 gdyż $l = \frac{\varphi}{\rho}$

przeto te same łuki dla promienia ziemi $R = 6370$ *km* będą równe:

arc 1″ = 30,89 *m.*
arc 1′ = 1853 *m.*
arc 1° = 111177 *m.*

Ponieważ dla małych łuków ich sinusy i tangensy równają się tym łukom w mierze analitycznej, więc

$$\text{arc } 1'' = \text{tg } 1'' = \sin 1'' = 0,000\ 004\ 848 = \frac{1}{\rho''}$$

$$\text{arc } 1' = \text{tg. } 1' = \sin 1' = 0,000\ 291 \quad = \frac{1}{\rho'}.$$

gdyż ρ wskazuje, ile sekund zawiera łuk o jednostce długości, przeto $\frac{1}{\rho''}$ daje długość łuku 1″.

Już dla $\varphi = 30'$ mamy:

$$\sin \varphi = 0,008\ 7265$$
$$\text{tg } \varphi = 0,008\ 7269$$

zaś dla $\varphi = 15'$ i mniej:

$$\text{tg } \varphi - \sin \varphi \leqslant 0,000\ 000\ 1.$$

A ponieważ

$$\rho'' = \frac{1}{\sin 1''} = \frac{1}{\text{tg } 1''}$$

$$\rho' = \frac{1}{\sin 1'} = \frac{1}{\text{tg } 1'}$$

i dla małych łuków wypada:

$$\sin \varphi = \varphi \text{ i } \text{tg } \varphi = \varphi,$$

gdzie prawe części przedstawione są w mierze łukowej, więc

dalej dla małych łuków mamy:

$$\varphi = \frac{\varphi''}{\rho''} = \varphi'' \sin 1'' = \varphi'' \operatorname{tg} 1''$$

przeto

$$\sin \varphi = \varphi'' \sin 1'' \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \varphi = \varphi'' \operatorname{tg} 1''$$

skąd

$$\varphi'' = \frac{\sin \varphi}{\sin 1''} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} 1''}.$$

§ 8. Wpływ kulistości ziemi na wyniki pomiarów.

Kulistość ziemi powinna być uwzględniana przy pomiarach poziomych i wysokościowych, gdyż wszelkie pomiary wykonywane są nie na płaszczyźnie, a na bryle, zbliżonej do elipsoidy. W bardzo wielu przypadkach możemy jednak nie brać pod uwagę krzywizny powierzchni ziemi, a mianowicie w tych, kiedy błąd stąd wynikający jest wielkością, nie mającą ze względów praktycznych znaczenia.

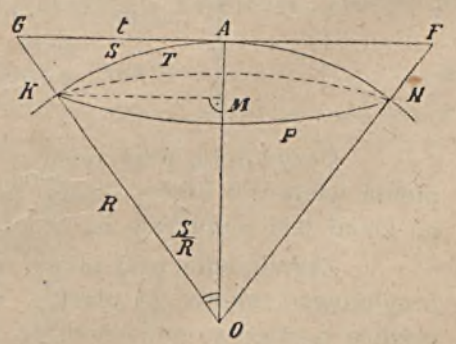
Przy pomiarach obchodzi nas wpływ kulistości ziemi na określane długości, powierzchnie i różnice wysokości.

Ponieważ operowanie danemi pomiarowemi na płaszczyźnie połączone jest z mniejszą ilością pracy obliczeniowej, niż to zachodzi na powierzchni kulistej, przeto należy zgóry dać odpowiedź na pytanie, kiedy wolno traktować wykonywane pomiary, jako pomiary na płaszczyźnie, a kiedy takie założenie jest niedopuszczalne.

Zagadnienie, w taki ujęte sposób, najłatwiej będzie rozwiązane, gdy je sformułujemy nieco inaczej, a mianowicie, przyjmując pewną granicę błędów, której nie chcemy przekraczać przy przyjęciu części powierzchni kuli ziemskiej za płaszczyznę, określimy, dla jakich długości, względnie powierzchni, powyższe błędy już zachodzą.

Przypuśćmy więc, że w pomiarach długości tolerowanym przez nas będzie błąd 10 *cm.*, w pomiarach powierzchni błąd 100 m^2, zaś przy określaniu różnicy wysokości dwu punktów błąd równy 1 *mm.*; obliczmy 1) długość, 2) powierzchnię i 3) odległość dwu punktów, których różnicę wysokości określamy i dla których zajdą powyżej założone błędy.

Wyobraźmy sobie kulę ziemską, przeciętą przez płaszczyznę $K\ T\ N\ P$, i określmy, kiedy różnica między pomierzoną długością łuku $K\ A\ N$, a rzutem tego łuku na płaszczyznę poziomą, przechodzącą przez środek łuku A, osiągnie wielkość d. Odrzutowanie wykonamy według kierunków pionu w punktach N i K, a więc przedłużając promienie $O\ N$ i $O\ K$ do przecięcia się z poziomem punktu A w punktach G i F. Różnica pomiędzy styczną $G\ F$ a łukiem $K\ A\ N$ posłuży za podstawę dalszego obliczenia;



Rys. 13.

$$GF = 2\ AG = 2t = 2\,R\,tg\frac{s}{R}$$

$$\smile KAN = 2\ AK = 2s = 2R\,\frac{s}{R}$$

lecz dla małych kątów, jak $\frac{s}{R}$, możemy odrzucić następujące po 2-im wyrazy rozwinięcia *tg*,

$$\text{więc: } tg\frac{s}{R} = \frac{s}{R} + \frac{s^3}{3R^3},$$

gdyż przy małem x jest:

$$tg\ x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots\ldots$$

$$\text{skąd } GF - KAN = 2\,(t-s) = 2\,R\,\frac{s^3}{3R^3} = \frac{2}{3}\,\frac{s^3}{R^2}$$

skoro zaś założymy, że powyższa różnica może co najmniej osiągać pewną, zgóry daną wielkość d, wówczas ze wzoru

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{S^3}{R^2} \leqslant d$$

określimy tę długość S, wykraczając poza którą, otrzymalibyśmy zbyt wielkie d.

Granica długości S wyniesie więc:

$$s = \sqrt[3]{\frac{3R^2}{2}\,d}$$

Załączamy obliczoną tabelkę:

$$s \leqslant \sqrt[3]{\frac{3}{2}\,R^2 d}$$

d *m*	0.1	0.5	1
S *km*	18	30	39

Oczywiście, przy pomocy danych tabelki uzyskujemy możność ocenienia wielkości błędu, który popełniamy, przyjmując, że pomiar długości na ziemi jest pomiarem na płaszczyźnie.

Zagadnienie, przy jakich rozmiarach mierzonych powierzchni możemy przyjmować takowe za płaskie, rozwiążemy w podobny sposób, zestawiając różnicę pomiędzy powierzchnią czaszy kulistej $AKPNA$ a powierzchnią koła $K\ P\ N\ T$.

Powierzchnia czaszy kulistej $P = 2\pi\ R.AM$

$$\text{lecz } AM = R - OM = R - R\cos\frac{S}{R} = 2R\sin^2\frac{S}{R}$$

$$\text{stąd } P = 4\pi\ R^2\sin^2\frac{S}{2R}$$

Zaś powierzchnia koła $K\ P\ N\ T$ wynosi

$$P_1 = \pi\ MK^2 = \pi\ R^2\sin^2\frac{S}{R};$$

$$\text{że zaś } \sin\frac{S}{R} = 2\sin\frac{S}{2R}\ .\ \cos\frac{S}{2R}$$

$$P_1 = 4\pi\ R^2\sin^2\frac{S}{2R}\ .\cos^2\frac{S}{2R}$$

$$\text{stąd } P - P_1 = 4\pi\ R^2\sin^2\frac{S}{2R}\left(1 - \cos^2\frac{S}{2R}\right) = 4\pi\ R^2\sin^4\frac{S}{2R};$$

Jeżeli ustalimy granice dla $P - P_1$, t. j. założymy

$$d = P - P_1 = 1\ m^2,\ 10\ m^2.,\ 100\ m^2.$$

$$\text{wtedy ze wzoru } \sin\frac{S}{2R} = \sqrt[4]{\frac{d}{4\pi\ R^2}}$$

obliczymy odpowiednie S, przy których różnica między powierzchnią czaszy kulistej a jej podstawą nie przekroczy 1 m^2, 10 m^2, 100 m^2.

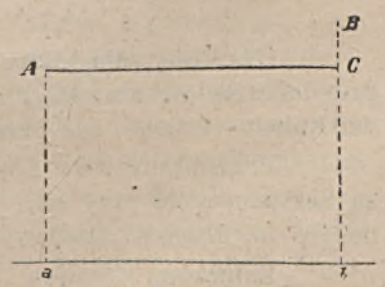
Wyniki obliczenia podaje poniższa tabelka

$d\ m^2$	1 m^2	10 m^2	100 m^2
$S\ km$	2.7	4.7	8.3

Jak więc widzimy, wpływ kulistości ziemi na wielkość powierzchni ujawnia się w figurach, w których odległość obwodu od środka sięga 2 *km*. jako wielkość bliska 1 m^2.

§ 9. Wpływ kulistości ziemi na określanie wysokości.

Różnicę wysokości dwu punktów określamy zapomocą prostej poziomej, przechodzącej przez jeden z nich w pionowej płaszczyźnie, kryjącej obydwa dane punkty. Wysokość obydwu punktów liczy się od pewnej poziomej płaszczyzny (poziom umówiony). *Aa* i *Bb* są wysokościami punktów *A* i *B* w odniesieniu do poziomu umówionego. Jeżeli przez *A* poprowadzimy w płaszczyźnie *Aa bB* poziomą prostą, to różnica wysokości obydwu punktów *B* i *A* będzie przedstawiona przez odcinek *BC*.

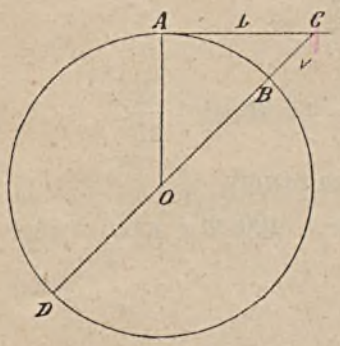


Rys. 14.

Gdy jednak określamy różnice wysokości (niwelujemy) na kuli ziemskiej, to sprawa staje się nieco więcej skomplikowaną, ponieważ za punkty, leżące w jednym poziomie, uważamy punkty, leżące na jednakowych wysokościach nad przedłużoną pod lądami powierzchnią mórz i oceanów, względnie od powierzchni, w każdym swym punkcie prostopadłych do kierunku siły ciężkości.

Takie powierzchnie nazywamy powierzchniami poziomu, albo poziomami odniesienia.

Gdyby więc ziemia była kulistą i poboczne wpływy nie komplikowały takiego założenia, wówczas kulista powierzchnia mórz i oceanów, albo powierzchnia kulista, wzięta na pewnej stałej wysokości od powyższej, byłyby poziomami odniesienia. Wyobraźmy sobie, że punkty A i B znajdują się na poziomie umówionym, t. j. są jednakowo odległe od środka ziemi (przy założeniu, że ziemia jest kulą).



Rys. 15.

Skoro więc przez punkt A poprowadzimy prostą AC poziomą, t. j. $\perp$ do pionu (promienia) AO, wówczas AC nie przejdzie przez punkt B, jakkolwiek tak A jak B leżą na jednej poziomej powierzchni, lecz przejdzie wyżej od punktu B o odcinek BC, oznaczony na przedłużeniu pionu punktu B.

Ponieważ styczna AC jest średnią proporcjonalną siecznej DC a jej zewnętrznego odinka BC, więc piszemy

$$AC^2 = DC \,.\, BC.$$

Oznaczając przez $BC = v$ błąd, powstający wskutek niwelowania kierunkiem AC, leżącym w płaszczyźnie poziomej punktu A, a więc stycznym w punkcie A do kuli, oraz wprowadzając promień kuli, t. j. przyjmując $DB = 2R$ i wyrażając AC przez D, otrzymujemy

$$D^2 = (2R + v)\, v = 2Rv + v^2.$$

Wyraz v^2 wobec $2Rv$ jest znikomo małym, z tego względu możemy v^2 nie brać pod rozwagę; będzie więc

$$D^2 = 2Rv,$$

czyli że błąd rośnie proporcjonalnie do kwadratu odległości, skąd

$$D = \pm\sqrt{2Rv}.$$

Określmy, dla jakich D możemy używać przy niwelacji poziomego promienia celowania AC, aby błąd, powstający wówczas jako wynik wpływu kulistości ziemi, nie przekroczył pewnych założonych wielkości.

Przyjmijmy v za 1 *mm.*, 10 *mm.*, 100 *mm.*, i t. d. (wielkości te nie są bez znaczenia przy określaniu różnic wysokości, gdyż dla wielu rzek na 100 *m.* długości spad wynosi zaledwie kilka milimetrów).

Załączona tabelka wskazuje, w jakiej mierze wpływa na długość poziomego celowania kulistość ziemi.

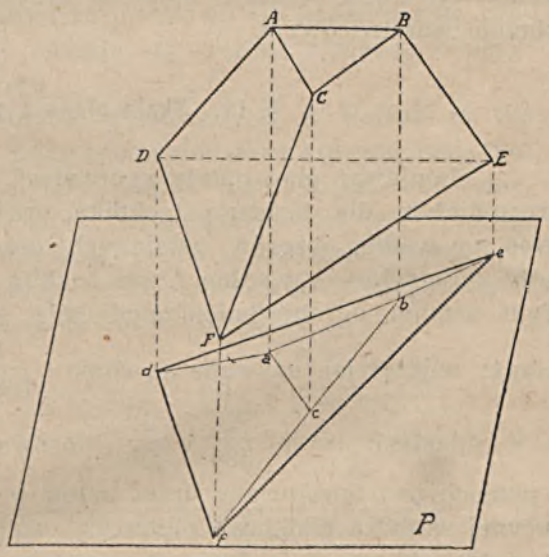
v mm.	0.1	0.8	1	10	100
D m.	36	100	113	357	1128

Należy więc, określając różnice wysokości, mieć powyższe na uwadze przy ustalaniu postępowania przy niwelacji.

§ 10. Rzut poziomy terenu i plan.

Wyobrażamy sobie, że pod układem F (pewnych linij w terenie, tworzących jakąś figurę płaską lub bryłę) przeprowadzona została powierzchnia P równoległa do poziomu morza. Przyjmijmy P za powierzchnię rzutów; jeżeli więc część powierzchni, na którą rzutujemy naszą bryłę, jest stosunkowo niewielką, wówczas tę część powierzchni P możemy, jak widzieliśmy poprzednio, przyjąć za płaszczyznę.

Skoro ze wszystkich charakterystycznych punktów danej bryły spuścimy prostopadłe na powierzchnię P (piony) i rzuty punktów połączymy linjami w taki sam sposób, jak to miało miejsce na bryle $ABCDEF$, to otrzymamy rzut poziomy danej bryły, względnie figury.



Rys. 16.

Planem danego obszaru nazywać będziemy figurę, wykreśloną na papierze, podobną do rzutu poziomego zmierzonego obszaru, a więc taką figurę, której stosunek boków do odpowiednich boków rzutu, zwany skalą, jest wielkością stałą.

Na planie, w ten sposób sporządzonym, możemy umieścić wszelkie linje, ograniczające pewne szczegóły sytuacyjne, a więc brzegi rzek, jezior, dróg, zabudowań, użytków rolnych, nieużytków, granice własności i t. p.

Jakkolwiek plan taki daje pogląd na stan szczegółów sytuacyjnych pomierzonego terenu, to jednak dla całego szeregu potrzeb, jak budowa nowych dróg, kanałów, dla meljoracyj rolnych, celów wojskowych, plan taki byłby niewystarczającym, gdyż poza powyższemi szczegółami pierwszorzędne znaczenie dla celów technicznych ma konfiguracja, czyli t. zw. rzeźba terenu. Rzeźba terenu na planach najdogodniej daje się przedstawić zapomocą krzywych, zwanych izohypsami, warstwicami lub poziomicami (za najbardziej utarty u nas należy uważać termin „warstwica"), będących linjami fikcyjnemi, z których każda łączy rzuty punktów, położonych na określonej i tej samej wysokości ponad poziomem morza, lub umówionym poziomem odniesienia, np. w danym wypadku płaszczyzną P.

Krzywe te budowane są na podstawie określonych specjalnie w tym celu wysokości punktów, rozmieszczonych w terenie co 40 *m.* w przybliżeniu w postaci wierzchołków sieci kwadratów, lub rozrzuconych nieregularnie, ale zato we wszystkich pod względem wysokościowym charakterystycznych punktach terenu, jak początki, końce lub załamania spadów, odpowiednio celowo obrane na gruncie.

Gdybyśmy więc na naszym rysunku przy punktach *a b c d e f* wpisali zapomocą liczb (np. 89.75 *m.* 105.35...) wysokości punktów *A B C D E* i *F* nad poziomem morza lub umówionym, np. nad powierzchnią poziomą *P*, wówczas plan taki miałby już wartość dla celów wojskowych lub inżynieryjnych. Gdybyśmy ponadto wyznaczyli na planie kolejno punkty, mające tę samą wysokość w odstępach co do wysokości, np. 5, albo 1, lub $^1/_2$ metrowych (zależnie od gęstości na planie wykreślanych warstwic) i punkty tej samej wysokości połączyli ciąglemi krzywemi, to taki plan nazwalibyśmy planem warstwicowym.

§ 11. Skala planu a znaki umówione.

Ponieważ plan należy sporządzać w taki sposób, aby był zupełnie zrozumiałym dla każdego technika, przeto wszelkie plany winny być wykreślane według wzorów, ustalanych przez władze państwowe, zaś szczegóły sytuacyjne — według t. zw. znaków umówionych (konwencjonalnych). Tym samym ograniczeniom podlegają skale, w których sporządzane są plany; najczęściej używane są skale $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{5000}$, $\frac{1}{4000}$, $\frac{1}{2000}$, $\frac{1}{1000}$, a w miastach nawet $\frac{1}{500}$ i $\frac{1}{250}$. Stosowanie tej lub innej skali na mapach i planach jest normowane przez urzędowe instrukcje techniczne. Przyjęcie pewnej skali za podstawę planu jest uzależnione od ilości szczegółów miejscowych, które mają być na planach wykreślone; im mniej mamy tych szczegółów, tym mniejszym może być ułamek, przez który wyraża się skala planu, i odwrotnie.

Wyobraźmy sobie jakąkolwiek linję komunikacyjną, szerokości 5 metrów; szerokość ta na planie w skali 1:10000 wyniesie 10000 razy mniej, a więc 5 *m.*: 10000 = 0,5 *mm.*; na planie 1:25000 wyniesie 0,2 *mm.*, zaś na planie 1:1000 wyniesie 5 *mm.* Jeżeli więc obydwa brzegi drogi mają być wykreślane, to taka droga z zachowaniem wymiaru szerokości na planie w bardzo małej skali wykreślić się nie da; a co mówić o takich strumieniach lub drogach o 2-metrowej szerokości, które trzeba wykreślić, jakkolwiek przy drobnej skali, np. 1:25000, szerokość ich na planie wyniosłaby zaledwie 0,08 *mm.* To też tego rodzaju szczegóły wykreślają się z pominięciem skali, a więc zamiast kreślić drogę o szerokości 0,08 *mm.* na planie, kreślimy ją o szerokości, np. 0,5 *mm.* Droga, wykreślana w ten sposób, pod względem swego kształtu na planie, jak również i pod względem swych wymiarów, jest znakiem umówionym. Oczywiście tak rozumieć należy oznaczenia wszelkich linij komunikacyjnych, oraz poszczególnych budynków na mapach wojskowych w skalach drobnych, np. 1:100000, gdzie 5 *m.* wypa-

dłoby kreślić jako odcinek 0,05 *mm.* — podczas gdy faktycznie kreśli się taki odcinek często jako 0,5 *mm.*

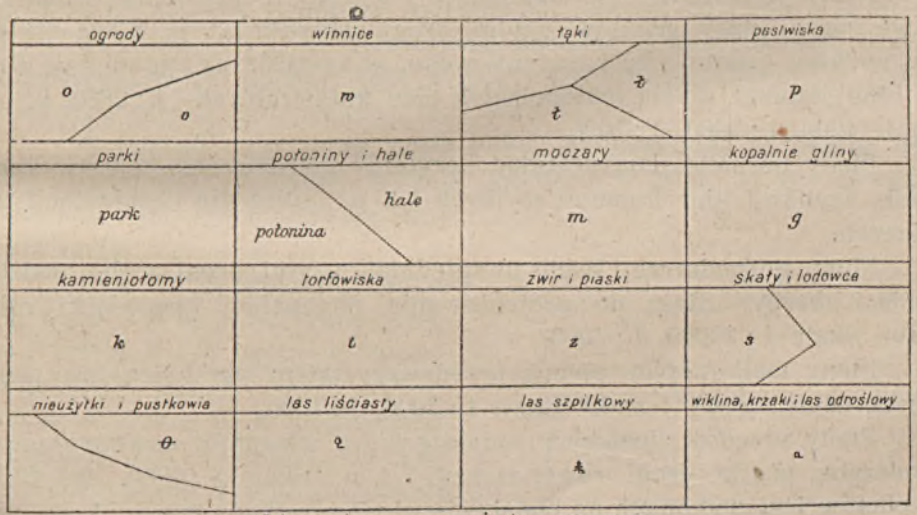
Braki tego rodzaju możnaby usunąć przez powiększenie skali, np. 1:100000 do 1:10000; mapa, otrzymana w taki sposób, byłaby bardziej szczegółową, ale dla celów wojskowych, ze względu na swe duże wymiary, nie byłaby praktyczną. To też duże skale (takie, w których mianownik jest małym, np. z dwu skal 1:5000 i 1:1000 za większą skalę uważamy 1:1000) stosują się w wypadkach, gdy wymiary na planie, przeniesione w danej skali z terenu, muszą ściśle odpowiadać stanowi rzeczy na gruncie, a to głównie z tego względu, że obliczając z planu powierzchnie szczegółów, musimy mieć do dyspozycji możliwie ścisłe dane.

To też wszędzie, gdzie chodzi o granice nieruchomości i o powierzchnie, skale planów są większe, niż na planach i mapach, dla których te względy nie mają znaczenia.

Podobnież, jeżeli plan ma służyć za podstawę do sporządzenia projektu technicznego, dane do którego czerpią się głównie z planu, to oczywiście skala takiego planu będzie duża.

Co się tyczy znaków umówionych, stosowanych w Polsce, to dla potrzeb wojskowości mamy znaki konwencjonalne Wojskowego Instytutu Geograficznego; zaś dla potrzeb innych urzędów mamy znaki umówione: Ministerstwa Robót Publicznych, Reform Rolnych, Ministerstwa Skarbu: jedne dla b. zaboru pruskiego, inne dla województw b. zaboru austrjackiego.

Załączony poniżej rysunek podaje kilka znaków konwencjonalnych według (rys. 17) instrukcji Ministerstwa Robót Publicznych.



Rys. 17.

§ 12. Typy map i planów.

Do najczęściej spotykanych należą mapy: geograficzne, topograficzne, geologiczne, gleboznawcze, komunikacyjne, oraz plany: miejskie, hipoteczne, katastralne, górnicze, gospodarcze, meljoracyjne, leśne oraz plany, wykony-

wane dla potrzeb reformy i regulacji rolnych, a więc plany parcelacji, komasacji i regulacji serwitutów.

Mapy geograficzne są ogólnie znane; skale ich są różne—1 : 1,000.000, 1 : 750.000 i t. p.

Mapy topograficzne, sporządzane dla celów wojskowych, dają rzeźbę terenu, miasta, wsie, rzeki, bagna, lasy, linje komunikacyjne, charakterystyczne punkty (krzyże, kościoły, wiatraki), brody, mosty i t. p., słowem wszystko, co może być wykorzystane dla dyzlokacji, ruchu i potrzeb wojskowych.

Wojskowy Instytut Geograficzny wydaje własne mapy w podziałce $\frac{1}{100000}$, poprawia i uzupełnia rosyjskie 1 : 126000 (3 wiorsty w calu), niemieckie 1 : 100000, austrjackie 1 : 75000 i 1 : 300000.

Mapy geologiczne podają układ warstw formacyj górskich.

Mapy gleboznawcze podają rozkład gleb w poszczególnych okręgach.

Mapy komunikacyjne (kolejowe, drogowe, samochodowe, lotnicze) podają kierunek dróg, stacje, mosty i t. p.

Plany miejskie: przeglądowe, w skalach małych, podają ulice, place, linje kolejowe, tramwajowe i t. p. szczegóły, zaś szczegółowe, z rzeźbą terenu, w skali 1 : 1000, 1 : 500, 1 : 250, podają zestawienie granic nieruchomości, wszystkie budynki, linje komunikacyjne, wodociągowe, inne rurociągi i wszelkie szczegóły aż do pojedyńczych drzew i latarń włącznie:

Plany hipoteczne podają granice nieruchomości, budynki oraz obliczone powierzchnie. Skale 1 : 5000 i więcej.

Plany katastralne (w Małopolsce i b. zaborze pruskim) podają granice własności, klasy gruntów, użytki, drogi, budynki i t. p. Służą dla wymiaru podatku gruntowego i budynkowego, w zasadzie są uzgadniane z planami hipotecznemi. Skala małopolskich map katastralnych—1 : 2880, b. pruskich 1 : 4000, 1 : 2000, 1 : 1000.

Plany górnicze dają przegląd korytarzy podziemnych, warstw kopalnianych, szybów, linij komunikacyjnych i t. p. Służą dla eksploatacji złóż górniczych.

Plany gospodarcze i leśne uwzględniają użytki, drogi, tryby, podziały na pola i obręby. Służą do projektowania racjonalnej gospodarki rolnej i leśnej. Skale 1 : 10000, 1 : 5000.

Plany meljoracyjne podają przedewszystkiem warstwice, oraz drogi, budynki, użytki, rowy i rzeki Skale 1 : 2000, 1 : 1000.

Plany urzędów ziemskich podają granice własności nowotworzonych gospodarstw, użytki, drogi, rowy, rzeczki i t. p. Skala 1 : 4000. Większość tych planów jest wykonana na podstawie planu prowizorycznego, t. zw. pierworysu, sporządzanego albo w tej samej skali, albo w skali 1 : 2000.

Poza tem spotykamy plany hydrotechniczne, podające brzegi rzek i jezior, głębokości, szybkość prądu, warstwice dna i t. p.

Do specjalnej kategorji map zaliczyć należy mapy mareograficzne, dające głębokość dna morskiego, prądy morskie, wybrzeża, latarnie morskie, porty, mielizny, rafy, wyspy, ujścia rzek i t. p.

Dla wykonywania projektów dróg, kanałów, regulacji rzek, budowy mostów są sporządzane t. zw. profile podłużne i poprzeczne, będące pla-

nami wysokościowemi przekrojów pionowych terenu w linji osi projektu i prostopadle do niego. Skala podłużna w linji osi 1 : 1000, 1 : 2000, 1 : 500, skala wysokościowa zwykle 10 razy większa; skala podłużna poprzecznych przekrojów zwykle odpowiada skali wysokościowej.

§ 13. Podstawowe pojęcia o pomiarach, wykonywanych w celu sporządzenia planu.

Planem obszaru nazywamy wykreśloną figurę, podobną do rzutu poziomego danego obszaru.

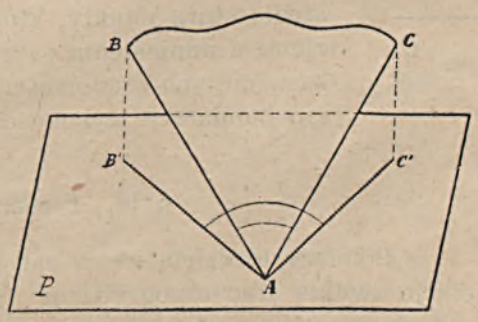
Przyjmijmy dla uproszczenia, że mierzony obszar jest wielobokiem zamkniętym, a więc tak rzut jego poziomy, jak i plan obszaru, będzie również wielobokiem zamkniętym.

Uważne zbadanie definicji planu wskazuje na kolejność czynności: a) mając obszar w terenie, otrzymać mamy jego rzut poziomy i b) mając rzut poziomy, wykreślamy plan, odpowiadający warunkowi podobieństwa planu do rzutu poziomego.

Rzut poziomy wieloboku zamkniętego otrzymamy wówczas, gdy elementy wieloboku, t. j. wszystkie jego boki i kąty, będą pomierzone, i ponadto znanem będzie położenie elementów mierzonego wieloboku w stosunku do płaszczyzny rzutów.

Przyrządy, służące do pomiaru kątów t. zw. poziomych, są w ten sposób skonstruowane, że, mierząc kąt w punkcie A pomiędzy kierunkami do punktów B i C, z których każdy może leżeć wyżej lub niżej od punktu A, mierzymy bezpośrednio nie kąt $A\,B\,C$, leżący w płaszczyźnie $B\,A\,C$, lecz kąt $B'\,A\,C'$, zawarty pomiędzy kierunkami, idącemi do punktu A do rzutów B' i C' punktów B i C na płaszczyznę poziomą P, przechodzącą przez p. A. Bezpośredni więc pomiar kąta między dwoma kierunkami w polu daje w wyniku odrazu rzut poziomy tego kąta.

Natomiast otrzymanie rzutu boku, pomierzonego w terenie, wymaga albo stosowania specjalnej metody pomiaru w polu, co nie zawsze jest wskazane, albo też obliczania wielkości rzutu.

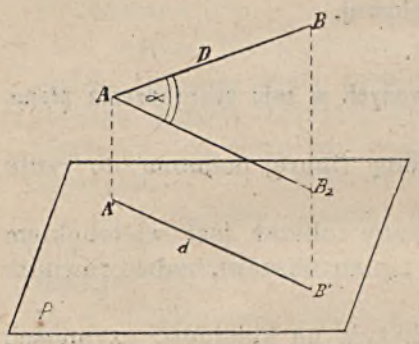


Rys. 18.

Rys. 19. Przypuśćmy, że rzutem boku $A\,B$ na płaszczyznę poziomu P jest $A'\,B'$. W ogólnym wypadku $A\,B$ nie jest $\parallel$ do P, a więc i do $A'\,B'$. Przez p. A poprowadzimy prostą AB_2 równoległą do $A'B'$, do przecięcia się z pionem punktu B w punkcie B_2; będzie więc $A\,B_2 = A'\,B' = d$. Jeżeli $A\,B = D$ i jeżeli możemy pomierzyć kąt pochylenia AB do poziomej prostej AB_2, t. j. tak zwany kąt pochylenia prostej AB do poziomu (proste AB i AB_2 leżą w tej samej płaszczyźnie pionowej), to wówczas rzut d prostej $AB = D$ otrzymamy ze wzoru

$$d = D \cos \alpha$$

Elementy rzutu poziomego rozpatrywanego wieloboku, t. j. kąty i boki, łatwo mogą więc być otrzymane z pomierzonych w terenie kątów i boków wieloboku, skoro tylko będą przez nas pomierzone kąty pochylenia poszczególnych boków do poziomu; pozostaje przejście od rzutu poziomego do planu. Ponieważ plan jest figurą zmniejszoną, podobną do rzutu poziomego, więc kąty planu będą równe kątom rzutu poziomego, zaś boki planu będą do boków tego rzutu proporcjonalne.



Rys. 18a.

Oznaczmy boki na planie przez $d_1\ d_2 \ldots . d_n$, zaś boki rzutu poziomego wieloboku przez $D_1\ D_2 \ldots . D_n$. Dla zachowania warunku proporcjonalności boków powinno być:

$$\frac{d_1}{D_1} = \frac{d_2}{D_2} = \ldots\ldots \frac{d_n}{D_n} = \frac{1}{N}$$

gdyż wszystkie stosunki $\frac{d}{D}$ wolno skrócić przez liczniki.

Wielkość $\frac{1}{N}$, wskazująca stosunek boku na planie do rzutu poziomego boku w terenie, jest skalą liczbową planu. Wielkość ta jest zgóry znana, mianownikiem jej jest pewna liczba okrągła. Znając skalę liczbową, możemy łatwo obliczyć boki na planie, mianowicie: boki wykreślane na planie, równe są ilorazowi od podzielenia rzutu poziomego prostej pomierzonej w terenie, przez mianownik skali liczbowej.

$d_1 = \frac{D_1}{N}$

$d_2 = \frac{D_2}{N}$

— — — —

— — — —

— — — —

$d_n = \frac{D_n}{N}$

W praktyce, jak zobaczymy dalej, stosujemy nieco prostsze postępowanie. Ażeby uzupełnić ogólne pojęcie o sporządzaniu planów, należy omówić jeszcze sporządzanie planów warstwicowych.

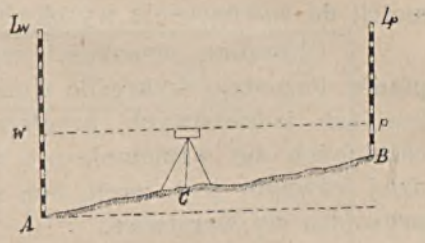
Jak już wiemy, za podstawę do wykreślenia izohyps (warstwic) służą punkty, których wysokości (koty) nad pewnym poziomem odniesienia są znane. Chodzi więc jedynie o podanie zasadniczych wiadomości o obliczaniu wysokości punktów, a więc i o pomiarach wysokościowych.

§ 14. Pomiary wysokościowe.

Pomiary te dzielą się w zależności od stosowanej metody na: 1) niwelację zwykłą albo topograficzną (geometryczną), 2) tachymetrję (szybki pomiar), 3) niwelację trygonometryczną, 4) niwelację fizyczną (barometryczną) i 5) niwelację ścisłą. Rozpatrzmy zasady trzech pierwszych metod określania wysokości punktów.

Niwelacja zwykła posługuje się poziomym promieniem celowania, realizowanym przez przyrząd, zwany niwelatorem i dwie (zwykle) pionowo ustawione łaty drewniane z podziałem na części metra.

Niwelację rozpoczynamy od pierwszego punktu, którego wysokość jest dana, lub w braku absolutnej (w odniesieniu do poziomu morza) wysokości, przyjęta przez nas za liczbę dowolną, np. 100 *m*. Niwelator, ustawiony pośrodku (w p. *C*) między danym *A*, a określanym punktem *B*, realizuje poziomy promień celowania. Jeżeli w punktach *A* i *B* są ustawione pionowo łaty, np. podzielone na centymetry w ten sposób, że opis podziału na nich rośnie od zera ku górze, wówczas promień celowania przecina łatę wstecz (l_w) w punkcie o podziale *w* (odczyt wstecz), zaś łatę wprzód (l_p) w punkcie o odczycie *p*. (rys. 19).



Rys. 19.

Poprowadzimy w płaszczyźnie przekroju *AB* prostą *AC* ∥ -*e* do poziomu. Wówczas wysokość punktu *B*, t. j. $H_B = M_2 B = M_1 A + Aw - Bp$. Oznaczamy (rys. 20).

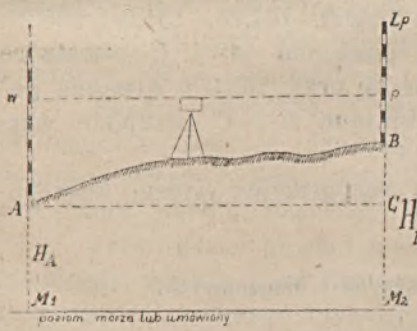
$$M_1 A = H_A$$

$$Aw = w;\ Bp = p$$

wówczas

$$H_B = H_A + (w - p)$$

gdzie $w - p$ oznacza odcinek *CB*, zwany różnicą wysokości punktów *B* i *A*.



Rys. 20.

A więc wysokość następnego punktu równa się wysokości poprzedniego więcej odczyt wstecz, mniej odczyt wprzód.

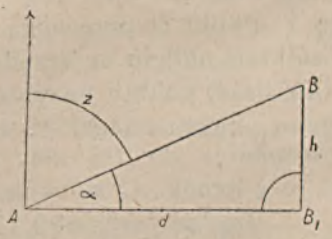
Mając obliczoną wysokość punktu *B*, analogicznie obliczamy wysokość punktu trzeciego *C* na odcinku *BC* i t. d.

Tachymetrja jest metodą obliczania różnicy wysokości dwu punktów *A* i *B*, pozwalającą zapomocą specjalnego przyrządu, zwanego dalekomierzem, na podstawie kąta pochylenia α prostej *AB* do poziomu, określić rzut *d* prostej *AB* oraz różnicę wysokości $h_{AB} = BB$, z △-a prostokątnego ($BB \perp BB$,) *ABB*, mianowicie:

$$h_{AB} = d\ tg\ \alpha$$

skąd, mając wysokość H_A punktu *A*, łatwo określimy wysokość punktu

$$H_B = H_A + h_{AB}$$

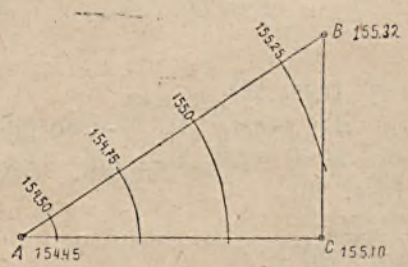


Rys. 20 a.

Niwelacja trygonometryczna wyznacza różnicę wysokości dwu punktów na podstawie rzutu poziomego *d* odległości między niemi, wyznaczanego metodą trójkątowania, oraz zapomocą pomiaru kąta *Z* między kierunkiem pionu (kierunkiem na zenit danego punktu *A*) a kierunkiem na punkt *B*. Kąt *Z* nazywa się odległością zenitalną kierunku *A B* i jest równy dopełnieniu do 90° kąta pochylenia α do poziomu.

Przy pomiarach dla sporządzenia planu warstwicowego stosuje się albo niwelacja zwykła, albo tachymetrja w połączeniu z niwelacją zwykłą, która wówczas wyznacza wysokości punktów głównych, pozostawiając tachymetrji do wyznaczenia wysokości punktów szczegółowych.

Obliczone wysokości wypisują się przy odpowiednich punktach na planie. Pozostaje wykreślić warstwice, t. j. krzywe, łączące punkty o wysokościach jednakowych, przytem krzywe te są prowadzone dla wysokości, różniących się wzajemnie o 1 *m*, 5 *m*, 0,5 *m*, nawet 0,20 i 10 *m*. Im bardziej równym jest teren, tem w mniejszych (co do wysokości) odstępach prowadzą się warstwice.



Rys. 21.

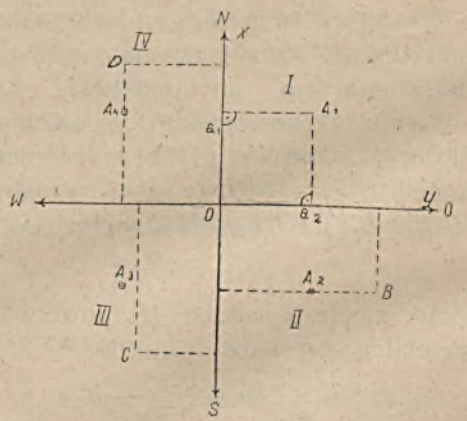
Przykład: Na danym planie mamy trzy punkty *A*, *B*, *C*, obok których są wypisane ich wysokości. W danym terenie mają przejść warstwice co 25 *cm*. Na prostej *AB* pomiędzy punktami *A* (154,45) i *B* (155,32) przejdą oczywiście warstwice 154,50, 154,75, 155,0 i 155,25, pomiędzy punktami *A* i *C* warstwice 154,50, 154,75 oraz 155,0 i wreszcie pomiędzy punktami *B* i *C* przejdzie warstwica 155,25.

W dalszej części kursu niniejszego rozpatrzymy więcej szczegółowo powyżej omówione.

§ 15. Układy spółrzędnych prostokątnych i biegunowych.

Położenie punktu na płaszczyźnie określa się przez dwie jego spółrzędne. Wyobraźmy sobie dwie proste wzajemnie prostopadłe *Ox* i *Oy*, zwane osiami spółrzędnych prostokątnych. Osie te rozcinają płaszczyznę na cztery ćwiarki I, II, III, IV.

Oś, idąca z dołu ku górze, nazywa się osią *X*; oś do niej ⊥, nazywa się osią *Y*. Punkt *O* przecięcia się osi jest początkiem układu spółrzędnych. Odciętą *X* (abscisse) punktu nazywamy odległość danego punktu od osi *Y*, liczoną wzdłuż prostopadłej do tej osi; tak więc X_A jest to odcinek $A_1\ a_2 = a_1\ o$.



Rys. 21 a.

Rzędną (ordinate) *Y* punktu nazywamy odległość punktu od osi *X*, liczoną wzdłuż ⊥-ej do tej osi; tak więc $Y_A = A_1\ a_1 = oa_2$.

Ponieważ w czterech ćwiartkach mogą być punkty, których odległości od osi są równe, np. $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$, przeto spółrzędne punktów podajemy ze znakiem + lub —, przyczem *X* jest dodatniem, + *X*, gdy punkt, np. A_1, A_4, *D*, leży powyżej osi *Y*, ujemnem, — *X*, gdy punkt, np. A_2, *B*, A_3, *C*, leży poniżej osi *Y*; spółrzędna *Y* jest dodatnią, gdy punkt leży w prawo

od osi X, np. A_1, A_2, B, ujemną — gdy punkt leży z lewej strony osi X, np. A_3, D, A_4, C.

Reguła znaków jest więc następującą:

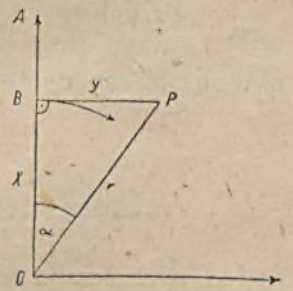
Gdy punkt leży w ćwiartce	I	II	III	IV
Wówczas X ma znak	+	−	−	+
Y	+	+	−	−

Wykreślanie punktu na zasadzie jego spółrzędnych, gdy osie są dane, polega na naniesieniu od początku spółrzędnych odciętej X wzdłuż osi X ku górze lub wdół, zależnie od znaku, rzędnej y wzdłuż osi y w prawo lub w lewo, zależnie od znaku, i na poprowadzeniu przez otrzymane na osiach punkty (np. a_1 a_2) ‖-ych do osi, a więc prostych a_1 A_1 i a_2 A_1 do przecięcia się w żądanym punkcie A.

Jak widzimy, osie spółrzędnych, jak i ćwiartki, w geodezji mają inne położenie, niż w matematyce.

Bardzo często oś X wyznacza kierunek południka geograficznego lub magnetycznego; z tego względu często na planach oś X u dołu ma wypisaną literę S (Sud, południe), u góry N (Nord, północ), oś Y ma z prawej strony literę O (wschód, Ost), z lewej W (Zachód, West).

Jeżeli przez pewien punkt O poprowadzimy prostą OA i położenie dowolnego punktu P w stosunku do osi OA, zwanej osią biegunowa, oraz do punktu O, zwanego biegunem, określać będziemy przez długość $r = OP$ i przez kąt $\alpha = \sphericalangle AOP$, liczony od osi OA w kierunku ruchu strzałki zegara, wówczas wielkości α i r nazywać będziemy spółrzędnemi biegunowemi, (rys. 22).



Rys. 22.

Kąt α nazywa się kątem kierunkowym, r — promieniem wodzącym. Jeżeli oś biegunowa kryje kierunek północy, wówczas kąt α nazywamy azymutem, przytem magnetycznym, gdy oś OA, skierowana ku północy, leży w południku magnetycznym, lub geograficznym, gdy oś OA skierowana jest ku północy i leży w południku geograficznym.

Kąt α może być zawartym między 0^0 a 360^0.

Ażeby wyznaczyć punkt P na zasadzie spółrzędnych biegunowych α i r budujemy w biegunie, w kierunku ruchu strzałki zegara, przy osi biegunowej, kąt kierunkowy i na wykreślonym jego ramieniu odkładamy wielkość r.

Gdy oś biegunowa kryje oś X układu spółrzędnych prostokątnych płaskich, wówczas możemy:
mając spółrzędne biegunowe, obliczyć prostokątne z $\triangle$ a OBP, mianowicie:

$$y = r \sin \alpha$$
$$x = r \cos \alpha$$

lub odwrotnie, mając spółrzędne prostokątne, obliczyć biegunowe; dzieląc 1-e przez II-e, otrzymujemy równanie

$$\frac{y}{x} = tg\alpha,$$

skąd:

$$\alpha = arc\ tg\ \frac{y}{x}$$

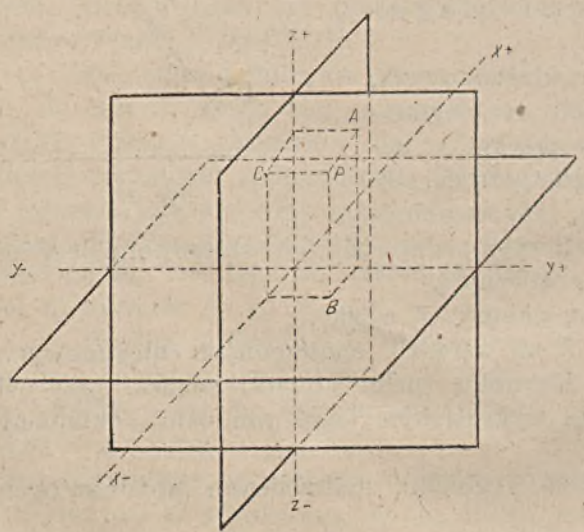
zaś z obydwu danych równań wynika:

$$r = \frac{X}{cos\ \alpha} = \frac{Y}{sin\ \alpha}$$

Przykład: Dane r — 148.47 $\alpha = 20^0\ 17'$; wyznaczyć x i y.

X	+ 137.39
$lg\ X$	2.137.95
$log\ cos\ \alpha$	9.972.20
$log\ r$	2.165.75
$log\ sin\ \alpha$	9.539.91
$lg\ y$	1.705.66
y	+ 50.78

Przejdźmy do rozpatrzenia spółrzędnych przestrzennych. Wyobraźmy sobie, że przez pewien punkt O, obrany za początek układu spółrzędnych prostokątnych w przestrzeni, przechodzą trzy proste, wzajemnie prostopadłe: Ox Oy i Oz, tworzące trzy płaszczyzny rzutów $Z\ O\ X$, $Z\ O\ Y$, $X\ O\ Y$.



Rys. 23.

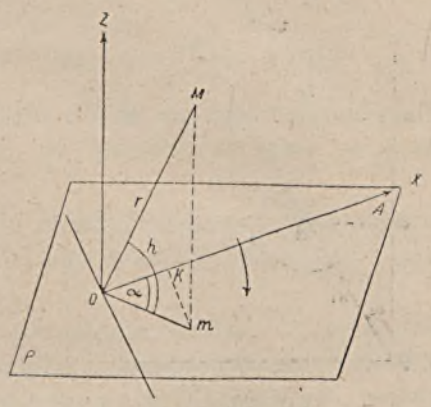
Położenie punktu P w przestrzeni wyznaczy się przez długość prostopadłych, opuszczonych z P na płaszczyzny rzutów: $PA = xp$ do płaszczyzny $Z\ O\ X$, $P\ B = z_p$ do płaszczyzny $X\ O\ Y$ i $P\ C = y_p$.

Spółrzędne te są brane ze znakami zgodnie z rysunkiem.

Spółrzędne biegunowe punktu M w przestrzeni w stosunku do osi biegunowej OA, bieguna O i płaszczyzny odniesienia P, przechodzącej przez oś biegunową, wyznaczają się jako: promień wodzący $r = OM$, kąt $MOm = h$ pochylenia promienia wodzącego do płaszczyzny odniesienia, zwany szero-

kością, i kąt $AOm = \alpha$ pomiędzy rzutem promienia wodzącego Om na płaszczyznę P a osią biegunową, zwany długością.

Jeżeli oś biegunowa kryje oś X, oś Y leży z osią x w płaszczyźnie P, a oś Z jest prostopadłą do płaszczyzny P, to przejście od spółrzędnych prostokątnych do biegunowych będzie proste.



Rys. 24.

Mianowicie:

$$Mm = z,\ mK = y \text{ i } OK = x$$

ponieważ

$$Om = r \cos h$$

więc

$$x = OK = Om \cos \alpha = r \cos h \cos \alpha$$
$$y = mK = Om \sin \alpha = r \cos h \sin \alpha$$
$$z = Mm = OM \sin h = r \sin h$$

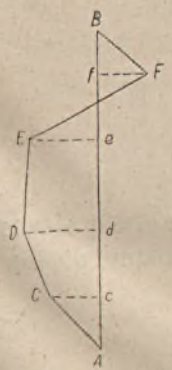
przytem h liczymy od 0^0 do $\pm 90^0$, zaś α od 0^0 do 360^0 w kierunku ruchu strzałki. Odwrotnie, mając x y i z, możemy obliczyć r, α i h. Dzieląc II równanie przez I, otrzymamy $tg\alpha = \frac{y}{x}$ i dalej, mając α, dzielimy III przez II, III przez I, skąd $tgh = \frac{z \sin \alpha}{y} = \frac{z \cos \alpha}{x}$ i wreszcie $r = \frac{z}{\sin h}$

Przeliczenie spółrzędnych biegunowych na prostokątne przestrzenne między innemi ma duże zastosowanie w miernictwie górniczem. Jeżeli oś X kryje południk magnetyczny lub geograficzny, wówczas kąt α nosi nazwę azymutu magnetycznego lub geograficznego.

Kąt h szerokości w miernictwie górniczem nosi nazwę „kąta pochylenia“, zaś termin „promień wodzący“ zwykle jest zamieniany na „odległość“ lub „długość odcinka“.

§ 16. Wyznaczanie spółrzędnych prostokątnych punktów.

Spółrzędne prostokątne poszczególnych punktów wyznaczane są bezpośrednio i pośrednio.



Rys. 25.

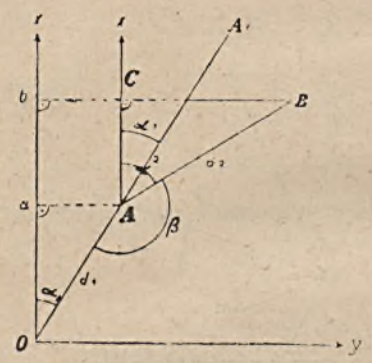
Bezpośrednio spółrzędne punktów są określane wówczas, gdy w terenie pewna prosta AB obrana zostaje za oś X, zaś rzędne punktów C, D, E i F, a więc odcinki cC, dD, eE i fF, są mierzone bezpośrednio, jak również i odcięte tych punktów, a więc odcinki Ac, Ad, Ae, Af.

Za oś odciętych obiera się taka prosta, by rzędne były możliwie krótkie.

Pośrednio spółrzędne punktów mogą być otrzymane ze wzorów

$$x = r \cos \alpha$$
$$y = r \sin \alpha$$

przez pomiar długości r i kąta α lub, co najczęściej ma miejsce, a co jest ze względów praktycznych najdogodniejsze, przez obliczanie odrazu nie samych spółrzędnych, a ich przyrostów. Przez przyrosty spółrzędnych rozumiemy różnice między spółrzędnemi punktu następnego a poprzedniego. Przyrosty spółrzędnych oznaczamy przez symbole $\triangle x$ i $\triangle y$.



Rys. 26.

Przypuśćmy, że spółrzędne punktu A są dane, np., z odległości d_1 punktu A od początku układu spółrzędnych i określonego azymutu α_1 — t. j.

$$Xa = d_1 \cos \alpha_1$$
$$Ya = d_1 \sin \alpha_1$$

Połączymy A i B prostą i poprowadzimy:

$$Aa \perp Ox,\ Ob \perp Bb$$
oraz $Ac \perp Bb$

)więc $Ac \parallel Ox$). Przez przyrost odciętej na prostej AB rozumiemy $\triangle x_{AB} = x_b - x_a$, gdzie x_a oznacza odcinek Oa, x_b — odcinek Ob. W ten sposób $\triangle x_{AB} = Ob - Oa = ab = Ac$. Podobnie przyrost rzędnej na prostej AB będzie równym: $\triangle Y_{AB} = Y_B - Y_A = Bb - Aa = Bb - cb = Bc$.

Jeżeli przez punkt A poprowadzimy południk, to kierunek jego pokryje kierunek AC, jako do OX, a to ze względu na okoliczność, iż bieguny magnetyczny i geograficzny znajdują się w tak wielkiej odległości od punktu A w porównaniu do wielkości odcinka Aa, że kierunki południków zarówno w punkcie O, jak A, winny być uważane za równoległe.

Azymutem więc α_2 prostej AB będzie kąt CAB.

Jeżeli tedy w terenie pomierzonym został kąt $\beta = OAB$, to, mając β i α_1, łatwo obliczymy α_2.

Wyobraźmy sobie przedłużoną do A_2 prostą OA; wtedy $\sphericalangle CAA_2 = \alpha_1$, więc

$$\sphericalangle A_2\ AB = \alpha_2 - \alpha_1$$

lecz

$$\sphericalangle A_2\ AB + \sphericalangle OAB = 180^0$$

t. j.

$$\alpha_2 - \alpha_1 + \beta = 180^0$$

stąd

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 180^0 - \beta.$$

Mając więc azymut α_1 poprzedniej prostej OA i kąt z prawej strony prostej OA, między AB i AO, możemy obliczyć azymut α_2 prostej następnej AB. Jeżeli $AB = d_2$

wówczas

$$\triangle X_{AB} = AC = d_2 \cos \alpha_2$$
$$\triangle Y_{AB} = CB = d_2 \sin \alpha_2$$

stąd zaś przejdziemy do spółrzędnych p. B,

mianowicie:

$$X_B = Ob = Oa + ab = X_A + Ac = X_A + \triangle X_{AB}$$
$$Y_B = Bb = bc + cB = aA + \triangle y_{AB} = Y_A + \triangle Y_{AB}$$

co znaczy, że spółrzędna następnego punktu równa sie spółrzędnej punktu poprzedniego, więcej przyrost spółrzędnej na prostej, łączącej poprzedni z następnym punktem.

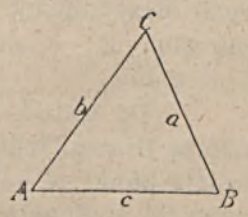
Jak widzimy, zamiast bezpośrednio mierzyć długość promienia wodzącego OB i jego azymut, z długości AB i kąta β obliczyliśmy, czyli otrzymaliśmy pośrednio, spółrzędne punktu B.

Zaznaczyć tutaj należy, iż metoda określania azymutu α_2 za pośrednictwem danego azymutu α_1 i kąta β, zamiast bezpośredniego określenia kąta α_2, stosuje się dlatego, że daleko dokładniej i prędzej niż α_2 możemy w praktyce mierniczej określić kąt β.

Z poprzedniego wynika, że aby móc obliczyć spółrzędne prostokątne wierzchołków wieloboku, winniśmy pomierzyć: azymut α_1 jednego z boków, długości wszystkich boków oraz kąty wewnętrzne zamkniętego poligonu.

Nieco inaczej otrzymujemy spółrzędne punktów w przypadku, gdy pomiar wykonany został bez użycia kątomierza. Najprostszym przykładem tego rodzaju pomiaru jest trójkątowanie linjowe, t. j. pomiar boków jednego, lub całego układu △-ów.

Określmy spółrzędne p-ów ABC, gdy pomierzone są tylko długości boków a, b i c. Jeżeli niema zastrzeżenia, by azymuty boków były odniesione do południka magnetycznego lub geograficznego (w takim bowiem wypadku żądany azymut należałoby określić w terenie), wówczas dowolny bok, np. AC, możemy przyjąć za jedną z osi spółrzędnych, np. za oś X, na osi tej obierzemy dowolny punkt, np. A, za początek układu spółrzędnych i wtedy przystępujemy do obliczenia spółrzędnych wierzchołków danego △-ta.



Rys. 27.

Spółrzędne punktów A i C są określone przez założenie początku układu spółrzędnych i położenia osi X;

jest więc:

$$X_a = 0 \quad Y_a = 0 \quad X_c = b \quad Y_c = 0$$

Pozostają do określenia spółrzędne p. B.

Obliczymy w tym celu kąt A ze wzoru:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}}$$

Kąt A w danym wypadku jest kątem kierunkowym; spółrzędne punktu B określa się więc z zasadniczego wzoru na przyrosty spółrzędnych

$$X_B = X_A + \triangle X_{AB}$$
$$Y_B = Y_A + \triangle Y_{AB}$$

a ponieważ

$$X_A = 0$$

w danym wypadku

$$Y_A = 0$$

oraz

$$\triangle X_{AB} = c \cos A$$
$$\triangle Y_{AB} = c \sin A$$

przeto

$$X_B = c \cos A$$
$$Y_B = c \sin A$$

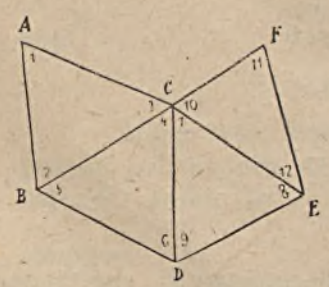
§ 17. Metody pomiarowe.

W celu sporządzenia planu należy uzyskać z pomiarów polowych materjał, na zasadzie którego można wykreślić na planie figurę, podobną do rzutu poziomego odpowiedniego układu linij w terenie. Taki materjał można uzyskać bądź przez zastosowanie tej lub innej metody pomiarowej, bądź to już przez zastosowanie kilku z nich. W geodezji ma stałe zastosowanie zasada, ściśle przestrzegana przy wszelkiego rodzaju pomiarach, mianowicie: do szczegółów przechodzimy po ustaleniu głównych podstaw pomiaru, lub według utartego zwrotu: „od ogółu idziemy do szczegółów", nigdy zaś odwrotnie. To też stosowanie przy pomiarach tej zasady wyraża się w ten sposób, że udzielamy znacznie więcej uwagi tym metodom, na zasadzie których otrzymujemy szereg głównych punktów w terenie, możliwie ściśle określonych, a następnie na ich podstawie przechodzimy do pomiaru szczegółów.

Do metod, na zasadzie których określamy główne punkty w terenie, należą triangulacja i poligonizacja, do metod zaś, używanych dla wyznaczenia punktów i linij szczegółowych, należą metody: spółrzędnych biegunowych, spółrzędnych prostokątnych i wcięć linjowych lub kątowych.

Rozpatrzmy je w ogólnych zarysach.

a) Triangulacja jest metodą, polegającą na ułożeniu w terenie szeregu trójkątów o wspólnych bokach, oraz na określeniu długości tych boków i położenia wierzchołków △-ów. Wielkość boków △-ów waha się od 1 *km* do kilkudziesięciu; w historji geodezji spotykamy prace, w których były wypadki stosowania △-ów o bokach kilkusetkilometrowych.



Rys. 28.

Dla potrzeb geodezji niższej wystarczają w zupełności boki od jednego do ośmiu kilometrów. Ponieważ bezpośredni pomiar długości takich boków byłby uciążliwy, kosztowny i nie zawsze możliwy, przeto zwykle ograniczamy się do pomiaru długości jednego boku, oraz wszystkich kątów. Pomierzony bok *b* nazywamy bazą triangulacji.

Baza wymierzona zostaje bardzo dokładnie; również wielkości kątów 1, 2, 3 ..... 10, 11, 12 określamy możliwie najściślej.

Długość pozostałych boków otrzymujemy z rachunku:

$$AB = b \qquad BC = b\frac{\sin 1}{\sin 3} \qquad CD = BC\frac{\sin 5}{\sin 6} = b\frac{\sin 1}{\sin 3}\frac{\sin 5}{\sin 6}$$

$$AC = b\frac{\sin 2}{\sin 3} \qquad BD = BC\frac{\sin 4}{\sin 6} = b\frac{\sin 1}{\sin 3}\frac{\sin 4}{\sin 6} \qquad \text{i t. d.}$$

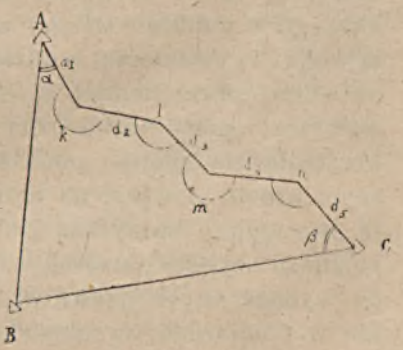
Gdy ponadto określony jest azymut bazy lub jednego z boków, wówczas, po obliczeniu (zapomocą kątów w poszczególnych △-ach) azymutów pozostałych boków, z długości boków i azymutów przechodzimy do obliczenia spółrzędnych wierzchołków △-ów.

Przy pomiarach małych obszarów niekiedy stosowany jest bezpośredni pomiar wszystkich boków △-ów; w tym wypadku kąty nie są mierzone; sama zaś metoda nosi wówczas nazwę trójkątowania linjowego.

Punkty $A\ B\ C$ i t. d., wyznaczone z triangulacji, noszą nazwę punktów trygonometrycznych.

b) Poligonizacja (wielokątowanie) jest metodą, polegającą na pomiarze długości boków i wielkości kątów linji łamanej, założonej w terenie a zwanej poligonem.

Jeżeli poligon rozpoczyna się i kończy w punkcie triangulacyjnym, wówczas poligon taki nazywamy poligonem, nawiązanym do punktów trygonometrycznych. Z pomiaru otrzymujemy długości wszystkich boków d_1 d_2 ..... poligonu, wielkości kątów k, l, m, n, oraz pierwszego kąta α i ostatniego β, zwanych kątami nawiązania do boków triangulacji, lub kątami łącznikowemi. Te dwa kąty wyznaczają położenie boków poligonu, mających swój początek w punktach trygonometrycznych, w stosunku do boków triangulacji, a więc orjentują poligon (przez zorjentowanie prostej rozumiemy określenie jej położenia w stosunku bądź to już do stron świata, bądź to do innych prostych, których położenie jest uważane za znane).

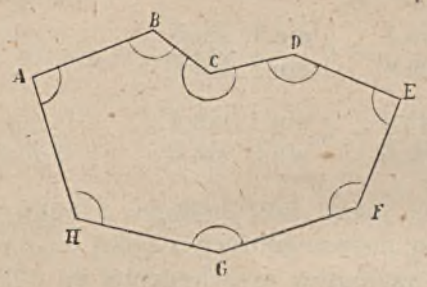


Rys. 29.

Obliczenie azymutów boków poligonu z azymutu prostej $A\ B$, kąta α i t. d., oraz obliczenie przyrostów spółrzędnych tych boków dają możność obliczenia spółrzędnych p. B, otrzymanych z triangulacji. W ten sposób uzyskujemy kontrolę prawidłowości pomiaru i obliczeń.

W braku punktów trygonometrycznych — kontrolę dla poligonów uzyskujemy w inny sposób. Przeważna część poligonów, z któremi mamy do czynienia w praktyce pomiarowej w wypadku mniejszych obszarów, należy do poligonów zamkniętych. W poligonach tych mierzymy również wszystkie boki i kąty. Wyobraźmy sobie wykreślony plan takiego poligonu. Kreśląc dowolnie kierunek $A\ B$, odcinamy od punktu a, obranego

na tym kierunku, odcinek *ab*, odpowiadający w skali planu odcinkowi *AB* w terenie. Otrzymujemy p. *b*, przy którym z odpowiedniej strony prostej *ba* budujemy kąt *B*, na drugiem zaś jego ramieniu odcinamy wielkość *bc*, odpowiadającą w skali rysunku długości *BC* w terenie. Postępując w ten sposób dalej, otrzymamy wreszcie p. *H* i, po wykreśleniu prostej *ha*, powinniśmy otrzymać zamknięcie poligonu w tym samym punkcie *a*, co wszakże nie nastąpi, wskutek wpływu nieuniknionych błędów pomiaru i wykreślenia boków i kątów. Otrzymana rozbieżność, zwana odchyłką, ma jednak pewne granice, których przekraczać nie powinna; skoro więc otrzymana odchyłka nie przekroczy przepisanych granic, uważamy, że pomiar i wykreślenie zostały wykonane prawidłowo.

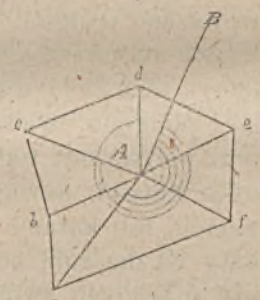


Rys. 30.

Punkty poligonowe dają podstawę dla wykonywania pomiarów szczegółowych.

c) Metoda spółrzędnych biegunowych.

Wyobraźmy sobie, że przy punkcie *A* poprzedniego poligonu znajduje się pewna linja sytuacyjna (granica użytku, np., roli i łąki) *abcdef*. Jeżeli *AB* obierzemy za oś biegunową, p. *A* za biegun i wyznaczymy położenie każdego z punktów *abcdef* zapomocą kąta kierunkowego i promienia wodzącego, a więc, np., p. *a* określimy przez pomiar $\sphericalangle BAa$ i długość *Aa* i t. d., wówczas mamy dostateczną ilość danych do wykreślenia na planie punktów *abcdef*, skoro tylko sama prosta *AB* jest na nim wykreślona. Metoda ta szczególnie korzystną jest wówczas, gdy mamy możność szybko określać odległości od bieguna *A* do wyznaczonych punktów; ma wielkie zastosowanie w pomiarach wysokościowych, mianowicie przy tachymetrji, jakkolwiek nie daje innej kontroli, prócz co najwyżej podwójnego pomiaru kątów kierunkowych i odległości.



Rys. 30 a.

d) Metoda spółrzędnych prostokątnych (t. zw. „sposób domiarów“).

Jeżeli w bezpośredniej bliskości boku poligonu, np. *BC*, biegnie linja sytuacyjna, np. bliższy brzeg rzeki, wówczas punkty określanej krzywej mogą być wzięte z domiarów od prostej *BC*, traktowanej jako oś odciętych; tak więc początkowo obieramy na krzywej punkty 1, 2, 3, 4, dzielące krzywą na odcinki, prawie nieróżniące się od prostych, i, odnajdując na osi odciętych *BC* spodki prostopadłych, spuszczonych na nią z punktów 2

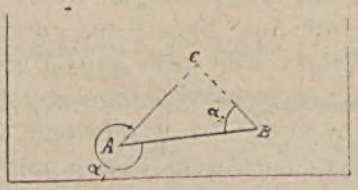


Rys. 31.

i 3, mierzymy w terenie odległości od punktu *B* na odciętej do otrzymanych spodków, określając jednocześnie długości samych rzędnych, t. j. prostopadłych *B*1, *k*2, *l*3, *C*4. Zrozumiałem jest, że metoda ta może być dogodną jedynie wówczas, gdy mamy odpowiedni przyrząd dla szybkiego budowania (tyczenia) w terenie kąta prostego. Przeniesienie na plan wyników pomiaru nie przedstawia trudności.

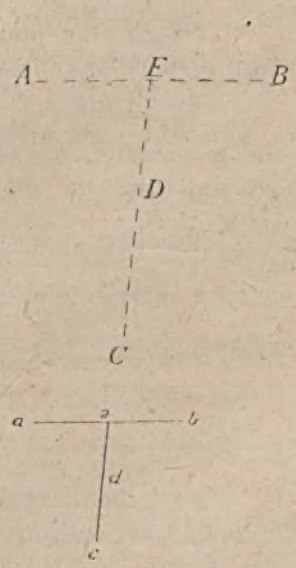
e) Metoda wcięć.

Wyobraźmy sobie, że określamy położenie punktu *C* w stosunku do danej prostej *AB*. Jeżeli prostą *AB* przyjmiemy za oś biegunową, i, przyjmując p. *A* za biegun, określimy tylko kąt kierunkowy $\alpha_1 = BAC$ (względnie jego dopełnienie do 360°, t. j. kąt *CAB*), a następnie na tej samej osi biegunowej jako biegun obierzemy p. *B* i znów określimy tylko kąt kierunkowy α_2, wówczas z rozwiązania bądź graficznego, bądź analitycznego, Δ-a *CAB* określimy p. *C*.



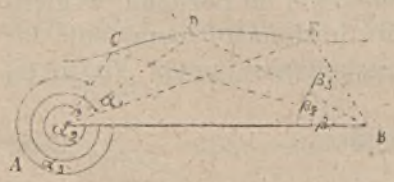
Rys. 32.

Podobnie możemy określać położenie pewnej krzywej *CDE*, po rozbiciu jej przez punkty *C D* i *E* na części, bardzo nieznacznie odchylające się od odcinków prostych, łączących te punkty. Tak więc w punkcie *A* określimy kąty kierunkowe $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ (względnie ich dopełnienia do 360°), zaś w punkcie *B* kąty kierunkowe $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$. Otrzymamy więc możność określenia p. *C* graficznie lub analitycznie z △-a *CAB*, p. *D* z Δ-a *DAB* i p. *E* z △-a *EAB*. Tego rodzaju wcięcie będzie wcięciem kątowem. Wcięcie linjowe oparte jest wyłącznie o pomiary długości. Obierzmy punkty *ABC* w terenie, których położenie na planie jest również wyznaczone. Należy określić położenie p. *D* tak w terenie, jak i na planie. Wystarczy w terenie przedłużyć prostą *CD* do przecięcia się z prostą *AB* w punkcie *E*, odmierzyć długość *AE* i *ED* — zagadnienie zostanie rozwiązane; bowiem na planie, w jego skali, na prostej *a b* naniesiemy z długości *ae* punkt *e*, wykreślimy prostą *ec* i na niej od punktu *e* odetniemy odcinek *ed*, co da położenie punktu *d* na planie. Dla skontrolowania prawidłowości postępowania mierzy się w polu jeszcze i długość DC— która powinna odpowiadać odcinkowi *dc* na planie, oraz *EB* (aby sprawdzić, czy niema błędu w *AE*), dla porównania sumy $AE + EB$ z daną długością *AB*.



Rys. 34.

Rozpatrzenie metod pomiarowych daje pewne wyobrażenie o zespole czynności, z któremi mamy do czynienia przy pomiarach.



Rys. 33.

Więc przedewszystkiem, gdy chodzi o zmierzenie odległości między dwoma punktami, lub pomierzenie kąta w danym punkcie — należy mieć te punkty w taki sposób utrwalone w terenie, aby i odnalezienie ich było łatwem, i wszelka dowolność w uznaniu za właściwy nie danego, a innego, obok — chociażby bardzo blisko — położonego punktu, była wykluczona. Sprawa należytego utrwalania punktów w terenie, a następnie sprawa ich ochrony, jest bardzo ważną, jeżeli zważymy na okoliczność, że prawie wszystkie plany, istniejące na ziemiach b. zaboru rosyjskiego, częściowo lub zupełnie straciły swą wartość, gdyż główne punkty pomiarowe, t. zw. znaki miernicze, jak kopce i t. p., na których cały pomiar był oparty, w terenie nie były konserwowane i w znacznej większości uległy zniszczeniu. Należy więc przy pomiarach wszystkie punkty, mające zasadniczą dla pomiaru wartość, utrwalać (stabilizować) tak, by mogły przetrwać przez dłuższy czas i by wznowienie ich nawet po usunięciu z właściwego miejsca było możliwem. Dla punktów wyjątkowo ważnych winien być sporządzany nawet ścisły opis wyglądu i położenia, zwany opisem topograficznym, na zasadzie którego, bez uciekania się do innych środków, punkty te możnaby z łatwością odnajdywać, względnie wznawiać.

Właściwe zaś pomiary w terenie sprowadzają się do:

1) pomiaru długości prostych i ich pochylenia do poziomu, względnie do bezpośredniego pomiaru rzutu poziomego danej linji, leżącej w pionowej płaszczyźnie, przechodzącej przez końce tej linji,
2) pomiaru kątów poziomych i pionowych,
3) tyczenia kątów prostych,
4) pomiaru azymutu jednego lub kilku boków.

§ 18. Skale i podziałki.

Skalą albo podziałką liczbową planu nazywamy stosunek długości dowolnego odcinka planu do długości rzutu tego samego odcinka w terenie.

Jeżeli przez L oznaczymy długość rzutu poziomego pewnego odcinka w terenie, zaś przez l oznaczymy odpowiadającą mu długość obrazu danego odcinka na planie, wówczas podziałka liczbowa $= \frac{l}{L}$.

Zwykle skala wypisuje się w postaci ułamka o liczniku, równym jedności; mianowicie, oznaczając $\frac{L}{l} = N$,

otrzymamy

$$\frac{l}{L} = \frac{1}{\frac{L}{l}} = \frac{1}{N}.$$

Przy pomiarach o wielkiej liczbie szczegółów (miasta) N wynosi 250, 500, 1000; w innych pracach pomiarowych N wynosi 2 000, 2 500, 4 000, 5 000, 10 000, 25 000. Dla map N wynosi 100 000, 200 000, 250 000, 300 000, 500 000 i t. d.

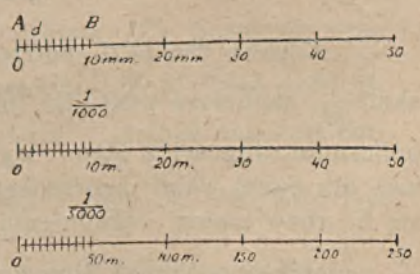
Oczywiście, im więcej szczegółów ma zawierać plan lub mapa, tem N musi być mniejszem, a więc skala $\frac{1}{N}$ jest większą, i odwrotnie. Wielkość skali jest tedy wyrażona przez ułamek $\frac{1}{N}$, a nie przez mianownik N. Mówimy więc, że skala $\frac{1}{5000}$ jest większą od skali, np. $\frac{1}{25000}$.

Na planach i mapach, pozostałych po rosyjskich i austrjackich pomiarach, spotykamy często skale w postaci ułamków typu $\frac{1}{2880}$, $\frac{1}{8400}$, $\frac{1}{126000}$ i t. p. Pochodzenie tych skal jest następujące: w ułamku $\frac{1}{N}$ jedność i N wyrażały różne, lecz okrągłe jednostki; jeżeli tedy na planie austrjackiego pochodzenia podana była skala $\frac{1}{2880}$, znaczyło to, że licznik = 1 calowi, zaś mianownik $N = 40$ klafterom (cal na planie = 40 klafterom w terenie); ponieważ 1 klafter = 6 stóp = 72 cali, więc 40 klafterów = 2880 cali; stąd stosunek $\frac{1}{N} = \frac{1}{2880}$; kiedy na planie rosyjskim spotkaliśmy skalę $\frac{1}{4200}$, znaczyło to, że 1 calowi na planie odpowiadało 50 sażeni w rzucie poziomym, gdyż 1 sażeń = 7 stóp = 84 cali, więc 50 sażeni = 4200 cali; podobnie skala $\frac{1}{8400}$ dawała stosunek 1 cala na planie do 100 sażeni w poziomie; skala $\frac{1}{126000}$ odpowiadała stosunkowi 1 cala do 1500 sażeni, czyli 1 cala do 3 wiorst, i t. p.

§ 19. Podziałki linjowe.

Podziałką linjową nazywamy odcinek prostej, podzielony na równe części. Każda część l podziałki odpowiada w danej skali $\frac{1}{N}$ długości poziomego odcinka Nl.

Części podziałki opisują się albo w jednostkach długości d, albo z uwzględnieniem skali $\frac{1}{N}$, t. j. każdy odcinek d podziałki opisujemy jako $D = Nd$, często zmieniając jednostkę długości, np.: podziałka pierwsza opisana jest w milimetrach; jeżeli tę podziałkę używamy dla planów, wykonywanych w skali $\frac{1}{1000}$, to zamiast pisać 10 *mm.*, 20 *mm.* i t. d. piszemy 10 *mm* $\times$ 1000 = 10 *m.*; 20 *mm* $\times$ 1000 = 20 *m.* Dla skali $\frac{1}{5000}$ końce centymetrów podziałki oznaczone będą przez 50 *m.*, 100 *m.* i t. d.



Rys. 35.

Za podstawę podziałki linjowej, t. j. za odcinek AB, z którego tworzymy podziałkę, obieramy rzeczywiste jednostki długości, jak 1 *cm.*, 1 *cal* i t. p., albo też podstawę podziałki obliczamy, a to w tym wypadku, gdy podstawa ma ściśle odpowiadać pewnej długości w poziomie, zgóry określonej, jak np. 50 *m.*, 100 *m.*, 50 *pr.*

Załóżmy np., że podstawa podziałki linjowej ma odpowiać 50 *m.* w poziomie dla skali $\frac{1}{2500}$, wówczas długość podstawy będzie równą

$$d = \frac{D}{N} = \frac{50\ m.}{2500} = 2\ cm.$$

Jeżeli następnie otrzymaną podstawę $d = 2$ *cm.* podzielimy na 10 równych części, wówczas każda z tych części odpowiadać będzie 5 *m.* w poziomie.

Podobnie dla rosyjskiej podziałki, odpowiadającej skali $\frac{1}{8400}$, za podstawę przyjęto 100 sażeni = 8400 calom; stąd długość podstawy

$$d = \frac{D}{N} = \frac{8400}{8400} cali = 1\ cal.$$

Jak widzimy, podziałki linjowe tworzą się na zasadzie wzoru

$$d = \frac{D}{N}$$

tak więc, mając w tym wzorze dwie wielkości dane, obliczyć możemy trzecią z jednego z trzech wzorów:

$$d = \frac{D}{N} \qquad D = Nd \qquad N = \frac{D}{d}$$

co odpowiada rozwiązaniu trzech zagadnień:

1) mając długość w poziomie, odpowiadającą podstawie w skali $\frac{1}{N}$, obliczyć długość podstawy, 2) z długości podstawy i skali obliczyć długość, odpowiadającą podstawie w poziomie i 3) z długości w poziomie i długości podstawy, określić skalę podziałki linjowej.

§ 20. Zamiana skal.

Często zachodzi potrzeba określenia odległości z planu, o danej skali $\frac{1}{M}$, zapomocą podziałki linjowej, odpowiadającej skali $\frac{1}{N}$. Ponieważ odliczanie długości z planu wykonywa się najdokładniej z podziałki linjowej, dla danej skali sporządzonej, przeto zagadnienie powyższe sprowadza się do rozwiązania zagadnienia o zbudowaniu podziałki linjowej o skali $\frac{1}{M}$ zapomocą podziałki linjowej $\frac{1}{N}$.

Rozpatrzmy uprzednio prostszy przyład, a mianowicie:

Wykreślić podziałkę linjową metryczną dla skali $\frac{1}{8400}$.

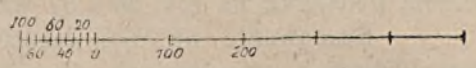
Wielkość podstawy nie jest dana, lecz aby była dogodną, powinna odpowiadać pewnej okrągłej liczbie, w danym razie metrów, gdyż mamy zastrzeżenie, że podziałka ma być metryczną.

Podstawa zwykle bywa dzielona na 10 części — a więc za podstawę może być przyjęty *cm.* jako wielkość, dająca się dokładnie podzielić na wyraźne równe części; 1 *cm.*, wykreślony w skali $\frac{1}{8400}$, odpowiada 8400 *cm.* w rzucie poziomym, t. j. 84 *m.* Najbliższą okrągłą liczbą jest 100 *m.* które przyjmujemy za długość, odpowiadającą podstawie; zaś *d* długość samej podstawy otrzymamy ze wzoru

$$d = \frac{D}{N} = \frac{100\ m.}{8400} = \frac{10000\ cm.}{8400} = 1.19\ cm.$$

Ze sprawdzonej podziałki kilkakrotnie odcinamy po 1.19 *cm.*

Początek 1-ego odcinka opisujemy liczbą 100 *m.* koniec — 0 *m.* i dany odcinek dzielimy na 10 części. W prawo od zera na końcu każdych odciętych 1.19 *cm.*—wypisujemy kolejno u dołu liczby 100, 200 i t. d.



Rys. 36.

Przejdźmy teraz do zasadniczego zagadnienia:

Wykreślić podziałkę linjową $\frac{1}{M}$, mając podziałkę $\frac{1}{N}$.

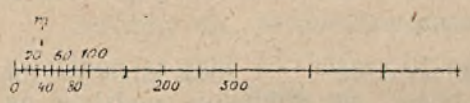
Przypuśćmy, że długością, odpowiadającą podstawie podziałki $\frac{1}{M}$, jest *D*. Wówczas długość samej podstawy wyniesie $d = \frac{D}{M}$, zaś w skali $\frac{1}{N}$ długość *d* odpowiada wielkości *Nd;* z podziałki linjowej $\frac{1}{N}$ odcinamy na rysunku wielkość *Nd,* jako szukaną podstawę.

Przykład:

Mając metryczną podziałkę 1:500, wykreślić prętową $\frac{1}{2000}$; 1 *cm.* podziałki $\frac{1}{2000}$ odpowiada 20 *m.*, a więc około 5 prętom. Za podstawę więc budowanej podziałki przyjmujemy 5 *pr.*, co równa się 21.60 *m.* Lecz 21.60 *m.* w podziałce 1:2000 wyniesie $\frac{21.60\ cm.}{2000} = 1.08\ cm.$ Odcinek zaś 1.08 *cm.* odczytujemy z podziałki $\frac{1}{500}$ jako $1.08\ cm. \times 500 = 5.40\ m.$ Ten więc odcinek, wzięty z podziałki $\frac{1}{500}$, odetniemy, jako podstawę nowej podziałki $\frac{1}{2000}$.

§ 21. Użycie podziałek.

Użycie podziałki linjowej polega na ułożeniu na danej prostej podziałki w taki sposób, aby jedna z kresek, oznaczonych okrągłą liczbą, była przyłożona do końca mierzonego odcinka, a mianowicie ta kreska, przy użyciu której pierwsza, podzielona na drobne części, podstawa podziałki, wypadnie nad początkiem mierzonego odcinka.



Rys. 37.

Podziałka na rysunku 36 jest praktyczniejszą w użyciu, niż podziałka na rysunku 37, z tego względu, że pierwsza podziałka daje odległość z bezpośredniego odczytu, podczas gdy na drugiej część pierwszej podstawy odczytuje się nie bezpośrednio, a jako dopełnienie do odczytu całej podstawy. Części pierwszej podstawy można szacować dokładniej niż to podaje sam podział, ustalając na oko stosunek przedziału między kreską 30, a punktem m do przedziału 30 — 40. Tak więc bezpośredni odczyt, odpowiadający punktowi m na rys. 37, oszacować możemy na 33.

Najmniejszy odstęp między kreskami na podziałce nazywamy wartością podziałki; na rys. 36 i 37 wartością podziałki jest 10.

Szacowanie na oko części wartości podziałki stosuje się albo przy przybliżonych określeniach długości, albo też wtedy, gdy plan, z którego korzystamy, jest wykreślony w bardzo wielkiej skali, np. 1 : 100.

Dla skali 1 : 500 i mniejszych, szacowanie na oko daje zbyt małą dokładność; z tego względu należałoby dążyć do zmniejszenia wartości podziałki do praktycznie osiąganego minimum. Jednakże rzadko kiedy możemy spotkać podział na części równe $\frac{1}{2}$ *mm*, gdyż użycie takiej podziałki zbyt nuży oko. Z tego względu stosujemy w praktyce typ podziałek poprzecznych, zwanych również transwersalnemi.

Podziałki te są wykreślone na tekturze, albo też nacięte na drzewie, lub metalu. Długość tych podziałek wynosi 15, 20, 25 *cm.* lub 50, 100 *cm.* dla dłuższych odcinków. Metalowe podziałki sporządzają się z mosiądzu, przytem sama podziałka nacina się przy temperaturze około 20°, gdyż przy użyciu, wskutek trzymania w ręku, podziałka metalowa rzeczywiście podlega działaniu temperatury bliskiej 20°. Spółczynnik rozszerzalności takiej podziałki wynosi około 0.00002.

§ 22. Podziałki poprzeczne (transwersale).

Wyobraźmy sobie, że wykreśliliśmy podziałkę linjową zwykłą $A\ O\ B\ C$ i z końców każdej podstawy, a więc A, O B i C wystawiliśmy prostopadłe, na których odcieliśmy dowolną, ale tę samą długość $AA_1 = OO_1 = BB_1 = CC_1$. Każdy odcinek — a właściwie skrajne odcinki AA_1 i CC_1 — dzielimy



Rys. 38.

na n części i otrzymane punkty podziału połączymy prostemi, równoległemi do AC. Podstawę podziałki AO, oraz odcinek A_1O_1, dzielimy na m części: otrzymane punkty podziału $oabcd$ i $a_1\ b_1\ c_1\ d_1\ A_1$ łączymy prostemi $a_1\ O, b_1\ a, c_1\ b, d_1\ c, A_1\ d$. Oznaczmy długość podstawy przez l; wówczas $aO = ab = bc = cd = de = O_1a_1 = a_1\ b_1 = b_1\ c_1 = c_1\ d_1 = d_1\ A_1 = \frac{l}{m}$. Ponieważ AA_1 i CC_1, a więc i OO_1, zostały podzielone na n równych części,

przeto:

$$Ok_1 = k_1\ p_1 = p_1\ r_1 = r_1\ s_1 = s_1\ O_1$$

Rozpatrzmy prostokątne

$$\triangle\text{-y}\ Okk_1 \text{ i } Oa_1\ O_1$$

kąt O jest wspólny, więc $\triangle$-y są podobne.

Mamy

$$\frac{kk_1}{a_1\ O_1} = \frac{Ok_1}{O\ O_1}$$

lecz

$$\frac{Ok_1}{O\ O_1} = \frac{1}{n}$$

więc

$$kk_1 = a_1\ O_1\ .\ \frac{1}{n} = \frac{l}{mn}$$

podobnie z $\triangle$-a Opp_1 i Oa_1O_1 mamy $pp_1 = a_1\ O_1.\ \frac{2}{n} = 2\ \frac{l}{mn}$

z $\triangle$-a Orr_1 i $Oa_1\ O_1$ mamy $rr_1 = 3\ \frac{l}{mn}$ i t. d.

Następnie: wszystkie odcinki prostych $\|$ do podstawy, zawarte wewnątrz równoległoboku typu abc_1b_1, są równe. Jeżeli oznaczymy $kk_1 = w$, wówczas

$$pp_1 = 2w$$
$$rr_1 = 3w$$
$$ss_1 = 4w.$$

Długość odcinków $\|$-ych do kk_1, a zawartych między OO_1 i Oa_1, możemy określić na oko, np. $łł = ss, + 0.8\ w$.

Wartością podziałki poprzecznej nazywamy ten najmniejszy odcinek $kk_1 = w$ podziałki, który może być na podziałce odczytany bezpośrednio, bez szacowania na oko. Ponieważ nieuzbrojonem okiem możemy odróżnić jeszcze odcinki długości $\frac{1}{10}$ $mm.$, dalej zaś posunięte rozdrabianie podziałki poprzecznej chybia celu, przeto rzadko kiedy wartość podziałki poprzecznej jest mniejszą od 0.1 mm.

Przypuśćmy, że nasza podziałka poprzeczna odpowiada miarom

metrycznym i że długość podstawy wynosi 1 *cm.*; ponieważ $m = 5$, $n = 5$, $mn = 25$, więc wartość podziałki $w = \frac{l}{mn} = \frac{1\ cm.}{25} = 0.4\ mm.$

Zwykle na podziałkach poprzecznych podana jest skala i opis podstaw i części drobniejszych, umieszczony pod dolną linją AC, odpowiadający długości w terenie.

Przypuśćmy, że pewną długość, wziętą cyrklem z planu, chcemy określić zapomocą poprzecznej podziałki, odpowiadającej skali 1:1000.

Długość podstawy podziałki $l = 1\ cm.$ opisana jest jako $L = 1000\ l$, a więc $L = 10\ m.$, drobne części podziałki opisane są liczbami 2, 4, 6, 8, końce podstaw od lewej do prawej ręki — liczbami 10, 0, 10 20; obok prostej AA_1, przy odpowiednich poziomach prostych, opisują się długości odcinków kk_1, pp_1, rr_1 i ss_1 w danym wypadku jako:

$$0{,}4 = kk_1$$
$$0{,}8 = 2\ kk_1 = pp_1 \qquad \text{i t. d.}$$

Wziętą cyrklem określoną długość przenosimy na podziałkę w taki sposób, by w czasie, gdy jedno ostrze cyrkla znajdzie się na końcu jednej z podstaw, np. w p. C, drugie znalazło się na pierwszej podstawie, np. w p. z. Następnie przesuwamy cały cyrkiel w taki sposób, że ostrza jego przesuwają się 11-e do podstawy, jedno po CC_1, do czasu, gdy drugie napotka prostą ukośną do podstawy, w danym przypadku bc_1. w punkcie Z_1. Odcinek TZ równy odległości między ostrzami cyrkla, daje określaną długość, równą:

$$TZ = Tp'_1 + Zp' + p'\,p'_1$$

Odcinek Tp'_1 czytamy jako $OC = 20$; odcinek Zp' czytamy jako $Ob = 4$, zaś długość $p_1 p'_1$ jest zawarta między pp_1 i rr_1, miary których mamy wypisane przy AA, jako 0.8 i 1.2, Szacując na oko odcinek $p'_1\ p_1$, otrzymujemy

$$p'_1 p' = pp_1 + 0.7\ w = 0.8 + 0.3 = 1.1.$$

z dokładnością do 0.05,

W ten sposób

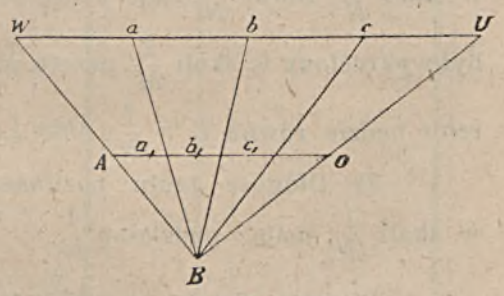
$$TZ = 20 + 4 + 1{,}1 = 25{,}1$$

Odczytywanie więc odległości idzie w tej samej kolejności, w której następują cyfry, opisujące podziałkę—więc dla danego przykładu: dziesiątki dają całe podstawy ($T\ p^1_1 = OC = 20$), następne całości liczymy na oko na zasadzie danych liczbowych, wypisanych przy A i AA_1, a odpowiadających odcinkom $Zp^1 = Ob$ i $p^1 p^1_1$, długość którego szacujemy na oko na zasadzie liczb przy AA_1.

Bardzo często stosujemy odwrotne postępowanie, gdy pewną długość w danej skali należy odciąć na planie. Tak więc przypuśćmy, że mamy tę samą długość 25,1 odciąć na pewnej prostej na planie. W tym celu odszukujemy liczbę parzystych jednostek (tak bowiem dzieloną mamy 1-ą podstawę) na OA w punkcie b (gdyż $Ob=4$) i na prostej bc_1 odszukujemy punkt, którego nota przy AA_1 wyniosłaby $5{,}1 - 4 = 1{,}1$, będzie to punkt Z.

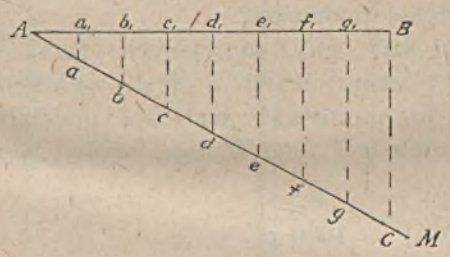
Odcinek $Zp'_1 = 5{,}1$. Gdy więc jedno ostrze cyrkla ustawimy w p. Z, to drugie ostrze ustawimy na podstawie, odleglej od OO_1 o całe 20 m., przytem obydwa ostrza leżeć mają $\parallel$-e do podstawy. Ostrza cyrkla wyznaczą więc odcinek ZT. Gdy teraz cyrkiel w niezmienionem położeniu przeniesiemy na plan, i, ustawiając jedno ostrze na początku odkładanego odcinka, drugiem ostrzem dokonamy ukłu ia na danej prostej, wówczas, jeżeli skala planu wynosi 1:1000, odległość między ukłuciami wyniesie 25,1 m.

Przy wykreślaniu podziałek na planach spotykamy się z pewną trudnością w dokładnym podziale podstawy i wysokości poprzecznej podziałki na kilka równych części Podziału tego należy dokonywać w sposób następujący: Na prostej WU $\parallel$-ej do podstawy AO odcinamy pewną długość S tyle (n) razy, na ile części ma być podzielona podstawa. Długość S obieramy dowolnie tak jednakże, aby $nS > AO$. Odcięcie n razy S daje odcinek WU. Kreśląc przedłużenie WA i UO, otrzymujemy punkt przecięcia B. Jeżeli teraz wykreślimy proste, łączące p. B z punktami a, b, c, prostej WU, to na prostej AO otrzymamy punkty a_1, b_1, c_1, dające podział podstawy AB na założoną ilość części.



Rys. 39.

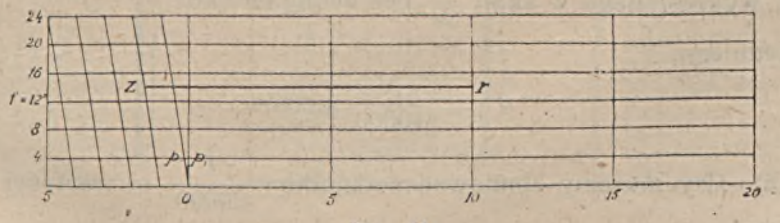
Do tego samego wyniku dojdziemy, gdy pod pewnym kątem do podstawy AB wykreślimy prostą AM, na której odetniemy n równych części. Ostatni punkt podziału C łączymy z końcem B podstawy. Przez punkty podziału $a\ b\ c\ d\ e\ f\ g$ prostej AC wykreślamy proste $\parallel$-e do BC, które, przecinając się z prostą AB, dają żądane punkty podziału $a_1\ b_1\ c_1 \ldots g_1$.



Rys. 40.

Najczęściej podstawa i wysokość transwersali jest dzielona na 5 lub 10 części.

Nieco bardziej są skomplikowane podziałki o niedziesiętnym podziale; przy stosowaniu takich podziałek bierzemy na podstawie jedne, a na linjach, do podstawy równoległych—inne miary. Rozpatrzmy taką podziałkę, zbudowaną dla cali i łokci, odpowiadającą pewnej skali. Podstawa wynosi 5 łokci, więc jedna część podstawy odpowiada łokciowi.



Rys. 41.

Jeżeli wysokość podziałki jest podzielona, np. na 6 części, to ponieważ 1 łokieć = 24 calom, przeto wartość podziałki wynosi $\frac{24}{6} = 4$ cale.

W ten sposób z podstawy brać będziemy łokcie, zaś z prostych ‖-ych łokcie i cale np. *zr* = 11 *ł.* 14 *cali.*

Zagadnienia. 1) Określić długość odcinka, wykreślonego w skali $\frac{1}{M}$ z podziałki $\frac{1}{N}$ Zapomocą cyrkla przenosimy odcinek na podziałkę $\frac{1}{N}$, na której odczytamy l jako miarę długości odcinka terenu, wykreślonego w skali $\frac{1}{N}$. Iloraz $\frac{l}{N}$ daje miarę odcinka na planie; ponieważ zaś odcinek był wykreślony w skali $\frac{1}{M}$, przeto długość rzutu poziomego odcinka w terenie będzie równa $L = \frac{l}{N} . M = l \frac{M}{N}$.

2) Długość rzutu poziomego prostej jest L; wykreślić ten odcinek w skali $\frac{1}{M}$, mając podziałkę $\frac{1}{N}$.

Długość odcinka na planie będzie $l = \frac{L}{M}$, wielkość tę więc weźmiemy cyrklem z podziałki $\frac{1}{N}$ jako

$$lN = L \frac{N}{M}$$

3) W jakiej skali należy kreślić plan, by najmniejszy uwzględniany przy pomiarze odcinek d odpowiadał wartości podziałki?

Wartość podziałki może być $\geqslant$ 0.1 *mm.*, gdyż mniejszych odcinków nie wykreślamy. Przyjmijmy, że w = 0,1 *mm.* Jeżeli d jest wyrażone w metrach, a więc wynosi 1000 d *mm.*, to, ponieważ wartości podziałki odpowiada ta właśnie liczba, przeto stosunek w i 1000 d daje skalę, więc

$$\frac{w}{1000\ d} = \frac{1}{N} \text{ lub } \frac{1}{N} = \frac{0{,}1}{1000\ d}$$

stąd $$N = 10\,000\ d$$

zatem, gdy d = 0.1 *m.*, plan wykreślimy w skali $\frac{0.1}{100} = \frac{1}{1000}$.

4) Jaką najmniejszą długość odczytać można zapomocą podziałki z planu, wykreślonego w skali $\frac{1}{N}$ bez oceny na oko?

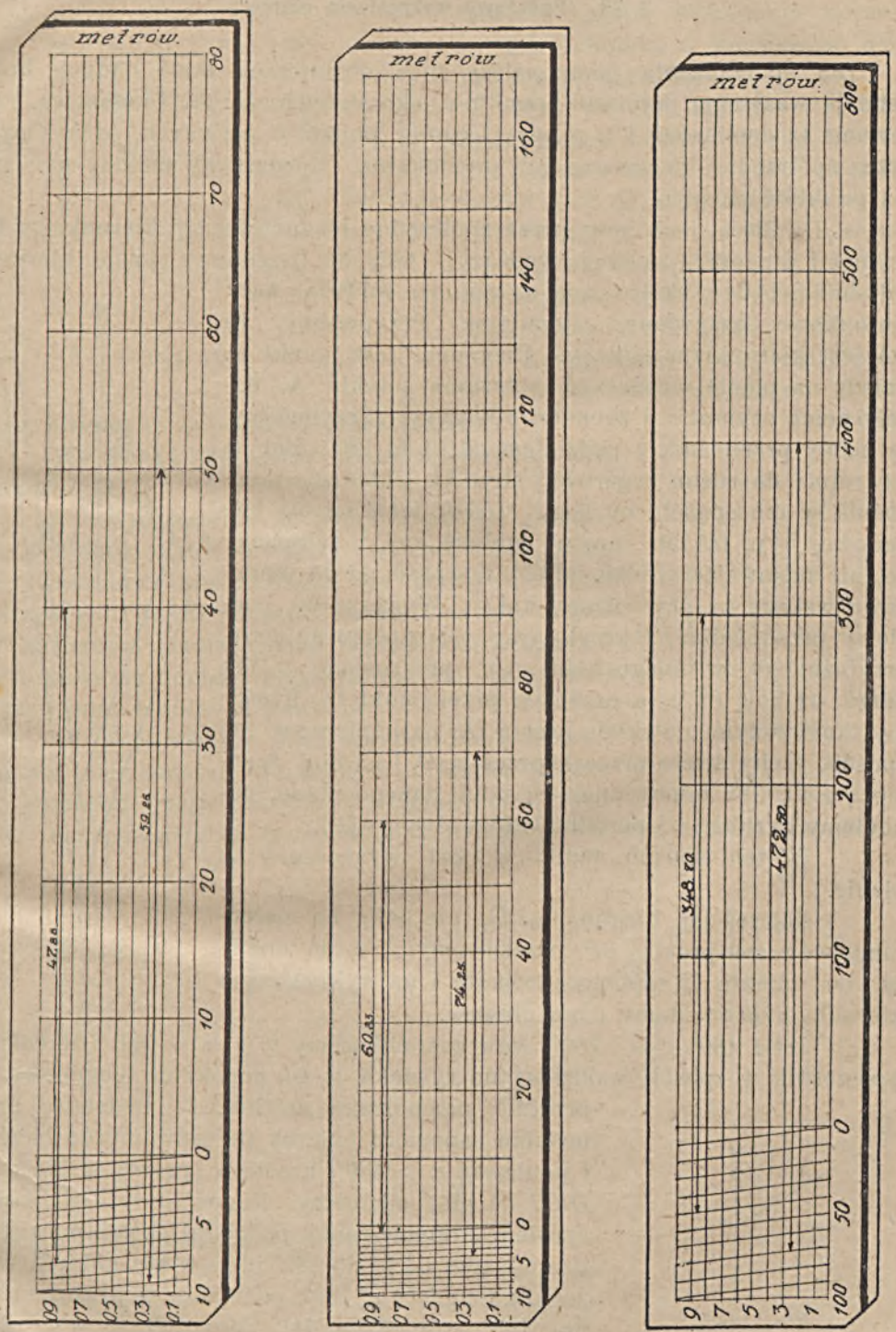
Z poprzedniego:

$$d = \frac{N}{10000} \text{ metrów.}$$

5) Czy możemy zbudować podziałkę $\frac{1}{20000}$ o wartości podziałki 0,5 *m.* ?

$$w = d = \frac{N}{10000} = 2\ m. > 0{,}5\ m.$$

co wskazuje, że takiej podziałki nie możemy zbudować.

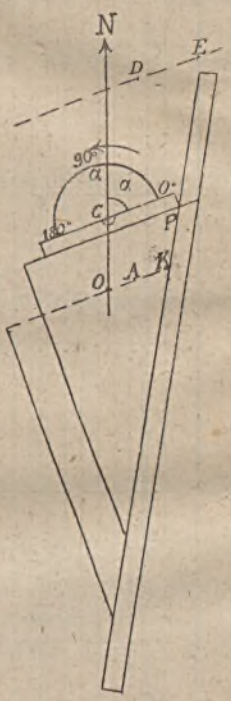


Lewa podziałka odpowiada skali 1:500; średnia — 1:1000; prawa— 1:4000. Podstawa lewej podziałki wynosi 2 *cm.*, średniej — 1 *cm.*, prawej — 2,5 *cm.* Na każdej podziałce oznaczone są dwa odcinki i ich długości.

§ 23. Podstawy wykreślenia planów.

Dla sporządzenia planu należy mieć dostateczną ilość danych, które ustalają wzajemne położenie punktów, określonych metodą biegunową, rzutowania (z domiarów) i t. p., oraz szereg punktów głównych, oznaczonych przez spółrzędne biegunowe, lub prostokątne. Rozpatrzmy metody nanoszenia punktów na plan.

I. Punkt jest dany przez spółrzędne biegunowe, kąt kierunkowy lub azymut i długość (promień wodzący). Gdy oś biegunowa kryje kierunek południka, będąc skierowana na północ, wówczas kąty kierunkowe nazywamy azymutami. Przypuśćmy, że ON jest kierunkiem północy. Biegunem jest punkt O. Należy na planie wyznaczyć położenie punktu A, danego przez azymut α i promień wodzący r. Przypuśćmy, że mamy przenośnik z podziałem od 0° do 180°, idącym odwrotnie do ruchu zegarowej strzałki. Układamy przenośnik w ten sposób, by jego środek leżał na osi biegunowej w p. C, lub innym punkcie osi, i obracamy go, nie odsuwając środka od osi, do czasu, aż oś biegunowa wskaże na przenośniku kąt α. Wówczas do podstawy przenośnika PP przyłożymy △ i zapomocą linjału, przyłożonego do innego boku △-a, przesuwamy △ tak długo, aż bok PP △-a przejdzie przez punkt O. Kreślimy zaostrzonym ołówkiem prostą OK na papierze w ten sposób, ażeby ściśle przeszła przez p. O, i na niej zapomocą podziałki, odpowiadającej skali danego planu, odkładamy cyrklem od punktu O długość $r = OA$.

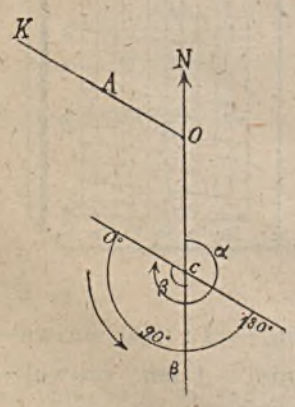


Rys. 42.

W ten sposób punkt A jest wyznaczony na planie.

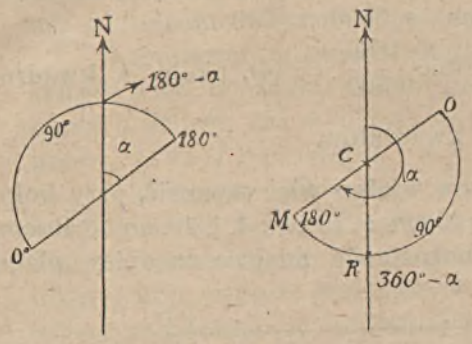
Najczęściej biegun, np. D, nie leży na południku; wówczas prostą BP przesuwamy ∥-e do siebie aż do punktu D zapomocą trójkąta i na wykreślonym kierunku DE odcinamy daną długość.

Jeżel $180^0 < \alpha < 360^0$, wówczas obliczamy $\beta = \alpha - 180^0$ i układamy przenośnik w sposób, wskazany na rysunku № 43, dopóki oś biegunowa nie przetnie przenośnika na łuku β. Podstawę przenośnika zapomocą ekierek przesuwamy do bieguna i ponieważ $\alpha > 180^0$, kreślimy prostą w kierunku OK i na niej odcinamy długość $r = OA$, wziętą cyrklem z odpowiedniej podziałki. Jeżeli podział na przenośniku od 0° do 180° idzie w kierunku strzałki zegara, to, gdy $\alpha < 180^0$, odcinamy w prawo od ON kąt $180^0 - \alpha$; (rys. 44) gdy $180^0 < \alpha < 360^0$, odcinamy w lewo od ON kąt $360^0 - \alpha$, gdyż: $\sphericalangle MCR = 180^0 - (360^0 - \alpha) = \alpha - 180^0$, zaś $\alpha = NCM = 180^0 + \sphericalangle MCR = 180^0 + \alpha - 180^0 = \alpha$. Jeżeli podział na przenośniku idzie od 0° na obydwu końcach podstawy przenośnika do 90° ku



Rys. 43.

środkowi, wówczas obliczamy t. zw. czwartaki, t. j. kąty mniejsze od 90°, zawarte między kierunkami północy, lub południa, a kierunkiem danej prostej (rys. 45).



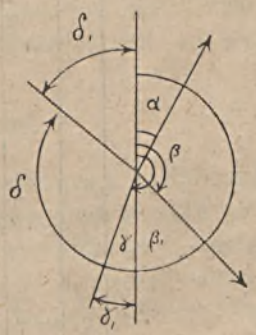
Rys. 44.

Tak więc dla azymutu $\alpha < 90^0$ czwartakiem będzie ten sam kąt α, dla azymutu $90^0 < \beta < 180^0$—kąt $\beta_1 = 180^0 - \beta$, dla azymutu $270^0 > \gamma > 180^0$ — kąt $\gamma_1 = \gamma - 180^0$ i wreszcie dla azymutu $360^0 > \delta > 270^0$ czwartakiem jest $\delta_1 = 360^0 - \delta$. Wykreślmy je wszystkie (rys. 46).

Należy baczyć, aby odległość w każdym z 4-ch wypadków odkładać w kierunku, wskazanym przez strzałkę.

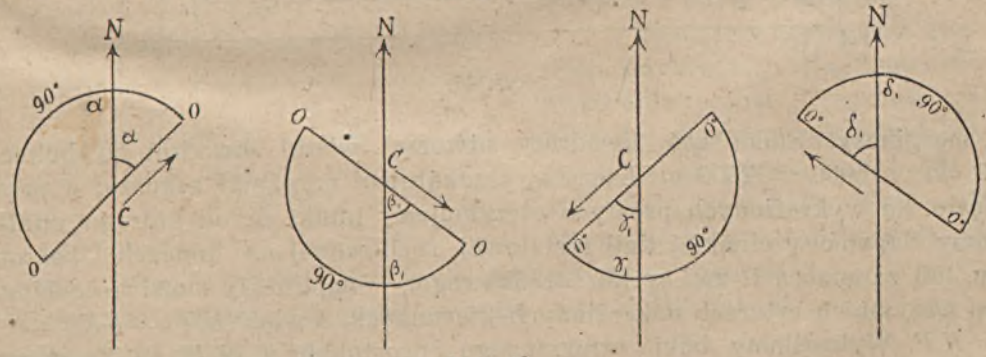
II. Punkt jest dany przez spółrzędne prostokątne.

Dla wyznaczenia na planie punktów ze spółrzędnych prostokątnych należy wykreślić na planie sieć kwadratów, obrać punkt dla początku układu spółrzędnych, jeżeli początek układu ma się znajdować na danym planie, opisać rzędne boków kwadratów i wówczas dopiero przystępować do nanoszenia na plan poszczególnych punktów.



Rys. 45.

a) Wykreślenie sieci kwadratów, o ile cały plan ma się zmieścić na jednym arkuszu, poprzedza wypisanie największych i najmniejszych rzędnych. Przypuśćmy, że ze spółrzędnych, danych dla wyznaczenia na planie



Rys. 46.

punktów, wybraliśmy następujące dane liczbowe:

$$\begin{array}{rl} & X_{max} = 1540.30 \\ & X_{min.} = -\ 320.60 \\ \hline d_x = & X_{max} - X_{min.} = 1860\ 90 \end{array}$$

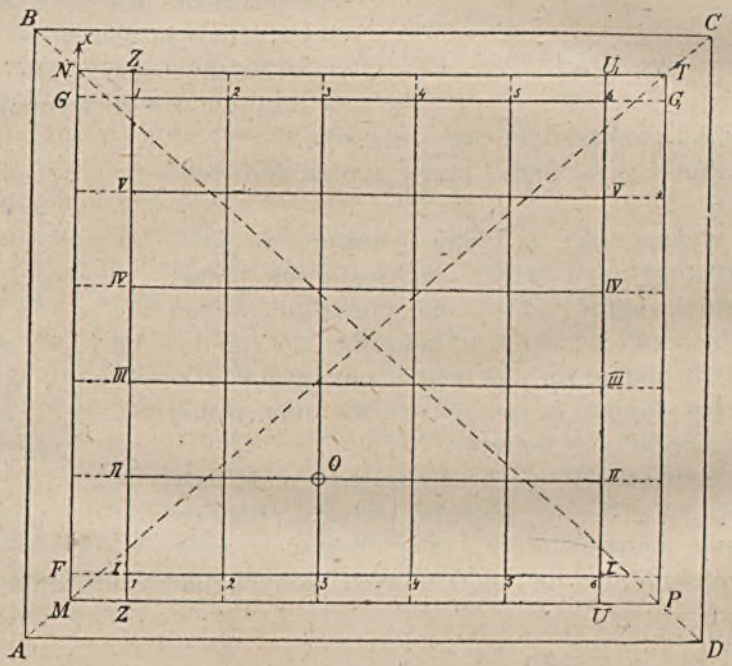
$$\begin{array}{rl} & Y_{max} = 1234.45 \\ & Y_{min.} = -\ 700.60 \\ \hline d_y = & Y_{max} - Y_{min.} = 1935.05 \end{array}$$

Przypuśćmy, że plan ma być wykreślony w skali 1 : 5000.

Ponieważ boki siatki kwadratów zwykle kreślimy 10-centymetrowe, więc przy podziałce 1 : 5000 mamy: 10 *cm* × 5000 = 500 *m*.

Wzdłuż osi *X* ma się więc umieścić $\frac{1860}{500}$ = (4), około 4 kwadratów, wzdłuż osi *Y* $\frac{1935}{500}$ = (4) około 4 kwadratów.

Wymiar arkuszy wykreślenia planu winien więc wynosić, przy boku kwadratu równym 10 *cm*, co najmniej 4 × 10 *cm* = 40 *cm*, t. j. 40 *cm* × 40 *cm*, a nawet 55 *cm* × 55 *cm*, gdyż należy pozostawić miejsce na opisy planu



Rys. 47.

i marginesy. Same zaś kwadraty utworzą wielki kwadrat o bokach 50 *cm* × 5000 = 2500 *m*. Łączymy przekątnemi narożniki arkusza; w przecięciu się wykreślonych prostych otrzymujemy punkt *K*, od którego odkładamy zapomocą cienkiej linji metalowej, cechowanej na końcach i pośrodku, lub zapomocą t. zw. cyrkla drążkowego, — najdłuższy możliwie odcinek we wszystkich czterech nakreślonych kierunkach, a więc *KM* = *KN* = *KT* = *KP*. Wykreślamy boki otrzymanego prostokąta *T N M P*. Zapomocą cyrkla drążkowego i długiej podziałki kontrolujemy boki przeciwległe, które winny być równe, o ile niema błędów w wykreśleniu. Tak więc winno być: *N T* = *M P* i *M N* = *PT*. Oś *X* skierowana jest ‖ do *M N*, t. j. ku górze arkusza. Jeżeli boki prostokąta wynoszą, np. *M P* = 2606 *m* i *M N* = 2780 *m*, to na marginesy odcinamy 1) $MZ = NZ_1 = TU_1 = PU = \frac{2606 - 2500}{2} = 26{,}5$ *m* i 2) $MF = PF_1 = NG = TG_1 = \frac{2780 - 2500}{2} = 140$ *m* z danej podziałki.

Sprawdzamy, czy boki $Z_1 U_1 = ZU = FG = F_1 G_1 = 2500$ *m*. Jeżeli błędu niema, wówczas na każdym boku odkładamy odcinki po 500 *m* w danej podziałce i otrzymane punkty łączymy prostemi $\parallel$-e do osi X i Y.

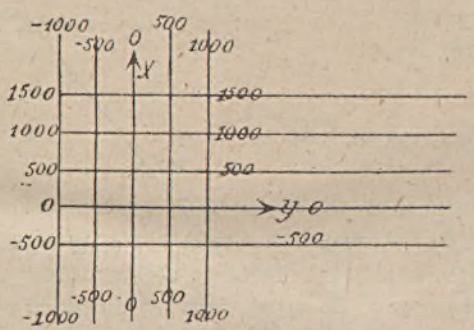
Ponieważ ujemne wielkości X i Y są $X\min = -320.80$ $Y\min = -700{,}60$, więc początek układu powinien leżeć powyżej prostej $F F_1$ co najmniej o 320 *m*, zaś w prawo od prostej $Z Z_1$ o co najmniej 700 *m*, czyli na prostej $II - II$ i prostej $3 - 3$.

W ten sposób mamy już sieć kwadratów o początku spółrzędnych w punkcie *O*. Sprawdzamy budowę sieci kwadratów przez porównywanie długości przekątnych, które powinny być równe, oraz przez przykładanie długiej linji wzdłuż przekątnych kwadratów; odpowiednie wierzchołki powinny znajdować się na jednej prostej.

Gdybyśmy byli związani wymiarami arkusza 45 *cm.* × 45 *cm.*, wówczas przed budową siatki kwadratów, a po wykreśleniu *M N T P*, obliczylibyśmy zapas na margines i odrazu kreślilibyśmy osie spółrzędnych, przechodzące przez początek układu *O*. Mianowicie, jeżeli np. $MP = 2100$ *m.*, więc lewy i prawy margines wyniósłby przy 4 kwadratach na linji Y

$$\frac{2100 - 2000}{2} = 50 \text{ m.}$$

Następnie, doliczając po osi Y 700 *m.* do początku spółrzędnych, otrzymalibyśmy 750 *m.*, które należy odciąć w prawo od punktu *M* i *N* na *MP* i *NT*, dla otrzymania osi X; oś Y zaś otrzymalibyśmy, odcinając na *M N* i *P T* odcinek, obliczony dla marginesu, więcej 320 *m.* Łącząc otrzymane punkty, otrzymamy oś *Y*. Dalsza budowa sieci dokona się przez odpowiednie odcinanie boków 500-metrowych z danej podziałki.



Rys. 48.

Następną czynnością jest opis sieci kwadratów. Na końcach sieci kwadratów od osi X w prawo, u góry i u dołu, opisujemy dodatnie 500, 1000 *m.* i t.d., w lewo zaś ujemne —500, —1000 *m.*, jest to opis *Y*-ów. Opis *X*-ów co 500 *m.* wykonywamy od dołu ku górze z lewej i prawej strony sieci kwadratów, ujemne wielkości poniżej, dodatnie powyżej osi *Y*. Oś X i Y opisujemy przez zera.

Wykreślenie dowolnego punktu o danych spółrzędnych wykonamy w następujący sposób: przypuśćmy, że dane są spółrzędne punktu $X = +625{,}40$, $Y = -124{,}30$. Stąd widzimy, że nasz punkt leży w drugim szeregu kwadratów ponad osią *Y*, gdyż

$$1000 > X = 625{,}40 > 500,$$

i w pierwszej kolumnie z lewej strony osi X, gdyż

$$-500 < Y = -124{,}30 < 0.$$



Rys. 49.

Odcinamy więc na bokach mm_1 i kk_1 odpowiedniego kwadratu odcinki

$$mu = ku_1 = 625{,}40 - 500 = 125{,}40 \ m.$$

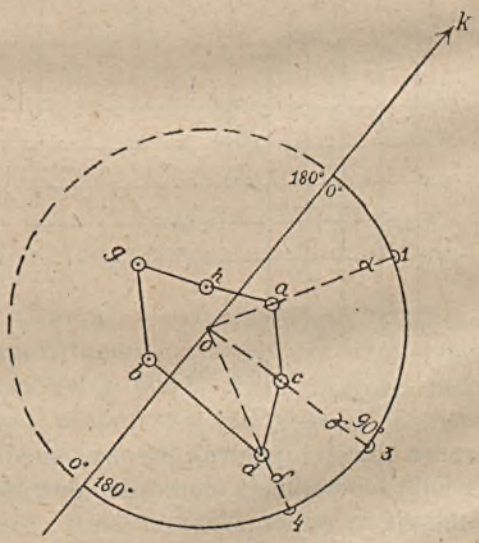
w danej podziałce i wykreślamy prostą uu_1; następnie od punktów k_1 i k na prostych $k_1 m_1$ i $k m$ odcinamy cyrklem wziętą z podziałki długość $k_1 r = kr = 124{,}30$.

Przykładamy linjał ściśle do punktów r i r_1 i kreślimy prostą rr_1. Szukany punkt leży w przecięciu się prostych uu i rr_1.

III. Rozpatrzmy metody wyznaczania na planach punktów szczegółowych.

Przypuśćmy, że przyjęto za oś biegunową pewną prostą w terenie i w odniesieniu do niej i bieguna określono kąty kierunkowe i długości promieni wodzących. Mając punkt, przyjęty za biegun, i oś biegunową na planie, wykreślić punkty, w ten sposób pomierzone. Zaznaczyć należy, że taka metoda pomiaru stosuje się przy zdjęciu punktów drugorzędnych, a więc leżących na linjach, oddzielających, np., użytki, granice których, nie będąc granicami poszczególnych własności, są ruchome, gdyż z biegiem czasu ulegają przesunięciu. Oczywiście wyznaczenie na planie takich punktów jest mniej ścisłe, niż wyznaczenie samego bieguna i kierunku osi biegunowej. Przypuśćmy, że pomierzono kąty α γ i t. d. między osią biegunową $O K$ i kierunkami do punktów A, C i t. d. oraz odległości a, c i t. d. od bieguna do tych punktów.

Mając przenośnik o podziale od 0° do 180°, biegnącym w kierunku ruchu strzałki zegara, bardzo szybko możemy wyznaczyć na planie położenie poszczególnych punktów.



Rys. 50.

Mianowicie ułożymy środek przenośnika dokładnie nad biegunem, zaś prostą 0° — 180° przenośnika ułożymy, przez jego obrót dokoła punktu C, na osi biegunowej i jej przedłużeniu. Przy położeniu przenośnika, wskazanem na rysunku, możemy odcinać kąty kierunkowe, mniejsze od 180°, a więc, np. α, γ, δ i t. d. Nakłuwamy plan ostrzem cyrkla w punktach obwodu przenośnika o liczbie stopni i części stopni równych α, γ, δ i t. d. Numerujemy tak otrzymane punkty kolejno i otaczamy półkółkami. Następnie, po odsunięciu przenośnika, na prostych 01, 03, 04 odcinamy wzięte z podziałki w skali planu odległości tych punktów; otrzymamy więc punkty a, c, d i t. d.

Punkty, których promienie wodzące mają kąty kierunkowe większe od 180°, wykreślimy w taki sam sposób, po obróceniu przenośnika dokoła

bieguna o 180° (na rys. punktami) i po zmniejszeniu pozostałych do wniesienia kątów kierunkowych o 180°.

Jeżeli wyznaczone punkty leżą na pewnej linji sytuacyjnej, wówczas łączymy je na planie odcinkami w takiej kolejności, jaka zachodziła w terenie.



Rys. 51.

IV. Wykreślenia punktów szczegółowych, zdjętych w terenie metodą spółrzędnych prostokątnych, dokonywamy zapomocą cyrkla, podziałki w skali planu i ekierek. Przypuśćmy, że w terenie w odniesieniu do prostej *AB* określono kilka punktów przez pomiar odciętych 9,80, 33,40, 58,40, 92,30 i rzędnych 6,50, 4,40, 17,20, 9,40.

Punkty *A* i *B* są wyznaczone na planie. Zapomocą cyrkla i podziałki w skali planu odcinamy na *ab* wszystkie odcięte, w otrzymanych punktach zapomocą ekierek budujemy prostopadłe w lewo lub w prawo od *ab*, jak to zachodziło dla tych punktów w terenie w stosunku do prostej *AB*, i wreszcie na prostopadłych odcinamy cyrklem z danej podziałki odpowiednie rzędne. Otrzymane punkty łączymy w taki sam sposób, w jaki dana linja szczegółowa *ACDEF* przechodziła w terenie.

§ 24. Uwagi o pisowni przy rachunkach.

Przy obliczeniach, wykonywanych w wielkiej ilości, ważnem jest zachowanie stałego systemu w pisowni danych liczbowych. Nie mówiąc już o konieczności wyraźnego pisania liczb oraz układania działań liczbowych w zamknięte dla każdego rachunku schematy, podkreślić należy konieczność utrzymywania pewnego niezmiennego systemu w układzie cyfr w liczbach.

A więc będziemy liczby całkowite od części dziesiętnych oddzielać przecinkiem, natomiast cecha logarytmu od mantysy oddzielona będzie kropką.

Wielocyfrowe liczby należy dzielić od przecinka w lewo i w prawo na grupy po trzy cyfry, np.:

5 964 897, 328
6, 217
1 507, 009
21 729, 68

Logarytmy wypisujemy nieco inaczej: w pięcioznacznych dwie pierwsze liczby mantysy piszemy obok cechy: 2.32 4.87, w sześcioznacznych

i siedmioznacznych pierwsze trzy cyfry mantysy tworzą jedną, pozostałe — drugą grupę, np.:

0.687 483
9.524 7209

Również ważną rzeczą jest zachowywanie pewnych prawideł przy z a o k r ą g l a n i u dziesiętnych liczb; tak więc 1) zaokrąglać należy przez odrzucenie ostatniej cyfry, gdy ona jest mniejszą od 5, a więc, np. zaokrąglenie liczby 1,6834 daje liczbę 1,683, 2) zaokrąglać należy przez powiększanie przedostatniej cyfry o jedność, gdy ostatnia jest większą od 5, np:

zamiast 1,6836 piszemy w zaokrągleniu 1,684,

3) gdy ostatnią cyfrą jest 5, wówczas przedostatnią zaokrąglamy do najbliższej parzystej, a więc:

zamiast 1,6835 piszemy 1,684, a zamiast 1,6825 piszemy 1,682.

W geodezyjnym rachunku często stosuje się pisownia liczb ujemnych przez t. zw. u z u p e ł n i e n i e d z i e s i ę t n e;

mianowicie: $-2\,252 = 7\,748 - 10000 = \times\, 7\,748$;

ponieważ 7 748 jest dopełnieniem do — 10.000 danej liczby ujemnej — 2 252 przeto, dla uniknięcia operacyj liczbowych (dodawań i odejmowań) liczb ujemnych i dodatnich, wypisujemy liczby ujemne w postaci uzupełnień dziesiętnych (dekadycznych). Mianowicie piszemy dodatnie uzupełnienie danej liczby ujemnej do innej ujemnej, będącej jednostką, z tylu zerami, ile cyfr zawiera dana liczba ujemna; a zamiast odejmować później jednostkę z zerami, używamy symbolu kształtu znaku mnożenia, postawionego przed pierwszą cyfrą uzupełnienia. Symbol $\times$ oznacza tak dobrze — 10000 jak — 1, jak — 100; jeżeli więc dana liczba ujemna ma jedności, a nie ma dziesiątków, $\times$ odpowiada — 10; jeżeli dana liczba ujemna nie ma całości, wówczas $\times$ odpowiada — 1 i t. d.

A więc zamiast: piszemy

— 2,252	=	$\times$ 7748
— 0,52	=	$\times$ 48
— 0,0043	=	$\times$ 9957

Możemy wszelako symbol $\times$ przesunąć o dowolną ilość miejsc w lewo, byleby każde miejsce, o które przesunęliśmy $\times$, było zastąpione przez cyfrę 9,

tak więc:

$$-0{,}52 = \times\, 48 = \times\, 9,\ 48 = \times\, 99,\ 48 \text{ i t. d.},$$

gdyż:

$$-0{,}52 = 0{,}48 - 1 = 9{,}48 - 10 = 99{,}48 - 100 \text{ i t. d.}$$

Podobnież:

$$-2252 = \times\, 7748 = \times\, 97748 = \times\, 997748,$$

gdyż:

$$— 2252 = 7748 — 10000 = 97748 — 100000 = 997748 — 1000000$$

oraz

$$— 0{,}0043 = \times,\ 9957 = \times\ 9{,}9957 = \times,\ 999957$$

gdyż:

$$— 0{,}0043 = 0{,}9957 — 1 = 9{,}9957 — 10 = 99{,}9957 — 100.$$

Uzupełnienie dziesiętne stosowane jest również i przy użyciu logarytmów.

Przypuśćmy, że mamy obliczyć log. 3,4587 — log. 0,02543; ponieważ log. 0,02543 = 8,40535 — 10,
więc — log. 0,02543 = — (8,40535 — 10) = 1,59465 = *clg* (0,002543).

więc zamiast:

log. 3,4587	0.53 891	0.53 891
— log. 0,02543	8.40 535 — 10	8.40 535
	2.13 356	2.13 356

liczymy:

log. 3,4587	0.53 891	
clg 0,02543	1.59 465	(+)
	2.13 356	

t. j. odejmowanie logarytmów zastępujemy przez dodawanie cologarytmów, co przy obliczaniu ułamków, których mianowniki są iloczynem szeregu liczb, daje pewne ułatwienie.

§ 25. Rachunki geodezyjne.

Obliczeń, z któremi mamy do czynienia, dokonywamy przy pomocy tablic logarytmicznych, arytmometrów, rachunku zwykłego i przybliżonego.

Ograniczymy się do rozpatrzenia 1) kontroli rachunku zwykłego, 2) rachunku przybliżonego, 3) określenia logarytmów funkcyj trygonometrycznych małych kątów i 4) określenia logarytmów sum i różnic.

Jedną z kontroli rachunku jest próba dziewiętna, dokonywana zapomocą reszt dziewiętnych. Resztą dziewiętną liczby nazywamy różnicę pomiędzy sumą cyfr danej liczby, a najbliższą do tej sumy, mniejszą od niej, wielokrotnością dziewięciu.

Tak więc dla liczby 5438 sumą cyfr jest 20, najbliższą mniejszą wielokrotnością dziewięciu jest $2 \times 9 = 18$, więc resztą dziewiętną jest $20 — 18 = 2$. Przy tworzeniu sumy cyfr dziewiątek, lub par cyfr, tworzących w sumie dziewięć, możemy tych sum nie brać pod uwagę, tak więc w liczbie 5438 sumę obliczymy na $3 + 8 = 11$, a resztę na $11 — 9 = 2$.

Kontrola dziewiętna polega na poddaniu reszt liczb, wchodzących do rachunku, temu samemu działaniu, któremu podlegają dane liczby, i na porównaniu reszt wyników.

Sprawdźmy to na przykładach:

dodawanie:

		reszty	kontrola
	5437	1	1+4+7=12
+	6385	4	
	9124	7	reszta **3**
	20946	**3**	

odejmowanie:

		reszty	kontrola
	6874	7	
—			7—0=**7**
	3852	0	
	3022	**7**	

mnożenie:

	reszty	kontrola
31552	7	$7 \times 8 = 56$
$\times$ 25568	8	reszta od $5 + 6$ jest
806721536	**2**	równą $11 - 9 = \mathbf{2}$

dzielenie:

$34452 : 66 = 522$ reszty $0 : 3 = 0$

$34452 : 522 = 66$ reszty $0 : 0 = 3$

Sprawdzamy przez odwrócenie rachunku i kontroli, mianowicie:

ponieważ:

$$522 \times 66 = 34452$$

więc reszty:

$$0 \times 3 = 0$$

Dzielenie z resztą:

	34562	522
pozostaje	110	66

Odwróćmy rachunek: $522 \times 66 + 110 = 34562$

reszty: $0 \times 3 + 2 = 2$

Zrozumiałą jest rzeczą, że kontrola dziewiętna rachunku nie wykryje błędu przestawienia dwu cyfr wyniku działania, ani też takich par błędów, jak zwiększenie setek wyniku, oraz zmniejszenie dziesiątków lub jednostek o jedność, gdyż $100 - 10 = 90$ reszta 0

$100 - 1 = 99$ reszta 0.

§ 26. Rachunek przybliżony.

Mnożenie skrócone stosowane jest wówczas, gdy mamy otrzymać iloczyn z pewną dokładnością, np. do 0,1 lub 0,01.

Aby otrzymać iloczyn z pewną dokładnością, należy cyfry mnożnika podpisać w odwrotnym porządku pod cyframi mnożnej, bacząc, by jednostki mnożnika znalazły się pod tą cyfrą mnożnej, której rząd jest 10 razy mniejszy od założonego dla wyniku stopnia przybliżenia. Obliczamy następnie

iloczyny każdej cyfry mnożnika przez tę część mnożnej, która leży z lewej strony, od cyfry, stojącej nad daną cyfrą mnożnika. Pierwsze cyfry iloczynów piszemy w jednej kolumnie pionowej. Przy sumowaniu odrzucamy ostatnią cyfrę wyniku, zaokrąglając odpowiednio przedostatnią.

Błąd w ostatniej cyfrze może wynieść jednostkę lub dwa.

Pomnóżmy 42,1475 przez 342,65 z dokładnością do 0,1. Wynik otrzymany byłby ściślejszym, gdybyśmy przy mnożeniu uwzględniali jedną jeszcze w prawo cyfrę mnożnej, zmieniając odpowiednio pierwszą cyfrę (z prawej strony) iloczynów cząstkowych. Tak więc drugi iloczyn cząstkowy byłby rozpoczęty od mnożenia 4×7, co z uwzględnieniem cyfry 5 mnożnej ($4 \times 0{,}5 = 2{,}0$) dałoby nie 8 jako ostatnią cyfrę II-go iloczynu cząstkowego, a 0 ($28 + 2 = 30$). W taki sposób doszlibyśmy do dokładniejszego wyniku, mianowicie:

42,1475
56243
1264425
168588
8428
2526
210
14441,77

42,1475
56243
1264425
168590
8429
2529
211
14441,84

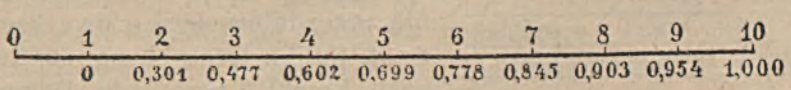
co z dokładnością do 0,1 daje 14441,8.

§ 27. Suwak.

Ważne zastosowanie przy rachunku przybliżonym ma suwak logarytmiczny, skonstruowany z podziałek logarytmicznych. Podziałka logarytmiczna jest linijką, na której w pewnej skali są wycechowane logarytmy liczb; np., ponieważ:

$\log 1 = 0$
$\log 2 = 0.30\,103$
$\log 3 = 0.47\,712$
$\log 4 = 0.60\,206$
$\log 5 = 0.69\,897$ i t. d.

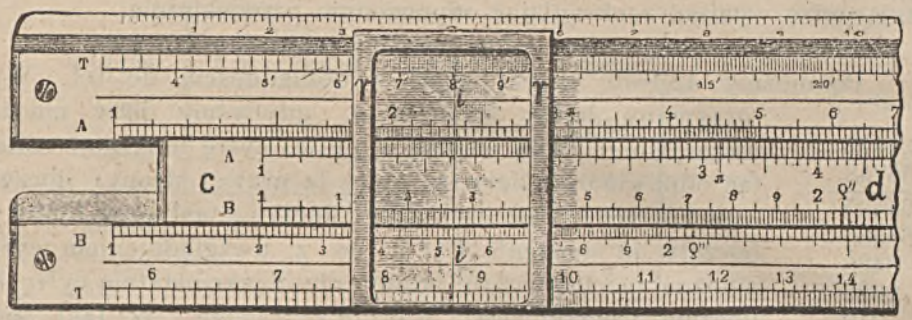
więc skoro od pewnej kreski początkowej odłożymy na podziałce 0.301, 0.477 i t. d. jednostek, wówczas otrzymamy podziałkę logarytmiczną.



Rys. 52.

Jeżeli teraz połączymy dwie takie podziałki w ten sposób, że jedna z nich może się przesuwać wzdłuż drugiej stale do niej ściśle przylegając, wówczas otrzymamy suwak logarytmiczny.

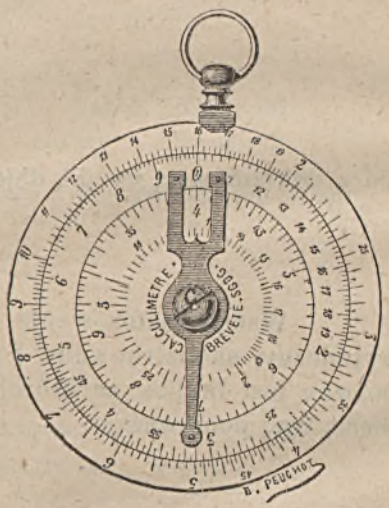
Przesówka *c d* ślizga się wzdłuż linijki, 25 lub 50 *cm.* długiej, w jej żłobku podobnie rama *r r* przesuwa się wzdłuż linijki. Często na ramce *r r*,



Rys. 53.

zamiast naciągniętego włosienia *i i*, mamy okienko celuloidowe z rysą *i i*, przesuwające się razem z ramką.

Używane są również suwaki tarczowe, składające się z dwu tarcz spółśrodkowych, z których mniejsza obraca się dokoła osi pionowej *C* wewnątrz większej. Jeżeli podziałki logarytmiczne przeniesiemy na obwody obydwu tarcz, otrzymamy suwak tarczowy.



Rys. 54.

Użycie suwaka polega na stosowaniu wzorów na iloczyn, iloraz i t. p. funkcje, dające się logarytmować, jak np.

$$\log ab = \log a + \log b$$

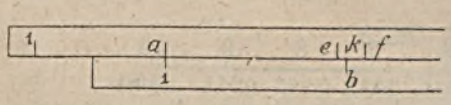
$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b \text{ i t. d.}$$

Mnożenie wykonywamy w następujący sposób:

ponieważ

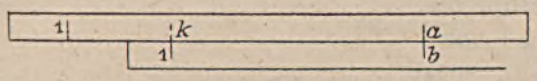
$$\log ab = \log a + \log b,$$

więc, mnożąc *a* przez *b*, nastawiamy jedność przesówki ściśle na przedłużeniu kreski *a* linijki. Następnie robimy odczyt na linijce na przedłużeniu kreski *b* przesówki. Jeżeli dokonywany odczyt nie odpowiada żadnej kresce linijki, wówczas otrzymujemy wynik przez interpolację z dwu kresek, np. *e* i *f*, linijki, leżących po obydwu stronach kreski *b* przesówki. Dokonany odczyt równa się *a b*, gdyż: 1) podział na linijce i przesówce jest identyczny, 2) log *a*, opisany na linijce, jako *a*, jest odcinkiem 1 *a* linijki, gdyż log 1 = *O* (rachunek logarytmów na linijce idzie do zera, t. j. od log 1), 3) log *b* na przesówce odpowiada odcinkowi przesówki 1 *b*, 2) odczyt *k* na



Rys. 55.

linijce, leżący na przedłużeniu kreski b przesówki jest równy odcinkowi $1k = 1a + 1b = \log a + \log b$, a więc odczyt k jest logarytmem liczby ab. Że zaś na linijce zamiast logarytmów liczb, coby wynikało z konstrukcji suwaka, są wypisane odpowiadające tym logarytmom liczby, przeto odczyt k (graficznie odpowiadający log ab) jest liczbą ab.



Rys. 56.

Dzielenie na suwaku odpowiada równaniu $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$.

Podsuwamy pod kreskę a linijki kreskę b przesówki; wówczas odczyt k, wzięty z linijki na przedłużeniu kreski 1 przesówki, równa się

$$k = \frac{a}{b}$$

gdyż odcinek (rys. 56)

$$1k = \log k$$

lecz odcinek

$$1k = 1a - 1b$$

więc

$$\log k = \log a - \log b$$

stąd

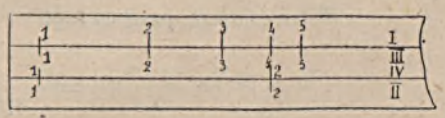
$$k = \frac{a}{b}$$

Potęgowanie na suwaku odpowiada tworzeniu iloczynu dwu jednakowych liczb.

Suwaki mają dwa rodzaje podziałów, t. zw. pojedyńczy i podwójny.

Linijka ma dwa podziały I i II, przesówka III i IV.

Spotykamy dwa typy suwaków: 1) obydwie podziałki przesówki i górny linijki mają wspólny podział, zaś jednostka II-iego podziału (dolnego) linijki równa się podwójnej jednostce podziałów a) przesówki i b) górnego linijki 2) albo też jednostkowy podział jest nacięty na górnej części linijki i przesówki (I i III), zaś podział podwójny znajduje się na dolnych częściach przesówki i linijki (IV i II).



Rys. 57.

W obydwu przypadkach podział górny (I) linijki daje bezpośrednio kwadraty liczb, znajdujących się na podziale II (dolnym) linijki, wystarczy tylko na odpowiednią liczbę podziału II nasunąć rysę ramy celuloidowej. i z rysy odczytać kwadrat tej liczby na podziałce I. Takie samo przerzucenie odczytu po rysie z podziałki I na II daje pierwiastek kwadratowy liczby na 1 podziałce.

Dla specjalnych potrzeb sporządzane są suwaki innego typu, z podziałkami sinusowemi i tangensowemi i t. d. Do tego rodzaju suwaków wrócimy w rozdziale o tachymetrji.

Dokładność wyników, otrzymanych na suwaku, zależy od dokładności

nastawiania, oceny na oko i długości suwaka; dla suwaka długości 50 *cm.* wynosi ona około 0,15%, dla suwaka 25-centrymetrowego około 0,25%.

Rozpatrzmy następujące zagadnienie:

1) znaleźć czwartą proporcjonalną $d = \frac{ab}{c}$

ponieważ

$$\log d = \log a - \log c + \log b$$

więc, podsuwając pod kreskę a podziału I-ej linijki kreskę c podziału III (górnego) na przesówce, na 1 jednością tego podziału odczytamy na linijce $\log \frac{a}{c}$; zaś nad kreską przesówki, odpowiadającej b, odczytamy na linijce $d = \frac{ab}{c}$.

Widzimy stąd, że jedno przesunięcie przesówki daje rozwiązanie dwu działań.

Rozwiązanie to jest dogodnem specjalnie wówczas, gdy pewien ułamek $\frac{a}{b}$ wypada mnożyć przez szereg liczb. Wszystkie wyniki daje jedno poruszenie przesówki.

§ 28. Logarytmy małych kątów i ich funkcyj oraz logarytmy Gaussa.

Określanie małych kątów i ich funkcyj.

Korzystamy z własności małych łuków, polegającej na proporcjonalności do ich sinusów i tangensów.

Oznaczmy mały łuk przez α, przez $\alpha - x$ — najbliższy w tablicach logarytmicznych mniejszy kąt (dla $\alpha = 1^\circ 40' 1''.3$ w pięcioznacznych tablicach $\alpha - x$ wynosi $1^\circ 40'$).

Wówczas z proporcyj:

$$\frac{\alpha}{\alpha - x} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha - x)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha - x)}$$

napiszemy:

I. $\log \alpha = \log \sin \alpha - \log \sin (\alpha - x) + \log (\alpha - x) = \log \operatorname{tg} \alpha - \log \operatorname{tg} (\alpha - x) + \log (\alpha - x)$

II. $\log \sin \alpha = \log \sin (\alpha - x) + \log \alpha - \log (\alpha - x)$

$\log \operatorname{tg} \alpha = \log \operatorname{tg} (\alpha - x) + \log \alpha - \log (\alpha - x)$

Przykład:

A. Log sin $\alpha = 8.46375$ znaleźć α.

Z tablic znajdujemy:

$\alpha - x = 1^\circ 40'$; $\log \sin (\alpha - x) = 8.46366$; $\alpha - x = 1^\circ 40' = 6000''$

log sin α	8.46375
clog sin $(\alpha-x)$	1.53634
log $(\alpha-x)$	3.77815
log α	3.77824
α	$6001''=1^0\,40'\,1''$

B. Gdy danym jest kąt, wówczas dla odnalezienia log sin lub log tg korzystamy z równań II.

Przypuśćmy, że:

$$\alpha=1^0\,40'\,1''.3=6001''.3$$

Znajdźmy log tg α z tablic 5-cyfrowych.

$$\alpha-x=1^0\,40'=6000''$$

log tg α	8.46385
log α	3.77824
clog $(\alpha-x)$	6.22185
log tg α	8.46394

W pięciocyfrowych tablicach Gaussa dla logarytmów funkcyj trygonometrycznych małych kątów (poniżej 3^0) podane są trzy dodatkowe kolumny: pierwsza podaje wielkość kątów w sekundach, piąta i szósta kolumny—wielkości *cpl S* i *cpl T* (cologarytmy *S* i *T*).

Przekształćmy równania I i II.

Ia:
$$\log\alpha=\log\sin\alpha-\log\sin(\alpha-x)+\log(\alpha-x)=$$
$$=\log\sin\alpha-\log\frac{\sin(\alpha-x)}{(\alpha-x)}=\log\sin\alpha+cpl\,S$$
$$\log\alpha=\log\operatorname{tg}\alpha-\log\operatorname{tg}(\alpha-x)+\log(\alpha-x)=$$
$$=\log\operatorname{tg}\alpha-\log\frac{\operatorname{tg}(\alpha-x)}{\alpha-x}=\log\operatorname{tg}\alpha+cpl\,T$$

IIb:
$$\log\sin\alpha=\log\alpha+\log\sin(\alpha-x)-\log(\alpha-x)=$$
$$=\log\alpha+\log\frac{\sin(\alpha-x)}{\alpha-x}=\log\alpha+\log S$$
$$\log\operatorname{tg}\alpha=\log\alpha+\log\operatorname{tg}(\alpha-x)-\log(\alpha-x)=$$
$$=\log\alpha+\log\frac{\operatorname{tg}(\alpha-x)}{\alpha-x}=\log\alpha+\log T$$
$$\log\operatorname{ctg}\alpha=cpl\operatorname{tg}\alpha=cpl\,\alpha+cpl\,T$$

Gauss oznaczył:

$$S=\frac{\sin(\alpha-x)}{(\alpha-x)}\text{ i }T=\frac{\operatorname{tg}(\alpha-x)}{\alpha-x}$$

Poprzednie przykłady tego §-fu przy pomocy tablic Gaussa rozwiążemy w następujący sposób:

A.	Dany jest:	$\log \sin \alpha$	8.46375
	z tablic:	$cpl\ S$	5.31449
	obliczamy:	$\log \alpha$	3.77824
		α	$6001'' = 1^0\ 40'\ 1''$

B. Odnaleźć $\log \operatorname{tg}\ 1^0\ 40'\ 1''.3$ (6001″.3)

$\log \alpha$	3.77824
$\log T$	5.31430 (z tablic)
$\log \operatorname{tg} \alpha$	8.46394

Logarytmy Gaussa służą do obliczenia logarytmów sumy lub różnicy dwu liczb, których logarytmy są dane (same liczby mogą nie być podane).

Mamy dwa logarytmy $\log a > \log b$.

Obliczyć $\log (a \pm b)$

$$\log (a+b) = \log a \left(1+\frac{b}{a}\right) = \log a + \log \left(1+\frac{b}{a}\right)$$

Oznaczmy:

$$\log \frac{b}{a} = A = \log b - \log a$$

$$B = \log \left(1+\frac{b}{a}\right)$$

wtedy:

$$\underline{\log (a+b) = \log a + B}$$

$$\log (a-b) = \log b \left(\frac{a}{b} - 1\right) = \log b + \log \left(\frac{a}{b} - 1\right)$$

Oznaczmy:

$$\log \frac{a}{b} = B = \log a - \log b$$

$$\log \left(\frac{a}{b} - 1\right) = A$$

wówczas:

$$\underline{\log (a-b) = \log b + A}$$

W tablicach Gaussa (str. 97—107) wielkości A są podane w pierwszej kolumnie, jako liczby trzycyfrowe, B — jako pięciocyfrowe w pozostałych kolumnach.

Pamiętać należy, że gdy a mało się różni od b, wówczas $\log (a-b)$ otrzymujemy z tych tablic bardzo niedokładnie; wówczas od $\log a$ i $\log b$ należy przejść do a i b i wtedy tworzyć $(a-b)$.

$\log a$	3.31785
$\log b$	3.31340
$B = \log a - \log b$	0.00445
na podstawie B otrzymujemy na str. 98 wielkość A	8.013

$\log b$	3.31340
A	8.013
$\log a-b$	1.32640

gdy w zwykły sposób otrzymamy:

$$a = 2079.0$$
$$b = 2057.77$$
$$a - b = 21.23$$
$$\log (a - b) = 1.32695.$$

ROZDZIAŁ II.

POMIARY LINJOWE.

§ 29. Stabilizacja punktów.

Utrwalenie (stabilizacja) punktów pomiarowych ma na celu założenie w terenie szeregu punktów, które w ciągu dłuższego czasu dzięki swemu stałemu położeniu, dawałyby podstawę dla pomiarów, gdyż określenie długości odcinka prostej wymaga określenia końców odcinka, zaś pomiar kąta wymaga określenia dwu przecinających się w wierzchołku kąta kierunków (prostych), z których każdy wyznaczymy przez utrwalony wierzchołek kąta oraz przez jeden punkt, leżący na danym kierunku.

Ponieważ przy pomiarach mamy punkty tak o większem, jak o mniejszem znaczeniu, przeto i utrwalanie punktów ze względu na koszty bywa różnorodnem.

Tak więc, np., punkty załamania granicy majątku ziemskiego winny być bardziej trwałe, niż punkty, o które opieramy pomiar szczegółów wewnątrz granic; w bardziej trwały sposób winniśmy stabilizować również punkty, wzięte za podstawę pomiaru miasta, gdyż rozrost inwestycyj miejskich wymaga perjodycznego dokonywania pomiarów, opartych o te same punkty, co poprzednio.

Różnorodność typów znaków pomiarowych zależy następnie: 1) od rodzaju pracy; tak np., przy triangulacjach, gdy punkty są wzajemnie odległe o kilka do kilkudziesięciu kilometrów, winny one mieć odpowiednio wielkie wymiary, aby były wzajemnie widoczne, jak również ze względu na potrzebę umieszczenia obserwatora z przyrządami na takiej wysokości, przy której pośrednie przeszkody (wzgórza, lasy) nie przeszkadzają obserwacji; mniejsze odległości zezwalają na ustawienie znaków małych, które stają się wzajemnie widocznemi po umieszczeniu na nich sygnałów w postaci, np., pionowo ustawionych nad punktami tyczek; 2) od materjałów, z których punkty te są wykonywane; tak więc drożyzna materjałów drzewnych często powoduje wykonywanie znaków z kamienia, cegły, lub odwrotnie; 3) od warunków miejscowych; tak np., na ulicach miast znaki nie mogą tamować ruchu oraz winny być utrwalane w sposób, utrudniający ich usunięcie lub uszkodzenie; 4) od stopnia dokładności wyznaczania punktów w terenie; tak np. niegdyś, gdy wartość ziemi była nieznaczną, narożniki granic utrwa-

lane były w postaci wielkich owalnych kopców, na które zwożono po kilkadziesiąt wozów kamieni. Wymiar kopców nie grał wielkiej roli w czasach, kiedy szerokość miedz granicznych wynosiła po 5 — 10 metrów. Obecnie tak szerokości miedz granicznych, jak i kopce, mają znacznie skromniejsze wymiary i potrzeba utrwalania narożników granic w postaci punktów stałych znajduje u właścicieli gruntów zrozumienie.

Rozpatrzmy typy znaków pomiarowych.

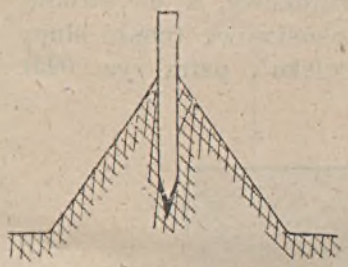
Na ziemiach polskich oddawna znany jest kopiec graniczny, o róż-



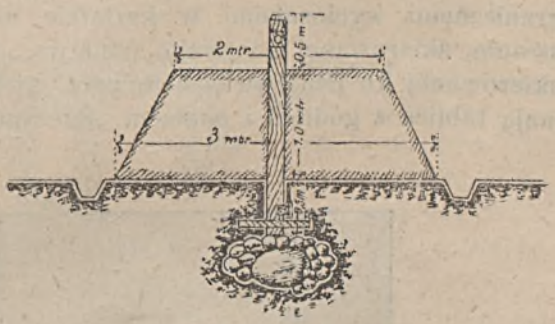
Rys. 58.

nych wymiarach, kształtu owalnego lub stożkowego, często składający się ze stosu kamieni, osypanych ziemią (rys. 58).

Z biegiem czasu, ze stosowaniem nieco ściślejszych pomiarów, kopiec zaczął służyć za ochronę znaku mierniczego, niejako jego zewnętrzną powłokę; sam zaś znak był palem mniejszych lub większych rozmiarów.



Rys. 59.



Rys. 60.

Gdy zaś zaczęły zachodzić wypadki usuwania pali, powstała potrzeba wzmacniania umiejscowienia pali przez przybijanie poprzecznych krzyżowych listewek u dołu (rys. 60).

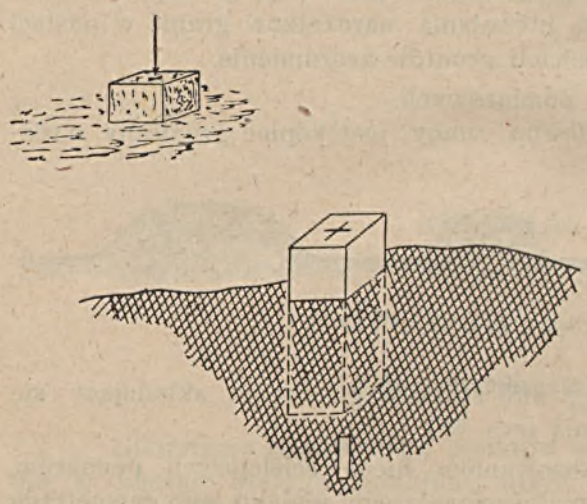
Ponieważ jednak w ciągu kilku lat pal drewniany ulega pod działaniem wpływów atmosferycznych zniszczeniu, przeto pod palem zaczęto umieszczać materjały trwałe, jak kamienie, butelki, rurki drenarskie, węgle i t. p.

Na ziemiach b. zaboru pruskiego zamiast pali granicznych przeważnie używane są kamienie rozmiarów 20 × 20 *cm.* w przekroju, 50—60 *cm.* wysokie, z wyciosanym u góry krzyżem i umieszczoną pod kamieniem rurką drenarską (rys. 61).

Na kresach wschodnich można jeszcze spotkać znaki graniczne w postaci dołów, obok których stawiane były pale (rys. 62).

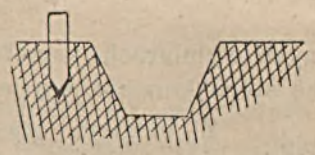
Zupełnie innych wymiarów i typów są znaki graniczne państwowe: są to często znaki murowane.

Tak np. znak graniczny między posiadłościami elektora pruskiego a Polską, znajdujący się dotychczas na gruntach wsi Bogusze pod Grajewem został tak fundamentalnie zbudowany, że dwukrotne próby Rosjan i Prusaków usunięcia tego pomnika historycznego nie zostały uwieńczone pomyślnym skutkiem, wobec czego poniechano zamiaru zrujnowania go.



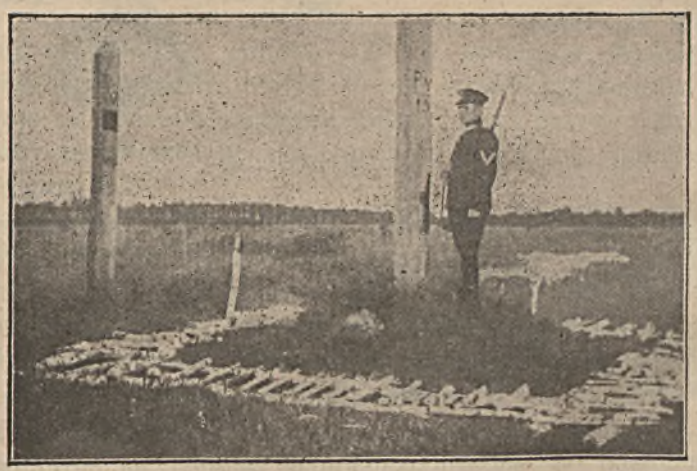
Rys. 61.

Granica polsko - rosyjska po traktacie ryskim została utrwalona dębowemi słupami



Rys. 62.

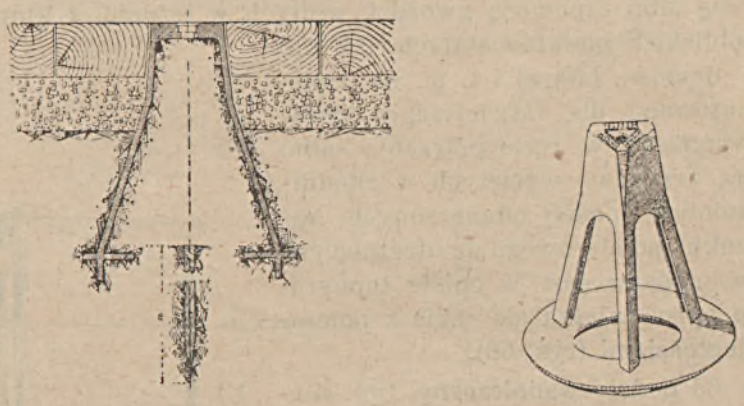
granicznemi, wyciosanemi w kształcie obelisków. Każdy słup posiada na stronie, skierowanej do swego państwa, numer porządkowy, a na stronie, skierowanej ku państwu sąsiedniemu, swe godło państwowe (nasze słupy mają tablice z godłem i napisem „Rzeczpospolita Polska", patrz rys. 62a).



Rys. 62a.

Przy pomiarach miejskich w punktach załamania poligonów zakładane są znaki poligonowe specjalnej konstrukcji z żelaza lanego (rys. 63), zwane markami. Z ziemi wystaje jedynie wierzchołek marki. Pod marką jest wbity palik, który umożliwia ustawienie marki poruszonej w dawnem położeniu.

Na granicach gruntów podmiejskich bardzo często ustawiane są znaki betonowe z rurką o średnicy 3 *cm.*, służącą do ustawiania w niej

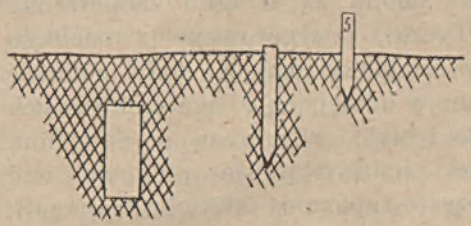


Rys. 63.

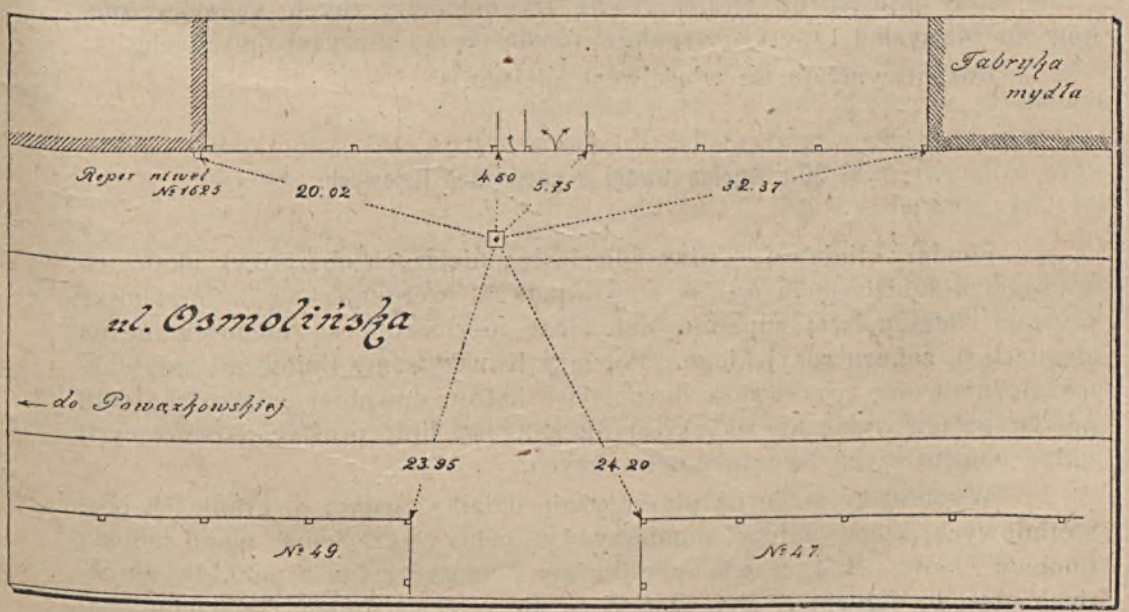
tyczki (rys. 64). Do wyznaczenia punktów oparcia dla zdjęć szczegółowych najczęściej są używane albo rurki drenarskie, ustawiane pionowo na głębokości od 30 do 50 *cm.* pod powierzchnią (zależnie od głębokości uprawy), 30 *cm.*



Rys. 64.



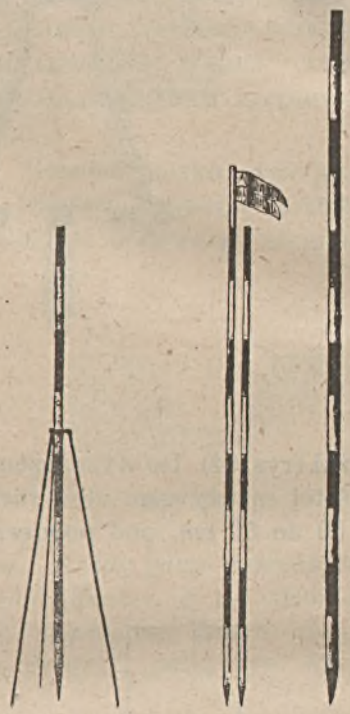
Rys. 65.



Rys. 66.

długie, albo też paliki 50 *cm.* długie, wbite równo z ziemią, z postawionym obok drugim palikiem, t. zw. świadkiem, na którym wypisuje się Nr. pala.

W miastach, drugorzędne punkty oparcia przy pomiarze szczegółów, wyznaczają się albo zapomocą gwoździ, wbitych w jezdnię, a których odległości od pobliskich punktów stałych, jak np. narożników domów, latarni i t. p., są zmierzone i zanotowane dla łatwiejszego odszukania tych punktów w razie potrzeby,—albo też zapomocą krzyżów, wyciętych w chodnikach i w podobny sposób odmierzonych. Nawiązanie punktu pomiarowego do otaczających przedmiotów podane jest w opisie topograficznym; do opisu załącza się szkic z pomierzonemi odległościami (rys. 66).



Rys. 67.

Rys. 63 podaje współczesny typ znaku w Warszawie.

Dla uwidocznienia punktu na odległość używa się tyczek od 2 do 5 *m.* wysokich, o średnicy około 3 *cm.*, zaopatrzonych u góry w chorągiewki. Tyczki dla łatwiejszego osadzenia w ziemię są u dołu zaopatrzone w ostrza. Tyczki, przygotowane z suchego drzewa, okute u dołu, mające stałą grubość i pomalowane w odstępach 20-centymetrowych na czerwono i biało, nazywane są żalonami.

Tyczki ustawiają się pionowo nad punktami (często zapomocą lekkiego trójnoga), albo poza niemi ściśle w linji pomiaru, wetknięte w ziemię.

Przy pracach topograficznych i trygonometrycznych wymiary znaków mierniczych i typy tych znaków różnią się od powyżej opisanych.

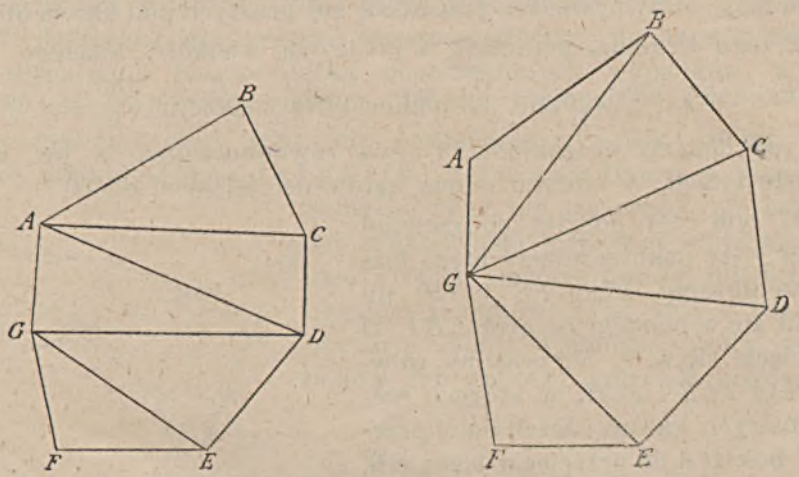
Rozpatrzymy je we właściwem miejscu.

§ 30. Ogólne uwagi o pomiarach linjowych.

Pomiary linjowe, — przy zdjęciach mniejszych obszarów, około co najwyżej kilkudziesięciu *ha*—są stosowane na szeroką skalę w b. zaborze pruskim i Małopolsce; zupełnie natomiast niesłusznie są niedoceniane na ziemiach b. zaboru rosyjskiego. Pomiary te nazywamy linjowemi, gdyż nie uwzględniają one przyrządów do pomiaru kątów dowolnej wielkości i cały pomiar polega wyłącznie na określaniu długości linij prostych, tworzących układ najprostszych figur geometrycznych.

Wyobraźmy sobie na płaszczyźnie działkę gruntu o granicach prostolinjowych, którą należy pomierzyć w celu wykreślenia planu metodą budowy △-ów. W tym celu moglibyśmy połączyć jeden z punktów narożnych obwodu figury *A B C D E F G*, np. p. *G*, z innemi wierzchołkami tego obwodu, t. j. moglibyśmy rozbić nasz wielobok na △-y o wspólnym

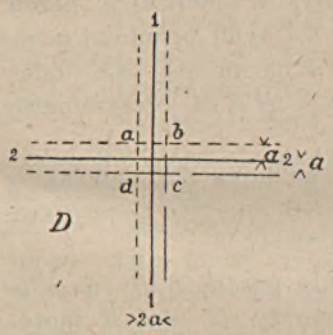
wierzchołku G (lub inaczej), pomierzyć długości boków we wszystkich $\triangle$-ach i zbudować te $\triangle$-y. A więc na boku $G\,A$, naniesionym na papier w danej podziałce, na zasadzie znanych długości AB i GB zbudować, po-



Rys. 68.

wiedzmy, przez zatoczenie łuków o tych promieniach $\triangle\ G\,A\,B$, t. j. określić na planie położenie p. B; następnie na otrzymanym boku GB zbudować $\triangle\ B\,G\,C$ i, w dalszym ciągu, zbudować punkty C, D, E i F.

Postępowanie to, w zasadzie słuszne, posiada przy praktycznem zastosowaniu pewne wady, a to z następujących względów. Wyobraźmy sobie dwa punkty naszego obwodu B i D; punkt B określony będzie przez dwa wektory AB i GB, przecinające się pod bardzo ostrym kątem, np. 10°, zaś punkt D — pod kątem GDC, bliskim 90°. Na rysunku (w skali bardzo wielkiej) p. D otrzymujemy z przecięcia się prostych 1—1 i 2—2. Błąd wykreślenia tych prostych szacujemy na $^1/_2$ grubości rysy, kreślonej przez ołówek. Jeżeli szerokość tej rysy oznaczymy przez $2a$, to p. D znajduje się wewnątrz kwadratu $abcd$ o polu $4a^2$ i jest wyznaczony na oko wewnątrz tego pola przez ukłucie igiełką (rys. 69).



Rys. 69.

Natomiast punkt, tworzony przez proste, przecinające się pod ostrym kątem (np. 10°), z tych samych względów znajdzie się wewnątrz rombu $a_1\,b_1\,c_1\,d_1$, o bokach równych $c_1\,d_1 = \dfrac{c_1\,c_2}{\sin 10^0} = \dfrac{2\,a}{\sin 10^0} = 12\,a$, a więc o polu $p = 12\,a.\ 2a = 24a^2$. Jak widzimy, pole figury $a_1\ b_1\ c_1\ d_1$, wewnątrz której

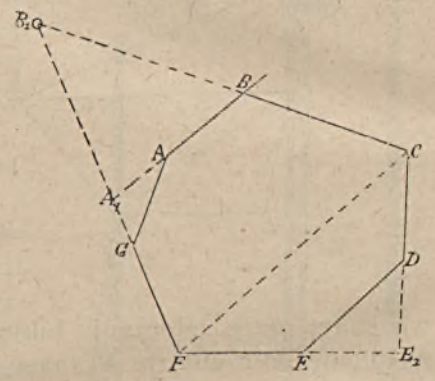


Rys. 70.

przez szacowanie na oko nakłuwany punkt (rys. 70), jest 6 razy większem od pola *a b c d* (rys. 69). Stąd wnioskujemy, że punkty, określane przez przecięcie się dwu prostych pod ostrym kątem, są znacznie mniej dokładnie określane, niż punkty, otrzymywane z przecięcia się prostych pod kątem bliskim 90°.

Z tego względu, ponieważ w △-cie za wielkość każdego z trzech kątów, najmniej odbiegającą od 90°, musimy przyjąć $\frac{180^0}{3} = 60^0$, przeto w praktyce dążymy do zakładania △-ów równobocznych, a już w najgorszym razie takich, w których niema kątów ostrzejszych od 30°.

W tym celu podział poprzedniej figury na △-ty uskuteczniamy nieco inaczej: przedłużamy boki *FE* i *CD* do przecięcia się w punkcie E_1, oraz *CB* i *FG* do przecięcia się w B_1. Otrzymamy wówczas 2 △-ty *FCE* i *FCB*, w których niema zbyt ostrych kątów. Jeżeli dalej przedłużymy bok *B A* do przecięcia się z *GB*, w punkcie A_1, i następnie pomierzymy długości *FC*, $CE_1 = CD + DE_1$ $FE_1 = FE + EE_1$ $CB_1 = CB + BB_1$, $FB_1 = FG + GA_1 + A_1B_1$ oraz AA_1, wówczas otrzymamy wszelkie podstawy dla wykreślenia planu danej figury; mianowicie, na dowolnej prostej na planie od punktu *F*, na niej obranego, odcinamy, w podziałce planu, *FC* i, mając boki CE_1 i FE_1, określamy z przecięcia się tych promieni p. E_1. Następnie na otrzymanej prostej CE_1 odcinamy *CD* i na prostej FE_1 odcinamy *FE*. W ten sposób, po połączeniu punktów *C D E F*, otrzymujemy część naszej figury na planie.



Rys. 71.

Podobnie: na boku *FC* budujemy △ *FCB* i na boku CB_1 odcinamy długość *CB* w podziałce planu, zaś na boku FB_1 odcinamy *FG* i, po określeniu p. *G*, odcinamy od niego GA_1, na tej samej prostej.

Łącząc punkty A_1 i *B*, otrzymujemy na planie prostą A_1B, na której od p. A_1 odcinamy długość A_1A. Otrzymane punkty *G*, *A* i *B* łączymy w odpowiedni (jak w terenie) sposób, zamykając na planie figurę *ABDEFG*.

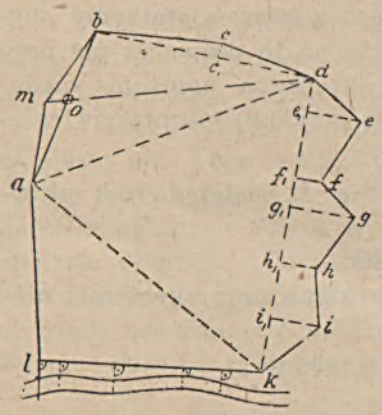
Podobnego typu konstrukcja nie nasuwa żadnych wątpliwości; ale skoro pomierzylibyśmy w polu jeszcze długość *ED* i następnie tę długość, wziętą w podziałce planu, porównalibyśmy z wykreślonym na planie odcinkiem *ED*, to zawsze wykryjemy pewną niezgodność i to odpowiadającą tem większemu odcinkowi na planie, im w większej skali wykreślaliśmy nasz plan. Taką samą niezgodność otrzymamy, gdy pomierzymy w terenie długość *AB* i porównamy z otrzymaną z konstrukcji długością *AB* na planie, uwzględniając podziałkę planu, lub gdy pomierzymy dowolną, niezmierzoną poprzednio, przekątnię (np. *AD*) naszej figury i dokonamy takiego samego porównania.

Ponieważ plan jest obrazem, podobnym do układu linij rzutu poziomego danej figury, przeto wszystkie linje na planie są jednakową ilość razy

zmniejszone i odpowiednie kąty figury na planie i w terenie winny być równe. Skąd więc powstają takie niezgodności, jak wyżej przytoczone? Niewątpliwie składają się na nie pewne błędy naszych czynności: tak błędy pomiaru długości w terenie, jak i błędy wykreślenia.

W dalszym ciągu naszego kursu powrócimy do tego tematu; narazie zaś rozpatrzmy jeszcze kilka poszczególnych wypadków, z któremi zdarza się mieć do czynienia przy pomiarach linjowych.

Rozpatrzmy nieco inny niż poprzednie wypadek. Mamy w terenie figurę zamkniętą *a b c d e f g h i j k*. Jeżeli cała figura, a więc poszczególne jej boki, lub ich części, nie leżą w jednej płaszczyźnie poziomej, wówczas mierzyć należy rzuty poziome boków, lub też mierzyć długości D boków, oraz kąty α ich pochylenia do poziomu, i obliczać rzuty poziome d boków, lub obliczać poprawki boków



Rys. 72.

$$D - d = r$$

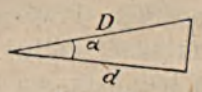
t. j. wielkości

$$r = D - D\cos\alpha = D\,[1 - \cos\alpha] = 2\,D\,\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

dla każdego boku, skąd przejdziemy do wielkości rzutów poziomych

$$d = D - r.$$

Wielkości r otrzymujemy z tablicy 1 (w końcu książki) dla odpowiednich długości i kątów pochylenia. Opis użycia tablicy I z przykładami jest do niej załączony.



Rys. 72a.

Podobnie należy obliczać i rzuty poziome boków △-ów, na które dzielimy naszą figurę. Najwłaściwszemi prostemi, dzielącemi nasz obwód na △-y, są proste *bd, ad, ak, dk*. Długości tych prostych (właściwie ich rzutów poziomych — w ten sposób dalej będziemy pojmować zwrot: długość prostej) winny być w terenie zmierzonej Punkty, jak *c* lub *m*, położone przy bokach △-ów, mierzymy metodą rzutowania, t. j. zapomocą rzędnych i odciętych (bc_1 i c_1c), co pociąga za sobą konieczność 1) ścisłego ustawienia się na prostej (*bd*) i 2) odnalezienia na tej prostej spodka prostopadłej (c_1), spuszczonej na daną prostą (*bd*) z określanego punktu. Koniecznym więc jest przyrząd, umożliwiający szybkie wyznaczenie kierunku prostopadłej do danej prostej. Przyrządy takie nazywamy węgielnicami lub ekierami.

Wszelako możemy wyznaczyć położenie punktu *m* lub *c* bez budowania prostopadłych. Tak np., określmy w terenie przecięcie się pomocniczej prostej *md* z prostą *ab* w punkcie *o*, pomierzmy długość odcinka *ao* na prostej *ab* i *om* na przedłużeniu pomocniczej prostej *do*. Ponieważ trójkąt *abd* może być wykreślony na planie, przeto punkt *o* i punkt *m*, położony na odcinku *om*, jako przedłużeniu wykreślonej pomocniczej prostej *do*, będą mogły być wyznaczone. Wtedy pomiar długości *am* i *bm* byłby zbytecznym, gdyż poprzednie miary *ao* i *om* są wystarczające dla określenia położenia punktu *m*. Jednakże takie dodatkowe dane jak *am* lub *bm*, lub

obydwie te miary razem, są potrzebne jako 1) określające długość istniejących w terenie odcinków i 2) dające kontrolę właściwego określenia położenia punktu *m* z miar *ao* i *om*.

Co się tyczy łamanej *d e f g h i k*, to punkty jej załamania mierzą się metodą rzutowania (z domiarów), a więc

przy określaniu punktu *e* mierzymy odciętą *de* i rzędną (domiar) e_1e
„ „ „ *f* „ „ df_1 „ „ f_1f i t. d.

W podobny sposób określamy położenie krzywych granicznych lub sytuacyjnych, jak np. rzeczki, leżącej przy prostej *kl*. Jeżeli przytem środek rzeczki, lub brzeg przeciwległy, jest granicą, wówczas mierzymy obydwa jej brzegi z domiarów, gdy szerokość rzeczki na to pozwala, zaś przy znaczniejszej szerokości przeszkody — metodą określania położenia niedostępnych punktów. Jeżeli zaś granicą jest brzeg przyległy, to przeciwległego można nie mierzyć.

Jak widzimy, pomiary linjowe składają się z następujących głównych czynności:

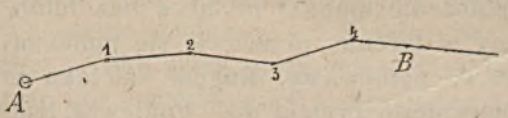
a) pomiarów długości i kątów pochylenia;
b) określania punktów przecięcia się prostych oraz określania niedostępnych odległości;
c) budowania prostopadłych zapomocą węgielnic.

§ 31. Odchylenia poprzeczne przy pomiarach długości.

Pomierzyć wielkość — znaczy porównać ją z inną, przyjętą za jednostkę. Przy pomiarze długości należy więc jednostkę długości (np. metr) układać wzdłuż danej prostej dla określenia stosunku między określaną a jednostkową długością.

Dla przyśpieszenia i udogodnienia pracy używamy nie jednostkowych miar, lecz t. zw. przyrządów do pomiaru długości, wielokrotnych metra, a więc łat pięcio lub czterometrowych, rulet, taśm stalowych i płóciennych pięcio, dziesięcio i dwudziestometrowych i t. p. Im dłuższym jest przyrząd do pomiaru długości, tem mniej razy należy go układać na danej prostej, tem szybciej posuwa się pomiar. Jednakże dłuższych od dwudziestu metrów przyrządów do pomiaru długości prawie nie stosujemy, gdyż byłyby zbyt niedogodnemi w użyciu na terenie nierównym.

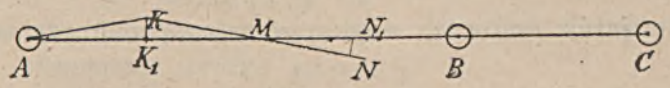
Układanie danego przyrządu ściśle na mierzonej prostej jest dość trudnem, gdy dana prosta w terenie wyznaczona jest przez 2 punkty: początkowy i ostatni. Wówczas bowiem ułożona miara utworzy pewien kąt z kierunkiem prostej *AB*, a to wskutek niedokładności naszych czynności. Jak wiemy z doświadczenia, posuwać się wzdłuż pewnego kierunku z minimalnemi odchyleniami można tylko wówczas, gdy przed nami znajdują się dwa wyraźne punkty na danym kierunku. Oko nasze ustawia nas na przedłużeniu prostej, przechodzącej przez takie dwa



Rys. 73.

punkty i tylko bardzo nieznaczne odchylania się od danego kierunku nie są dostrzegane.

Wyobraźmy sobie na danej prostej trzy punkty, na których ustawiono pionowo (gdyż tylko rzut osi pionowo ustawionej tyczki na płaszczyznę poziomą jest punktem) tyczki *ABC*, o średnicy, np., 3 *cm*.



Rys. 74.

Określmy wielkość dopuszczalnego odchylenia poprzecznego danej miary od kierunku danej prostej, z tem, by takie odchylenie dawało nieuchwytną różnicę między długością $AK=l$, a jej rzutem AK_1 na daną prostą.

Gdyby odchyleń poprzecznych nie było, to wynik pomiaru byłby mniejszy niż przy odchylaniu w lewo czy w prawo od prostej, gdyż zawsze rzuty AK_1, K_1M są krótsze od AK lub KM. Wnioskujemy stąd, że nieścisłe układanie miary w linji wpływa zawsze na zwiększenie wyniku pomiaru długości. Odchylenia poprzeczne największy wpływ wywierają wówczas, gdy, w porównaniu z kierunkiem na ostatni punkt prostej, idą od końca każdorazowo ułożonej miary stale kolejno w prawo i w lewo. Możemy określić tę dopuszczalną wielkość odchylenia poprzecznego, przy którem błąd, stąd wynikający, nie przekroczy $\frac{1}{n}$ długości prostej.

Ponieważ długość prostej składa się z m ułożeń miary, t. j.

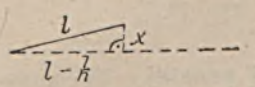
$$L = l + l + \ldots + l \ (m \text{ razy}),$$

przeto błąd długości, wynikający z wpływu odchyleń poprzecznych, możemy dla ułatwienia przyrównać do

$$\frac{L}{n} = \frac{l}{n} + \frac{l}{n} + \ldots + \frac{l}{n}$$

Określana więc wielkość poprzecznego dopuszczalnego odchylenia będzie

$$x = \sqrt{l^2 - \left(l - \frac{l}{n}\right)^2}$$



Rys. 75.

Rysunek Nr. 75 daje odchyloną miarę l; $\frac{l}{n}$ jest wielkością błędu; rzut miary na kierunek mierzonej prostej będzie równym $l - \frac{l}{n}$, zaś x jest określanem odchyleniem

$$x = \sqrt{l^2 - \left(l^2 - 2\frac{l^2}{n} + \frac{l^2}{n^2}\right)} = l\sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} = l\sqrt{\frac{2n-1}{n^2}}$$

skąd

$$x = \frac{l}{n}\sqrt{2n-1}$$

Ponieważ zakładana wielkość $\frac{1}{n}$ jest wielkością bardzo małą, więc n jest stosunkowo wielkiem, przeto możemy przyjąć, że przybliżenie:

$$x = \frac{l}{n}\sqrt{2n-1} = \frac{l}{\sqrt{n}}\sqrt{2} = \frac{1.4\,l}{\sqrt{n}};$$

Dla pomiarów linjowych wystarczy najzupełniej, gdy założymy

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{20\,000}$$

skąd

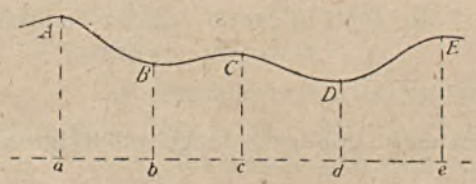
$$x = \frac{1.4\,l}{140} = \frac{l}{100}$$

Tak więc dla taśmy 20-metrowej x wyniesie 20 *cm.*, dla łat 5-metrowych x wyniesie 4 *cm.*; błąd stąd powstający dla taśmy nie przekroczy 1 *mm.*

Ponieważ jednak na większych odległościach można odchylić się nieco więcej od kierunku prostej, przeto dla łatwiejszego utrzymania przyrządu do pomiaru długości w linji — daną prostą oznaczamy przez kilka punktów, t. j. wytyczamy. Tyczenie prostej jest niezbędnem przy pomiarze zapomocą rzędnych i odciętych i przy pomiarach linjowych.

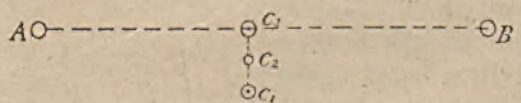
§ 32. Tyczenie prostych.

Mówimy: „kilka punktów leży na prostej", gdy punkty te znajdują się w płaszczyźnie pionowej, poprowadzonej przez daną prostą. Tak więc punkty *A B C D E*, ustawione w przekroju pionowym terenu *A E*, jakkolwiek w rzeczywistości leżą na krzywej przecięcia się powierzchni terenu z pionową płaszczyzną, uważane są za leżące na jednej prostej, gdyż rzuty tych punktów, t. j. punkty *a b c d e* rzeczywiście leżą na jednej prostej. Inaczej mówiąc: przez wytyczenie prostej rozumiemy wyznaczenie w terenie kilku punktów śladu pionowej płaszczyzny, przechodzącej przez początek i koniec danej prostej. Tyczenie prostych wykonywane jest kilku metodami: wprzód, na siebie, ze środka.



Rys. 76.

a) Tyczenie wprzód wykonywa się w sposób następujący: po ustawieniu tyczek pionowo na obydwu końcach prostej, stajemy za jedną z nich i wysyłamy pomiędzy skrajne tyczki pomocnika z tyczką, który przesuwa się według naszych wskazówek, dopóki ustawiona w środku tyczka nie zasłoni skrajnej, stojącej na drugim końcu prostej.

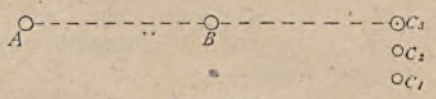


Rys. 77.

Tak więc tyczka C od położenia C_1 przesuwa się aż do położenia C_3, w którem tyczka znajduje się na danej prostej. W taki sposób możemy

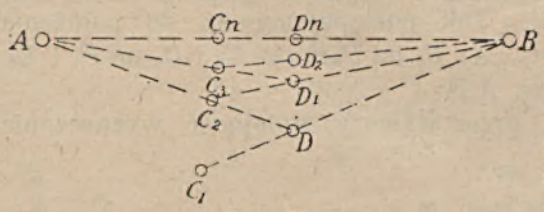
ustawić w linji kilka tyczek, zaczynając ustawianie od najdalszej i przechodząc stopniowo do coraz bliższych.

b) Tyczenie na siebie wykonywamy dla przedłużenia danej prostej, mianowicie: stojąc mniej więcej na przedłużeniu prostej, ustalonej przez dwie tyczki A i B, przesuwamy się z tyczką C w kierunku poprzecznym do AB, dopóki, utrzymując tyczkę na osi symetrji ciała, nie spostrzeżemy, że tyczka A została zasłonięta przez tyczkę B. Punkt C_3, w którym to zachodzi, jest punktem, leżącym na przedłużeniu danej prostej. Tyczenie tego rodzaju nie wymaga pomocnika.

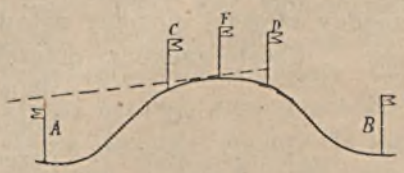


Rys. 78.

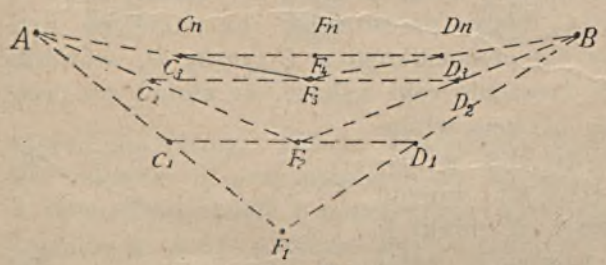
c) Tyczenie ze środka polega na odnalezieniu punktu na prostej bez ustawiania się na końcu, lub na przedłużeniu prostej; możliwem jest jedynie przy jednoczesnem ustawianiu dwu pomocniczych tyczek. Stojąc między punktami: A i B w C_1, ustawiamy pomocniczą tyczkę na prostej $C_1 B$ w punkcie D przez tyczenie wprzód. Pomocnik w D kieruje tyczkę C_1 na prostą AD; zgodnie z jego wskazówkami przesuwamy się z punktu C_1 aż do C_2 na prostej AB. Stojąc w C_2, kierujemy pomocnika, aż ustawi się na prostej BC_2 w punkcie D_1; znów według wskazówek pomocnika w D_1, przesuwamy się z C_2 do C_3 na prostej AD_1, poczem przesuwamy pomocnika z D_1 na prostą BC_3 do punktu D_2 i t. d., dopóki wreszcie, patrząc na tyczkę pomocnika, nie ujrzymy, że zasłania punkt B, zaś nasza tyczka C_n zasłoni pomocnikowi tyczkę A; obydwa punkty C_n i D_n leżą wówczas na AB. Gdy w terenie falistym, patrząc z D przez C, nie możemy spostrzec punktu A i patrząc z C przez D, nie widzimy B, wówczas tyczenie ze środka wymaga zastosowania jeszcze jednej pomocniczej tyczki F, w takiem miejscu stale ustawianej, by z niego tak tyczki A i C, jak D i B, były widoczne. Stojąc w F_1, ustawiamy C_1 na $F_1 A_1$ i D_1 na $F_1 B$, poczem pomocnik w C_1 przestawia nas z F_1 do F_2 na $C_1 D_1$. Z punktu F_2 przestawiamy C_1 do C_2 na AF_2 i D_1 do D_2 na $F_2 B$, poczem pomocnik w C_2 przestawia nas do F_3 na $C_2 D_2$. Znów z F_3 przesuwamy tyczkę z C_2 do C_3 na AF_3 i z D_2 do D_3 na F_3B, poczem sami przesuwamy się do F_4, leżącego na prostej $C_3 D_3$. Postępujemy tak do czasu, gdy, patrząc z F_n na A i B, mamy A kryte przez C_n i B kryte przez D_n,



Rys. 79.



Rys. 80.

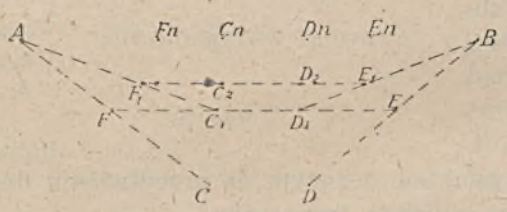


Rys. 81.

zaś, patrząc z C_n mamy punkt F_n kryty przez D_n. Takie trzy punkty C_n F_n D_n leżą na prostej AB.

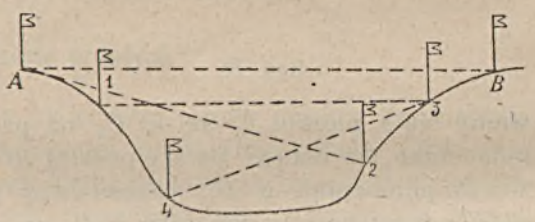
Gdy wreszcie na wzgórzu niema takiej linji, z punktów której widać A i B, wówczas tyczymy 4 żalonami.

Obieramy na zboczach wzgórza takie dwa wzajemnie widoczne punkty C i D, z których z jednego widać A, z drugiego B; ustawiamy na AC tyczkę trzecią w F, na DB tyczkę czwartą w E, poczem tyczki C i D ustawiają się ze środka na prostą FE w punktach C_1 i D_1 takich, by z C_1 widocznym był p. A_1, z D_1 — punkt B. Znów ustawiamy z C_1 na C_1A tyczkę F_1 (przesuniętą z F) i z D_1 na D_1B tyczkę E_1 (przesuniętą z E), poczem tyczki z C_1 i D_1 przesuwamy, tycząc ze środka na prostą F_1E_1 do punktów C_2 i D_2. Tak postępujemy aż do położenia F_n C_n D_n E_n, kiedy F_n leży na C_n A, E_n na D_nB, zaś C_n i D_n na F_n i E_n. Wszystkie 4 punkty leżą wówczas na AB.



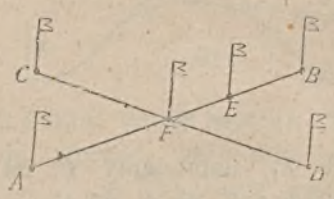
Rys. 82.

Przy przetyczaniu prostych przez wąwozy, kolejność wyznaczania pośrednich punktów na AB może być dowolną. Tak więc na AB ustawiamy 1-ą tyczkę przez wprowadzenie jej wierzchołka w prostą AB; na podstawie tyczek A i 1-ej ustawiamy tyczkę 2-gą; na przeciwległym brzegu parowu na zasadzie 1-ej i 2-ej tyczymy 3-ą i wreszcie na podstawie 3-ej i B tyczymy 4-ą. W ten sposób otrzymujemy na dnie wąwozu dwa punkty 4-ty i 2-gi, między któremi możemy ustawić szereg pośrednich.

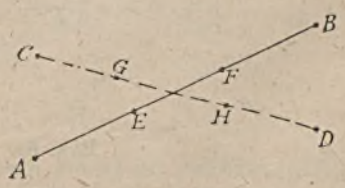


Rys. 83.

Często zachodzi potrzeba określenia w terenie punktu przecięcia się dwu prostych, z których każda jest daną przez koniec i początek. Przypuśćmy, że mamy określić przecięcie się prostych AB i CD. Na prostej AB ustawiamy pomocniczą tyczkę E przez tyczenie wprzód. Przesuwamy się z 5-tą tyczką na przedłużeniu prostej EB ku punktowi A, według wskazań (sygnałów ręką) pomocnika, ustawionego za tyczką C. Gdy, przesuwając tak stale po prostej BEA 5-tą tyczkę, zasłonimy nią pomocnikowi w C tyczkę D, wówczas pomocnik przez opuszczanie i podnoszenie ręki wskaże, że stoimy na przecięciu się prostych; w tym więc punkcie wbijamy tyczkę F. Albo też: na prostej AB w pobliżu CD po obu jej stronach tyczymy wprzód z A punkty E i F: po ustawieniu E punkt F przesuwamy po AEB, dopóki pomocnik, ustawiony w C, nie da sygnału, że punkt F już znalazł się z drugiej strony prostej CD w stosunku



Rys. 84.



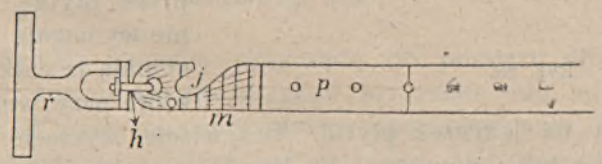
Rys. 85.

do punktu *E*. Następnie pomocnik z *C* tyczy dwa punkty *G* i *H* na prostej *CD*, my zaś w *A* sygnalizujemy, aby *H* znalazło się z innej strony prostej *AB*, niż *G*. Wówczas naciąga się sznurki między *GH* i *EF*—przecięcie się sznurków daje szukany punkt.

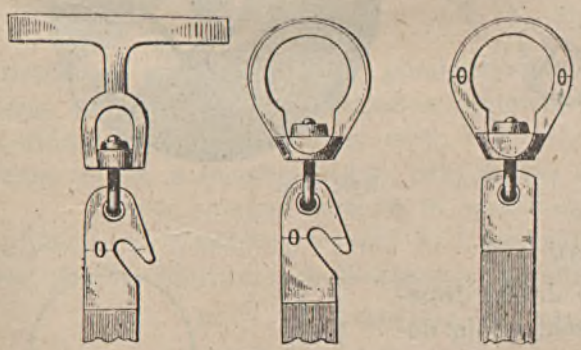
§ 33. Przyrządy do pomiarów długości.

Przy pomiarach, mających na celu sporządzanie planów, używamy do bezpośredniego określania długości: tąśm stalowych, rulet stalowych lub płóciennych, łat mierniczych.

Taśma stalowa, zwykle 20-metrowej długości, jest paskiem stalowym, zakończonym na obydwu końcach mosiężną płytką *m* z języczkiem *j* (lub bez niego), połączoną z rękojeścią *r*, która może się obracać dokoła haczyka *h*, łączącego rękojeść z płytką *m*. Na płytce *m* jest kreska, oznaczona przez zero, stanowiąca początek taśmy. Taka sama kreska jest na drugim końcu taśmy. Na każdej stronie taśmy mamy podział na metry; poszczególne metry są wypisane na znitowanych z taśmą blaszkach, w kształcie czworokątów lub kół. Decymetry są oznaczone przez dziurki, często z kreskami, półmetry przez kwadratowe lub rombowe blaszki. Piąty i piętnasty metr są wypisane na większych, dziesiąty na największej blaszce.



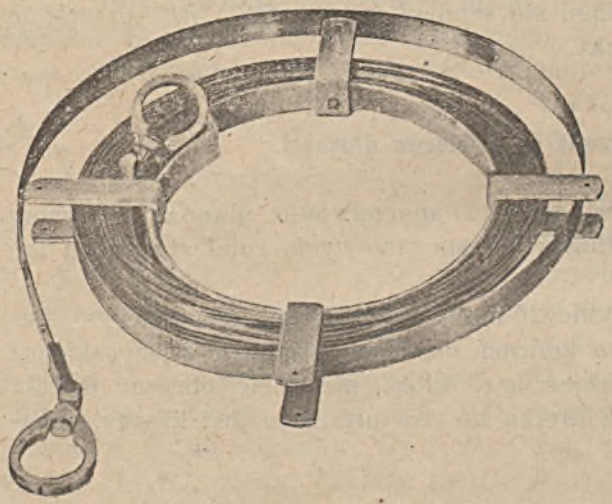
Rys. 86.



Rys. 87.

Często taśma jest zakończona przez okrągłe uszko, na którego obwodzie znajdują się kreski zerowe, stanowiące początek taśmy. Taśmy te są nawijane na pierścienie, zaopatrzone w 4 klamry, mające kształt litery U, znitowane dolną cześcią z pierścieniem. Taśma po użyciu nawija się na pierścień między bokami klamer, poczem zakręca się haczyk dla uniemożliwienia rozwijania się taśmy. Taśma, zakończona przez okrągłe uszko z kreską zerową, nakłada się przy pomiarze na kostur, t. j. drążek, zaopatrzony u dołu w zaostrzone okucie z poprzecznym sztyftem. Średnica drążka odpowiada średnicy uszka; wysokość wynosi około 1.20 *m*. Obydwa uszka końców taśmy nasuwają się przy pomiarze na kostury aż do poprzecznych sztyftów, które podtrzymują taśmę. Ostrze zaś pierwszego kostura zagłębia się w ziemię, poczem taśma naciąga się zapomocą przedniego kostura,

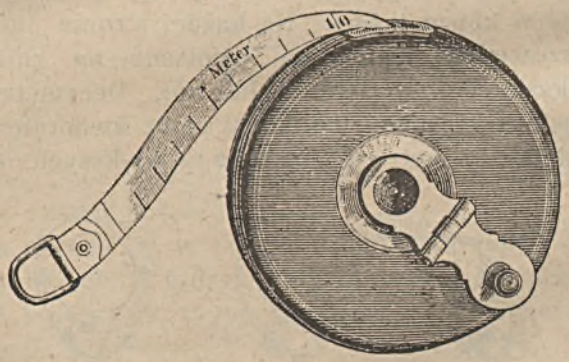
który wówczas dopiero zagłębiamy w ziemię. Ponieważ taśma ma być układana wzdłuż danej prostej, więc dla zachowania w toku pomiaru punktu, zaznaczonego przez kostur, przy przenoszeniu taśmy w celu jej następnego odłożenia na prostej, używane są szpilki stalowe, ustawiane w zagłębieniach, z których wyjęty zostaje kostur. Do każdej taśmy dołącza się komplet dziesięciu szpilek, na kółku stalowem, rozsuwającem się przy wkładaniu lub zdejmowaniu szpilek. Taśmy, zakończone przez płytkę z języczkiem, nie wymagają kosturów; zastępują je całkowicie szpilki, które przy wetknięciu w ziemię zakładane są na języczek płytki. Oczywiście wycięcie płytki (języczek) na taśmie ma takie wymiary, by kreska zerowa była przedłużeniem średnicy szpilki, gdy taśma jest naciągnięta (kostur rys. 89, szpilki—90).



Rys. 88.

Podział na taśmach jest zwykle dwustronny i idzie w jednakowym kierunku; są jednak taśmy o odwrotnych kierunkach podziału na obydwu stronach, co nieraz bywa źródłem wadliwych odczytów z taśmy.

Rulety są to tasiemki płócienne, lub stalowe, zwijane wewnątrz futerału,—są węższe od taśmy stalowej. Długość rulety wynosi 5, 10 lub 20 *m.* (rys. 88 a).

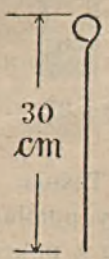


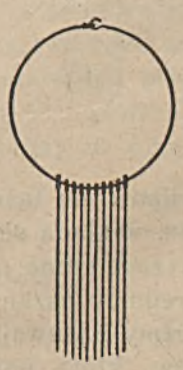
Rys. 88 a.



Rys. 89.

Łaty miernicze są to drążki drewniane z okuciami na końcach. Dają dokładniejsze wyniki niż taśmy. Najczęściej spotykamy łaty o przekroju płasko-owalnym, o zmniejszającej się ku końcom łaty powierzchni przekroju poprzecznego. Długość łat wynosi zwykle 5 *m.*; są jednak 3 i 4-metrowe łaty. Okucia są albo ostrzami, z których jedno jest pionowem, drugie poziomem, tak że przy układaniu łat do styku poziome





Rys. 90.

ostrze tylnej łaty dotyka pionowego ostrza przedniej, albo też okucia są płaskie, w kształcie kół. Podział na łatach jest oznaczony przez ćwieczki mosiężne, przytem większa ilość ćwieczków oznacza metry, mniejsza — połówki metrów, zaś pojedyńcze ćwieczki dają poszczególne decymetry. Drobniejsze części łaty odczytujemy z podziałki, przykładanej do łaty. Łaty sporządzane są z suchego drzewa, pomalowanego farbą olejną. Jedna łata z kompletu (2 co najmniej łaty) ma metry, zamalowane czerwoną i białą farbą, druga — czarną lub niebieską. Ostrza łat mają rozwartość 60°. Dla zabezpieczenia od rdzewienia, okucia smarujemy wazeliną. (Łaty — patrz rys. 91 i 92).

Są komplety łat, w których pierwsza łata jest zakończona ostrzami poziomemi, druga — ostrzami pionowemi.



Rys. 91.

§ 34. Komparacja miar.

Przed użyciem nowego przyrządu do pomiaru długości należy sprawdzić, czy nominalna długość przyrządu nie zawiera pewnego błędu. W tym celu sprawdzamy (porównywamy, komparujemy) dany przyrząd z miarą jednostkową. Dla porównania przyrządów do pomiaru długości, używanych przy zdjęciach linjowych czy innych na małych obszarach, stosujemy kopje metrów normalnych, dostarczane u nas przez firmę Gerlach w Warszawie. Kopje te nazywać będziemy również metrami normalnemi, jakkolwiek pod względem dokładności ustępują one znacznie oryginalnym metrom normalnym. Każdy metr normalny tego rodzaju ma załączony certyfikat, w którym podane jest równanie metra, wyrażone przeważnie w postaci

$$D = 1_m + k + c\,(t - t_0)$$

przytem k oznacza różnicę pomiędzy danym a oryginalnym metrem normalnym, c spółczynnik linjowej rozszerzalności stopu, z którego sporządzono dany metr, zaś $t - t_0$ określa różnicę między daną temperaturą a temperaturą t_0, przy której określono $D_0 = 1_m + k$.

Często spotkać możemy w sprzedaży metry normalne, które w certyfikacie nie posiadają wyrazu k, t. np. metr normalny Nr. 3300 a Państwowej Szkoły Mierniczej w Warszawie ma równanie:

$$D = 1_m + 0{,}011\,(t - t_0), \text{ przytem } t^0 = 18^0 C.$$

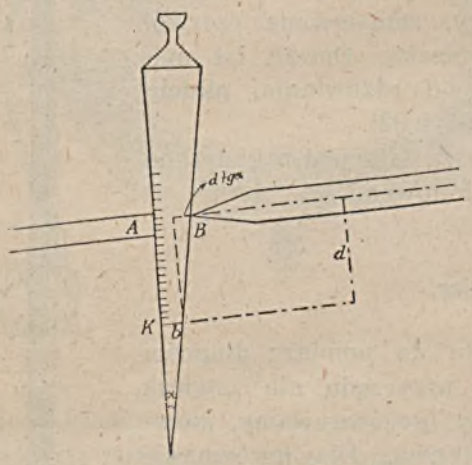
Metry takie są zakończone z jednej strony ostrzem poziomem, z drugiej — pionowem.



Rys. 92.

Do takich metrów normalnych dołącza się klin geodezyjny, zapomocą którego mierzymy drobne odległości między dwoma obok umieszczonemi ostrzami dwu metrów — pionowem i poziomem. Klin wyrabia się ze stali lub szkła; ścianki są dokładnie oszlifowane, zaś na jednej z nich naniesiony jest podział.

Rysunek 93 przedstawia widok z góry na boczne wsunięcie klina między ostrza pionowe i poziome dwu łat.



Rys. 93.

AB oznacza odstęp pomiędzy metrami normalnemi; b — grubość klina w punkcie K, oznaczoną przez 1-ą podziałkę na klinie; α—kąt dwuścienny między ściankami, tworzącemi klin. $AK = d$ odległość styku B od 1-ej podziałki K na klinie. Odczyt z klina przy AB winien być równym:

$$y = AB = b + d\,tg\alpha = b + cd.$$

Dla każdego klina b i $c = tg\alpha$ są stałemi, więc, zakładając co 1 *mm.* różne y, doliczymy kolejne d ze wzoru:

$$d = \frac{y - b}{c}$$

W taki sposób wycechowuje się klin; odczyty można brać do 0,1 *mm.*, a przy małych φ i do 0,01 *mm.*

Dla określenia długości łat, należy mieć przyrząd, dający stałą odległość C, nieco większą od długości łaty, którą to odległość wyznaczy się z porównania z metrami normalnemi, a następnie porównywa się z długością łaty (rys. 94).

W najprostszej swej postaci przyrząd ów, zwany komparatorem, składa się z ustawionych w równych odległościach słupów S_1, S_2, S_3, na których układa się gładka żerdź Z, dostatecznie gruba, spoczywająca swemi końcami na bocznych, środkiem — na środkowym słupie. Na bocznych słupach są przytwierdzone podstawki p pod ostrza komparatora, lewe pionowe O_1 i prawe poziome O_2; obydwa ostrza są przyśrubowane do podstawek p. Poziome ostrze O_2 jest ustawione prostopadle do płaszczyzny pionowej, przechodzącej przez lewe pionowe ostrze komparatora i środek prawego poziomego ostrza. Ostrza komparatora odległe są o długość łaty i odcinek, krótszy od największej grubości klina.

Na żerdzi Z wykreśla się ołówkiem ślad wymienionej powyżej płaszczyzny, a z obydwu stron tego śladu wykreśla się po dwie równoległe proste, których odległości od śladu równe są każda połowie szerokości metra normalnego i łaty. Te proste posłużą do odpowiedniego ułożenia metrów normalnych i łaty przy komparacji.

Określenia długości łat dokonywamy w następujący sposób. Rozpatrzmy wypadek 5-metrowej łaty: określamy stałą C komparatora (odległość między jego ostrzami) zapomocą kolejnego układania metrów normalnych w linjach, wykreślonych na żerdzi. Mianowicie (patrz plan kom-

paratora) do lewego ostrza komparatora przykładamy ściśle poziome ostrze pierwszego metra; do ostrza pionowego metra dosuwamy poziome ostrze drugiego metra, pozostawiając między niemi małą przerwę, którą wymierzamy klinem; następnie pierwszy metr przenosimy do położenia trzeciego i znów przerwę między metrami wymierzamy klinem, poczem drugi metr przenosimy do położenia czwartego, wymierzając przerwę klinem, a wreszcie pierwszy metr przenosimy do położenia piątego i wymierzamy klinem odstępy między metrami i przy ostrzu komparatora. Niech wymiary tych przerw będą b_1, b_2, b_3, b_4 i b_5; długość pierwszego metra, obliczona przy średniej temperaturze w czasie układania, niech wynosi a_1, drugiego metra a_2.

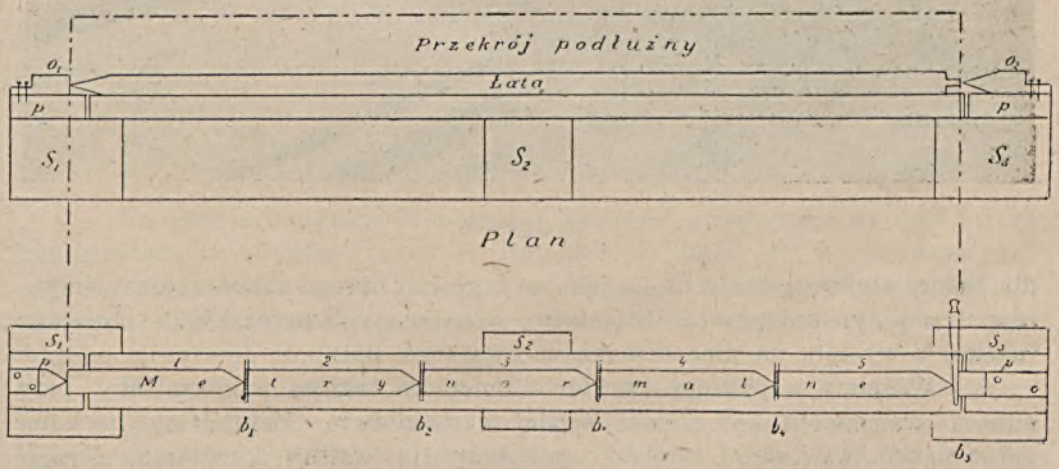
Jeżeli oznaczymy:

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = [b],$$

wówczas odległość między ostrzami komparatora:

$$C = 3a_1 + 2a_2 + [b].$$

Pomiar wielkości C uskuteczniamy kilkakrotnie; średni wynik daje odległość między ostrzami.



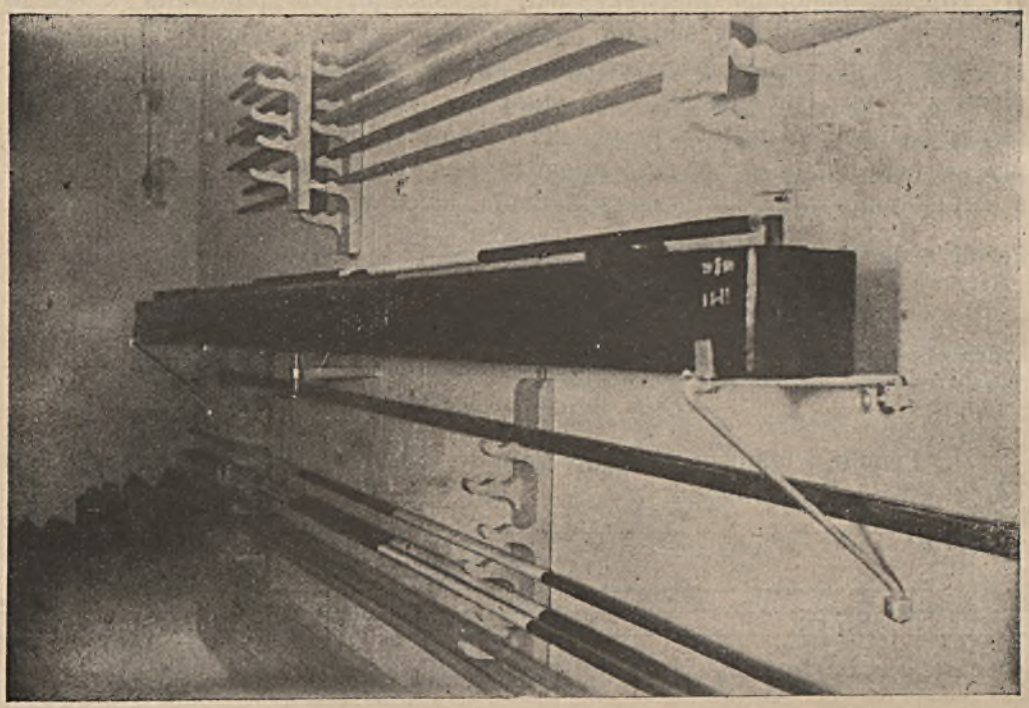
Rys. 94.

Określanie długości łaty.

Następnie (patrz przekrój) układamy na komparator badaną łatę, przysuwając ją szczelnie ostrzem poziomem do pionowego ostrza komparatora; pomiędzy ostrzem drugiego końca łaty, a poziomem ostrzem komparatora wytwarza się przerwa, której wymiar, wzięty zapomocą klina, niech wyniesie d_1. Wówczas, jeżeli długość łaty nazwiemy D, będzie $D = C - d_1$. Przesuńmy łatę w ten sposób, aby zetknęły się te ostrza komparatora i łaty, pomiędzy któremi poprzednio była przerwa; obecnie przerwa powstanie na drugim końcu komparatora; wymiar tej przerwy z klina niech wyniesie d_2, wówczas $D = C - d_2$, łącząc zaś obydwa spostrzeżenia, otrzymamy ze średniej arytmetycznej na długość łaty wynik:

$$D = C - \frac{d_1 + d_2}{2}$$

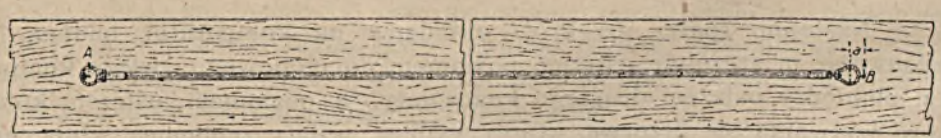
Określanie długości taśm stalowych wymaga wyznaczenia stałej długości, niewiele odbiegającej od 20 *m*. Z tą właśnie długością (długością komparatora) porównywamy daną taśmę stalową. Budowa komparatora



Rys. 94a. *)

dla taśmy stalowej uzależniona jest od tego lub innego zakończenia taśmy— rozpatrzmy typ komparatora dla taśm, zakończonych przez kółko mosiężne (uszko) z wyciętą na niem kreską zerową (rys. 95).

Wbijamy w podłogę korytarza bolec w takiem miejscu, aby przy silnem szarpnięciu poz stawał ściśle nieruchomym. Zakładamy na bolec jedno uszko rozwiniętej taśmy i wyciągamy ją wzdłuż korytarza. Drugie uszko taśmy łączymy z dynamometrem i naciągamy taśmę z siłą 10 *kg*. W tym czasie dwie osoby jednocześnie oznaczają na podłodze położenie



Rys. 95.

zerowych kresek obydwu końców taśmy. Przy każdym końcu taśmy otrzymamy w ten sposób po dwa punkty na końcach zerowych średnic każdego uszka. Oznaczamy środki odcinków, łączących każdą parę tych punktów, i odsuwamy taśmę. Prosta, łącząca te środki, jest długością *L* taśmy. Naciągamy wybielony kredą sznurek między otrzymanemi środkami obydwu

*) Rys. 94a przedstawia komparator dla łat Biura Pomiarów m. st. Warszawy.

uszek, podnosimy sznurek zlekka ku górze i raptownie go opuszczamy — otrzymamy biały ślad. Wymierzamy długość tej prostej wzdłuż otrzymanego śladu metrami normalnemi, lub sprawdzoną linją metalową o ściętej krawędzi, na której oznaczony jest dwiema rysami metrowy odcinek.

Obliczamy długość l użytego metra przy temperaturze komparacji.

Po odłożeniu dwudziestego metra, wymierzamy odległość od jego końca do końca taśmy cyrklem lub wprost milimetrową podziałką. Jeżeli ten odcinek leży na przedłużeniu dwudziestego metra, wówczas, oznaczając jego długość przez a,

mamy:

$$L = 20l + a;$$

jeżeli zaś koniec taśmy znajduje się na odcinku, zajętym przez dwudziesty metr,

wówczas:

$$L = 20l - a$$

wyrazi długość taśmy.

Należy zanotować temperaturę w czasie komparacji i, przy użyciu taśmy po tej komparacji, poprawki na temperaturę pomiaru obliczać będziemy w porównaniu do temperatury komparacji.

Na rys. 95 B oznacza położenie końca dwudziestego metra.

Podobnie ustalamy długość taśmy, zakończonej języczkami.

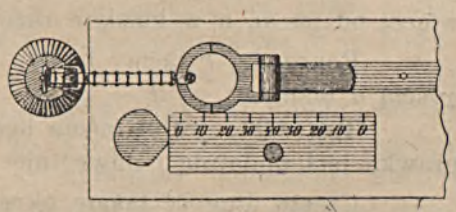
Prof. Eggert podaje następujący typ komparatora:

Na cokole budynku 22-metrowej długości umocowane są dwa ostrza komparatora w odległości 20,04 m. Odległość ta ściśle jest wymierzona przy użyciu metrów normalnych i klina geodezyjnego. Uszka rozwiniętej taśmy, naciągniętej przez struny, przerzucone przez bloki w końcach muru, a obciążone ciężarami, znajdują się przy bolcach wewnątrz.

Taśma ułożona jest równolegle do prostej, łączącej środki ostrzy bolców. Sposób pomiaru odstępów między środkiem każdego uszka a ostrzem bolca uwidocznia rys. Nr. 96, na którym widzimy linijkę z nacechowanym podziałem, przyłożoną stycznie do bolca i uszka. Notujemy odczyty l_1 i l_2 z linijek przy obydwu końcach.

Jeżeli przez m_1 i m_2 oznaczymy odstępy zer na obydwu linijkach od ich krańców, przykładanych do ostrzy, wówczas długość taśmy wyniesie.

$$L = 20.04m - (l_1 + l_2 + m_1 + m_2)$$



Rys. 96.

Jest to pierwsze określenie długości taśmy; drugiego i następnych określeń dokonany, posuwając nieco za każdym razem taśmę wzdłuż komparatora przez opuszczenie lub podniesienie o kilka mm jednego z ciężarków.

W ten sposób otrzymamy szereg spostrzeżeń, których wyniki nie powinny się różnić więcej, niż o części milimetra.

Średnia arytmetyczna wszystkich takich wyników daje długość taśmy.

Ten typ komparatora dogodnym jest w wypadku licznych komparacyj.

§ 35. Uwzględnianie poprawki długości taśmy lub łaty przy pomiarze.

Jeżeli długość miary wynosi l, zaś poprawka, otrzymana z komparacji, jest $\pm \triangle l$, przytem znak $+$ wskazuje, że nasza miara jest dłuższą o $\triangle l$ od nominalnej l i odwrotnie, to ponieważ dłuższa miara układa się w mierzonej prostej mniejszą ilość razy, przez co wynik pomiaru długości wypadłby mniejszy, więc do otrzymanej długości dodajemy poprawkę $\triangle l$, wziętą ze znakiem z komparacji, mnożoną przez ilość ułożeń miary.

Naprzykład, z komparacji okazało się, że długość taśmy stalowej wynosi nie 20 m., a 20,014 m. Jest więc $\triangle l = + 0.014\ m$. Jeżeli taśma w mierzonym odcinku ułożona została 25 razy, to długością prostej jest

$$h = (20m \times 25) + (0.014m \times 25) = 500m + 0.35m = 500.35m.$$

W braku łat i metrów normalnych jedynym sposobem, którym możemy sprawdzić daną taśmę, jest porównanie jej przez przyłożenie do innej, już sprawdzonej, przy jednoczesnem i jednakowem naciągnięciu obydwu. Różnicę długości określamy zapomocą cyrkla i podziałki. Z większym pożytkiem — gdyż jednocześnie sprawdzimy poszczególne metry na taśmie — możemy, w braku sprawdzonej taśmy, obrać nieco inne postępowanie, mianowicie: dać rozpięcie 1-metrowe cyrklowi drążkowemu (zapomocą długiej metalowej podziałki) i odkładać na taśmie od jej początku kolejne metrowe odcinki aż do końca. Takiego sprawdzania należy dokonać co najmniej dwukrotnie w przeciwnych kierunkach, sprawdzając również od czasu do czasu na podziałce stan cyrkla drążkowego.

Zwykle fabryki narzędzi mierniczych sprzedają dość dokładnie wykonane taśmy; jednak i wówczas może zajść konieczność określenia długości taśmy: mianowicie, taśma może pęknąć i być na miejscu zeszłukowana zapomocą dwu blaszek, znitowanych z taśmą z obydwu stron pęknięcia. Wtedy długość naprawionej taśmy różnić się będzie mniej lub więcej od 20 m, a w każdym razie długość jej należy określić.

Poprawką r taśmy będzie różnica między 20 m a określoną długością d taśmy: $r = d - 20\ m$.

Tak więc, jeżeli taśma będzie dłuższą od normalnej długości, poprawka jest dodatnią i odwrotnie.

Często długość taśmy określamy zapomocą łat, mianowicie: w równym terenie od szpilki, wbitej w palik, odmierzamy taśmą długość, równą wielokrotnej 20 m; na końcu otrzymanego odcinka wbijamy pal i zagłębiamy weń igłę przy kresce, wskazującej koniec taśmy (O). Ten sam odcinek wymierzamy ściśle od środka szpilki łatami dwukrotnie; jeżeli średnia arytmetyczna z obydwu wyników wynosi l, zaś taśma była początkowo ułożona n razy, wówczas długość taśmy jest równa $\frac{l}{n}$.

§ 36. Pomiar długości taśmą stalową.

Dla pomiaru długości prostych taśmą stalową potrzebny jest komplet dziesięciu szpilek stalowych, oraz kilka tyczek. Do pomocy technik powinien mieć 4 robotników, z których dwóch pracuje przy taśmie, trzeci przenosi szpilki, czwarty przenosi i ustawia tyczki.

Pomiar jest poprzedzony przez wytyczenie prostej żalonami, lub zwykłemi tyczkami. W tym celu ustawiamy się za tyczką, stojącą nad początkowym punktem (lub za nim, ściśle na linji, tuż przy paliku, wyznaczającym początek mierzonej prostej); tak samo ustawia tyczkę robotnik na końcu prostej, poczem posuwa się ku nam o 50 kroków i ustawia zgodnie z podawanemi sygnałami tyczkę na linji (tyczenie przed siebie). Na dłuższych prostych co 150 kroków według naszych wskazówek ustawia dalsze tyczki.

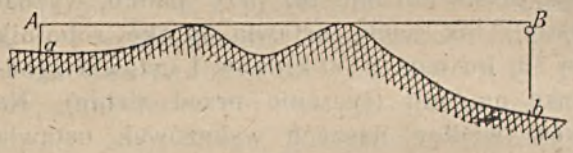
Gdy prosta jest wytyczona, przystępujemy do pomiaru.

W tym celu, rozwiniętą w kierunku prostej taśmę przykładamy kreską zerową do punktu początkowego prostej i pierwszy robotnik przyciska ją tak mocno, by nie mogła się przesunąć. Drugiego ustawimy przez sygnalizowanie ręką (w lewo lub w prawo) na linji tyczek; wówczas robotnik ten potrząsa taśmą, aby wyciągnęła się dokładnie i mocno ją naciąga, poczem przez ostatni ruch ręką jeszcze raz umieszczamy koniec taśmy w linji. Trzeci robotnik podaje szpilkę drugiemu, który zakłada ją pionowo w języczek taśmy, jeszcze raz naciąga ku sobie i wbija szpilkę w ziemię, krzycząc „jest“; pierwszy robotnik zwalnia taśmę, drugi zdejmuje języczek ze szpilki i posuwają się w kierunku linji, dopóki pierwszy robotnik nie dojdzie do wetkniętej szpilki i przez okrzyk: „stać“ zatrzymuje drugiego oraz zakłada taśmę języczkiem na szpilkę. Sygnałami, podawanemi ręką w prawo lub w lewo, umieszczamy przedni koniec taśmy w linji, poczem drugi robotnik, jak poprzednio, wbija szpilkę w ziemię i znów posuwają się obydwaj naprzód, przyczem pierwszy robotnik zabiera ze sobą pierwszą szpilkę. Analogicznie postępujemy dalej, do czasu, gdy robotnicy na przodzie pozostaną bez szpilek; wówczas w ręku 1-go robotnika powinno być dziewięć szpilek, zaś dziesiąta jest na tylnym końcu taśmy zagłębiona w ziemię. Znów taśma naciąga się ściśle w linji, robotnik na przodzie przyciska początek (zero) taśmy do ziemi, a wówczas trzeci robotnik zabiera wszystkie dziesięć szpilek i przynosi drugiemu, który jedną z nich wbija przez języczek w ziemię. Notujemy w karnecie krzyżykiem tę pierwszą zmianę szpilek. Przypuśćmy, że wreszcie taśma ułożyła się przy końcu prostej; przytem mamy odnotowane dwa krzyżyki (dwie zmiany szpilek), u pierwszego robotnika razem ze wbitą w ziemię jest siedem szpilek, zaś z taśmy przy końcu prostej odczytaliśmy jedenaście metrów 5 decymetrów i na oko oszacowaliśmy pół decymetra. Długość więc danej prostej wyniesie:

dwie zmiany szpilek, każda po 10, razem 20 szpilek w odstępach po	20*m*	= 400*m*
siedem szpilek przy pierwszym robotniku: 7 „	20*m*	= 140*m*
odczyt z taśmy		= 11,55*m*
Razem . .		551,55*m*

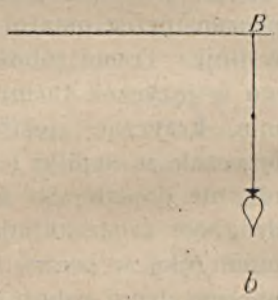
Sprawdzamy, czy drugi robotnik ma przy sobie 3 szpilki, gdyż tyle brakuje do kompletu pierwszemu robotnikowi. Należy uważać, biorąc odczyt z taśmy, na blaszkę przy dziesięciu metrach na taśmie, gdyż, jeżeli mamy w użyciu taśmę z dwustronnym podziałem w przeciwnych kierunkach, to łatwo zamiast jedenastu odczytać dziewięć metrów i t. p.

Pomiar taśmą z kosturami tem się jedynie różni od poprzedniego, że taśmy są nasadzone uszkami na kostury, aż do poprzecznych sztyftów u dołu kostura, i ustawienia w linji dokonywamy zapomocą pionowo utrzymywanych kosturów, oraz ostrze przedniego kostura, po ustawieniu w linji i naciągnięciu taśmy, wbijamy w ziemię. Szpilkę zaś w gruncie zwięzłym zagłębiamy przy sztyfcie kostura, gdyż tylny kostur, po zajęciu miejsca przedniego, wprowadzimy w utworzone przez przedni zagłębienie. Szpilka zaś gra wówczas rolę świadka, ułatwiającego odnalezienie miejsca ustawienia kostura. W gruncie zaś piaszczystym lub błotnistym szpilkę ustawiamy w zagłębieniu, utworzonem przez kostur.

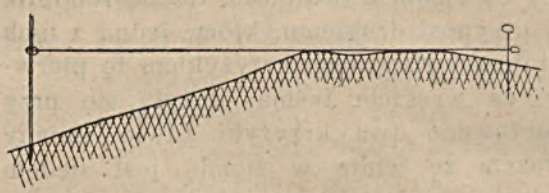


Rys. 97.

Podobny przebieg ma pomiar, gdy teren jest prawie równy, o stałem pochyleniu. Często jednak tak nie jest i przedni koniec taśmy, naciągniętej do poziomu na oko, może się znaleźć dość wysoko nad ziemią. Wówczas szpilkę zawieszamy pod zerem przedniego końca taśmy ostrzem wdół i puszczamy pionowo na ziemię. (Rys. 97). Ostrze szpilki wbije się w grunt, względnie wskaże rzut poziomy *b* końca taśmy; lepiej jest tę czynność wykonać zapomocą pionu, zwisającego pod końcem taśmy (zerem). Punkt, wskazany przez pion, będzie punktem ustawienia szpilki. W czasie silnego wiatru ustawiamy pionowo przy końcu taśmy oś żalonu i wówczas ostrze żalonu daje punkt, będący rzutem końca taśmy (rys. 99).



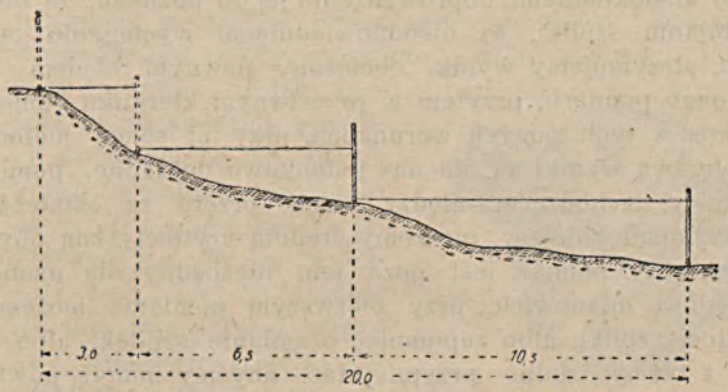
Rys. 98.


Rys. 99.

Zapomocą żalonu, pionowo stojącego przy tylnej szpilce, doprowadzamy taśmę do poziomu wtedy, kiedy jej początek powinien być podniesiony. Jeżeli zaś spady na linji taśmy są tak duże, że te sposoby okażą się niedostateczne, wówczas odrzutujemy kolejno części taśmy, a więc co np. 5 metrów lub 10 metrów (rys. 100).

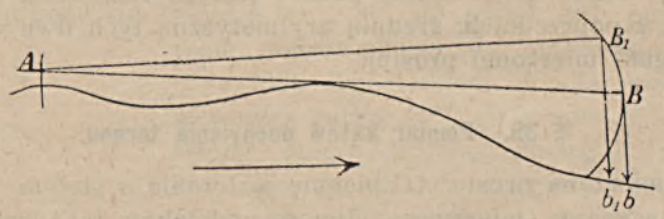
Przy pionowaniu punktu należy pamiętać, że właściwem położeniem ostrza pionu jest jego położenie, najdalej w kierunku pomiaru wysunięte. Tak więc koniec taśmy *B* podnosimy i opuszczamy dopóty, dopóki ostrze

pionu nie wysunie się najbardziej w kierunku pomiaru, gdyż koniec taśmy poziomo naciągniętej jest bardziej odsunięty od początku taśmy, niż taśmy, odchylonej od poziomu (rys. 101).



Rys. 100.

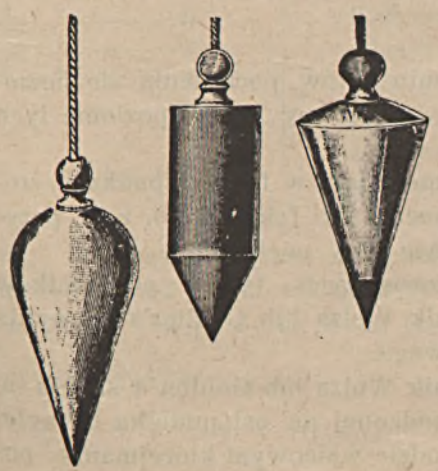
Pomiaru długości każdej prostej należy dokonywać dwukrotnie w przeciwnych kierunkach.



Rys. 101.

§ 37. Pion.

Wspomnieliśmy poprzednio o pionie; przyrząd ten, z którym często mamy do czynienia, jest to ciężarek metalowy, zakończony stożkowem ostrzem, a zaopatrzony w główkę metalową, wkręcaną w pion.



Rys. 102.

Przez otwór w główce, leżący na osi pionu, nawleka się sznurek, zawiązywany u dołu w węzeł, który uniemożliwia wyciągnięcie sznurka. Ostrze zawieszonego na sznurku pionu w stanie spokoju powinno leżeć na przedłużeniu sznurka, co sprawdzamy przez skręcanie; wówczas ostrze pionu, w czasie jego obrotu dokoła osi, powinno znajdować się stale nad jednym punktem, a nie zataczać koła.

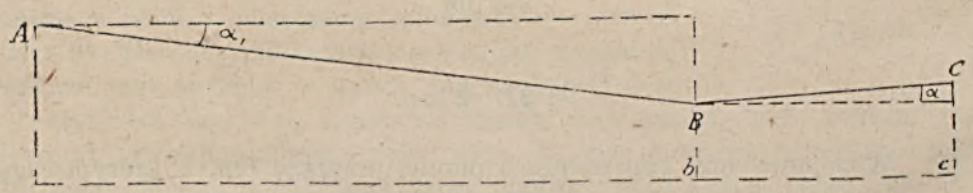
§ 38. Dwukrotne pomiary długości.

Zwykle długość każdej prostej należy mierzyć dwukrotnie, a to z tego względu, że dzięki a) niedokładności układania taśmy w danym kierunku, b) niedokładnemu doprowadzeniu jej do poziomu, c) nieściśle pionowemu wbijaniu szpilki, d) nieodpowiedniemu wyciąganiu taśmy i t. p. przyczynom, otrzymujemy wynik, obciążony pewnym błędem. Dokonanie zaś podwójnego pomiaru, przytem w przeciwnym kierunku, daje dwa wyniki, uzyskane w tych samych warunkach, przy tej samej metodzie pracy. Ponieważ obydwa wyniki są dla nas jednakowo dokładne, pomimo pewnej drobnej różnicy, zachodzącej między niemi, przeto za ostateczny wynik, jako najprawdopodobniejszy, bierzemy średnią arytmetyczną obydwu.

Dwukrotny pomiar jest poza tem niezbędny dla usunięcia t. zw. grubych błędów; mianowicie przy pierwszym pomiarze możemy albo nie policzyć jednej szpilki, albo zapomnieć o zmianie szpilek, albo omylić się w odczycie z taśmy; trudno przypuszczać, abyśmy mogli powtórzyć taki sam gruby błąd przy drugim pomiarze w odwrotnym kierunku. Jeżeli więc dla przeciętnego boku (do 300 *m*) dwa wyniki różnić się będą o jeden lub kilka (błąd odczytu), dwadzieścia (szpilka), czy dwieście (zmiana szpilek) metrów, wówczas w jednym z wyników ukryty jest gruby błąd i, dla wykrycia tego błędu, powtarzamy pomiar jeszcze raz; trzeci wynik zgadza się z jednym z poprzednich; średnią arytmetyczną tych dwu wyników uważamy za długość mierzonej prostej.

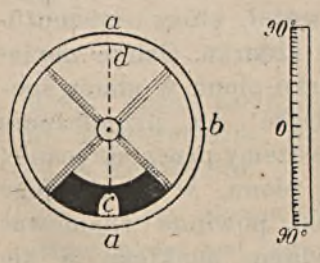
§ 39. Pomiar kątów pochylenia terenu.

Gdy mierzona prosta AC biegnie w terenie o stałem lub zmiennem pochyleniu, wówczas mierzymy długości odcinków tej prostej AB i BC



Rys. 103.

o stałych spadkach i następnie, po określeniu kątów pochylenia do poziomu odcinków AB i BC, t. j. kątów α_1 α_2, obliczamy rzuty poziome tych odcinków $ab = AB \cos \alpha_1$ i $bc = BC \cos \alpha_2$.



Rys. 104.

Niezbędnem jest w tych wypadkach stosować t. zw. pochylniki (eklimetry), t. j. przyrządy, określające kąty pochylenia.

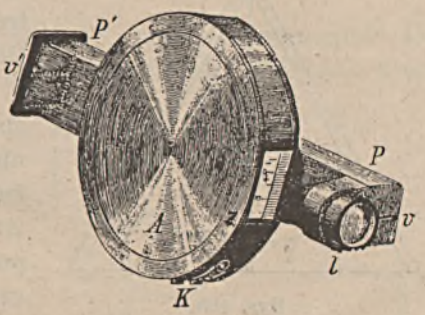
Do najprostszych typów pochylników należą: pochylnik Wolza lub Goulier'a i zwykła i zwykła śródwaga.

Pochylnik Wolza lub Goulier'a składa się z dwu części: osadzonej na osi pudełka okrągłej tarczy, na obwodzie walcowym którejmamy podział na stopie, oraz z t. zw. celowników z lupą.

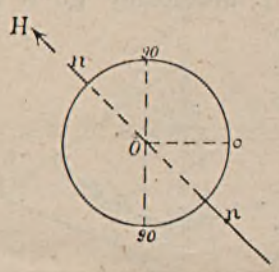
Tarcza może obracać się na osi pudełka, wewnątrz którego się znajduje; u dołu tarcza jest zaopatrzona w ciężarek c, dzięki któremu jedna średnica tarczy (aa), przechodząca przez środek ciężkości balastu c, zawsze ustawia się do pionu, gdy pudełko przyrządu trzymamy w ręku w płaszczyźnie pionowej. Połowa obwodu zewnętrznego tarczy, który ma kształt walcowy, jest podzielona na stopnie w taki sposób, że na końcach średnicy aa mamy po 90^0, zaś na końcu promienia prostopadłego do aa jest kreska 0^0. Przekrój pudełka pp wykazuje, że na osi oo osadzona jest tarcza tt, o obwodzie walcowym ww, z ciężarkiem c. Dwie sprężynki ss, przymocowane do ścianek pudełka, ściskając tarczę, utrzymują ją w stanie nieruchomym; lecz, po naciśnięciu guziczka g, sprężynki odsuwają się ku ściankom i tarcza wówczas podlega działaniu ciężarka c, ustawiając się średnicą $90^0 - 90^0$ do pionu, gdy pudełko przyrządu doprowadzimy do pionowego położenia. (Rys. 106). Z pudełkiem A połączona jest pusta wewnątrz rurka PP', w ściance której z jednej strony mamy poziomą szparę v, dosyć wąską, zaś w ściance z przeciwległej strony, w szparze naciągnięty jest poziomo cienki drucik v'. Po naciśnięciu guziczka K, obracamy cały przyrząd w pionowej płaszczyźnie dopóty, dopóki na linji drucik v' szpara v nie zobaczymy punktu, na który chcemy celować. Wówczas, patrząc przez lupę l, ujrzymy przez otwór zz w pudełku tę kreskę podziału, która leży na linji celowników vv'. (Rys. 107). Całe stopnie odczytamy bezpośrednio, zaś części stopnia na oko. Ponieważ średnica 90^0—90^0 jest pionowa, a promień O^0, jako do niej prostopadły, leży w poziomie, przeto odczyt daje wielkość kąta α pochylenia prostej nA (linja celu) do poziomu.

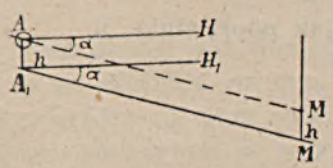


Rys. 105.



Rys. 106.





Rys. 107.

Oczywiście, gdy stoimy na spadzie w punkcie A, celować winniśmy na punkt M tyczki, oznaczony na niej przez odmierzenie od ziemi tego samego odcinka h, o który przyrząd w A jest wzniesiony nad p. A_1 na ziemi (rys. 107).

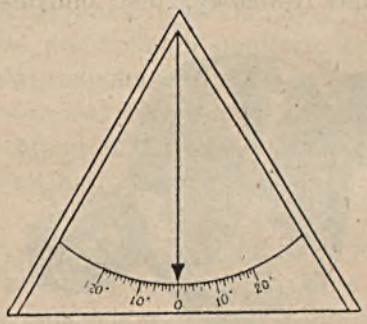
Bowiem wówczas:

$$AM \parallel A_1 M_1 \text{ i } \sphericalangle HAM = \sphericalangle H_1 A_1 M_1 = \alpha,$$

t. j. pochylenie linji celu równa się pochyleniu terenu na danym odcinku.

§ 40. Śródwaga.

Śródwaga jest równoramiennym trójkątem drewnianym, który przy wierzchołku posiada wycinek koła, podzielony na stopnie, oraz pion, zawieszony przy wierzchołku trójkąta, będącego środkiem wycinka. Podział jest naniesiony w taki sposób, że, gdy podstawa △-ta leży na płaszczyźnie poziomej, zaś sam trójkąt w pionowej, pion wskazuje 0^0 podziału. Od 0^0 w obydwu kierunkach podział rośnie. 0^0 powinno leżeć na wysokości trójkąta. Aby sprawdzić, czy 0^0 jest we właściwy sposób naniesione, ustawiamy △ na dowolnej płaszczyźnie. Pion wskaże pewien odczyt β. Ponieważ $AB \perp Co$, zaś $CL \perp AH$, gdzie AH jest poziomą prostą leżącą na przedłużeniu płaszczyzny △ — a, przeto (rys. 109).



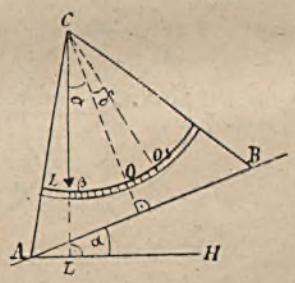
Rys. 108.

$$\sphericalangle LCo = \sphericalangle BAH = \alpha,$$

t. j. kątowi pochylenia AB do poziomu. Jeżeli więc

$$\sphericalangle LCo = \alpha, \text{ zaś na } Co \text{ leży } 0^0,$$

to pion CL wskazać powinien α; aby się przekonać, czy odczytane β jest kątem pochylenia α, odwróćmy trójkąt o 180^0, t. j. przełóżmy go w ten sposób, by bok BA zajął położenie, odpowiadające poprzednio AB; ponieważ linja Co, która jest wysokością △-ta, zająć powinna teraz położenie ∥-łe do poprzedniego, więc znów (rys. 110):



Rys. 109.

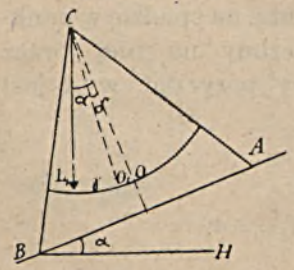
$$L_1 Co = ABH = \alpha,$$

t. j. odczyt z pionu winien być ten sam, co poprzednio. Jeżeli otrzymamy inny odczyt γ, wskazywać to będzie, że 0^0 nie leży na prostopadłej do podstawy AB, przechodzącej przez punkt zawieszenia pionu, lecz odległe jest od właściwego położenia o łuk oo_1; po przełożeniu więc △-a, nie odczytamy już, jak poprzednio, β.

W 1-em i 2-em położeniu z rysunku mamy:

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha + \delta \\ \gamma &= \alpha - \delta \end{aligned} \quad (1)$$

dodając obydwa równania, otrzymamy:



Rys. 110.

$$\beta + \gamma = 2\alpha$$

więc

$$\alpha = \frac{\beta + \gamma}{2}$$

t. j. kąt pochylenia, określany przy dwu położeniach śródwagi, równa się średniej arytmetycznej obydwu odczytów.

Kąt $oCo_1 = \delta$ nazywamy błędem podziału śródwagi; odejmując od pierwszego równania drugie (1),

mamy:

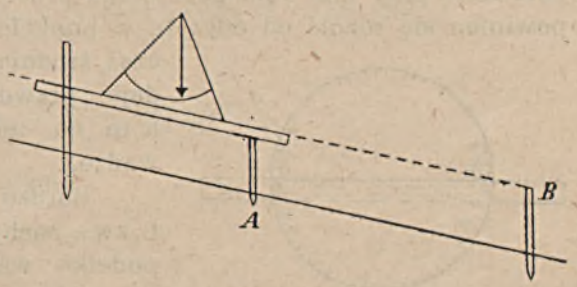
$$\beta - \gamma = 2\delta$$

skąd:

$$\delta = \frac{\beta - \gamma}{2} \text{ t. j.}$$

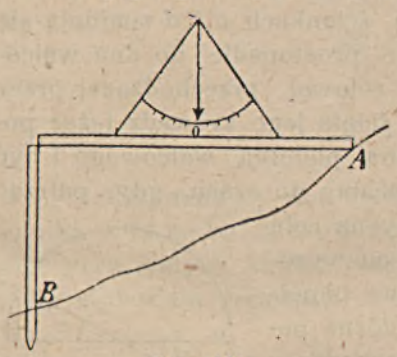
błąd podziału śródwagi równa się połowie różnicy odczytów w obydwu jej położeniach.

Jeżeli $\delta > 0$, znaczy to że $\beta > \gamma$, a więc 0^0, podziału wysunięte jest o łuk δ ku wierzchołkowi B $\triangle$-a i wobec tego absolutną wielkość błędu należy dodawać do odczytów z pionu, wysuniętych ku B, i odejmować od odczytów, wysuniętych ku A, niezależnie od położenia $\triangle$-a i pochylenia jego podstawy.



Rys. 111.

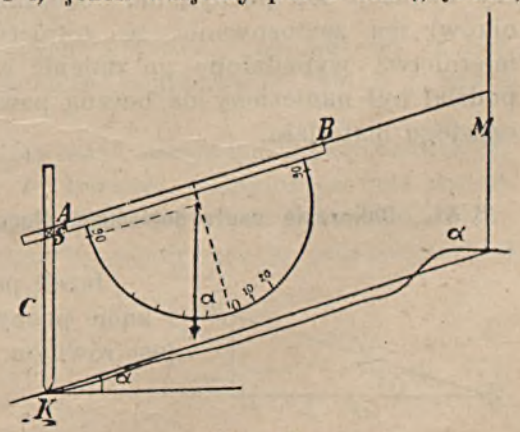
Użycie śródwagi jest następujące: układamy dłuższy linjał w kierunku spadu, opierając go na palu A, i, przesuwając drugi koniec linjału stycznie do pionowo ustawionej tyczki, patrzymy wzdłuż jego górnego brzegu, aż wreszcie na przedłużeniu krawędzi linjału spostrzeżemy wierzchołek pala B, wystający ponad ziemią więcej niż A o grubość linjału. Wówczas przyciskamy linjał do tyczki, ustawiamy śródwagę i przy dwu jej położeniach notujemy odczyty; kątem pochylenia będzie średnia arytmetyczna odczytów (rys. 111).



Rys. 112.

Następnem zastosowaniem śródwagi jest układanie łaty, czy linjału, do poziomu. Mianowicie układamy łatę drewnianą jednym końcem na stałej podstawie A, zaś drugi podnosimy lub opuszczamy do czasu, gdy pion na sprawdzonej śródwadze wskaże 0^0. Spód linjału jest wówczas w poziomie i, jeżeli wbijemy pal B tak głęboko, że po ułożeniu na nim i na A łaty ze śródwagą, pion wskaże 0^0, wówczas znaczy to, iż wierzchołki pali B i A leżą w poziomie (rys. 112).

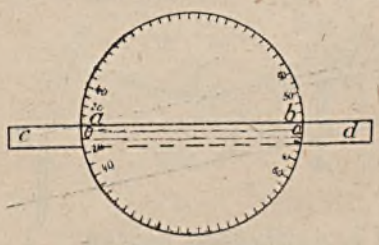
Rys. 113: Podobnym do śródwagi przyrządem jest zwykły pochylnik. Składa się z półkola, przymocowanego do linjału w ten sposób, że promień zerowy półkola, jest prostopadłym do ściętej krawędzi AB linjału. Podział na półkolu biegnie od 0^0 do 90^0 w obydwu kierunkach ku linjałowi. Średnica 90^0—90^0 pół-



Rys. 113.

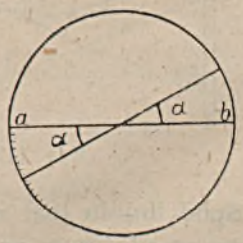
kola jest || do AB. Linjał przykręca się do żerdki C zapomocą śrubki S. Jeżeli chcemy określić pochylenie linji KL terenu, ustawiamy w L tyczkę, na której oznaczamy punkt M tak, by jego wysokość nad ziemią równą była wysokości śrubki S na żerdce C. Obracając linjał AB w pionowej płaszczyźnie, celujemy przez AB do punktu M, zmieniając pochylenie AB. Wówczas śrubkę S przykręcamy i pion, zawieszony w środku półkola, wskaże na jego obwodzie odczyt, równy kątowi pochylenia prostej KL do poziomu, o ile 0^0 i punkt zawieszenia pionu znajdują się na właściwem miejscu.

Sprawdzimy ten pionownik przez przeniesienie go do punktu L i pomierzenie przy nim kąta pochylenia prostej LK. Odczyt w punkcie L nie powinien się różnić od odczytu w punkcie K; jeżeli różnica zachodzi, wówczas średnia artmetyczna obydwu odczytów daje prawdziwą wielkość kąta pochylenia, a to na tej samej podstawie, jak w śródwadze.



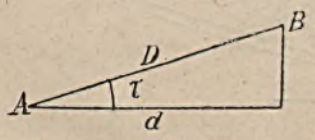
Rys. 114.

Bardzo prostym typem pochylnika jest t. zw. pochylnik wodny. Wyobraźmy sobie pudełko walcowe o nieznacznej wysokości ze szklaną przykrywką. Średnica ab jest wyznaczona na obwodzie dna przez kreski 0^0—0^0, od których w obydwu kierunkach rośnie podział do 90^0. Pudełko jest złączone z linjałem, lub innym pudełkiem w kształcie graniastosłupa, w którego ściankach c i d znajdują się 1) szpary, 2) druciki lub włosienie naciągnięte prostopadle do dna walcowego pudełka; prosta ab leży w płaszczyźnie celowej, przechodzącej przez włosienie; w wypadku zastosowania linjału — ścięta jego krawędź leżeć powinna z prostą ab w płaszczyźnie ⊥-ej do dna pudełka walcowego i być do prostej ab równoległą. Przyrząd cały obracamy do czasu, gdy, patrząc przez krawędź linjału, lub włosień, znajdziemy na celu punkt, umieszczony nad określanym spadem na wysokości naszego oka. Ponieważ pudełko walcowe napełnione jest cieczą ściśle do połowy, więc górna powierzchnia cieczy daje kierunek poziomu, przechodzący przez środek pudełka. Kreska podziału na poziomie cieczy wskazuje kąt pochylenia. Pochylnik ten (bez celowników) ma zastosowanie w lotnictwie; dla potrzeb miernictwa wypadałoby go zmienić w ten sposób, by podział był naniesiony na boczną powierzchnię walca, wykonaną z przezroczystego materjału.



Rys. 115.

§ 41. Obliczenie rzutu poziomego długości prostej o znanym kącie pochylenia.



Rys. 116.

Jeżeli pomierzono prostą AB o długości D i kącie pochylenia τ, wówczas rzut tej długości jest równym:

$$d = D \cos \tau$$

Załóżmy $D = 1500\ m.$ $\tau = 30'$

log 1500	3.176 09
log cos τ	9.999 98
log d	3.176 08
d	1499,93

Określmy rzut poziomy w inny sposób, mianowicie zapomocą poprawki, t. j. różnicy r pomiędzy pomierzoną a odrzutowaną na poziom długością:

$$r = D - d = D - D \cos \tau = D(1 - \cos \tau) = 2D \sin^2 \frac{\tau}{2}$$

skąd:

$$d = D - r = D - 2D \sin^2 \frac{\tau}{2}$$

Obliczymy dla poprzedniego przykładu:

$$r = 2D \sin^2 \frac{\tau}{2}$$

log $2D$ (3000)	3.477 12
2 log sin $\frac{\tau}{2}$ (15′)	5.279 64
log r	8.756 76
r	0,057

$$d = D - r = 1499{,}943$$

Otrzymaliśmy dla wielkości rzutu tej samej długości dwa nieco różne wyniki, a to wskutek tego, że użyliśmy cosinusa małego kąta. Zaleca się więc przy małych kątach pochylenia używać logarytmów sinusów, co wymaga obliczenia poprawki

$$r = 2D \sin^2 \frac{\tau}{2}$$

i odejmowania jej od pomierzonej długości.

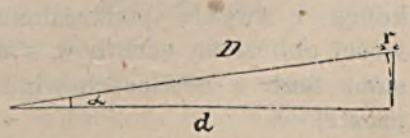
W celu uniknięcia każdorazowych obliczeń, sporządzono tablice, z których dla danych D i τ można obliczyć poprawkę r (patrz w końcu załączniki).

Rozpatrzmy typ zagadnienia, które może mieć miejsce przy pomiarach.

Mając do wytyczenia 502.5 *m.* w terenie, pochylonym pod kątem 4°30′ do poziomu, określić zapomocą taśmy, której długość wynosi 20,015 *m.*, jaką długość przy danem pochyleniu należy odmierzyć w jednostkach tej taśmy.

$$d = D - 2D \sin^2 \frac{\tau}{2}$$

$$d = D\left(1 - 2 \sin^2 \frac{\tau}{2}\right)$$



Rys. 117.

$$D = \frac{d}{1 - 2 \sin^2 \frac{\tau}{2}}$$

Wielkość D otrzymać możemy z tablic:
przy kącie pochylenia 4° 30′ mamy poprawki —

dla	500 *m*	— — 1,54
	2,5 *m*	0,0077
dla	502,5 *m*	1,5477
dla	1,548	0,0046
razem		1,552.

Należy więc w terenie, pochylonym pod kątem 4° 30′ do poziomu, odmierzyć

$$D = 502{,}5 + 1{,}55 = 504{,}05 \ m.$$

Ponieważ taśma przyjęta jest przy pomiarze za 20-metrową, zaś w rzeczywistości długość taśmy wynosi 20.015, a więc taśma jest o 0.015 za długa, przeto należy tą taśmą odmierzyć:

$$504{,}05 + [(504{,}05 : 20{,}015) \times 0{,}015]$$

lub, zaokrąglając:

$$504{,}05 + (25 \times 0{,}015) = 504{,}43 \ m.$$

§ 42. Zapis pomiaru kątów pochylenia odcinków prostych.

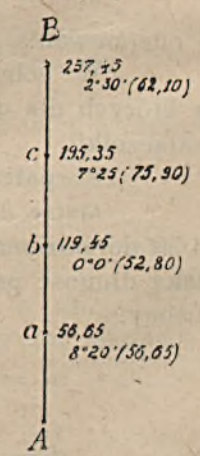
Wyobraźmy sobie przekrój pionowy terenu wzdłuż danej prostej $A\,B$. Jak widzimy, dana prosta składa się z odcinków o różnych spadach. Należy przy pomiarze określić długości oraz kąty pochylenia tych odcinków i odpowiednio zanotować w szkicowniku otrzymane dane.



Rys. 118.

Na szkicu prostej $A\,B$, przy punktach a, b, c załamania prostej, wypisujemy miary bieżące, wzięte z taśmy, zaś przy odcinkach Aa, ab, bc, cB prostej AB wypisujemy kąty pochylenia, przy których w nawiasach wypiszemy długości odpowiednich odcinków, obliczone z miar bieżących.

Oczywiście długość prostej, wypisana przy jej końcu i zwykle podkreślona, daje kontrolę prawidłowości obliczenia odcinków o różnych spadach, mianowicie: suma liczb w nawiasach winna być równą długości całej prostej.



Rys. 119.

§ 43. Dokładność pomiaru długości a kąty pochylenia.

Na zasadzie danych empirycznych, — danych, otrzymanych z badań nad całym szeregiem wyników przy podwójnym pomiarze długości prostych taśmą stalową, ustalono, że różnica dwu wyników pomiaru tej samej prostej może się wahać w pewnych granicach, zależąc w pierwszym rzędzie od warunków terenowych i od ścisłości samego pomiaru. W każdem państwie dokonane zostały w tej dziedzinie rozległe badania nad wielkością granicy d dla różnic dwu pomiarów długości i zapomocą rozważań, które później poznamy bliżej, ustalono dla określanej różnicy d wzory typu

$$d_{max} = Al + B\sqrt{l} + C$$

w których l oznacza długość mierzonej prostej, zaś A, B i C są spółczynnikami, uzyskanemi drogą doświadczalną.

Tak np., austrjacka instrukcja katastralna podaje wzór:

$d = 0{,}0005\,l + 0{,}016\,\sqrt{l}$ . . . teren dobry,

$d = 0{,}0006\,l + 0{,}02\,\sqrt{l}$ . . . teren średni,

$d = 0{,}0007\,l + 0{,}024\,\sqrt{l}$ . . . teren niedogodny.

Pruska instrukcja podaje wzór już nieco inny, mianowicie:

$$d_{max} = \sqrt{(\mu_o\, l)^2 + \mu^2\, l}$$

a więc dla pomiaru w najlepszych terenowych warunkach:

$$d = 0{,}01\sqrt{4\,l + 0{,}005\,l^2}$$

w średnich:

$$d = 0{,}01\sqrt{6\,l + 0{,}0075\,l^2}$$

w złych:

$$d = 0{,}01\sqrt{8\,l + 0{,}01\,l^2}$$

Instrukcja Ministerstwa Robót Publicznych podaje wzór:

$$d = 0{,}0002\sqrt{l^2 + 1000\,l}$$

przytem dla dobrego terenu granica ta zmniejsza się, dla złego — zwiększa się o 20%.

Zaś instrukcja Ministerstwa Reform Rolnych:

$d = 0{,}0002\,l + 0{,}006\,\sqrt{l} + 0{,}02$ w terenie dobrym,

$d = 0{,}00025\,l + 0{,}0075\,\sqrt{l} + 0{,}025$ w terenie średnim,

$d = 0{,}00035\,l + 0{,}0105\,\sqrt{l} + 0{,}033$ w terenie niedogodnym.

Na zasadzie powyższych wzorów sporządzono tablice dla d przy l rozmaitej długości w trzech kategorjach terenu, z których dla danego l w danej klasie terenu otrzymujemy dopuszczalne d.

Uzyskiwane w praktyce różnice wyników dwukrotnego pomiaru długości prostych są zwykle mniejsze, niż podane w tablicy—oczywiście, o ile pomiar taśmą wykonany został starannie.

Pomiar taśmą w naszych warunkach wykonywany jest na stosunkowo gęsto pofałdowanym terenie. tak że rzadko kiedy spotykamy stały spadek na odcinkach powyżej 100—150 *m.* (za wyjątkiem równin).

Dla 100-metrowej prostej różnica dwukrotnego pomiaru długości wynosi w nailepszych warunkach terenowych według pruskiej instrukcji 0,21 *m.*, według austrjackiej 0,08 *m.*, według instrukcji Ministerstwa Reform Rolnych 0,20.

Najostrzejszą jest norma Ministerstwa Robót Publicznych, według której granicą błędu w najlepszych warunkach dla 100 *m.* jest 6 *cm.*

Według niej różnica obydwu wyników pomiaru może równać się dla 100 *m.* długości 0,054, co wynosi około

$$\frac{0{,}054}{100} = \frac{1}{1800} \text{ całej długości.}$$

Jeżeli więc poprawka na pochylenie odcinka do poziomu nie przekracza tej wielkości, wówczas możemy przyjąć, że nie popełniamy błędu, odczuwanego praktycznie, traktując dany odcinek, jako leżący w poziomie. Obliczmy, dla jakich kątów pochylenia to zachodzi. Jak wiemy, poprawka dla sprowadzenia wyniku pomiaru długości do poziomu wynosi

$$r = 2D \sin^2 \frac{\tau}{2}$$

Załóżmy $r = \frac{D}{1800}$ i określmy stąd τ:

$$\frac{D}{1800} = 2D \sin^2 \frac{\tau}{2}$$

$$\sin \frac{\tau}{2} = \frac{1}{60}$$

$$\frac{\tau}{2} = \frac{\rho^0}{60} = 0^0{,}9$$

skąd:

$$\tau = 1^0 54'.$$

Zaokrąglając, powiemy, że dla długości około 100 *m.* przy kątach pochylenia mniejszych od 2^0 możemy pochylone odcinki uważać za poziome, i nie obliczać poprawki, gdyż wielkość jej jest mniejszą od wpływu błędów, zachodzących przy samym pomiarze długości. Jak więc widzimy, im dokładniejszego przyrządu używać będziemy do pomiaru długości, tem mniejsze pochylenia należy brać pod uwagę.

§ 44. Wpływ temperatury na wyniki pomiaru długości taśmą stalową.

Ponieważ spółczynnik rozszerzalności linjowej stali wynosi około 0,000 013, zaś długość nominalna taśm odpowiada temperaturze około 15^0 *C*, więc nawet wynik pomiaru prostej (np. 200 *m.*) przy temperaturze $= -15^0$ (w czasie zaś silnych mrozów tylko w wyjątkowych wypadkach może zajść

potrzeba pomiaru długości) otrzymuje bardzo nieznaczną poprawkę zgodnie z równaniem:

$$l = l_0 + l_0 k\ (t - t_0)$$

Przy

$$l_0 = 20\ m$$

$$t + t_0 = -\ 30^0\ C$$

otrzymamy

$$l = 20\ m. - 0.0078 = 19.992\ m.$$

Taśma jest więc przy $-\ 15^0\ C$ za krótką o 8 *mm.*, co na 200 *m.* długości stanowi 8 *cm.* Ponieważ zaś zwykle mierzymy przy temperaturze od 0^0 do $+\ 25^0$, przeto na 200 *m.* długości poprawka na wpływ temperatury nie przekroczy 4 *cm.*, a więc wielkości mniejszej, niż $^1/_2$ różnicy wyników dwukrotnego pomiaru prostej o tej długości. Z tego powodu w zwykłych warunkach pomiaru, wpływu temperatury nie uwzględniamy.

§ 45. Pomiar długości łatami.

Po wytyczeniu prostej układamy pierwszą łatę w ten sposób, by ostrze (styk) końca pierwszej, np., czerwonej łaty, znalazło się dokładnie nad punktem początkowym mierzonej prostej, zaś cała łata ułożona została poziomo w kierunku tej prostej; pierwszy robotnik przyciska do ziemi swoją łatę, aby, przy dosunięciu drugiej (niebieskiej łaty) do styku z pierwszą, pierwsza nie poruszyła się z miejsca. Gdy druga łata, po dosunięciu do pierwszej, została ułożona w kierunku danej prostej, wówczas drugi robotnik naciska swoją łatę, zaś pierwszy ostrożnie odsuwa swoją i przenosi ją naprzód do styku z drugą łatą.

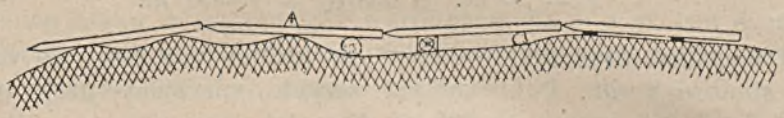
Przy przenoszeniu każdej łaty liczy się głośno 5, następnie 10, 15, 20, przyczem przy danej kolejności piątki odpowiadają pierwszej, dziesiątki drugiej łacie. Gdy wreszcie na ostatnim 5-metrowym odcinku jedna z łat układa się nad końcem prostej, odliczamy na łacie całe metry i decymetry z ćwieczków, zaś centymetry i ich części — z podziałki, przykładanej zerem do poprzedzającego koniec prostej ćwieczka. Przy pomiarze można notować ułożenia każdej łaty oddzielnie w postaci czworoboku, każdy narożnik którego przedstawiony narazie w postaci punktu, oznacza jedno ułożenie; jeżeli dalsze ułożenia oznaczać będziemy prostemi, łączącemi punkty to, np., liczba 7 będzie oznaczona przez 4 punkty i 3 proste $\cdot\!-\!\cdot$ $|$ $\cdot\!-\!\cdot$, liczba 9 przez $\boxed{/}$, 10 przez $\boxed{\times}$. W taki sposób protokół pomiaru byłby następującym:

Łaty		Reszta
I	II	
$\boxed{\times}$ $\boxed{\times}$: :	$\boxed{\times}$ $\boxed{\times}$: ·	2.275 *m.*

To oznacza, że łatę I-ą ułożono 24 razy, zaś łatę II-ą 23 razy i na 24-em ułożeniu II-ej łaty odliczono 2.275 *m*, tak więc, o ile długość łat była równa 5 *m*., to długością mierzonej prostej jest

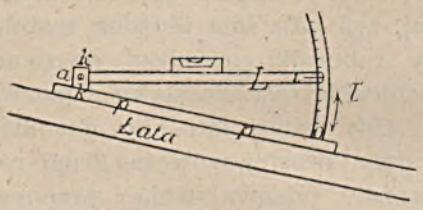
$$(24 + 23) \times 5 + 2.275 = 237.275\ m.$$

Przy pomiarze należy zwracać uwagę na to, by ostrze poziome stykało się pośrodku z pionowem.



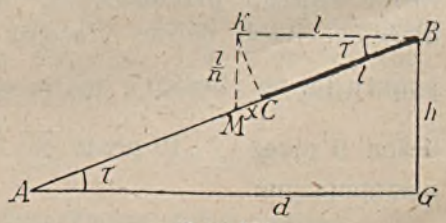
Rys. 120.

Pomiar łatami wymaga często podkładania podpórek z kamienia lub drzewa pod łaty, czyli tworzenia t. zw. podbudowy, aby łata na niej trwalej spoczywała, nie mogąc się przechylać. Przy pomiarze w terenie falistym należy określać kąty pochylenia łat do poziomu, a to zapomocą ustawiania na łacie w jej środku zwykłej śródwagi, lub też zapomocą pochylnika z libelą.



Rys. 121.

Pochylnik ten składa się z podstawy *pp*, z której wystaje wydrążony wewnątrz trzpień *kk*; dokoła osadzonej w nim osi obrotu *a*, prostopadłej do osi podstawy, obraca się ramię *aL*, na którem jest osadzona libela, t. j. przyrząd do poziomowania, w danym wypadku walcowa rurka szklana, wyszlifowana wewnątrz w kształcie powierzchni obrotowej. Rurka napełniona jest cieczą (spirytus lub eter), która tylko częściowo zapełnia rurkę, pozostawiając pęcherzyk pary użytego do jej napełnienia płynu. Ponieważ ciecz zajmuje najniższe położenie, przeto pęcherzyk (bańka) zawsze przesuwa się do najwyższej części rurki, oznaczonej kreską. Otóż: pudełko libeli jest w ten sposób osadzone na ramieniu *aL*, że gdy bańka libeli ustawia się dokładnie swym środkiem pod kreską, wówczas linja *ai* na ramieniu *aL* znajduje się w poziomie. Na końcu ramienia *aL* jest wycięta kreska *i*, zwana indeksem. Ramię *aL* przesuwa się wzdłuż łuku koła, przytwierdzonego do podstawki tak, że środkiem tego łuku jest właśnie oś obrotu *a*. Podział O^0 jest umieszczony na łuku w takiej samej odległości od podstawki *pp*, jak oś *a*. Łuk jest podzielony na stopnie. Gdy cały pochylnik ustawiony jest na łacie pionowo, wówczas obracamy ramię *aL* dokoła *a*, dopóki bańka libeli nie znajdzie się pod kreską na rurce. Wówczas *ai* wskaże poziomy kierunek, zaś na łuku $O^0 i$ dokonamy odczytu kąta pochylenia τ.



Rys. 122.

Bardzo często pomiar łatami dokonywa się na miejskich ulicach, mających stałe spadki na dość znacznych długościach. Spadki te są znane. Korzystając z nich, możemy nie określać kątów pochylenia.

Znane spadki podawane są w postaci ułamków dziesiętnych, procentów lub stosunków typu $\frac{1}{n}$.

Jeżeli kąt pochylenia danej prostej AB jest τ, rzut poziomy prostej AB jest d, zaś różnica wysokości punktów B i A jest h, wówczas spadek prostej AB jest równym

$$p = tg\,\tau = \frac{h}{d} = \frac{1}{\frac{d}{h}} = \frac{1}{n}$$

Przypuśćmy, że na prostej BA o znanym spadku $p = \frac{1}{n}$ ułożono łatę BC; gdybyśmy chcieli na terenie otrzymać rzut poziomy łaty, możnaby łatę BC podnieść do poziomego położenia BK i punkt K spionować na teren do punktu M; rzut więc poziomy łaty winien kończyć się nie w punkcie C, jak to zachodzi przy pochyłem położeniu łaty, lecz w p. M. Obliczmy długość odcinka $x = CM$, który nazwiemy poprawką na pochylenie p prostej.

Ponieważ spadek $p = tg\alpha = \frac{1}{n}$ jest znany,

przeto

$$KM = KB\,tg\tau = lp = \frac{l}{n}$$

następnie

$$BM = \sqrt{BK^2 + KM^2}$$

to jest

$$l + x = \sqrt{l^2 + \frac{l^2}{n^2}} = l\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = l\left\{1 + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{8n^4} \cdots\right\}$$

wyraz $\frac{1}{8n^4}$ i dalsze wyrazy rozwinięcia odrzucamy, jako znikomo małe dla spadków $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$, z jakiemi przeważnie mamy w praktyce do czynienia.

Stąd

$$l + x = l + \frac{l}{2n^2}$$

więc

$$x = \frac{l}{2n^2}$$

Ponieważ przy każdem ułożeniu łaty na terenie popełniamy błąd x, wskutek czego na pochyłej prostej AB łata ułoży się większą liczbę

razy, przeto poprawkę $X = \frac{l}{2n^2}$, mnożoną przez ilość ułożeń łat, należy odjąć od otrzymanej z pomiaru długości AB.

Przypuśćmy, że $p = 5\%$, $AB = 602{,}10\ m$. Ilość ułożonych pięciometrowych łat $m = \frac{600}{5} = 120$

$$p = \frac{1}{n} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20} \qquad X = \frac{5\ m}{2 \times 400} = 0.006\,25\ m.$$

Zaś poprawka y dla 120 łat wyniesie $0.006\,25\ m \times 120 = 0.75\ m$.

Rzut więc prostej AB, t. j. $AG = 602{,}10\ m. - (0{,}75\ m + 0{,}003) = 601{,}357\ m$.

Powstaje pytanie: przy jakim spadku można wyniku pomiaru nie redukować na poziom? Jeżeli założymy, że błąd $x = 0{,}5\ mm.$, przypadający na jedno ułożenie łaty a stanowiący błąd stosunkowy $\frac{1}{10000}$, może być tolerowany, wówczas

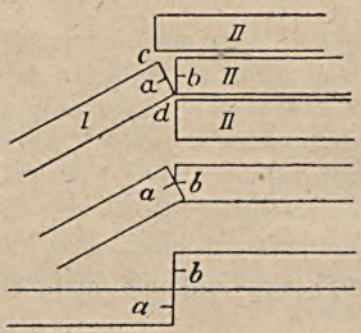
$$n^2 = \frac{l}{2x} = 5000,$$

stąd $$n = 70,$$

więc $p = tg\tau = \frac{1}{70}$ ma miejsce przy $\tau = 50'$, zaś zaokrąglając, powiemy, że przy pomiarze łatami można nie uwzględniać kątów pochylenia mniejszych od 1^0.

Należy wreszcie wzmiankować o użyciu łat o płaskich końcach przy pomiarze na terenach falistych. Ponieważ przy zmianie pochylenia kolejno układanej łaty nie możemy osi łat doprowadzić do styku punktami a i b, zaś dosuwanie łat w punktach styku c, czy d, pociągałoby za sobą konieczność obliczania poprawek, przeto jedynem wyjściem w tego rodzaju wypadku jest takie ułożenie łat do styku $a\ b$ (rys. 123), gdy początek osi łaty II-ej (b) doprowadzimy do styku z końcem osi I łaty przez boczne zetknięcia łat (rys. 124).

Rys. 123.



Rys. 124.

Powstaje więc konieczność odchylenia początku II-ej łaty od kierunku prostej o jakieś 4 cm. Obliczamy błąd, stąd wynikający dla 5 m. łaty.



Rys. 125.

Łata l (rys. 125) zostaje ułożona ukośnie w stosunku do prostej AB; zamiast więc w C_1, koniec łaty przypada w C, skąd powstaje błąd

$$CC_1 = d - l$$

$$d = \sqrt{l^2 - h^2} = l\sqrt{1 - \frac{h^2}{l^2}} = l\left(1 - \frac{h^2}{l^2}\right)^{1/2} =$$

$$l\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{l^2} - \frac{1}{8}\frac{h^4}{l^4} \ldots\right) = l - \frac{h^2}{2l} - \ldots$$

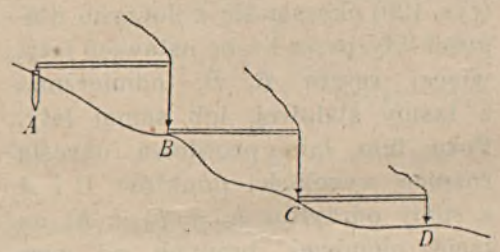
dalsze wyrazy rozwinięcia odrzucamy;

$$\frac{h^2}{2l} = \frac{4^2\ cm.^2}{2 \times 500\ cm.} = 0{,}16\ mm.$$

Błąd, powstały z tego rodzaju ułożenia łaty, wynosi tedy zaledwie 0,16 *mm.* — a więc może nie być brany pod uwagę, skąd wniosek, że boczne dosunięcie łaty ma znikomo mały wpływ na wynik pomiaru długości i przeto może być stosowane.

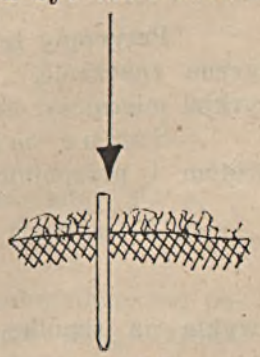
§ 46. Pomiar schodkami.

Na pochyłościach terenu często stosowany jest pomiar łatami, przy którym nie mierzymy kątów pochylenia, lecz układamy każdą łatę do poziomu w danym kierunku. Metoda ta, zwana pomiarem schodkami, wymaga dokładnego odrzutowania końca każdej łaty na ziemię, w celu otrzymania punktu początkowego dla ułożenia następnej łaty. Na cienkiej nici zawiesza się na końcu łaty pion; przez podnoszenie i opuszczanie łaty odnajdziemy w braku pochylnika takie jej położenie, przy którem pion wychyli się najdalej w kierunku pomiaru; przy tem położeniu pionu łata będzie w poziomie; oczywiście, gdy łata jest zaopatrzona w libelę, lub śródwagę, byłoby takie postępowanie zbytecznem. Po ułożeniu łaty w ten lub inny sposób do poziomu i po uspokojeniu się pionu (pion powinien być ostro zakończony), puszczamy nić pionu, styczną do końca łaty; pion spadnie na ziemię, znacząc rzut poziomy końca łaty. Otrzymany punkt jest punktem, od którego rozpoczniemy pomiar drugą łatą. Analogicznie postępujemy w dalszym ciągu.



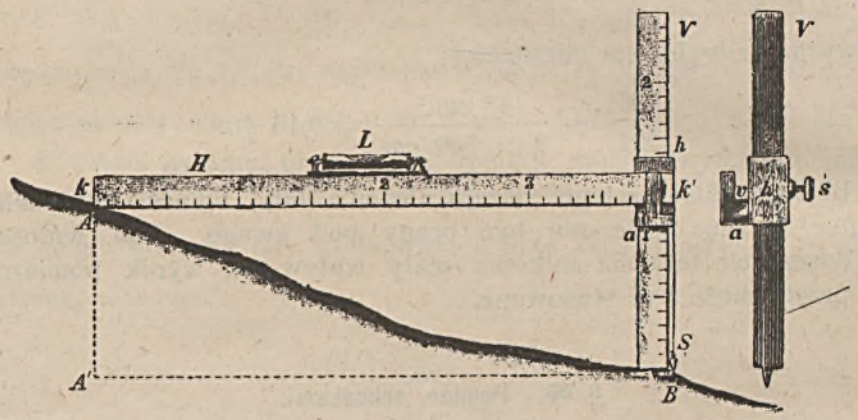
Rys. 126.

W terenie zarośniętym na przedłużeniu pionu (co można sprawdzić, patrząc zboku) wbijamy cienką stalową szpilkę (rys. 127) w ten sposób, aby jej tworząca, wysunięta w kierunku pomiaru, leżała ściśle na przedłużeniu pionu; do tej tworzącej dosuwamy łatę przy kolejnem jej ułożeniu.


Rys. 127.

W czasie wiatru należy odpowiednio osłaniać pion.

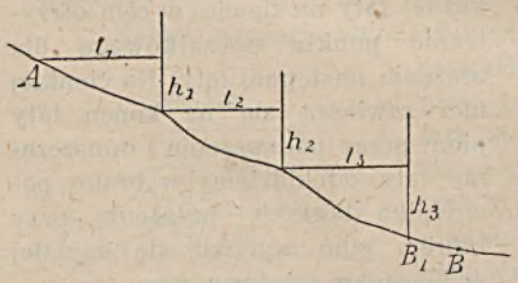
Przy pomiarze schodkami w wypadku większych spadów bywają używane krótsze łaty, długości 3 *m.*, a przy bardzo wielkich spadach — metrowe łaty. Używane są w takich wypadkach t. zw. łaty profilowe (rys. 128). Łata *H* ustawia się na punkcie *A* do poziomu zapomocą libeli *L*, łata V przesuwa się w żłobkach ramy ruchomej *h*. Koniec łaty *H* odrzutuje się zapomocą pionu *S* na ziemię.



Rys. 128.

W ten sposób rzut *AB* równy *A' B* jest długością łaty.

Zapomocą tych łat odległość między I-ym i ostatnim punktem (rys. 129) określa się z iloczynu długości łaty przez liczbę ustawień łaty, więcej reszta $B_1 B$, odmierzona z taśmy stalowej, lub samej łaty. Poza tem łata profilowa określa różnicę wysokości punktów *B* i *A* z sumy odczytów $h_1 + h_2 + h_3$ na łacie pionowej, branych od zera podziału łaty (przy ziemi) pionowej do spodu łaty poziomej.

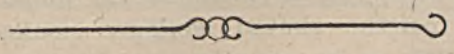


Rys. 129.

§ 47. Przyrządy do przybliżonego pomiaru długości.

Przyrządy te, obecnie prawie już nie stosowane, mają jedynie historyczne znaczenie. Należą do nich—sznur mierniczy, łańcuch mierniczy, cyrkiel mierniczy, krokomierz i t. p.

Sznur mierniczy jest sznurem konopnym, przeciągniętym drutem i przepojonym masą kauczukową. Długość sznura, nawijanego

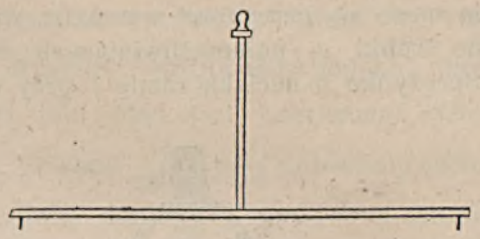


Rys. 130.

zwykle na szpulkę, może być równą 20—100 *m.* Na sznurze oznaczony jest podział na pręty i t. p. Bardziej od sznura dokładnym jest łańcuch

mierniczy, składający się z drutów żelaznych (zakończonych uszkami), połączonych ze sobą kółkami mosiężnemi. Długość łańcucha, zakończonego z obydwu stron kółkami, wynosi 5 prętów; długość poszczególnych ogniw— pręcik. Kółka na końcach miary układają się na kostury; środki tych kółek odpowiadają początkowi i końcowi miary (rys. 130).

Cyrkiel mierniczy jest łatą 2-metrowej długości, zakończoną wystającemi wdół żelaznemi ostrzami około 15 *cm.* długości. W środku łaty przymocowana jest rączka do utrzymywania cyrkla. Długość prostej wymierza się cyrklem albo przez przenoszenie tylnego ostrza na miejsce przedniego, t. j. przez posuwanie się w kierunku prostej, albo też przez obracanie całej łaty dokoła przedniego ostrza, dopóki tylne nie ułoży się w danym kierunku.

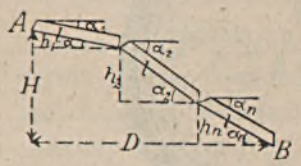


Rys. 131.

Jeżeli przy użyciu cyrkla zastosujemy śródwagę, wówczas po n kolejnych ułożeniach cyrkla, określając każdorazowo kąt $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ pochylenia łaty, możemy obliczyć rzut poziomy D mierzonego odcinka i różnicę wysokości punktu początkowego i końcowego. Pomierzana długość AB wyniesie $D_1 = l + l + \ldots\ l$, gdzie przez l oznaczamy długość cyrkla. Poprawka na pochylenie:

$$\gamma = 2\,l \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

będzie więc:



Rys. 132.

$$D = D_1 - 2\,l \left(\sin^2 \frac{\alpha_1}{2} + \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} + \ldots . \sin^2 \frac{\alpha_n}{2} \right)$$

zaś różnica wysokości

$$H = h_1 + h_2 + \ldots . h_n = l \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \ldots . l \sin \alpha_n =$$

$$= l\ (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \ldots . \sin \alpha_n)$$

Jeżeli mierzona prosta nie jest wielokrotną l, a po n—tem ułożeniu łaty pozostaje reszta m, wówczas wzory przyjmą postać:

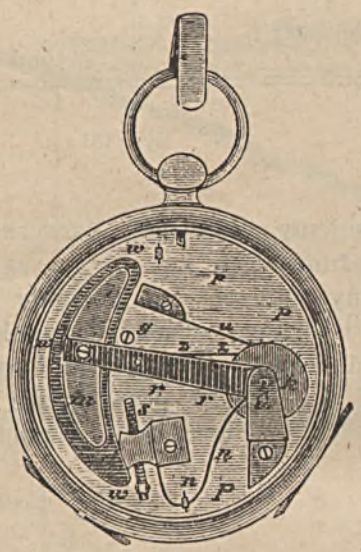
$$D = nl - 2\,l \left[\sin^2 \frac{\alpha}{2} \right]_1^n + m - 2\ m\ \sin^2 \frac{\alpha_{n+1}}{2}$$

$$H = l\ [\sin \alpha]_1^n + m \sin \alpha_{n+1}$$

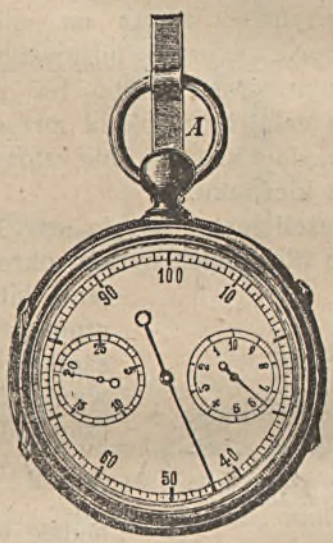
We wzorach tych symbol typu $[\sin \alpha]_1^n$, wyraża sumę $\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \ldots + \sin \alpha_n$, t. j. sumę wyrazów jednakowego typu od 1 do n; α_{n+1} jest kątem pochylenia reszty m.

Dla bardzo przybliżonego określania długości posługujemy się pomiarem krokami; w tym celu należy ustalić średnią długość swego kroku, przemierzając kilkakrotnie pieszo wyznaczony na gruncie 100-metrowy

odcinek. Przypuśćmy, że z 3-ch takich porównań otrzymaliśmy po raz pierwszy 130, drugi 132, trzeci 132,5 kroków. Stu metrom odpowiadać będzie średnia arytmetyczna $130 + \frac{2 + 2.5}{3} = 131{,}5$ kroków. Przy określaniu zapomocą kroków większych odległości, używamy krokomierza, t. j. pedometru. Wewnątrz pudełka (rys. 133), na płytce metalowej *p* osadzona jest oś *a*, na której jest nasadzone kółko zębate *k* i ramię *r* młotka *m*. Młotek *m* może się przesuwać wewnątrz wycięcia *ww* w płytce *p* od guziczka *g* do śrubki *s*, uniemożliwiających dalsze posuwanie się ramienia młotka. Sprężynka *n* naciska ramię *r* przy osi *a* w ten sposób, że ramię dotyka



Rys. 133.



Rys. 133a.

guziczka *g*. Poza tem sprzężynka *zz*, złączona z ramieniem *r*, końcem swym wchodzi między zazębienia kółka *k*, tak samo, jak i sprężynka *u*. Gdy pedometr lekko wstrząśniemy, młotek *m* opuści się nadół, aż do zetknięcia się ramienia *r* ze śrubką *s*, i w tym czasie sprężynka *zz* przesunie się po kółku *k* o jeden ząbek niżej, nie pociągając za sobą kółka, gdyż nie dopuszcza do tego sprężynka *u*. Pod działaniem odtrącającem sprężynki młotek *m* wraca do poprzedniego położenia, popychając sprężynką *zz* kółko *k* o część obwodu, równą odległości między dwoma sąsiedniemi ząbkami. Przy takim obrocie ząbek kółka podnosi sprężynkę *u*, której koniec wpada między kolejne dwa niższe ząbki i uniemożliwia obrót kółka w odwrotnym kierunku. Jeżeli zawiesimy pedometr przy guziku, lub włożymy do kieszeni, to przy każdym kroku młoteczek opuści się i podniesie. Każde uderzenie młotka powoduje przesunięcie wielkiej wskazówki o 1 podziałkę tarczy na odwrotnej stronie pudełka (rys. 133a). Gdy wielka wskazówka po 100 krokach obiegnie całe koło, prawa mała wskazówka obróci się o 1 podziałkę swego koła, t. j. o $\frac{1}{100}$ obwodu. Obwód więc wielkiego koła pedometru odpowiada 100 krokom, zaś na prawem małem kole jedna podziałka odpowiada całemu obwodowi wielkiego koła, t. j. 100 uderzeniom

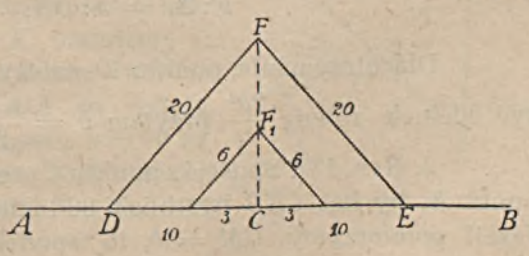
młoteczka, czyli 100 krokom odpowiada jedna działka. Działki lewego kółka odpowiadają tysiącom kroków. Naciśnięcie guzika *A* cofa wszystkie 3 wskazówki do zera, co należy uskutecznić na początku pomiaru krokami.

Pedometr może być użytecznym przy sporządzaniu szkiców terenu, a więc tam, gdzie nie chodzi o ścisłość pomiaru. Może powstać pytanie, czy przy pomiarach można wyznaczać odległości krokami, jakie i kiedy?

Doświadczenie wykazuje, że mając krok wyrobiony, popełniamy błąd w określaniu długości równy około $\frac{1}{30}$ długości. Można tedy podobne określanie długości stosować wszędzie, gdzie taki błąd jest tolerowany. Otóż przy graficznem wykreślaniu mapy, np. w skali $\frac{1}{25000}$, przy wniesieniu odcinka cyrklem do planu popełniamy błąd równy około 0,10 *mm.*, co w terenie przy powyższej skali stanowi (0,1×25000) *mm.*=2,5 *m.* Taki więc co najwyżej błąd możemy popełnić w terenie, a ponieważ błąd określania długości krokami w terenie wynosi $\frac{1}{30}$ długości, wolno przeto mierzyć krokami długości nie większe, niż 2,5×20=50 *m.*, lub przy wyrobionym kroku 2,5×30=75*m.* Dla planów, sporządzanych w skali $\frac{1}{5000}$, błędem wniesienia z podziałki jest 0,1 *mm* × 5000 =0,50 *m.* Zaś ten błąd przy pomiarze krokami możemy popełnić już na długości 0,50 *m.* × 30 = 15 *m.* Jeżeli więc z takiej lub mniejszej odległości określamy położenie punktu i jeżeli ten punkt nie jest ani znakiem granicznym, ani punktem, którego położenie w terenie należałoby kiedykolwiek wznawiać z miar, wziętych przy pomiarze, wtedy pomiar długości do 15 *m.* krokami jest dopuszczalny. Do długości, w ten sposób określanych, należą domiary do płynnych (zmiennych) linij, jak brzegi użytków, (granica roli i łąki, o ile nie jest granicą własności, granice klas gruntów) i t. p.

§ 48. Zagadnienia na pomiar i tyczenie prostych.

1. Wytyczyć zapomocą taśmy ⊥-ą do prostej *AB* w punkcie *C*: a) Dokładniejsze rozwiązanie polega na odmierzeniu od punktu *C* w obydwu kierunkach na danej prostej po 10 *m.* Otrzymujemy punkty *D* i *E*. Naciągamy w nich dwie taśmy, dopóki drugie końce tych taśm nie przetną się w określonym punkcie *F*, który jako wierzchołek równoramiennego △-a, powinien leżeć na prostopadłej, wystawionej ze środka *C* podstawy. Rozwiązanie dla krótszych prostopadłych polega na użyciu 18-metrowego odcinka taśmy, podzielonego na 3 części 6-metrowe; średnią część układamy po 3 *m.* w lewo i w prawo od punktu *C*, zaś końce następnych 6-metrowych odcinków naciągamy do zetknięcia się w punkcie F_1, który leży z punktem *C* na *CF* ⊥ *AB*.



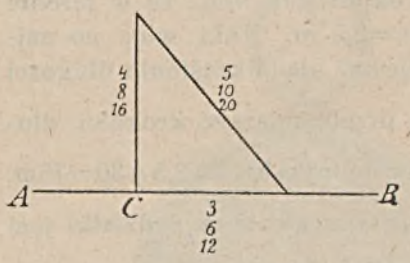
Rys. 134.

b) Mniej dokładne rozwiązanie polega na wykorzystaniu jednego z równań:

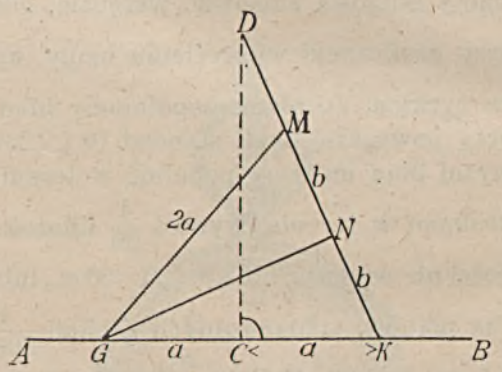
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$6^2 + 8^2 = 10^2$$
$$12^2 + 16^2 = 20^2 \text{ i t. d.}$$
$$5^2 + 12^2 = 13^2 \text{ i t. d.}$$

3 *m.* i 4 *m.*, lub 6 i 8 *m.*, lub 12 i 16 *m.* obieramy za przyprostokątne, zaś 5, 10 lub 20, odpowiednio do liczb, wybranych dla przyprostokątnych, będzie przeciwprostokątną.

Wykonamy konstrukcję w terenie zapomocą taśmy podobnie, jak w poprzedniem zadaniu (rys. 135).

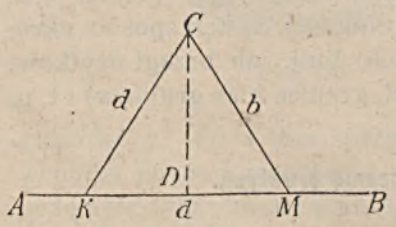


Rys. 135.



Rys. 136.

c) Rys. 136. Budowa dłuższej prostopadłej wynika z konstrukcji następującej: od punktu C odłożymy odcinek a do G i do K; z punktu G prowadzimy na oko dwusieczną GM kąta prostego i odcinamy na niej $GM = 2a$. Prostopadła do AB, wystawiona w C, przetnie przedłużenie KM w D; obliczmy DK.



Rys. 137.

Poprowadźmy wysokość GN $\triangle$-a GMK

$$\triangle GNK \sim \triangle DCK$$

$$NM = NK = \frac{MK}{2} = b$$

Mamy więc

$$b : 2a = a : DK; \quad DK = \frac{2a^2}{b}.$$

Dla otrzymania punktu D należy od punktu K na prostej KM odłożyć odcinek równy $\frac{2a^2}{b}$, przytem $b = \frac{KM}{2}$ otrzymujemy z pomiaru.

2. Rys. 137. Spuścić z punktu C prostopadłą do AB. Obieramy na AB taki punkt K, by kąt CKB był bliski 60^0; mierzymy $CK = d$ i odcinamy $KM = d$. Jeżeli pomierzymy $CM = b$, to spodek prostopadłej CD znajdziemy na odległości $MD = \frac{b^2}{2d}$ na prostej MA,

gdyż

$$CK^2 = KM^2 + CM^2 - 2\,KM.\,MD,$$

więc:

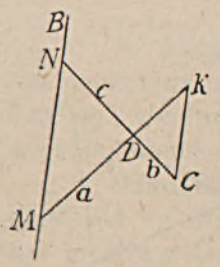
$$d^2 = d^2 + b^2 - 2d \,.\, MD$$

skąd:

$$MD = \frac{b^2}{2d}.$$

Krótsze prostopadłe spuszczamy tak samo, jak na planie, zapomocą zatoczenia z C łuku, przecinającego AB w dwu punktach. Spodek prostopadłej leżeć będzie na środku odcinka, łączącego te dwa punkty.

3. Wytyczyć prostą w C równolegle do AB (rys. 138).



Rys. 138.

Na prostej AB tyczymy punkty M i N; na NC wytyczamy, mniej więcej w połowie, punkt D i przetyczamy przedłużenie MD. Jeżeli punkt K ma leżeć na $CK \parallel MN$,

wówczas:

$$ND : MD = CD : DK,$$

skąd:

$$DK = \frac{MD \,.\, CD}{ND};$$

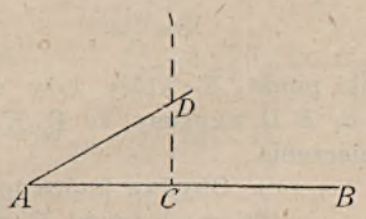
należy więc pomierzyć długości

$$MD = a \qquad CD = b \qquad ND = c$$

i po obliczeniu $DK = \frac{ab}{c}$

odmierzyć DK na przedłużeniu MD;

CK będzie równoległą do AB.

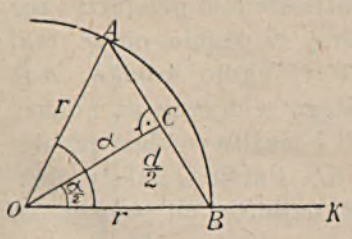


Rys. 139.

4. Zbudować dowolny kąt o wierzchołku A na ramieniu AB (rys. 139).

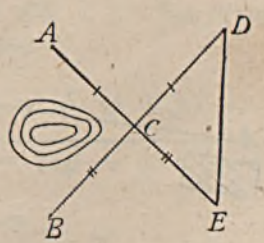
O 20 m. od A w p. B tyczymy kąt prosty i na prostopadłej odkładamy odcinek CD, t. j. wzięty z tablic tangens kąta, mnożony przez AC. Kąt DAC będzie szukanym kątem. Kąty większe od 60° lepiej jest budować zapomocą tablic cięciw, ułożonych na zasadzie wzoru:

$$AB = 2\,CB = 2\,r \sin\frac{\alpha}{2} \text{ (rys. 140).}$$



Rys. 140.

Przy budowie w terenie kąta o wierzchołku O i ramieniu OK budujemy $\triangle$ OBA, w którym dwa boki OB i OA są wzięte, np., o długości $r = 10$ m. każdy, zaś AB bierzemy z tablicy cięciw dla $r = 10$ m.



Rys. 141.

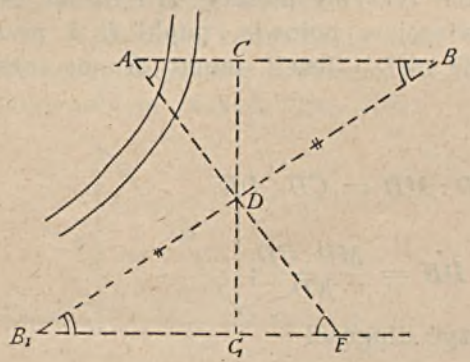
5. Określić długość prostej AB, której bezpośrednio zmierzyć nie możemy:

a) Obydwa punkty A i B są dostępne, środek prostej jest niedostępny (rys. 141).

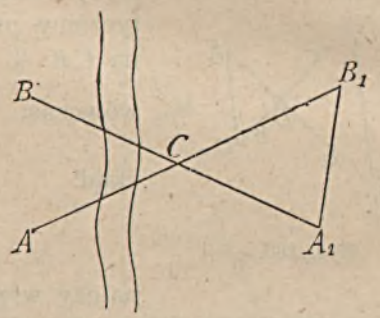
Obieramy taki punkt C, aby pomiar CA i CB, oraz ich przedłużeń był możliwy. Na przedłużeniu BC odmierzamy $CD = CA$ i na przedłużeniu AC odmierzamy $CE = CB$. Pomierzona następnie długość DE daje szukaną długość AB.

b) Jeden z końców danej prostej jest niedostępny (rys. 142).

Na AB wytyczamy punkt C. Obieramy taki punkt D, byśmy z D i bliskich od D punktów mogli widzieć A. Na przedłużeniu BD odmierzymy $DB_1 = DB$ i na przedłużeniu CD odmierzymy $DC_1 = DC$. Oczywiście $C_1 B_1$ jest $\parallel$ do BC. Przesuwając się po przedłużeniu $C_1 B_1$, odnajdziemy



Rys. 142.



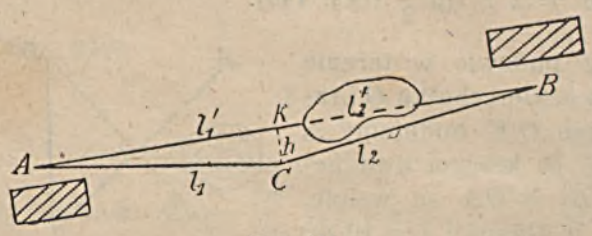
Rys. 143.

taki punkt E, który leży na przedłużeniu AD. Z równości $\triangle$-ów ABD i $B_1 E D$ wnosimy, że $B_1 E = AB$. Linja $B_1 E$ już jest dostępna do pomierzenia.

c) Obydwa końce prostej są niedostępne (rys. 143).

Obieramy punkt C, z którego widzimy A i B. Jeżeli na przedłużeniu AC odłożymy $CB_1 = CB$ i na przedłużeniu BC odmierzymy $CA_1 = CA$, wówczas $A_1 B_1 = AB$. Długości CB i CA określimy, jak wyżej.

6. Często nie mamy możności stosować rozwinięć geometrycznych: w lasach, zabudowaniach i t. p. Jednakże i wtedy możemy znaleźć odpowiednie rozwiązanie. Tak np., nieraz może zajść wypadek, że możemy, odsunąwszy się bardzo niewiele od prostej AB, której długości bezpośrednio pomierzyć nie jesteśmy w stanie, obrać taki punkt C około środka AB, z którego widoczne są punkty A i B i możliwym jest pomiar AC i CB. Punkt C należy obierać jaknajbliżej od prostej AB w odległości $h < \frac{AB}{10}$



Rys. 144.

$$AK = l'_1,\ AC = l_1,\ KB = l'_2,\ CB = l_2,\ AB = AK + KB$$

Oznaczmy:

$$AK = (l_1^2 - h^2)^{1/2} = \left\{l_1^2\left(1 - \frac{h_2}{l_1^2}\right)\right\}^{1/2} = l_1\left(1 - \frac{h^2}{2l_1^2} - \frac{h^4}{8l_1^4} \ldots\right) =$$

$$= l_1 - \frac{h^2}{2l_1} - \frac{h^4}{8l_1^3} \cdots\cdots$$

$$KB = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = l_2 - \frac{h^2}{2l_2} - \frac{h^4}{8l_2^3}$$

przy $h = {}^1/_5\, l$ wyraz $\frac{h^4}{8l^3} = \frac{l^4}{8 \times 5^4 l^3} = \frac{l}{5000}$ nie przekracza błędów pomiaru i jako taki może być odrzucony — a wobec tego:

$$\underline{AB} = AK + KB = \underline{l_1 + l_2 - \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)}$$

7. Pożytecznem jest również, zamiast stosować rozwiązania drogą konstrukcyjną, obliczać określaną odległość z miar, wziętych z terenu. Tak np., wyobraźmy sobie, że prostej FE nie możemy pomierzyć, jakkolwiek jej końce są dostępne (rys. 145).

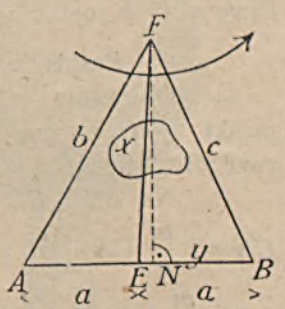
Odmierzymy od E na prostej AB równe odcinki $EA = EB = a$ takiej długości, by pomiar AF był możliwy. Oznaczmy rzut FB na EB przez $NB = y$ i $FB = c$;

obliczymy: $FE^2 = x^2 = c^2 + a^2 - 2ay$ z $\triangle$-a FEB,

zaś z $\triangle$-a FEA, w którym $AN = 2a - y$,

mamy: $x^2 = a^2 + b^2 - 2a\,(2a - y)$, dodając, otrzymamy:

$2x^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 - 2a\,(y + 2a - y) = 2a^2 + b^2 + c^2 - 4a^2$,



Rys. 145.

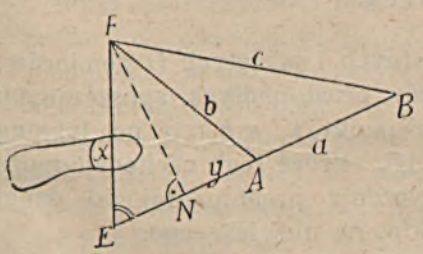
stąd

$$x^2 = \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{2}$$

zaś:

$$\underline{\underline{x = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - a^2}}}$$

Gdy nie możemy z obydwu stron punktu E odmierzyć a, wówczas na EB odmierzymy $EA = AB = a$, następnie pomierzymy $FA = b$ i $FB = c$. Oznaczmy rzut b na EB, t. j. NA przez y; ponieważ (rys. 146)



Rys. 146.

$$FN^2 = b^2 - y^2 = c^2 - (a + y)^2 =$$

$$= c^2 - a^2 - 2ay - y^2$$

skąd

$$y = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2a}$$

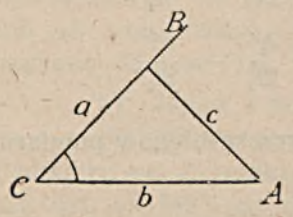
więc:

$$x^2 = b^2 + a^2 - 2ay = b^2 + a^2 - c^2 + a^2 + b^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

i wreszcie:

$$x = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

8) Określić wielkość kąta między dwiema prostemi (rys. 147).



Rys. 147.

Na ramionach kąta w terenie odmierzamy a i b, oraz mierzymy długość c prostej, łączącej końce odcinków a i b. Z jednego ze wzorów

$$\sin\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{ab}};$$

$$\cos\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p-c)}{ab}}$$

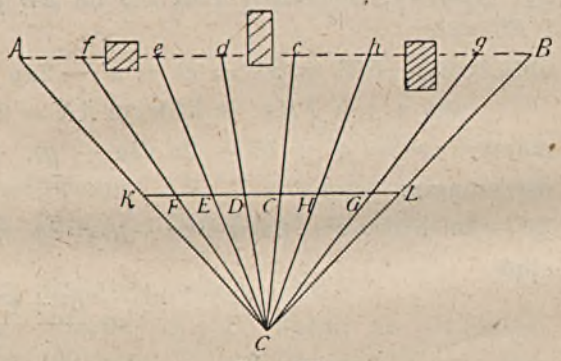
$$tg\,\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}}$$

w których $p = \frac{a+b+c}{2}$, obliczymy wielkość kąta.

Przy $a = b$ jest $c = 2a \sin\frac{C}{2}$, skąd $\sin\frac{C}{2} = \frac{c}{2a}$.

9) Przetyczyć prostą AB między przeszkodami.

Obieramy w terenie taki punkt C, by można było pomierzyć długość AC i CB.



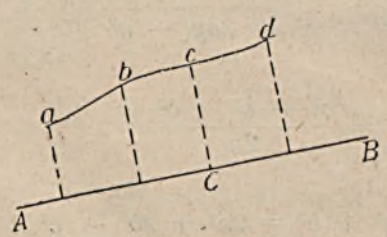
Rys. 148.

Na AC i BC odmierzamy $CK = \frac{m}{n} CA$ i $CL = \frac{m}{n} CB$, gdzie $\frac{m}{n} < 1$ jest założonym z góry ułamkiem, np. $\frac{1}{2}$.... $\frac{2}{3}$ lub t.p.

Obieramy na KL szereg punktów, przez które można poprowadzić między przeszkodami proste, idące z punktu C i odmierzamy na nich: $Cf = CF\frac{n}{m}$; $Ce = CE\frac{n}{m}$ i t. d. Punkty f, e, d.... leżą na AB.

§ 49. Węgielnice.

Przy stosowaniu pomiaru metodą rzędnych i odciętych (z domiarów) stale zachodzi potrzeba odnajdywania spodków prostopadłych, spuszczanych z określanych punktów a b c d na lokalną oś odciętych AB. Prócz tego zachodzić może potrzeba wytyczenia prostopadłej do danej prostej z punktu, na niej leżącego.



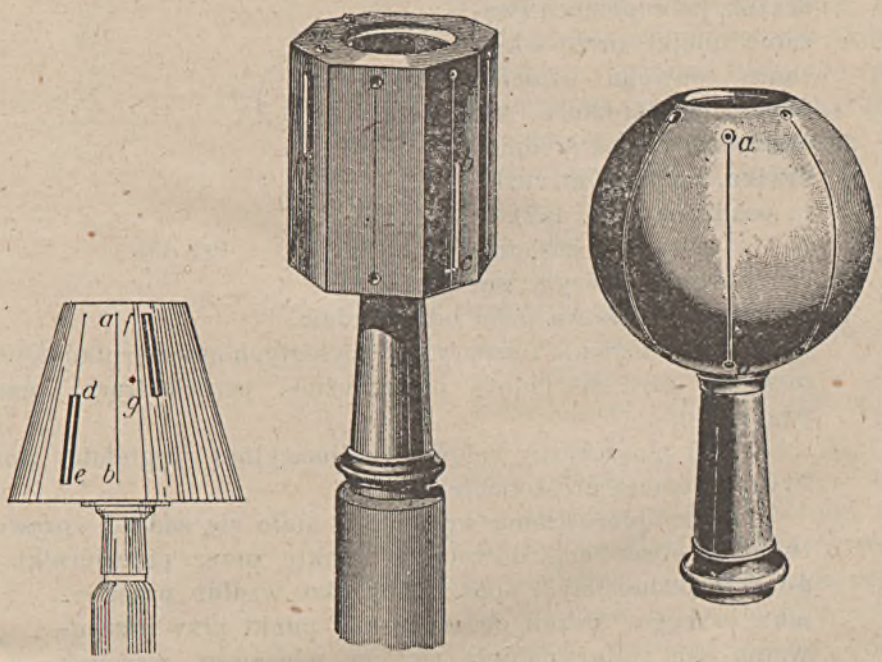
Rys. 149.

Obydwa te zagadnienia mogą być rozwiązane zapomocą taśmy i tyczek; wszelako metoda taka zbyt wiele pochłania czasu i wskutek tego stosujemy przyrządy, zwane węgielnicami, służące do tyczenia kątów prostych. Rozpatrzymy główne typy węgielnic, mianowicie bębenkowe, zwier-

ciadlane i pryzmatyczne, oraz przyrządy, służące do tyczenia kątów, równych 180°.

§ 50. Węgielnice bębenkowe.

Węgielnice bębenkowe mają kształt walca lub graniastosłupa, oraz stożka lub kuli. Te ostatnie są bardzo dogodne przy tyczeniu prostopadłych na pochyłościach. Przyrząd dla tyczenia dwu prostych wzajemnie



Rys. 150.

prostopadłych powinien dawać dwie płaszczyzny celowe (kolimacyjne), wzajemnie prostopadłe. Płaszczyzny te są realizowane w węgielnicach bębenkowych zapomocą t. zw. par przezierników (celowników). Są to leżące w jednej płaszczyźnie, przechodzącej przez oś przyrządu, wycięte w jego ściankach cienkie szpary, np. *ab*, lub też szersze, ale z naciągniętym w nich włosieniem. Jeżeli oś przyrządu ustawimy pionowo nad punktem *A* na danej prostej i obrócimy całą węgielnicę w ten sposób, by, patrząc przez średnicowo przeciwległe przezierniki 3 i 4, zobaczyć na ich przedłużeniu punkt *B* danej prostej, to wówczas, patrząc przez przezierniki 1 — 2, na ich przedłużeniu ustawimy pomocnika z tyczką *C*. Prosta *AC* będzie ⊥-ą do *AB* (rys. 151).

Dla dogodniejszego celowania są zrobione w przyrządzie otwory dwu rodzajów: węższy — do niego przysuwamy oko, szerszy, gdzie jest naciągnięty włosień, patrząc przez który, oceniamy, w jakim kierunku należy obrócić cały przyrząd (aby linja 3—4 kryła punkt *B*), lub w jakim kierunku i o ile należy przysunąć tyczkę (aby 1—2 linja kryła punkt *C*).

Węższy — nazywamy przeziernikiem ocznym, szerszy — przedmiotowym.

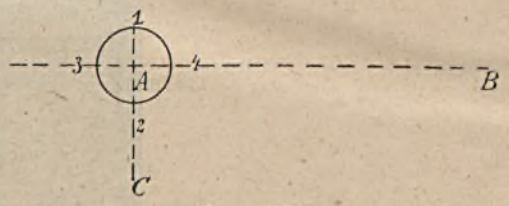
Często nad przeziernikiem ocznym znajduje się przedmiotowy, zaś średnicowo — przeciwległy przeziernik przedmiotowy ma ponad sobą przeziernik oczny.



Rys. 150a.

Węgielnica bębenkowa u dołu jest zakończona tulejką, którą osadza się na drążku (kosturze) odpowiedniej średnicy (rys. 150a).

Tulejka może mieć śrubkę zaciskową, sprzęgającą przyrząd z drążkiem już to zapomocą bezpośredniego nacisku na drążek, już zapomocą zwężania tulejki przez skręcanie obwodu tulejki, dopóki jej średnica nie stanie się równą średnicy drążka, na którym została osadzona (rys. 152).



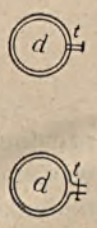
Rys. 151.

Dwa są zasadnicze warunki, którym węgielnica bębenkowa musi odpowiadać:

1) włosienie i szpary przeciwległych przezierników ocznych powinny leżeć w jednej płaszczyźnie, przechodzącej przez oś przyrządu;

2) płaszczyzny celowe (kolimacyjne) węgielnicy powinny być wzajemnie prostopadłe.

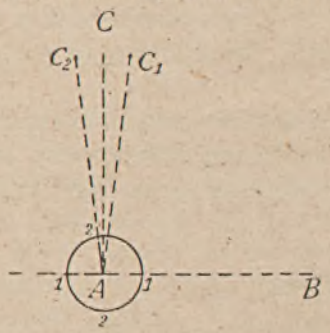
Czy pierwszemu warunkowi stało się zadość, sprawdzamy to przez obserwację dowolnego punktu przez przezierniki. Mianowicie podnosimy i opuszczamy oko wzdłuż przeziernika ocznego. Jeżeli obserwowany punkt przy przesuwaniu oka stale znajduje się na włosieniu, warunek jest zachowany. Kontrola będzie wyczerpującą, jeżeli oś przyrządu ustawimy pionowo i wzajemnie prostopadłe pary przezierników skierujemy na odpowiednio zawieszone piony. Przesuwanie oka wykaże, czy płaszczyzny kolimacyjne przechodzą przez oś przyrządu. Wykryte odchylenia usuniemy przez zmianę położenia włosienia. Realizację drugiego warunku stwierdzimy przez ustawienie węgielnicy w wierzchołku uprzednio wytyczonego w terenie prostego kąta i skierowanie jednej płaszczyzny kolimacyjnej wzdłuż boku prostego kąta; wówczas druga płaszczyzna kolimacyjna powinna kryć drugi bok kąta prostego.



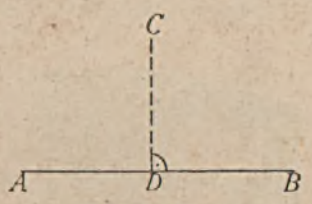
Rys. 152.

Zwykle jednak kontrolę tę wykonywamy inaczej, a mianowicie (rys. 153): kierujemy jedną płaszczyznę kolimacyjną węgielnicy, ustawionej w punkcie A, na punkt B, poczem, celując przez drugą płaszczyznę kolimacyjną, na jej przedłużeniu w terenie ustawiamy tyczkę C_1; następnie drugą płaszczyznę kolimacyjną od punktu C_1 przesuwamy do kierunku na B przez ćwierć obrotu węgielnicy; celując teraz przez 1-szą płaszczyznę kolimacyjną, powinniśmy na włosieniu mieć punkt C_1; jeżeli nie — wówczas

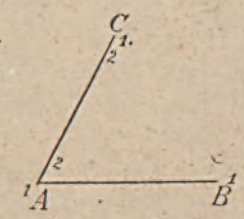
obok wytyczamy punkt C_2. Tak więc, jeżeli węgielnica zamiast 90^0 daje pewien kąt α, to przy II-iem położeniu daje również kąt α i na przedłużeniu przezierników otrzymamy punkt C_2. Oczywiście, ponieważ $90^0 = \frac{180^0}{2}$, przeto właściwym kierunkiem będzie kierunek do punktu C, a więc błąd węgielnicy stanowi wielkość kąta $CAC_1 = CAC_2 = \frac{C_2AC_1}{2}$; stosowanie wadliwej węgielnicy bębenkowej wymaga więc dwukrotnego tyczenia kąta prostego przy zmianie wzajemnego położenia płaszczyzn kolimacji; wynikiem takiego tyczenia będą dwa punkty; punkt, położony na środku odcinka, łączącego dwa punkty, leży na prostopadłej.

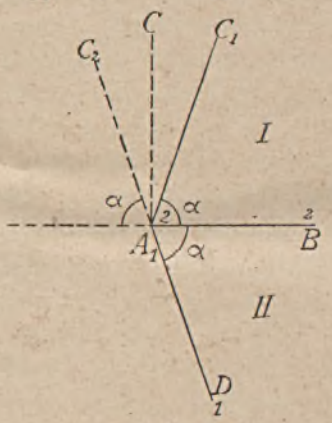


Ażeby (rys. 154) z punktu C, leżącego nazewnątrz prostej AB, spuścić na nią prostopadłą, należy przesuwać się wzdłuż prostej AB dopóki po skierowaniu jednej płaszczyzny kolimacyjnej wzdłuż danej prostej, nie ujrzymy na przedłużeniu drugiej płaszczyzny kolimacyjnej punktu C; punkt D ustawienia węgielnicy jest szukanym punktem.



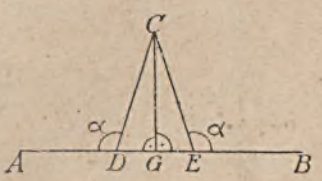
Rys. 154.





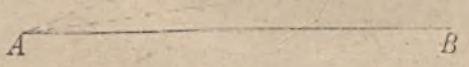
Rys. 153.

Jeżeli jednak mamy do czynienia z wadliwą węgielnicą, wówczas należy odszukać spodek prostopadłej zapomocą kierowania wzdłuż danej prostej każdej płaszczyzny kolimacyjnej; oczywiście (rys. 155), otrzymamy dwa spodki D i E. Z $\triangle$-ów prostokątnych CDG i CGE, w których $CG \perp AB$ (przy boku GC wspólnym i $\sphericalangle D = \sphericalangle E$), otrzymujemy: $DG = GE$, stąd: spodek prostopadłej leży w środku odcinka DE.



Rys. 155.

Zapomocą węgielnicy bębenkowej możemy ustawić się na prostej, łączącej dwa punkty A i B, nie uciekając się do ustawiania tyczek między temi punktami. Mianowicie (rys. 156): Stojąc w dowolnym punkcie C, kierujemy przezierniki 1 — 2 na A; patrząc



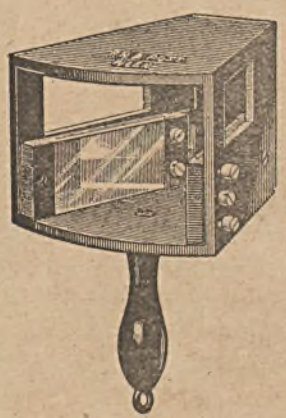
Rys. 156.

przez przezierniki w kierunku 2—1, spostrzegamy, że punkt B leży znacznie w prawo, wobec czego przesuwamy się o pewną odległość w tym kierunku. Znów powtarzamy to samo, t. j. celujemy na A i, patrząc następnie w odwrotnym kierunku, sprawdzamy, w jakim kierunku punkt B jest jeszcze odchylony od płaszczyzny kolimacyjnej. Postępujemy w ten sposób aż do czasu, gdy po skierowaniu tej płaszczyzny na A, na jej przedłużeniu w kierunku przeciwległym spostrzeżemy punkt B; punkt, dla którego to nastąpi, jest punktem, leżącym na prostej AB.

Węgielnice bębenkowe mają często nie 2, a 4 płaszczyzn kolimacyjnych, przecinających co 45° obwód walca, graniastosłupa, stożka czy kuli. Za ich pomocą możemy mierzyć i tyczyć kąty równe 45°, oraz kąty proste.

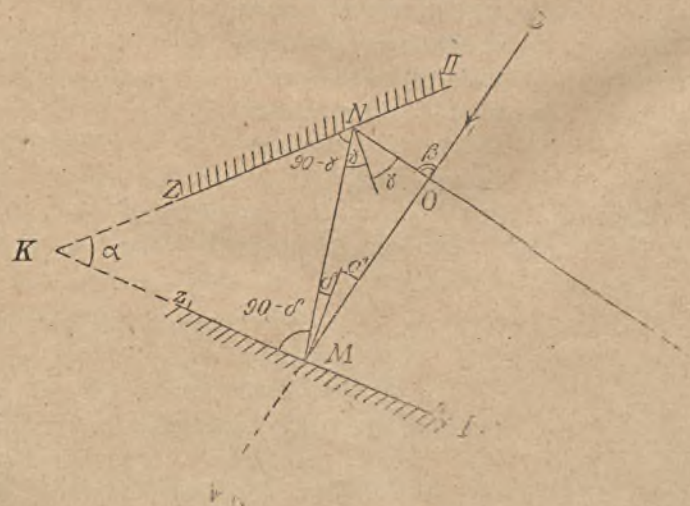
§ 51. Węgielnica zwierciadlana.

Węgielnica zwierciadlana używana jest do tyczenia kątów prostych. Teorja tej węgielnicy oparta jest na prawie optyki, że promień padający i promień odbity leżą w jednej płaszczyźnie, prostopadłej do płaszczyzny zwierciadła, przyczem kąt padania równy jest kątowi odbicia. Przyrząd składa się z dwu podłużnych zwierciadeł, nachylonych ku sobie pod kątem 45°, przymocowanych do ścianek metalowego pudełka, mającego okienka nad zwierciadłami; ścianki pudełka osłaniają spód, wierzch i zwierciadła, natomiast przednia część węgielnicy jest otwarta. Do denka węgielnicy przykręcony jest trzonek z uszkiem dla pionu (rys. 157).



Rys. 157.

Przekrój węgielnicy (rys. 157a) daje zwierciadła ZN i Z_1Z_1 oraz przebieg promieni. Promień od tyczki T pada i odbija się od zwierciadła ZZ pod kątem γ, poczem pada i odbija się od Z_1Z_1



Rys. 157a.

pod kątem δ. a następnie wpada do oka obserwatora. Porównajmy kąt β zmiany kierunku promienia po wyjściu z węgielnicy z wielkością kąta α między płaszczyznami zwierciadeł.

Kąt β jako zewnętrzny $\triangle$-a ONM jest równym $\beta = 2\gamma + 2\delta$.

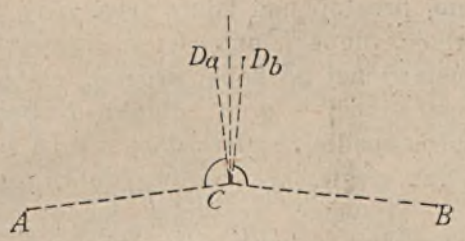
Kąt α z $\triangle$-a KMN jest równym $\alpha = 180^0 - (90^0 - \delta + 90^0 - \gamma) = \gamma + \delta$,

stąd $\beta = 2\alpha$, że zaś $\alpha = 45^0$, więc $\beta = 90^0$.

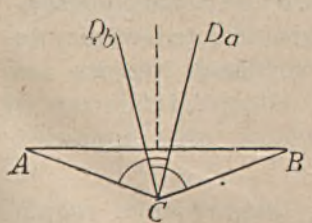
Jeżeli tedy na przedłużeniu promienia OM, t. j. w kierunku obrazu tyczki T wystawimy tyczkę W w terenie w ten sposób, by obraz tyczki T w zwierciadle $Z_1 Z_1$ i tyczka W (obserwowana przez okienko węgielnicy ponad zwierciadłem $Z_1 Z_1$) znalazły się na jednej pionowej prostej, wówczas kąt WOT będzie kątem prostym; a ponieważ węgielnica jest trzymana w ręku nad punktem, leżącym na danej prostej, przechodzącej przez T, więc OW będzie prostopadłą do danej prostej, wystawioną do niej z punktu, nad którym węgielnica jest trzymana. Wobec małych wymiarów węgielnicy przyjmujemy, że punkt O leży na przedłużeniu pionu, zawieszonego na trzonku węgielnicy.

Należy zwrócić uwagę na to, że równanie $\beta = 2\alpha$ jest zupełnie niezależnem od wielkości kątów γ i δ, tak więc obrót węgielnicy o pewien kąt zmieni γ i δ, lecz nie zmieni β, uzależnionego jedynie od stałego kąta α.

Oczywiście węgielnica powinna znajdować się dokładnie w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez daną prostą, gdyż (rys. 158) jeżeli węgielnica znajdzie się nad punktem C, wychylonym z prostej AB, wówczas wytyczymy prostopadłą albo do CB, albo do CA, zależnie od tego, ku której tyczce zwrócimy kąt α węgielnicy. Budując prostopadłe do obydwu prostych CB i CA, otrzymamy 2 tyczki D_a i D_b, ustawione jakoby na tej samej prostopadłej do AB; skoro więc, po ustawieniu tyczki D_b na $CD_b \perp CB$, zwrócimy okno (kąt α) węgielnicy ku A i obraz A odsunie się od D_b (np. do D_a), znaczyć to będzie, że nie stoimy na prostej AB (o ile węgielnica jest dobra). Aby określić, w jakim kierunku należy przesunąć węgielnicę, wyobraźmy sobie punkt C po drugiej stronie AB — wówczas obrazy tyczek A i B zajmą inne położenie (ulegną przestawieniu). Z rysunków możemy wysnuć prawidło: jeżeli odbicia tyczek A i B są odchylone ku swoim punktom A i B, wówczas należy się cofać, dopóki obydwie prostopadłe nie pokryją się wzajemnie; odwrotnie, jeżeli prostopadła, budowana na zasadzie lewego punktu, odchyla się w prawo od prostopadłej, budowanej na zasadzie prawego punktu, wówczas należy posuwać się naprzód (rys. 159).



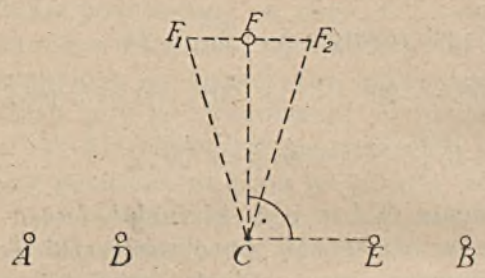
Rys. 158.



Rys. 159.

Zwykle budujemy prostopadłą albo 1) od punktu, ściśle wytyczanego

na danej prostej, co ma miejsce, gdy stoimy nad taśmą lub łatą, ustawioną na tej prostej, albo też 2) w takich warunkach, że jeden koniec, lub obydwa, danej prostej są wyznaczone przez dwie tyczki, na niej ustawione. Jeżeli więc (rys. 160), stojąc przy punkcie C, w zwierciadełku węgielnicy widzimy tyczki A i D, nie kryjące się wzajemnie, wtedy przesuwamy się ku linji do chwili, aż odbicia tyczek A i D pokryją się wzajemnie; wówczas jest pewność, iż jesteśmy ustawieni dokładnie na danej prostej.



Rys. 160.

Jeżeli wtedy, budując prostopadłą do CA i CB, otrzymamy dwa wyniki CF_1 i CF_2, będzie to dowodem, że węgielnica nie daje kąta 90°, a więc i kąt między zwierciadłami nie jest równym 45°.

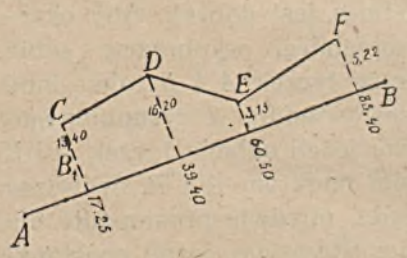
Jak wiemy już (patrz węgielnica bębenkowa), możemy i w tym wypadku zapomocą dwukrotnej budowy kąta prostego (CF_1 i CF_2) określić właściwe położenie prostopadłej; mianowicie, tyczka na prostopadłej leży w środku odcinka F_1F_2 w punkcie F.

Odnajdywanie spodka prostopadłej, spuszczonej z punktu K na daną prostą, ma zastosowanie przy pomiarach metodą rzędnych i odciętych; przesuwamy się wzdłuż danej prostej nad miarą (rys. 161), ułożoną w terenie, dopóki odbicie w węgielnicy tyczki M, ustawionej na danej prostej, nie pokryje tyczki, ustawionej w p. K. Punkt L będzie spodkiem prostopadłej, spuszczonej z p. K na daną prostą. Przy węgielnicy wadliwej dobre rozwiązanie można otrzymać, znajdując jeden raz spodek prostopadłej na podstawie obrazu p. N, co odpowie punktowi, np., L_1; zaś po raz drugi—na zasadzie obrazu p. M, co odpowie p. L_2; punkt L, leżący w środku odcinka L_1L_2, będzie właściwym spodkiem.



Rys. 161.

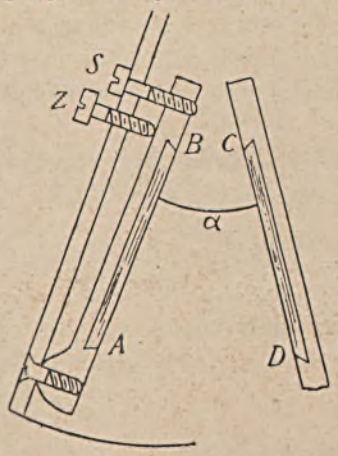
Znajdując (rys. 162) na taśmie spodki prostopadłych, spuszczonych z załamań zamierzonej linji $CDEF$, notujemy miary bieżące, odpowiadające spodkom prostopadłych, spuszczonych z tych załamań, jako odległości, z taśmy odczytywane, od p. A, co daje odcięte, wypisywane w szkicu przy spodkach, rzędne zaś, brane z taśmy, jako odległości załamań od ich spodków, wypisujemy przy odpowiednich prostopadłych.



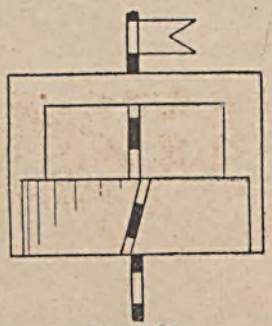
Rys. 162.

Do rektyfikacji (poprawiania, regulowania) węgielnic zwierciadlanych służą śrubki rektyfikacyjne (rys. 163). Aby zmniejszyć kąt między zwierciadłami AB i CD, należy odkręcić zacisk Z i dokręcać następnie śrubkę S, wskutek czego koniec zwierciadełka

przysuniemy do ścianki węgielnicy, co spowoduje zmniejszenie kąta α. Postępowanie takie wymaga wykonania szeregu nieznacznych odkręceń zacisku Z i dociągań śrubką S, powodujących styk zacisku z oprawą zwierciadła. Rektyfikujemy w ten sposób węgielnicę, dopóki kąt, przez nią budowany, nie będzie odpowiadać dokładnie wytyczonym na gruncie ramionom kąta prostego.



Rys. 163.


Rys. 164.

Gdy zachodzi potrzeba powiększenia kąta α, wówczas koniec B zwierciadełka należy pochylić ku C przez stopniowe zwalnianie śrubki S i dokręcanie zacisku Z.

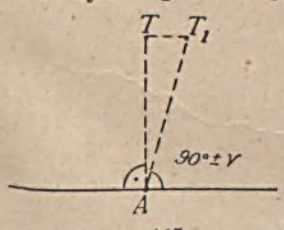
Przy użyciu i sprawdzaniu węgielnic płaszczyzny zwierciadeł układane są pionowo. Jeżeli warunek ten nie jest przestrzegany, wówczas obraz tyczki, ustawionej pionowo na danej prostej, skrzyżuje się z tyczką, ustawioną pionowo na prostopadłej (rys. 164).

§ 52. Dokładność węgielnic i wnioski, dotyczące długości prostopadłych.

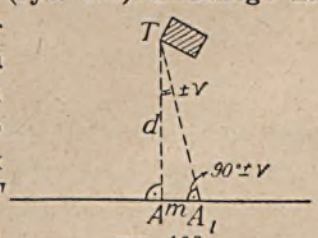
Przez porównanie kątów prostych, tyczonych z węgielnicy,— z wielkościami tych kątów, otrzymanemi przez pomiar ich znacznie dokładniejszemi narzędziami, ustalono doświadczalnie, że węgielnice dają błędy w tyczeniu kątów prostych, sięgające około 5′. Na wielkość tego błędu składa się 1) wada samej węgielnicy zwierciadlanej, t. j. błąd, wynikający z niedokładnego wzajemnego ustawienia płaszczyzn obydwu zwierciadełek; kąt dwuścienny między temi płaszczyznami odchyla się od 45° o $\pm$ 2′, 2) błąd operacyjny, sięgający $\pm$ 3′ i więcej, w zależności od stopnia dokładności przy budowaniu prostopadłych, a więc a) od dokładności utrzymywania pionu węgielnicy na danej prostej, b) od dokładności w ustawieniu tyczki na prostopadłej na przedłużeniu obrazu tyczki w zwierciadełku węgielnicy, c) od stopnia dokładności, z jakim utrzymujemy w płaszczyźnie pionowej zwierciadełka węgielnicy, i t. d.

Możemy przyjąć, że przy tyczeniu prostopadłych węgielnicą z użyciem pionu, błąd wytyczenia sięga $V = \pm$ 5′ do 6′.

Błąd ten przy użyciu węgielnicy odbija się na wynikach pomiaru w dwojaki sposób: a) przy wytyczaniu prostopadłej (rys. 165) z danego na prostej punktu A, tyczka, ustawiona na prostopadłej, odchyla się od właściwego położenia o pewien odcinek TT_1 w prawo lub w lewo, i przytem o odcinek tem dłuższy, im dalej tyczka T jest odsunięta od p. A; b) (rys.



rys. 165



rys. 166

166) przy odnajdywaniu spodka prostopadłej, spuszczonej z p. T na daną prostą, spodek odnajdziemy nie we właściwym punkcie A, lecz w pewnym A_1, tak więc popełnimy odrazu dwa błędy, mianowicie: 1) określimy długość prostopadłej z odcinka $A_1 T$, zamiast z AT, i 2) położenie spodka określimy z błędem równym długości odcinka AA_1.

Określmy błąd, dotyczący długości prostopadłej, i błąd wyznaczenia spodka prostopadłej, jeżeli błąd wytyczenia prostopadłej wynosi $\pm v'$. Oznaczmy $\sphericalangle ATA_1 = v$; $TA = d$, $AA_1 = m$.

Błąd wyznaczenia spodka prostopadłej $m = d \sin v = vd \sin 1' = \frac{v\,d}{3438}$

dla $v = 6'$

$$m = \frac{d}{600}$$

Jeżeli więc błąd wyznaczenia punktu nie powinien przekraczać, np., 5 *cm.*, wówczas $d \leqslant 600 \times 5\,cm. = 3000\,cm. = 30\,m.$

A więc przy wielkości błędu $m = 5$ *cm.*, dopuszczanego w wyznaczeniu spodka prostopadłej lub w wytyczeniu punktu na prostopadłej, nie wolno budować prostopadłych, dłuższych od 30 *m.*; gdy $m = 10$ *cm.*, wówczas $d < 60$ *m.*, zaś przy $m = 2$ *cm.* $d < 12$ *m.* Stąd przy pomiarach miast unikamy długich prostopadłych, co znów może być stosowane przy mniej dokładnych pomiarach, jak, np., pomiary gospodarcze, techniczne, regulacyjno-rolne i t. p.

Ażeby porównać pomierzoną długość prostopadłej, zbudowanej zapomocą węgielnicy, z właściwą długością tej prostopadłej, oznaczmy pomierzoną długość TA_1 przez l;

wówczas

$$d = \sqrt{l^2 - m^2} = \left(l^2 - m^2\right)^{1/2} = l\left(1 - \frac{m^2}{l^2}\right)^{1/2} = l\left(1 - \frac{m^2}{2\,l^2} - {}^1/_8\,\frac{m^4}{l^4}\ldots\right)$$

$$d = l - \frac{m^2}{2\,l} - {}^1/_8\,\frac{m^4}{l^3}\cdots$$

dla m równego nawet $\frac{1}{100}\,l$ będzie ${}^1/_8\,\frac{l^4}{100^4\,l^3} = \frac{1}{800\,000\,000}\,l$, więc tego wyrazu rozwinięcia nie bierzemy już pod uwagę, stąd

$$d = l - \frac{m^2}{2\,l}$$

błąd W w wyznaczeniu długości prostopadłej będzie tedy

$$W = l - d = \frac{m^2}{2\,l}$$

Dla węgielnicy, dającej błąd 6′ w tyczeniu prostego kąta, jest

$$m = \frac{d}{600}, \text{ lub, ponieważ } l \text{ jest bliskie } d, \text{ będzie}$$

$$m = \frac{l}{600}, \text{ a stąd } W = \frac{l^2}{2.600^2\, l} = \frac{l}{2.360\,000} = \frac{l}{720\,000};$$

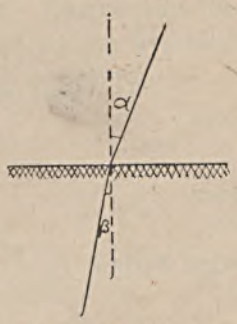
Stąd, wobec tego, że błąd określenia długości prostopadłej przy użyciu wadliwej węgielnicy jest bardzo małym, uważamy, iż do wyniku pomiaru długości l prostopadłej żadnych poprawek wprowadzać nie należy.

§ 53. Węgielnica pryzmatyczna Bauernfeinda.

Przyrząd ten (rys. 167) jest szklanym pryzmatem równoramiennym prostokątnym, w którym ścianka, leżąca naprzeciwko kąta prostego, jest lustrem. Szkło, z którego wyrabiane są pryzmaty, jest kronglasem, a więc szkłem, o granicznym kącie załamania 40° 40′, co znaczy, że jeżeli promień pada na ściankę pryzmatu pod kątem padania, większym od 40° 40′, wówczas następuje całkowite odbicie promienia; jeżeli zaś kąt padania jest mniejszym od 40° 40′, wówczas promień przechodzi przez ściankę, załamując się ku prostopadłej, gdy przechodzi z powietrza w pryzmat, lub załamując się od prostopadłej punktu padania, gdy promień ze szkła przechodzi w powietrze (rys. 168).



Rys. 167.



Rys. 168.

Stosunek sinusów kątów padania i załamania jest stały,

mianowicie:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = 1{,}534$$

i odwrotnie

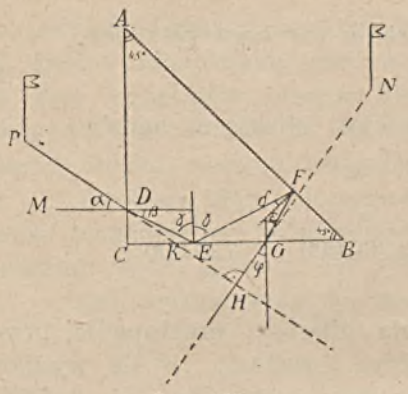
$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 0{,}652$$

Tak więc dla przejścia promienia ze szkła w powietrze mamy

$$\sin \beta = 0{,}652 \sin \alpha$$

jeżeli α będzie $= 90°$, $\sin \alpha = 1$ i $\sin \beta = 0{,}652$, więc $\beta = 40°40'$

co znaczy, że promień, idący z wewnątrz pryzmatu, gdy pada pod kątem większym od 40° 40′ na ściankę przyprostokątną pryzmatu, odbija się wewnątrz pryzmatu, więc — nie ulegnie załamaniu.



Rys. 169.

Wyobraźmy sobie przekrój pryzmatu, prostopadły do jego ścianek (rys. 169). Kąty A i B są równe 45°, ścianka AB jest lustrem. Rozpatrzmy promień PD, padający od tyczki na jedną z przyprostokątnych od strony ostrego kąta pod kątem α; kąt załamania będzie równym β i załamany promień padnie na CB pod kątem $\gamma = 90^0 - \beta$.

Jeżeli w punkcie D promień uległ załamaniu, więc $\beta < 40^0\,40'$,

stąd kąt $\gamma > 49^0 19' > 40^0 41'$,

a więc jest większy od granicznego; wskutek tego powinno nastąpić całkowite odbicie wewnętrzne, a więc promień DE odbije się i padnie w F na lustro pod kątem δ; następnie odbije się i padnie na ściankę CB pryzmatu pod kątem ε.

Określmy wielkość kąta ε dla ustalenia, czy w p. G promień może ulec całkowitemu odbiciu, czy też ulegnie załamaniu.

Z $\triangle$-ów $B\,G\,F$ i $B\,E\,F$ mamy sumy kątów:

$$45^0 + 90^0 - \varepsilon + 90^0 - \delta = 180^0$$
$$45^0 + 90^0 - \gamma + 90^0 + \delta = 180^0$$

Dodając do siebie obydwa równania, otrzymamy:

$$90^0 + 180^0 - \varepsilon - \gamma + 180^0 - \delta + \delta = 360^0$$

lecz

$$90^0 - \gamma = \beta$$

więc będzie

$$\beta - \varepsilon = 0, \quad \text{skąd } \underline{\underline{\beta = \varepsilon}}$$

Ponieważ $\beta < 40^0\,41'$, więc i $\varepsilon < 40^0\,41'$, a więc nastąpi załamanie i promień wyjdzie pod kątem φ, przytem, ponieważ spółczynnik załamania pryzmatu jest stały, przeto

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\varphi}{\sin\varepsilon}$$

że zaś

$$\beta = \varepsilon \text{ więc i } \alpha = \varphi$$

t. j. promień, dwukrotnie wewnątrz pryzmatu odbity, wychodzi z pryzmatu pod tym samym kątem, pod jakim padł na ściankę AC pryzmatu przy wejściu. Określmy kąt $G\,H\,K$ między przedłużeniem padającego na pryzmat promienia, t. j. $P\,D\,K\,H$, i promieniem wychodzącym $G\,H$.

Z $\triangle$-a $G\,H\,K$

mamy:

$$\sphericalangle HKG = \alpha,$$

gdyż

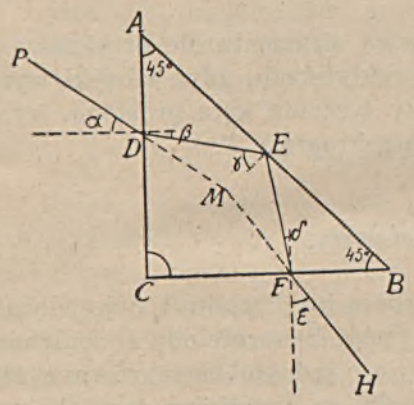
$$KG \parallel MD \text{ i } \sphericalangle KGH = 90^0 - \varphi = 90^0 - \alpha$$

więc

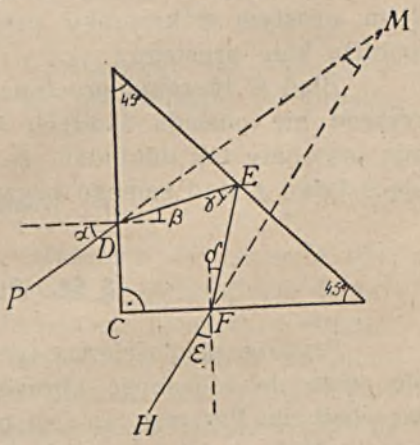
$$\sphericalangle KHG = 180^0 - \sphericalangle HKG - \sphericalangle KGH = 180^0 - \alpha - (90^0 - \alpha) = 90^0$$

Jeżeli na przedłużeniu HG ustawiamy tyczkę N, wówczas znajdzie się ona na prostopadłej do PH. Ponieważ, wskutek małych wymiarów pryzmatu, trzymanego nad punktem, leżącym na prostej P — pryzmat, możemy przyjąć, że i p. H leży w tym samym punkcie prostej (wymiary pryzmatu nie sięgają szerokości taśmy stalowej, nad którą zwisa pion pryzmatu), a więc prosta HN jest $\perp$-ą do danej prostej P — pryzmat.

Praktyczne stosowanie pryzmatu do tyczenia prostopadłych niczem więc nie różniłoby się od stosowania węgielnic zwierciadlanych, gdyby w pryzmacie kąt między kierunkami promieni wchodzącego i wychodzącego był stale równym 90°, a więc był kątem stałym; gdyż wtedy, obracając w ręku pryzmat, zmienialibyśmy tylko kąt padania α, zaś do chwili, gdy promień po załamaniu ulegałby dwukrotnemu wewnętrznemu odbiciu, kąt zmiany kierunku promienia byłby stałym i równym 90°, t. j. obraz tyczki widzielibyśmy w ściance CB nieruchomym pomimo obrotu pryzmatu dokoła osi trzonka. Ale z tego rodzaju obracania przyzmatu mogą wyniknąć takie jego położenia, że albo obraz tyczki P zniknie, albo też stanie się ruchomym. Pierwszy wypadek będzie miał miejsce wówczas, gdy promień P pójdzie stycznie do ścianki AC, lub padnie na ściankę AB, drugi — gdy wewnątrz pryzmatu nastąpi tylko jedno odbicie wewnętrzne. Rozpatrzmy ten właśnie wypadek i ustalmy zależność, zachodzącą między zmianą kierunku promienia a kątem, pod którym promień pada na ściankę pryzmatu.



Rys. 170.



Rys. 170 a.

W obydwu przedstawionych na rysunkach wypadkach mamy po jednem tylko wewnętrznem odbiciu, przytem, jak widzimy, padający promień PD tworzy z przedłużeniem wychodzącego HF dla pierwszego rysunku kąt M rozwarty, dla drugiego ostry. Mamy

dla I rysunku		dla II rysunku	
	z △-ów DAE i FEB		
(—)	$45^0 + 90^0 + \beta + 90^0 - \gamma = 180^0$	$45^0 + 90^0 - \beta + 90^0 - \gamma = 180^0$	(—)
	$45^0 + 90^0 + \delta + 90^0 - \gamma = 180^0$	$45^0 + 90^0 - \delta + 90^0 - \gamma = 180^0$	
	$\beta - \delta = O$ odejmując, otrzymany	$-\beta + \delta = O$	

a więc w obydwu wypadkach

$$\beta = \delta$$

A ze względu na stałość spółczynnika załamania

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \delta} \text{ przy } \beta = \delta \text{ otrzymamy } \alpha = \varepsilon$$

Z czworoboków $F\,C\,D\,M$ otrzymamy

dla I rysunku:	dla II rysunku:
$90^0 + 90^0 - \alpha + M + 90^0 - \varepsilon = 360^0$	$90^0 + 90^0 + \alpha + M + 90^0 + \varepsilon = 360^0$
$M = 90^0 + \alpha + \varepsilon = 90^0 + 2\,\alpha$	$M = 90^0 - \alpha - \varepsilon = 90^0 - 2\,\alpha$

W obydwu wypadkach, przy obrocie pryzmatu dokoła osi trzonka, wskutek wynikającej stąd zmiany wielkości kąta padania, zmienia się będzie i wielkość kąta między promieniem padającym a wychodzącym z pryzmatu, — innemi słowami, obraz tyczki w P będzie ruchomym.

Na zasadzie danych doświadczalnych, które możemy sprawdzić, wykreślając odpowiednie drogi promienia przy przejściu przez pryzmat, można podać następujące prawidło, dla odszukiwania stałego obrazu tyczki w pryzmacie, mianowicie: jeżeli pryzmat zwrócony jest kątem prostym do oka, to obrazu szukać należy na ściance pryzmatu, odwróconej od przedmiotu i przytem wpobliżu przeciwprostokątnej; jeżeli zaś pryzmat jest zwrócony kątem prostym w kierunku przedmiotu, wówczas obrazu szukać należy wpobliżu kąta prostego.

Błąd w tyczeniu prostopadłej zapomocą pryzmatu nie przekracza 5′ przyrząd nie posiada żadnych śrubek do rektyfikacji, gdyż fabryki wyrabiają pryzmaty tak dokładne, że błędy przy tyczeniu kąta prostego, wynikające tylko z wad samego pryzmatu, nie przekraczają 2′.

§ 54. Pryzmat pięciościenny.

Pryzmat pięciościenny (pentagon Gouliera lub Prandtla) daje większe pole widzenia i jasność obrazów, niż pryzmat Bauernfeinda i węgielnica zwierciadlana. Pryzmat ten jest pięciościennym o jednym kącie, równym 90°, i pozostałych — równych $112^1/_2{}^0$ każdy. Ścianki, za wyjątkiem dwu, obejmujących kąt prosty, są lustrami.

Promień $P\,F$ pada pod kątem α na ściankę $A\,B$, załamuje się, wchodzi w pryzmat pod kątem β, odbija się w G od lustra pod kątem γ, w H od lustra $C\,B$ pod kątem δ, pada na ściankę EA pryzmatu pod kątem τ i załamuje się, wychodząc pod kątem φ, i wpada do oka, jako promień odchylony od pierwotnego kierunku o kąt $K\,M\,P$.

Ponieważ przedłużenia luster BC i ED tworzą kąt 45°, więc promień FG z promieniem HI tworzą kąt prosty.

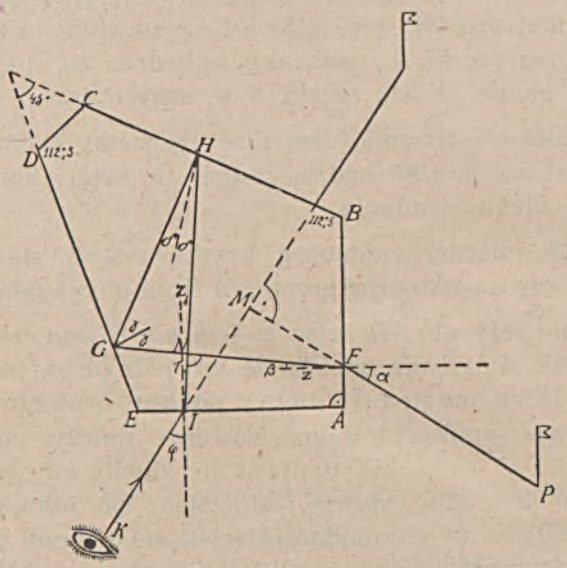
Z czworokąta $A\,F\,N\,I$ wynika: $90^0 + 90^0 + \beta + \sphericalangle N + 90^0 - \tau = 360^0$, lecz $\sphericalangle N = 90^0$, więc $\beta = \tau$ i, ponieważ spółczynnik załamania jest stałym, więc $\alpha = \varphi$. Z czworokąta $AFMI$, w którym $\sphericalangle AFM = 90^0 + \sphericalangle ZFM = 90^0 + \alpha$

i $\sphericalangle AIM = 90^0 - \sphericalangle MIZ_1 = 90^0 - \varphi = 90^0 - \alpha$ wynika, że suma kątów jest równą:

$$90^0 + 90^0 + \alpha + M + 90^0 - \alpha = 360^0$$

więc

$$\underline{\underline{M = 90^0}}$$



Rys. 171.

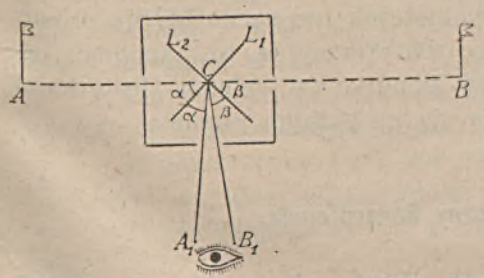


Rys. 171a.

Jeżeli na przedłużeniu promienia IK, wpadającego do oka, ustawimy tyczkę, to tem samem ustawiamy ją na prostopadłej do prostej, łączącej punkt P z pionem pentagonu.

§ 55. Krzyż zwierciadlany.

Krzyż zwierciadlany jest przyrządem, służącym do tyczenia 180°. Składa się z dwu luster L_1 i L_2, krzyżujących się prostopadle do siebie, jedno pod drugiem. Na przedłużeniu przecięcia się płaszczyzn obydwu luster, do oprawy krzyża przymocowany jest trzonek z haczykiem dla pionu zapomocą którego wyznaczamy na gruncie rzut poziomy przyrządu. Rysunek daje rzut poziomy krzyża, ustawionego w ten sposób, że przecięcie się ustawionych pionowo lusterek $L_1 L_2$ znajduje się na pionie punktu C, leżącego ściśle na prostej AB. Na rysunku pierwsze lusterko odpowiada prostopadłej do drugiego lusterka. Przypuśćmy, że patrząc przez okular, widzimy obrazy obydwu tyczek AB nie na jednej prostej pionowej, a na dwu, odpowiadających położeniu punktów $A_1 B_1$. Promień, padający na lusterko L_2, po odbiciu się od niego tworzy ten sam kąt α z prostopadłą L_1 do lustra L_2, podobnie jak promień BC, padający na L_1, i odbity promień CB_1 tworzą z prostopadłą L_2 ten sam kąt β.



Rys. 172.

Wynika stąd, że kąt $ACA_1 = 2\alpha$ i $\sphericalangle BCB_1 = 2\beta$, $\sphericalangle ACA_1 + \sphericalangle B_1CB = 2(\alpha + \beta)$, lecz $\alpha = \sphericalangle L_1 CB$ jako naprzemianległe, więc $\alpha + \beta = 90^0$, gdyż $\alpha + \beta$ jest kątem między lustrami, ustawioneml prostopadle do siebie; stąd wynika, że

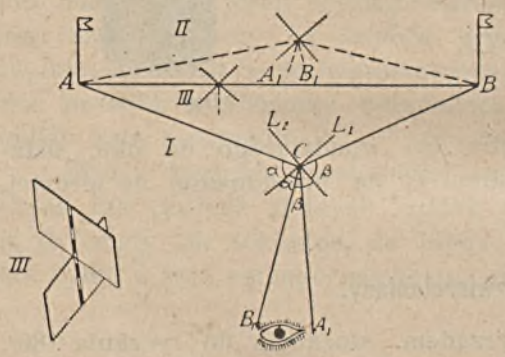
$$\sphericalangle ACA_1 + \sphericalangle B_1CB = 180^0$$

że zaś AC i CB leżą na jednej prostej, więc CB_1 i CA_1 powinny się kryć wzajemnie, co znaczy, że obraz tyczki A, widziany w lustrze L_2, powinien się znajdować dokładnie na pionie obrazu tyczki B w lustrze L_2.

Obracając krzyż dokoła osi trzonka, zmieniać będziemy tylko wielkości kątów α i β, natomiast $\alpha + \beta = 90^0$ będzie stałem, a stąd i położenie obrazów obydwu tyczek nie ulegnie zmianie.

Wyobraźmy sobie, że chcemy zapomocą krzyża ustawić się ściśle na prostej AB. Ustawiamy się na oko przy prostej AB na pionie punktu C,

Ponieważ punkt C nie leży na AB, więc $\alpha + \beta$ nie równa się 90^0, a więc obrazy obydwu tyczek A i B nie znajdą się na jednym pionie (na wzajemnem przedłużeniu). Jeżeli przytem (I) obraz punktu prawego znajdzie się z lewej strony obrazu punktu lewego, wówczas należy posuwać się naprzód do chwili, gdy obydwa obrazy, zbliżając się stopniowo, znajdą się ściśle na jednym pionie.



Rys. 173.

Jeżeli (II) obraz punktu lewego znajdzie się na lewo od obrazu punktu prawego, wówczas cofamy się dopóki obrazy nie znajdą się na jednej prostej; punkt, dla którego to wypadnie, znajduje się na danej prostej.

Dla sprawdzenia krzyża wytyczamy metodą tyczenia wprzód na prostej AB punkt C i ustawiamy nad nim krzyż. Tyczki w punktach A i B zapomocą pionu ustawiamy do położenia ściśle pionowego.

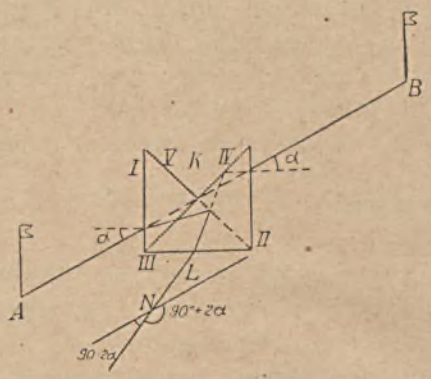
Jeżeli, utrzymując krzyż ściśle nad punktem C prostej AB, mamy obrazy tyczek A i B na jednym pionie, wówczas $\alpha + \beta = 90^0$, a więc płaszczyzny lusterek są wzajemnie prostopadłe; jeżeli obrazy tyczek są odsunięte od siebie, wówczas płaszczyzny lusterek nie są do siebie prostopadłe, i jeżeli jedno z lusterek ma śrubkę rektyfikacyjną, to zapomocą odpowiedniego obrotu tej śrubki zmieniamy dopóty kąt między lusterkami, dopóki obrazy punktów A i B nie znajdą się na jednym pionie.

§ 56. Krzyż pryzmatyczny Bauernfeinda.

Krzyż pryzmatyczny Bauernfeinda składa się z dwu pryzmatów Bauernfeinda, ustawionych jeden na drugim w taki sposób, że płaszczyzny przeciwprostokątne pryzmatów są wzajemnie prostopadłe. Każdy pryzmat

oddzielnie daje możność tyczenia kątów prostych, zaś układ obydwu w postaci krzyża pryzmatycznego daje możność tyczenia 180°, t. j. prostej.

Wyobraźmy sobie krzyż pryzmatyczny, umieszczony na danej prostej *AB*. Ponieważ ścianki I i II pryzmatów są do siebie równoległe, więc promienie od *A* i *B* padają na te ścianki pod równemi kątami α; promień *AK* zmieni swój kie-



Rys. 174.



Rys. 174 a.

runek o kąt $90^0 - 2\alpha$, zaś promień *BK* — o $90^0 + 2\alpha$. Zmianę kierunku liczymy od *A B*, ponieważ więc obydwa wychodzące z pryzmatów przez ścianki III-e obrazy tyczek są widziane pod kątami $90^0 - 2\alpha$ i $90^0 + 2\alpha$ w stosunku do *A B*, — obydwa obrazy znajdują się tedy w jednej pionowej płaszczyźnie, przecinającej *A B*,
gdyż

$$90^0 - 2\alpha + 90^0 + 2\alpha = 180^0$$

przy obrazach ruchomych w każdym pryzmacie oddzielnie, — lub ponieważ $90^0 + 90^0 = 180^0$, więc to samo zjawisko będzie miało miejsce i przy obrazach nieruchomych. Jeżeli krzyż pryzmatyczny odsuniemy od prostej *A B*, wówczas obrazy tyczek odsuną się od siebie.

Skoro posuwając się naprzód prostopadle do danej prostej od punktu, leżącego wpobliżu prostej, widzimy obrazy tyczek, zbliżające się ku sobie, to posuwamy się dalej w tym samym kierunku do chwili, gdy obydwa obrazy znajdują się na jednym pionie; przy oddalaniu się obrazów musimy zmienić kierunek przesuwania się i iść dopóty, dopóki wreszcie obydwa obrazy nie znajdą się na jednym pionie; rzut trzonka krzyża pryzmatycznego, wskazany przez zawieszony na trzonku pion, daje w terenie punkt leżący na danej prostej.

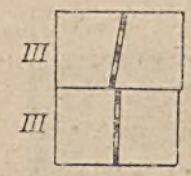
Dla należytego funkcjonowania krzyż pryzmatyczny powinien odpowiadać warunkom następującym:

1) płaszczyzny I-e i II-e powinny być do siebie ∥-e, zaś płaszczyzny III-e leżeć w jednej płaszczyźnie;

2) płaszczyzny IV-e i V-e (przeciwprostokątne) są do siebie prostopadłe.

Sprawdzenie spełniania tych warunków możemy uskutecznić w stosunku do punktu *C*, leżącego ściśle na danej prostej *AB*, a mianowicie:

jeżeli obrazy obydwu tyczek znajdują się nawet jeden pod drugim, lecz przedłużenia obrazów przecinają się, — odpowiednie płaszczyzny pryzmatów nie są do siebie równoległe. Ponieważ pryzmaty są wyrabiane przez fabryki z dużym stopniem dokładności, przeto doprowadzenie jednych tylko ścianek, np. I i II, do równoległości, tem samem doprowadzi do prostopadłości ścianki IV i V-ą pryzmatów.



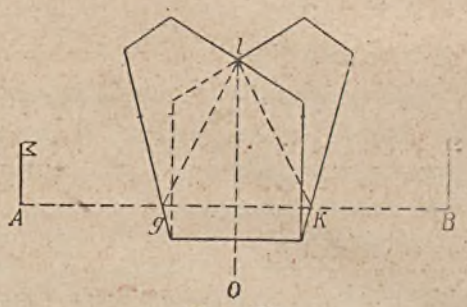
Rys. 175.

Zapomocą śrubek w górnej lub dolnej, oraz bocznej ściance oprawy pryzmatów, zmieniamy dotąd wzajemne położenie pryzmatów, aż obydwa obrazy znajdą się na jednej pionowej prostej.

§ 57. Podwójny pentagon.

Gdy ułożymy 2 pentagony jeden na drugim w taki sposób, że 2 ścianki przyprostokątne znajdą się w jednej pionowej płaszczyźnie, zaś dwie drugie przyprostokątne płaszczyzny będą do siebie równoległe, wówczas każdy z pentagonów będzie mógł być użyty do tyczenia kątów prostych, zaś obydwa — dadzą możność odnajdywania punktów, leżących na danej prostej.

Podwójny pentagon umieszczony jest w pudełku o kształcie walca z wycięciami dla promieni bocznych i wychodzących z pentagonu do oka; pudełko u dołu zaopatrzone jest w trzonek.



Rys. 176

Promień od tyczki A (rys. 176) biegnie po łamanej $AklO$, zaś promień od p. B biegnie po $BglO$, jeżeli przyrząd znajduje się ściśle na danej prostej. Oko obserwatora, umieszczone przed przyrządem w punkcie O, widzi obrazy obydwu tyczek, znajdujące się na jednym pionie, gdyż każdy pentagon oddzielnie wychyla promień o 90° od pierwotnego kierunku, a więc wychodzące z przyrządu promienie idą w jednej płaszczyźnie ⊥ej do AB.

Jeżeli obrazy tyczek są oddalone od siebie, wówczas, przesuwając się odpowiednio w kierunku, prostopadłym do danej prostej, doprowadzimy obrazy do jednego pionu, co nastąpi, gdy staniemy ściśle na prostej AB.

Jeżeli obydwa pentagony mają kąty równe 90° i 112,5°, wówczas podwójny pentagon nie może dać błędu w wytyczaniu prostej i nie wymaga kontroli, jak krzyż zwierciadlany lub pryzmatyczny.

§ 58. Zastosowanie węgielnic.

Przy odnajdywaniu rzędnych i odciętych punktów pewnej łamanej, odniesionej do lokalnej osi odciętych (magistrali), zwracać należy uwagę, by

pion, zawieszony przy węgielnicy, zwisał nad miarą (taśmą, łatą), ułożoną wzdłuż danej prostej. Odczyt z taśmy bierzemy dla tego jej punktu, który ściśle znajduje się pod pionem. Dokładność określenia tego punktu ma znaczenie wyłącznie dla odciętej; co się tyczy rzędnej, to należy ją mierzyć sprawdzoną taśmą stalową, lub perjodycznie sprawdzaną taśmą płócienną (ta ostatnia po dłuższem użyciu wyciąga się o 30—40 *cm.*). Z tego względu lepiej jest stosować taśmy płócienne, przetkane cienkim drutem, co w znacznej mierze zapobiega wydłużaniu się taśmy.

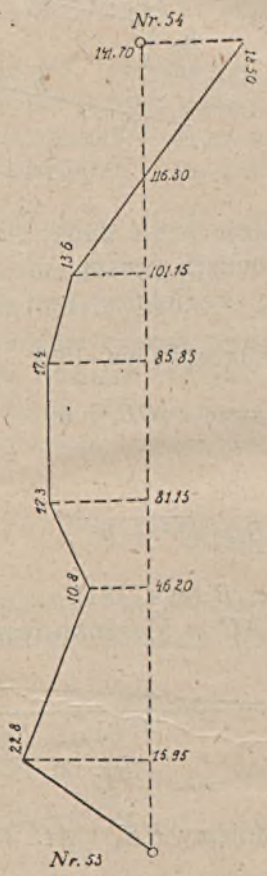


Rys. 177.

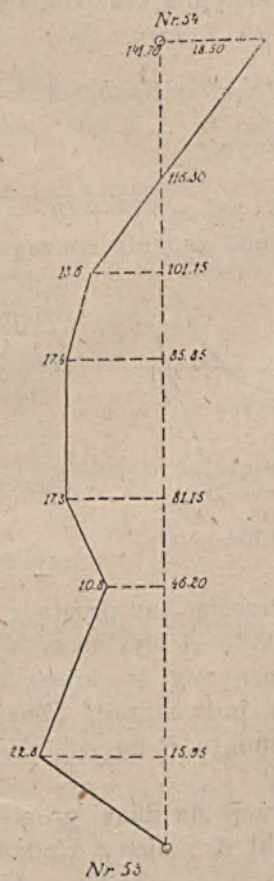
Przy pomiarze rzędnych i odciętych należy stosować jedną metodę opisu. Nasze instrukcje polecają następujący zapis:

Ministerstwo Reform Rolnych—patrz rys. 177a;

Ministerstwo Robót Publicznych—patrz rys. 177b.



Rys. 177a.

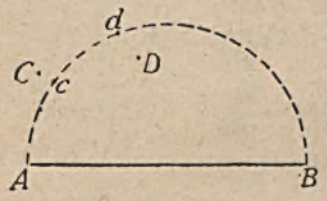


Rys. 177b.

Należy zwrócić uwagę na różnicę, zachodzącą w opisie rzędnych (równolegle i prostopadle do nich) w obydwu wypadkach.

Często węgielnica użyteczną jest przy rozwiązywaniu pewnych zadań na gruncie, a mianowicie:

1) Zatoczyć koło o danej średnicy AB (rys. 178).



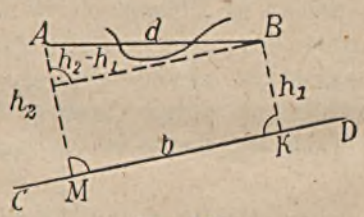
Rys. 178.

Na końcach średnicy ustawiamy pionowo tyczki i przechodzimy na odległość kilku metrów od A do p. C. Przesuwając się po prostej CB, szukamy spodka prostopadłej, spuszczonej z A na CB. W pewnym punkcie a obraz B ujrzymy w kierunku na A. Punkt a leży na obwodzie koła, ponieważ $\sphericalangle AaB$ jest prosty. Przechodzimy dalej do punktu D i, przesuwając się po DB lub jej przedłużeniu, odnajdujemy na obwodzie koła p. d. W ten sposób na obwodzie koła wyznaczymy dowolną ilość punktów.

Zagadnienie to ma zastosowanie przy projektowaniu parków i t. p.

2) Określić niedostępną odległość AB.

Odnajdujemy rzuty punktów A i B na prostą CD, dostępną dla pomiaru (rys. 179).



Rys. 179.

Mierzymy:

$$MK=b \quad BK=h_1 \quad AM=h_2$$

Określana długość

$$AB = d = \sqrt{b^2 + (h_2 - h_1)^2}$$

To samo zadanie rozwiążemy, prowadząc przez punkt A pomocniczą a dostępną dla pomiaru prostą, na której znajdziemy zapomocą węgielnicy rzut C punktu B.



Rys. 180.

Po pomierzeniu długości (rys. 180).

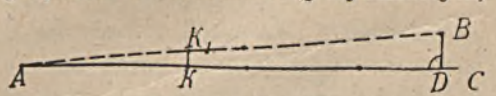
$$AC = b \text{ i } CB = h$$

otrzymujemy:

$$AB = \sqrt{b^2 + h^2}$$

3) Przeciąć las prostą z punktu A na B (rys. 181).

Z punktu A wycinamy wąską trybę AC w kierunku (przybliżonym) na B zapomocą czy to kierunku na dym, czy na huk strzału. Znajdujemy rzut D punktu B na AC. Mierzymy AD i BD.



Rys. 181.

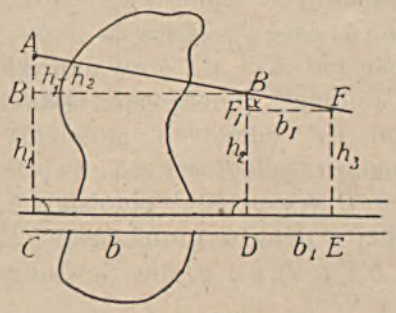
Obierając na danej prostej AD dowolny punkt K, mając AK pomierzone, zbudujemy $KK_1 \perp AC$. Długość KK_1 otrzymamy z proporcji $\frac{KK_1}{BD} = \frac{AK}{AD}$.

Przy pomocy węgielnicy zbudujemy $KK_1 \perp AC$ i odmierzymy odcinek KK_1 (obliczony powyżej z podobieństwa $\triangle$-ów prostokątnych AKK_1 i ADB).

Analogicznie dla całego szeregu punktów, leżących na AC, o po-

mierzonych od p. A odległości obliczymy odpowiadające tym punktom wysokości i wytyczymy tyle punktów K, aby z każdego z nich można było wyciąć kierunek na dwa sąsiednie.

Jeżeli chcemy uniknąć cięcia próbnej tryby, zaś wpobliżu mamy drogę prostolinjową przez las, lub brzeg lasu, to na drodze lub na brzegu lasu tyczymy prostą, na której odnajdujemy rzuty punktów A i B, t. j. punkty C i D. Mierzymy długości $AC = h_1$ $BD = h_2$ i $CD = b$ (rys. 182).



Rys. 182.

Na przedłużeniu CD o 50 — 100 m. określamy p. E, mierząc $DE = b_1$. Należy obliczyć długość h_3 prostopadłej EF, koniec której F leżeć będzie na przedłużeniu AB. Poprowadźmy $FF_1 \parallel BB_1 \parallel CD$; z podobieństwa $\triangle$-ów $FF_1B \sim BB_1A$ otrzymamy $BF_1 = x$, mianowicie:

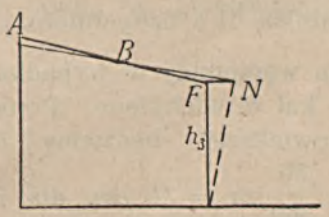
$$x : b_1 = (h_1 - h_2) : b \quad \text{stąd } x = \frac{b_1}{b}(h_1 - h_2), \quad \text{więc } h_3 = h_2 - x$$

Mając BF, tyczymy jej przedłużenie, wyrębując stopniowo trybę.

Pamiętać jednak należy, że węgielnica daje 5′ — 6′ błędu, a więc może odchylić punkt F w prawo lub w lewo od właściwego położenia o (rys. 183)

$$FN = h_3 \, tg \, 5' = h_3 \sin 5' = \frac{5h_3}{3438} = \frac{1}{700} h_3,$$

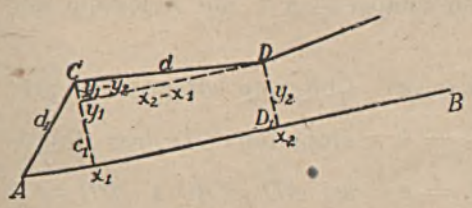
zamiast więc przetyczyć przez las FB, przetyczymy pewną prostą NB, co na długiej prostej AB może odchylić rąbaną trybę nawet o kilka metrów, o ile odcinek DE jest wobec CD stosunkowo krótkim. Z tego względu długie cięcia wykonywamy nieco innemi metodami, które poznamy w dalszej części kursu.



Rys. 183.

§ 59. Kontrola domiarów.

Przypuśćmy, że pomiarowi podlega pewna linja łamana, której położenie powinno być ustalone bez błędu.



Rys. 184.

Punkty C i D są wzięte z domiarów do prostej AB, przytem określono odległości x_1 i x_2 od punktu A spodków prostopadłych, spuszczonych na AB z punktów C i D, oraz długości rzędnych $y_1 y_2$ punktów C i D. Jeżeli łamana $A\,C\,D$..... jest linją, która kiedykolwiek na zasadzie tych samych miar (wypisanych na planie lub szkicu polowym) ma być odtworzona na gruncie na podstawie punktów A i B, to miary, określające położenie punktów C i D, powinny być przez nas skontrolowane.

Polowa kontrola w toku pomiaru polega na obliczeniu △-a $A_1 C C_1$ i trapezu $C_1 C D D_1$, mianowicie jeżeli pomierzone długości $A C$ i $C D$ są równe d_1 i d_2, to wówczas:

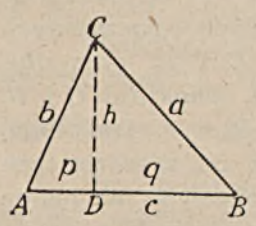
$$(d_1^1)^2 = x_1^2 + y_1^2 \text{ oraz } (d_2^1) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Aby uniknąć zbytecznych obliczeń, korzystamy z tablic kwadratów. Obliczenie da wielkości d_1^1 i d^1_2, określone z X-ów i Y-ów. Porównać należy obliczone d_1^1 i d_2^1 z wielkościami d_1 i d, otrzymanemi z pomiaru. Instrukcja Ministerstwa Reform Rolnych poleca sprawdzać położenie punktu granicznego, oddalonego od osi odciętych mniej niż o 20 *m.*, a więcej niż o 10 *m.*, zapomocą pomiaru odległości od dwóch wyznaczonych na osi odciętych punktów A i B (rys. 185), położonych z różnych stron spodka prostopadłej, spuszczonej z punktu granicznego C. Różnica wartości h, obliczonych zapomocą 1) b i p 2) a i q, nie powinna przekraczać $\frac{1}{100}\ h$.

Długości d_1, d_2, według instrukcyj powinny być mierzone taśmą stalową (rys. 184). Różnica między d pomierzonem a obliczonem nie powinna przekraczać $\frac{1}{300}$ średniej arytmetycznej obydwu rzędnych, zwiększonej o dopuszczaną różnicę dla podwójnego pomiaru długości d (patrz tablica II-a uzupełnień). Wielkość $\frac{1}{300}$ średniej rzędnych odpowiada 6′ błędu węgielnicy w wypadku, gdy obydwie rzędne są ku sobie, lub od siebie, o kąt 6′ odchylone. Ponieważ unikamy domiarów dłuższych od 30 *m.*, więc powiększać będziemy dopuszczalną różnicę dwukrotnego pomiaru d o $\frac{30}{300}\ m = 10\ cm.$ dla wszystkich rzędnych, przez co dla krótszych rzędnych uzyskamy normę łatwiejszą dla dopuszczanej różnicy między d pomierzonem a obliczonem.

§ 60. Obliczanie długości i położenia spodka prostopadłej, spuszczonej z wierzchołka △-a na podstawę.

Przypuśćmy, że z wierzchołka △-a mamy spuścić prostopadłą do podstawy, obliczyć długość tej prostopadłej i odległość spodka od początku podstawy, mając z pomiaru długości trzech boków △-a i nie uciekając się do wytyczania prostopadłej w terenie.



Rys. 185.

Dane z pomiaru: $AB = c$, $AC = b$, $CB = a$. Obliczmy długość h prostopadłej CD oraz długości $AD = p$ i $DB = q$ odcinków podstawy.

Ponieważ $p + q = c$, więc obliczmy $p - q$, a otrzymamy 2 równania z dwiema niewiadomemi.

$$b^2 - a^2 = (h^2 + p^2) - (h^2 + q^2) = p^2 - q^2 = (p + q)\ (p - q)$$

lecz $$p + q = c$$

więc

$$p - q = \frac{(b + a)\ (b - a)}{c}$$

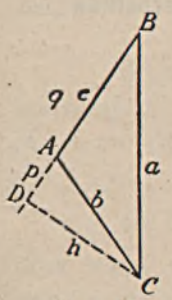
Oznaczmy prawą stronę tego równania przez m.;

mamy więc

$$\left.\begin{aligned} p - q &= m. \\ p + q &= c. \end{aligned}\right\} \text{ stąd } \begin{aligned} p &= \frac{c + m}{2} \\ q &= \frac{c - m}{2} \end{aligned}$$

i wreszcie

$$h = \sqrt{b^2 - p^2} = \sqrt{a^2 - q^2}$$



Rys. 186

W wypadku, gdy prostopadła przecina przedłużenie przeciwległego boku, odcinki p i g idą od spodka prostopadłej w jednym kierunku do końców boku, na przedłużeniu którego znajduje się spodek.

Oznaczmy wówczas:

$AD = p$

$BD = q$

$$b^2 - a^2 = (b + a)\ (b - a)$$

$$b^2 - a^2 = (p^2 + h^2) - (q^2 + h^2) = (p + q)\ (p - q)$$

lecz w danym wypadku

$$p - q = -\ (q - p) = -\ c$$

więc

$$p + q = \frac{(b + a)\ (a - b)}{c} = m$$

stąd:

$$p = \frac{m - c}{2}$$

$$q = \frac{m + c}{2} \quad \text{i t. d.}$$

Przykład:
(Rys. 185)

Dane są: $a = + 83{,}40$
$b = + 82{,}80$
$c = + 78{,}30$ Określić p, q, h.

Rozwiązanie:

a	+	83,40				clg c	8.10624	b^2	6856
b	+	82,80	$b+a$	+	166,20	loq $(b+a)$	2.22063	p^2	1484
$p+q=c$	+	78,30	$b-a$	−	0,60	loq $(b-a)$	9.77815$_n$	h^2	5372
$p+q$	+	78,30	p	+	38,52	log $(p-q)$	0.10502$_n$	a^2	6956
$p-q$	−	1,27	q	+	39,78	$p-q$	− 1,27	q^2	1582
$2p$	+	77,03	c	+	78,30			h^2	5374
$2q$	+	79,57						h	73,30

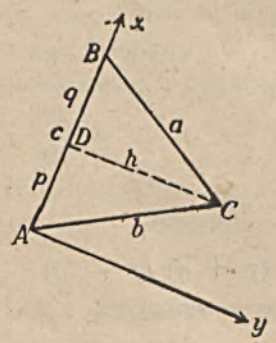
Pomoce stosowane: tablice kwadratów i logarytmów.

§ 61. Obliczyć spółrzędne wierzchołków △-a, gdy jeden z boków jest przyjęty za oś X, zaś za początek układu spółrzędnych obieramy jeden z wierzchołków △-a (położony na osi X).

Dane są trzy boki △-a

$AB = c \qquad X_A = 0$
$AC = b \qquad Y_A = 0$
$BC = a$

Oczywiście: $X_B = c$
$Y_B = 0$



Rys. 187

Zagadnienie daje się w danym wypadku rozwiązać w bardzo prosty sposób, mianowicie: na podstawie poprzedniego zagadnienia obliczymy $AD = p$ i $CD = h$, ponieważ D leży na osi X, będzie

$$X_D = X_A + \triangle X_{AD} = 0 + p = p$$
$$Y_D = Y_A + \triangle Y_{AD} = 0 + 0 = 0$$

Ponieważ $CD \perp X$, więc $\triangle X_{DC} = 0$
$\triangle Y_{DC} = h$

stąd:

$$X_C = X_D + \triangle X_{DC} = p + 0 = p$$
$$Y_C = Y_D + \triangle Y_{DC} = 0 + h = h$$

Gdyby punkt C leżał w lewo od osi X, wówczas $\underline{Yc = -h}$, gdyby punkt C leżał poniżej osi Y, wówczas $\underline{Xc = -p}$.

Dane są

$AB = c = +78{,}30$
$AC = +82{,}80$
$BC = +83{,}40$

zaczerpnięte z przykładu § 60.

Rozwiązanie przykładu § 60.

$$p = 38{,}52$$
$$q = 39{,}78$$
$$h = 73{,}30$$

Przyjmijmy dla powyższych danych, że 1) h skierowane jest w prawo od AB, jak na rys. 187; 2) AB jest przejęte za oś X-ów, zaś punkt A za początek układu.

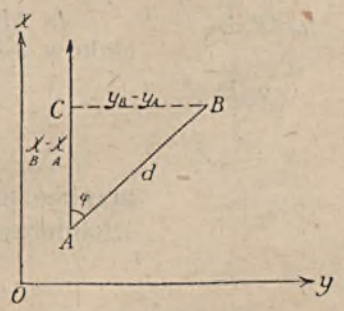
$$X_A = 0$$
$$Y_A = 0$$
$$X_D = +38{,}52$$
$$Y_D = 0{,}00$$
$$\triangle X_{DC} = 0{,}00$$
$$\triangle Y_{DC} = +h = +73{,}30$$
$$X_C = X_D + \triangle X_{DC} = +38{,}52$$
$$Y_C = Y_D + \triangle Y_{DC} = +73{,}30$$

§ 62. Mając długość i azymut odcinka, oraz spółrzędne punktu początkowego danego odcinka, określić spółrzędne końca danego odcinka.

Wyobraźmy sobie poprowadzoną przez punkt A prostą $\parallel$-ą do osi X; spuśćmy na nią z punktu B prostopadłą BC. W $\triangle$-cie prostokątnym ACB mamy:

$AB = d$—długość danego odcinka,
$\sphericalangle CAB = \varphi$—dany azymut tego odcinka,

oraz dane są X_A Y_A — spółrzędne prostokątne punktu A.



Rys. 188.

Ponieważ $AC \parallel Ox$, zaś $CB \parallel Oy$, więc:

$AC = X_B - X_A$, zaś $BC = Y_B - Y_A$.

Jest więc

$$Y_B - Y_A = d \sin \varphi$$
$$X_B - X_A = d \cos \varphi$$

a stąd:

$$Y_B = Y_A + d \sin \varphi$$
$$X_B = X_A + d \cos \varphi$$

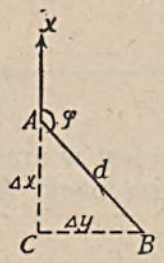
Różnice $Y_B - Y_A$ i X_B i X_A oznaczamy przez $\triangle Y_{AB}$ i $\triangle X_{AB}$ i nazywamy te wielkości przyrostami spółrzędnych. Ponieważ $\triangle X$ może być odkładane, tak jak X, ku górze lub wdół, więc $\triangle X$ w 1-ej i 4-ej ćwiartce są dodatnie, zaś w II ej i III-ej ujemne; $\triangle Y$ jest dodatniem w I-ej i II-ej ćwiartce, w III-ej i IV-ej zaś jest ujemnem.

Dla II-ej ćwiartki mamy (rys. 189):

$$-\triangle X = d \cos (180^0 - \varphi) = -d \cos \varphi$$
$$+\triangle Y = d \sin (180^0 - \varphi) = d \sin \varphi$$

Stąd wielkości przyrostów są

$$\triangle X = d \cos \varphi$$
$$\triangle Y = d \sin \varphi$$



Rys. 189.

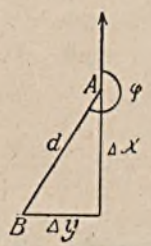
Zaś znaki $\triangle X$ i $\triangle Y$ dają funkcje $\cos \varphi$ i $\sin \varphi$.

Dla III-ej ćwiartki mamy (rys. 190):

$$-\triangle X = d \cos (\varphi - 180^0) = d \cos (180^0 - \varphi) = -d \cos \varphi$$
$$-\triangle Y = d \sin (\varphi - 180^0) = -d \sin (180^0 - \varphi) = -d \sin \varphi$$

stąd:

$$\triangle X = d \cos \varphi$$
$$\triangle Y = d \sin \varphi$$



Rys. 190.

Dla IV-ej ćwiartki (rys. 191):

$$\triangle X = d \cos (360^0 - \varphi) = d \cos \varphi$$
$$-\triangle Y = d \sin (360^0 - \varphi) = -d \sin \varphi$$

więc:

$$\triangle X = d \cos \varphi$$
$$\triangle Y = d \sin \varphi$$



Rys. 191.

A więc jako ogólne wzory na obliczanie przyrostów odcinków, leżących we wszystkich ćwiartkach, należy stosować:

$$\triangle X = d \cos \varphi$$
$$\triangle Y = d \sin \varphi$$

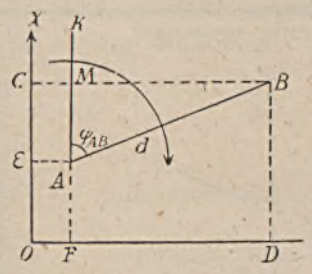
przytem pamiętać trzeba, że znak przyrostu wskaże za pośrednictwem sinusa lub cosinusa ćwiartka azymutu φ.

Przykład:

$X_A = +357{,}25$
$Y_A = -144{,}30$

I		II
$d_{AB} = 171{,}14$		$d_{AB} = 238{,}00$
$\varphi_{AB} = 73^0\ 19',5$		$\varphi_{AB} = 245^0 5',0$
log sin φ	9.9813	9.9576 n
log d	2.2334	2.3766
log cos φ	9.4578	9.6246 n
log $\triangle y$	2.2147	2.3342 n
log $\triangle x$	1.6912	2.0012 n
$\triangle y$	+ 163,95	— 215,85
$\triangle x$	+ 49,11	— 100,28
Y_B	+ 19,65	— 360,15
X_B	+ 406,36	+ 256,97

§ 63. Ze spółrzędnych dwu punktów obliczyć długość i azymut łączącego je odcinka.



Rys. 192.

Dane są X_A, Y_A oraz X_B, Y_B. Określić d_{AB} oraz φ_{AB}. Spuśćmy z p. B prostopadłe BC i BD, oraz z punktu A prostopadłe AE i AF do obydwu osi.

$$X_A = AF = OE$$
$$Y_A = AE = OF$$

$$X_B = BD = OC$$
$$Y_B = BC = OD$$

Poprowadźmy przez A prostą $AK \parallel OX$ i oznaczmy przez M przecięcie się prostych AK i BC.

Ponieważ azymutem prostej nazywamy kąt między kierunkiem osi X, względnie kierunkiem AK, do tej osi równoległym, a kierunkiem danej prostej, przeto azymutem danej prostej będzie kąt MAB.

Azymuty liczymy od 0^0 do 360^0 w kierunku prawym od osi X; oznaczamy azymut prostej AB przez φ_{AB} lub (AB).

Z $\triangle$-a prostokątnego AMB mamy:

$$AM = X_B - X_A = \triangle X_{AB}$$
$$MB = Y_B - Y_A = \triangle Y_{AB}$$

stąd

$$tg\,\varphi_{AB} = \frac{MB}{AM} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{\triangle Y_{AB}}{\triangle X_{AB}};$$

to jest:

$$tg\,(AB) = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$$

azymut prostej AB równa się różnicy pomiędzy rzędną następnego a rzędną poprzedniego punktu, dzielonej przez różnicę odciętych tych punktów.

Jeżeli więc azymutem jest (AB), to odjemnemi w liczniku i mianowniku są spółrzędne punktu B, odjemnikami — spółrzędne punktu A. Jeżeli oznaczymy długość prostej AB przez d, to z zależności

$$Y_B - Y_A = d \sin (AB)$$
$$X_B - X_A = d \cos (AB)$$

otrzymamy

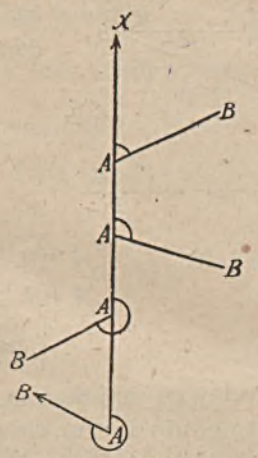
$$d = \frac{Y_B - Y_A}{\sin (AB)} = \frac{X_B - X_A}{\cos (AB)}$$

Zaś ponieważ długość d jest dodatnią, więc znaki liczników obydwu wyrazów nie różnią się od znaków mianowników.

Stąd mamy dla sin i cos azymutu, oraz różnic spółrzędnych punktu końcowego i początkowego danej prostej, prawidło znaków, ujęte w tabelkę:

Ćwiartka	Z n a k i	
	$Y_B - Y_a$ sin (AB)	$X_B - X_a$ cos (AB)
I	+	+
II	+	—
III	—	—
IV	—	+

Położenie prostej



Rys. 192a.

Zestawmy grupę wzorów:

a) $$tg\ (AB) = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$$

b) $$d = \frac{Y_B - Y_A}{\sin\ (AB)} = \frac{X_B - X_A}{\cos\ (AB)}$$

i zastanówmy się, w jaki sposób z tych wzorów określić azymut i długość. Azymut (AB), określany ze wzoru a), wypadnie dodatnim lub ujemnym; w 1-ym wypadku odpowiada I i III-ej ćwiartce, w 2-im — odpowiada II i IV-ej ćwiartce.

O ćwiartce azymutu decyduje jeden ze wzorów b), mianowicie, ponieważ znaki $Y_B - Y_A$ i $X_B - X_A$ są znane, więc sin (AB) i cos (AB) mają takie same znaki, jak ich liczniki. Z prawidła znaków dla funkcyj trygonometrycznych określimy ćwiartkę azymutu.

Funkcje	Ć w i a r t k i			
	I	II	III	IV
tg i *ctg*	+	—	+	—
sin	+	+	-	—
cos	+	—	—	+

Tak więc, gdy *tg* ze wzoru a) wypada dodatni, zaś sin ze wzoru b) ma znak +, to kombinacja znaków odpowiada ćwiartce I; tangens dodatni i sin ujemny odpowiada ćwiartce III, tangens ujemny przy sinusie dodatnim odpowiada II-ej, zaś przy sinusie ujemnym—IV-ej ćwiartce.

Podobnie o ćwiartce azymutu sądzić możemy na podstawie znaków *tg* i cos, lub, co na jedno wychodzi, *tg*-a i różnicy *X*-ów; następnie ćwiartkę azymutu wskazuje tabelka pierwsza na zasadzie znaków różnic *Y*-ów i *X*-ów.

Pamiętając, że dodatni *tg* odpowiada $tg\alpha$ i $tg\ (180 + \alpha)$, zaś ujemny *tg* odpowiada $tg\ (360^0 - \alpha)$ i $tg\ (180^0 - \alpha)$, mając φ obliczone z tablic logarytmicznych i wiedząc, w której ćwiartce leży dana prosta, określamy jej azymut z tabelki:

	I	II	III	IV
dodatni tangens	α		$180^0 + \alpha$	
ujemny tangens		$180^0 - \alpha$		$360^0 - \alpha$

Możemy również II ćwiartkę oznaczyć przez $90^0 + \alpha$ i przez $270^0 + \alpha$ IV-ą ćwiartkę, lecz wówczas należy brać α z tablic na zasadzie logarytmu $\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$, podanego w kolumnie cotangensowej tablic logarytmicznych.

Przy obliczaniu *d* ze wzorów $d = \frac{Y_B - Y_A}{\sin (AB)} = \frac{X_B - X_A}{\cos (AB)}$ możemy otrzymać dwie wielkości dla log *d*, różniące się o 1 — 2 jednostki ostatniego znaku mantysy. Za ostateczny rezultat dla log *d* nie zawsze należy brać średnią arytmetyczną obydwu wyników, a to ze względów następujących: spółrzędne punktów, jako wielkości, otrzymane na zasadzie pomiarów i obliczeń, są podane z pewnem zaokrągleniem, np. do 1 *cm.*; możemy przypuszczać, że błąd zaokrąglenia wynosi co najwyżej 0,5 *cm*; jeżeli, np., sin (*AB*) w stosunku do cos (*AB*) jest wielkością bardzo małą, a więc $Y_B - Y_A < X_B - X_A$, to ułamek $\frac{1}{\sin (AB)}$ jest wielkością znacznie większą od $\frac{1}{\cos (AB)}$, a więc do wielkości $d = \frac{Y_B - Y_A}{\sin (AB)}$ wchodzi błąd zaokrąglenia 0,5 *cm.*, mnożony przez większą liczbę $\frac{1}{\sin (AB)}$, więc wynik *d* będzie mniej dokładnym i należałoby za ostateczny wynik brać *d*, obliczone za pośrednictwem cos i odwrotnie, za pośrednictwem sin, gdy $Y_B - Y_A > X_B - X_A$. Jest to praktyczne ujęcie sprawy. Rozważając zaś dane zagadnienie matematycznie, należałoby patrzeć na dane spółrzędne, jako na wielkości, których pochodzenie nas nie obchodzi—wówczas różnica w dwukrotnie obliczonym log *d* wynika z niedokładności interpolacji i zaokrągleń w ostatnich znakach logarytmów.

Przykład:

Dane są punkty:

$$A \begin{cases} Y_a = -329{,}48 = \times 670{,}52 \\ X_a = +1661{,}70 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} Y_b = -679{,}90 = \times 320{,}10 \\ X_b = +2654{,}09 \end{cases}$$

Obliczyć azymut *AB* i długość $AB = d$.

Stosując pisownię przez uzupełnienie dziesiętne (patrz § 24), należy zawsze, przy odejmowaniu od większej liczby przy ×, odejmować mniejszą; przytem jeżeli odjemna jest większą, wówczas różnica jest dodatnią, jeżeli odjemnik jest większym—różnica jest ujemną. Gdy odjemna jest dodatnią, zaś odjemnik uzupełnieniem dziesiętnem, wówczas przy odejmowaniu należy odjemną powiększyć o jedność tego rzędu, któremu odpowiada krzyżyk.

	I		II	III	IV	V	VI
	Y_b		X_b	$\log(\triangle X+\triangle Y)$	$\log \triangle Y$	$\log \sin \varphi$	$\log d$
+	Y_a	+	X_a	$\log(\triangle X-\triangle Y)$	$\log \triangle X$	$\log \cos \varphi$	$\log d$
−	$\Delta Y=Y_b-Y_a$	−	$\triangle X=X_b-X_a$	$\log \operatorname{tg}(45^0+\varphi)$	$\log \operatorname{tg} \varphi$		
	$\triangle X+\triangle Y$		$\triangle X-\triangle Y$	$45^0+\varphi$	φ		d
	× 320,10	+	2654,09	2.80 751	2.54 459 n	9.52 240 n	3.02 219
	× 670,52	+	1661,70	3.12 801	2.99 668	9.97 449	3.02 219
−	350,42	+	992,39	9.67 950	9.54 791 n		
+	641,97	+	1342,81	25° 33′ 6″	340° 33′ 5″		1052,42

Liczymy kolejno kolumny I, II, III i IV i sprawdzamy, czy pozycje $45^0+\varphi$ (III) oraz φ (IV) różnią się o 45^0.

Po wypisaniu logarytmów kolumny V-ej, odejmujemy wierszami logarytmy tej kolumny od logarytmów $\triangle Y$ i $\triangle X$ kolumny IV-ej. Uzyskujemy w ten sposób dwukrotnie obliczony $\log d$ w kolumnie VI.

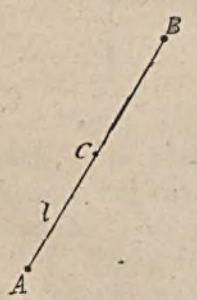
Pozycje 1 — 3 w kolumnach I i II należy zawsze sprawdzać.

Przy obliczaniu kolumny VI-ej kolumnę III można opuścić.

Uwaga: Pisownia przez uzupełnienie dziesiętne jest stosowana w b. zaborach austrjackim i pruskim i zalecana przez Ministerstwo Robót Publicznych. Natomiast Ministerstwo Reform Rolnych zaleca zwykłą pisownię.

§ 64. Wyznaczanie punktów na danej prostej.

Obliczyć spółrzędne punktu, leżącego na danej prostej w znanej odległości od początkowego punktu danej prostej, jeżeli znane są spółrzędne punktu początkowego i końcowego.



Rys. 193.

Dane są X_A Y_A, X_B Y_B, $l = AC$

Obliczyć X_C Y_C.

Ze wzorów $tg\ \varphi_{AB} = \dfrac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$

i $d_{AB} = \dfrac{Y_B - Y_A}{\sin \varphi_{AB}} = \dfrac{X_B - X_A}{\cos \varphi_{AB}}$

obliczymy azymut $(AB) = \varphi_{AB}$

i $d_{AB} = AB$.

a następnie, ponieważ:

$$\sin \varphi_{AB} = \frac{Y_B - Y_A}{d_{AB}}$$

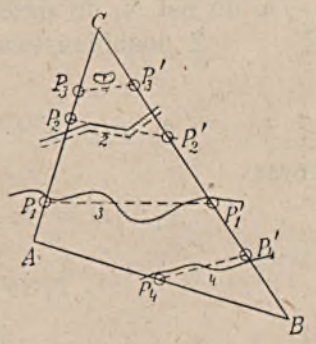
$$\cos \varphi_{AB} = \frac{X_B - X_A}{d_{AB}}$$

więc

$$X_C = X_A + \Delta X_{AC} = X_A + l \cos \varphi_{AB} = X_A + l \frac{X_B - X_A}{d_{AB}}$$

$$Y_C = Y_A + \Delta Y_{AC} = Y_A + l \sin \varphi_{AC} = Y_A + l \frac{Y_B - Y_A}{d_{AB}}$$

Zagadnienie niniejsze ma wielkie zastosowanie przy pomiarach linjowych. Przypuśćmy, że pomiarowi podlegają szczegóły, znajdujące się wewnątrz △-a ABC o znanych spółrzędnych wszystkich wierzchołków. Szczegóły 1-y, 2-i, 3-i i 4-y mogą być wzięte z domiarów do prostych $P_1 P_1'$, $P_2 P_2'$, $P_3 P_3'$, i $P_4 P_4'$, których początkowe i końcowe punkty leżą ściśle na bokach △-a. Takie proste nazywamy linjami pomiarowemi. Jeżeli położenie punktów $P_1 P_2 \ldots$ jest znane, t. j. znana jest odległość tych tak zwanych punktów posiłkowych od początku odpowiedniej prostej,

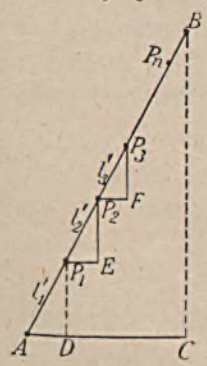


Rys. 194.

czyli

$$l_1 = AP_1$$
$$l_2 = AP_2 \text{ i t. d.},$$

wówczas, po naniesieniu na plan punktów A, B i C, można zapomocą cyrkla i podziałki w skali planu odciąć l_1 l_2 i t. d. na odpowiednich bokach wykreślonego △-a ABC i, łącząc odpowiednio naniesione punkty, wykreślić wszystkie linje pomiarowe, a na ich podstawie i szczegóły, wzięte z domiarów. Często jednak stawiane jest wymaganie analitycznego wyznaczania punktów posiłkowych; gdy na jednej lub kilku prostych znajduje się cały szereg takich punktów, należy dla uniknięcia błędów wykonywać obliczenia w ustalonym schemacie, co znacznie ułatwia przebieg rachunku. Przypuśćmy, że na prostej AB mamy szereg punktów pomiarowych P_1 $P_2 \ldots$ P_n. Dane są spółrzędne punktów A i B, oraz miary bieżące



Rys. 195.

$$l_1 = AP_1$$
$$l_2 = AP_2$$
$$l_3 = AP_3 \text{ i t. d.},$$

wzięte z taśmy przy pomiarze długości AB.

Obliczamy

$$D_{AB} = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$

z tablic kwadratów, o ile d nie jest dane, i tworzymy grupę odcinków:

$$l'_1 = l_1$$
$$l'_2 = l_2 - l_1$$
$$l'_3 = l_3 - l_2$$
$$- - - -$$
$$- - - -$$
$$l'_n = l_n - l_{n-1}$$
$$l'_{n+1} = l_{n+1} - l_n$$

Oczywiście, potrzebne jest sprawdzenie: gdy przez l oznaczymy pomierzoną długość AB: $l'_1 + l'_2 + l'_3 \ldots + l'_{n+1} = l$; następnie l powinno się różnić od D nie więcej, niż o różnicę pomiaru długości d, dopuszczanej dla tej kategorji (I, II lub III) terenu, której odpowiada pomiar.

Poprowadźmy przez A prostą $\parallel$-ą do osi Y, zaś przez P_1 i B proste $\parallel$-e do osi X, do przecięcia się w punktach D i C.

Z podobieństwa $\triangle$-ów ADP_1 i ACB piszemy:

$$l'_1 : P_1D = l : BC$$

oraz

$$l'_1 : AD = l : AC$$

lecz

$$P_1D = x_1 - x_A$$
$$BC = x_B - x_A$$
$$AD = y_1 - y_A$$
$$AC = y_B - y_A$$

więc

$$l'_1 : P_1D = l : BC \text{ oraz } l'_1 : AD = l : AC$$

$$l'_1 : (x_1 - x_A) = l : (x_B - x_A)$$

skąd

$$x_1 - x_A = \Delta x_1 = l'_1 \frac{x_B - x_A}{l}$$

podobnie z drugiego równania otrzymamy

$$l' : (y_1 - y_A) = l : (y_B - y_A)$$

skąd

$$y_1 - y_A = \Delta y_1 = l'_1 \frac{y_B - y_A}{l}$$

Oznaczając znane wielkości przez m i k, t. j. zakładając

$$\frac{x_B - x_A}{l} = k \text{ i } \frac{y_B - y_A}{l} = m$$

napiszemy:

$$\Delta x_1 = k l'_1 \qquad \Delta y_1 = m l'_1$$

a podobnie dla

ΔP_2EP_1: $\Delta x_2 = k l'_2$ $\Delta y_2 = m l'_2$

z $\triangle$-a P_3FP_2: $\Delta x_3 = k l'_3$ $\Delta y_3 = m l'_3$

$- - - - -$ $- - - - -$

$- - - - -$ $- - - - -$

i dla l'_{n+1} $\Delta x_{n+1} = k l'_{n+1}$ $\Delta y_{n+1} = m l'_{n+1}$

dodając, otrzymamy $[\Delta x] = k\,[l']$ $[\Delta y] = m\,[l']$

lecz

$$[l'] = l_1 + l_2' + l_3' + \ldots . l_n' = l$$

więc

$$k\,[l'] = kl = x_B - x_A$$

$$\text{i } m\,[l'] = ml = y_B - y_A$$

skąd

$$[\Delta x] = x_B - x_A$$

$$\text{i } [\Delta y] = y_B - y_A$$

dwa ostatnie równania dają więc kontrolę prawidłowości obliczenia

$$\Delta x_1\ \Delta x_2 \ldots .$$

$$\Delta y_1\ \Delta y_2 \ldots .$$

Stąd spółrzędne punktów $P_1\ P_2 \ldots .\ P_n$ będą równe

$$x_1 = x_A + \Delta x_1$$
$$x_2 = x_1 + \Delta x_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = x_{n-1} + \Delta x_n$$

$$y_1 = y_A + \Delta y_1$$
$$y_2 = y_1 + \Delta y_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = y_{n-1} + \Delta y_n$$

i sprawdzenie:

$$x_B = x_{n+1} = x_n + \Delta x_{n+1}$$

$$y_B = y_{n+1} = y_n + \Delta y_{n+1}$$

Ten system obliczania spółrzędnych z kolejnych odcinków $l_1'\ l_2'\ l_3' \ldots .$ jest lepszym od obliczania przez przyrosty spółrzędnych z miar bieżących $l_1\ l_2\ l_3 \ldots .$, gdyż błąd, popełniony w obliczaniu z kolejnego odcinka, nie może się ukryć i kontrole rachunku $[\Delta x]$ i $[\Delta y]$ zawsze go wykryją, co nie ma miejsca przy obliczaniu Δx i Δy-ów z miar bieżących. Wielkości m i k pruska instrukcja zaleca liczyć z dokładnością do 0,001, zamiast do 0,0001.

Przykład:

Wzory:

$$m = \frac{y_B - y_A}{l};\ k = \frac{x_B - x_A}{l}$$

$$D = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}$$

$$d = D - l$$

$$\Delta y_n = m\Delta l_n \qquad y_n = y_{n-1} + \Delta y_n$$

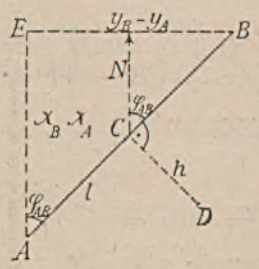
$$\Delta x_n = k\Delta l_n \qquad x_n = x_{n-1} + \Delta x_n$$

1	2	3	4	5	6	7
$y_B - y_A$ $x_B - x_A$ D	$(y_B - y_A)^2$ $(x_B - x_A)^2$ D^2	m k d	Odcinki l_n	y_{n-1} Δy_n	x_{n-1} Δx_n	Nr.Nr. punktów
−311,01	96727	−0,983		669,61	× 877,95	320
+ 57,69	3328	+0,182		7	4	
316,31	100055	+0,21<0,59 III	80	− 78,64	+ 14,56	
				590,90	× 892,55	321
				4	2	
			45,2	− 44,43	+ 8,23	
				546,43	× 900,80	322
				6	3	
			67,6	− 66,45	+ 12,30	
				479,92	× 913,13	323
				5	3	
			50,4	− 49,54	+ 9,16	
				430,33	× 922,33	324
				7	4	
			72,9	− 71,66	+ 13,27	
				358,60	× 935,64	325
				29	16	
			316,1	− 310,72	+ 57,53	

Kolejność obliczeń: kolumny 1, 2, 3, 4; następnie Δy_n i Δx_n w kolumnach 5 i 6-ej, oraz sumy $[l]$, $[\Delta y]$ i $[\Delta x]$ u dołu kolumn 4, 5 i 6-ej.

Nad sumą $[\Delta y] = -310{,}72$ i $[\Delta x] = +57{,}53$ wypisujemy 29 i 16, jako dopełnienia do odpowiednich liczb w kolumnie 1-ej; liczby 29 i 16 dzielimy proporcjonalnie do długości odcinków na poszczególne przyrosty i wypisujemy wyniki nad poszczególnemi przyrostami w kolumnach 5 i 6-ej, tak jednakże, by suma wyników była równa odpowiednio 29 i 16. Wreszcie w tych samych kolumnach obliczamy spółrzędne.

§ 65. Obliczenie spółrzędnych punktu, leżącego na domiarze do danej prostej.



Rys. 196

Dane są x_A y_A, x_B y_B, $d = AB$, $AC = l$, $CD = h$

Określić należy x_D y_D.

Z poprzedniego mamy:

$$x_C = x_A + kl$$
$$y_C = y_A + ml$$

Poprowadźmy $AE \parallel$-e do osi X i $BE \parallel$-e do osi Y oraz $CN \parallel$-e do osi X.

Wówczas $\sphericalangle EAB = \varphi_{AB} = \sphericalangle NCB$, skąd k i m wyznaczymy w zależności od φ_{AB}, a mianowicie $k = \dfrac{x_B - x_A}{d} = \cos \varphi_{AB}$

$$m = \frac{y_B - y_A}{d} = \sin \varphi_{AB}$$

Azymut prostej CD:

$$\varphi_{CD} = \sphericalangle NCD = \sphericalangle NCB + 90^0 = \varphi_{AB} + 90^0$$

więc

$$x_D = x_C + \Delta x_{CD} = x_C + h \cos \varphi_{CD}$$
$$y_D = y_C + \Delta y_{CD} = y_C + h \sin \varphi_{CD}$$

lecz

$$\cos \varphi_{CD} = \cos (90^0 + \varphi_{AB}) = - \sin \varphi_{AB}$$
$$\sin \varphi_{CD} = \sin (90^0 + \varphi_{AB}) = \cos \varphi_{AB}$$

stąd

$$x_D = x_C - h \sin \varphi_{AB} = x_C - mh$$
$$y_D = y_C + h \cos \varphi_{AB} = y_C + kh$$

że zaś x_C i y_C przedtem już skreśliliśmy, tedy, wprowadzając ich wartości, napiszemy ostatecznie:

$$\underline{x_D = x_A + kl - mh}$$
$$\underline{y_D = y_A + ml + kh}$$

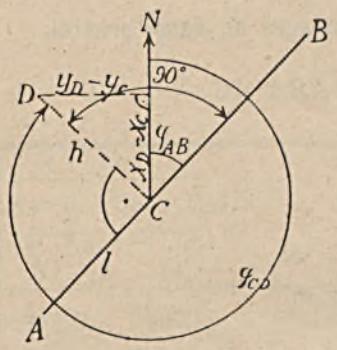
Przy obliczaniu spółczynników m i k należy stosować kontrolę, a mianowicie:

ponieważ

$$m = \frac{Y_B - Y_A}{d} \text{ i } k = \frac{X_B - X_A}{d}$$

przeto

$$m^2 + k^2 = \frac{(Y_B - Y_A)^2 + (X_B - X_A)^2}{d^2} = \frac{d^2}{d^2} = 1$$



Rys. 197.

Gdy p. D leży po lewej stronie prostej AB, wówczas (rys. 197):

$$\varphi_{CD} = \sphericalangle NCD = \sphericalangle NCB + 180^0 + 90^0 =$$
$$= \sphericalangle NCB + 270^0 = 360^0 + \sphericalangle NCB - 90^0 =$$
$$= \sphericalangle NCB - 90^0 = \varphi_{AB} - 90^0$$

więc

$$\cos \varphi_{CD} = \cos (\varphi_{AB} - 90^0) =$$
$$= \cos (90^0 - \varphi_{AB}) = \sin \varphi_{AB}$$
$$\sin \varphi_{CD} = \sin (\varphi_{AB} - 90^0) = - \cos \varphi_{AB}$$

stąd:

$$X_D = X_C + \Delta X_{CD} = X_C - h \cos \varphi_{CD} = \underline{X_A + kl + mh}$$
$$Y_D = Y_C + \Delta Y_{CD} = Y_C + h \sin \varphi_{CD} = \underline{Y_A + ml - kh}$$

jak widzimy, znaki przy h uległy zmianie, co łatwo było przewidzieć, gdyż linja CD zmieniła azymut o 180°, a więc tak sin (CD), jak cos (CD) powinny były zmienić znaki.

Ponieważ zwykle znany jest azymut φ_{AB} danej prostej, jak również łatwo jest obliczyć azymut domiaru, zwiększając φ_{AB} o 90°, gdy punkt leży w prawo od AB i zmniejszając φ_{AB} o 90°, gdy punkt leży w lewo, więc można obliczać spółrzędne na domiarze i z przyrostów spółrzędnych, mianowicie, zakładając:

$$\varphi_{CD} = \varphi_h = \varphi_{AB} \pm 90$$

przyczem

\+ oznacza domiar prawy
— „ „ lewy;

otrzymamy

$$X_D = X_C + h \cos \varphi_h = \underline{X_A + l \cos \varphi_{AB} + h \cos \varphi_h}$$
$$Y_D = Y_C + h \sin \varphi_h = \underline{Y_A + l \sin \varphi_{AB} + h \sin \varphi_h}$$

Obliczenie to jest dogodne pod tym względem, że nie wymaga rozważania nad znakami m i k, co zachodzi, przy I rozwiązaniu, przeciwnie, znaki wynikają same z rachunku, jako znaki funkcyj sin i cos dla odpowiednich ćwiartek. Z tych właściwie wzorów wynikają poprzednie.

Dane (patrz. rys. 196) są spółrzędne punktów A i B:

$$y_A = - 329{,}48$$
$$x_A = + 1661{,}70$$
$$y_B = - 679{,}90$$
$$x_B = + 2654{,}09$$
$$AC = l = 192{,}41$$
$$CD = h = 18{,}75$$

Obliczamy azymut AB (patrz § 63):

$$\varphi_{AB} = 340^0\ 33'\ 5''$$

Jeżeli punkt D leży w lewo od prostej AB, wówczas;

$$\varphi_{CD} = 250^0\ 33'\ 5''$$

y_C	— 393,55	y_D	— 411,23
y_A	— 329,48	y_C	— 393,55
$\Delta\ y_{AC}$	— 64,07	$\Delta\ y_{CD}$	— 17,68
$\log \Delta\ y_{AC}$	1.80 663 n	$\log \Delta\ y_{CD}$	1.24 749 n
$\log \sin \varphi_{AB}$	9.52 240 n	$\log \sin \varphi_{CD}$	9.97 449 n
$\log l$	2.28 423	$\log h$	1.27 300
$\log \cos \varphi_{AB}$	9.97 449	$\log \cos \varphi_{CD}$	9.52 240 n
$\log \Delta\ x_{AC}$	2.25 872	$\log \Delta\ x_{CD}$	0.79 540 n
$\Delta\ x_{AC}$	+ 181,43	$\Delta\ x_{CD}$	— 6,24
x_A	+ 1661,70	x_C	+ 1843,13
x_C	+ 1843,13	x_D	+ 1836,89

Obliczenie posuwa się od środka schematu ku krańcom.

§ 66. Określić spółrzędne punktu, którego odległość od dwu innych punktów o danych spółrzędnych jest znana.

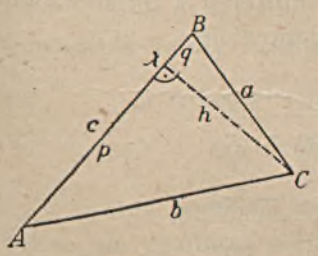
Dane $X_A,\ Y_A \quad BC = a$

$X_B,\ Y_B \quad AC = b$

Określić $X_C,\ Y_C$.

Przypuśćmy, że poprowadziliśmy $C\lambda \perp AB$. Prostopadła $C\lambda = h$ dzieli $AB = c$ na odcinki $A\lambda = p$ i $B\lambda = q$.

Jak wiadomo z § 60,



Rys. 198.

$$p = \frac{c + p - q}{2} = \frac{c}{2} + \frac{p - q}{2}$$

przytem $p - q = \frac{(b + a)\,(b - a)}{a}$

$$q = \frac{c - (p - q)}{2} = \frac{c}{2} - \frac{p - q}{2}$$

$$h = \sqrt{b^2 - p^2} = \sqrt{a^2 - q^2}$$

Kontrolą rachunku obliczonych p i q jest $p + q = c$, przytem c otrzymujemy ze spółrzędnych punktów A i B jednocześnie z azymutem AB z równań:

$$tg\ (AB) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$c = \frac{y_B - y_A}{\sin\ (AB)} = \frac{x_B - x_A}{\cos\ (AB)}$$

Oznaczając, jak poprzednio, $k = \cos\ (AB)$, $m = \sin\ (AB)$,

obliczymy:

$$x_C = x_A + kp + mh$$
$$y_C = y_A + mp + kh$$

uzależniając znaki wyrazów 1) mb i 2) kh od znaków 1) cos (KC) i 2) sin (KC). Znaki te możemy również określić z wielkości spółrzędnych punktów A i B oraz położenia punktu C (lewe, czy prawe) w stosunku do p ostej AB.

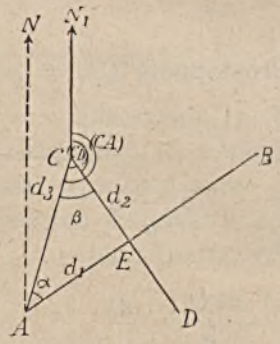
Dla skontrolowania rachunku należy ze spółrzędnych punktów A i C określić

$$b_1 = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

zapomocą tablic kwadratów i porównać obliczone b_1 z wielkością b, otrzymaną z pomiaru i wyzyskaną dla obliczeń.

Różnica $b^1 - b$ nie powinna przekraczać 2 — 3 cm.

§ 67. Określić spółrzędne punktu przecięcia się dwu prostych, przechodzących przez punkty o danych spółrzędnych.



Rys. 199

Dane:

$$x_A\ y_A,\quad x_B\ y_B,\quad x_C\ y_C,\quad x_D\ y_D,$$

określić:

$$x_E \text{ i } y_E$$

Zagadnienie rozwiązać możemy z układu dwu równań prostych AB i CD, mianowicie:

$$\frac{y_B - y_E}{x_B - x_E} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\frac{y_C - y_E}{y_C - y_D} = \frac{x_C - x_E}{x_C - x_D}$$

do których wchodzą dwie tylko niewiadome X_E i Y_E.

Dogodniejszą jednak jest inna metoda rozwiązania, mianowicie — określmy azymuty (AE) i (CE) oraz długości $AE = d_1$ i $CE = d_2$, a otrzymamy równania:

$$x_E = x_A + d_1 \cos (AE) = x_C + d_2 \cos (CE)$$
$$y_E = y_A + d_1 \sin (AE) = y_C + d_2 \sin (CE),$$

z których dwukrotnie określimy X_E i Y_E, co da kontrolę rachunku. Tak więc należy określić d_1, d_2, (AE) i (CE).

$$tg\ (AE) = tg\ (AB) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$tg\,(CD) = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = tg\,(CE)$$

Następnie obliczymy (AC) z równania

$$tg\ (AC) = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$$

Obliczenie tych 3-ch azymutów należy łączyć z obliczeniem długości prostych AB, CD i AC ze wzorów

$$d = \frac{y_2 - y_1}{\sin (1,2)} = \frac{x_2 - x_1}{\sin (1,2)},$$

dla skontrolowania rachunku i określenia $AC = d_3$, niezbędnego dla obliczenia d_1 i d_2.

W $\triangle$-cie ACE obliczymy kąty α i β z równań

$\alpha = (AE) - (AC)$, gdyż $\alpha = NAE - NAC$, gdzie AN daje kierunek osi X-ów.

$\beta = (CA) - (CE)$, gdyż $\beta = N_1 CA - N_1 CD$, gdzie CN daje kierunek osi X, t. j. kierunek, od którego w prawo liczymy wielkość azymutu.

Następnie liczymy:

$$d_1 = d_3 \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)};$$

$$d_2 = d_3 \frac{\sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)};$$

i wreszcie mamy zapowiedziane powyżej równania:

$$x_A = x_A + d_1 \cos (AE) = x_C + d_2 \cos (CE)$$
$$y_A = y_A + d_1 \sin (BE) = y_C + d_2 \sin (CE).$$

Gdy wartości X_E, obliczone z X_A i X_C, oraz Y_E, obliczone z Y_A i Y_C, nie zgadzają się, błąd może się kryć albo w rachunku przyrostów d sin. azym., d cos. azym., albo w obliczeniu d_1 i d_2, lub wielkości, na zasadzie których d_1 i d_2 zostały obliczone, a więc α i β.

Przykład:

Dane są:

	A	*B*	*C*	*D*
y	− 128,27	+ 4500,27	− 938,95	+ 3259,70
x	− 1055,42	+ 6332,62	+ 1867,34	+ 2240,10

Obliczenie azymutów i długości boków.

Nazwa boku	*Yb* *Ya* Δ *Yab*	*Xb* *Xa* Δ*Xab*	log Δ*y* log Δ*x* log *tg* φ φ	log sin φ log cos φ log *d*
AB	+ 4500,27 − 128,27 + 4628,54	+ 6332,62 − 1055,42 + 7388,04	3.665 444 3.868 529 9.796 915 32°4′0″	9.725017 9.928104 3.940426 25
CD	+ 3259,70 − 938,95 + 4198,65	+ 2240,10 + 1867,34 + 372,76	3.623 110 2.571 429 1.051 681 84°55′35″6	9.998295 8.946613 3.624816 15
AC	− 938,95 − 128,27 − 810,68	+ 1867,34 − 1055,42 + 2922,76	2.908 850 3.465 793 9.443 057 15°30′8″4 344°29′51″6	9.426962 9.983905 3.481888 88

Azymuty o małych zmianach log sin lub log cos liczymy mniej dokładnie, jak np. (*AB*), inne — dokładniej. Gdyby wszystkie azymuty liczyć, np., do 1″, wówczas log *d* można obliczać albo przez log sin, albo log cos, przytem za pośrednictwem tego logarytmu, którego zmiana przy zmianie azymutu o 1″ jest mniejszą.

Przy różnicach spółrzędnych, nie przekraczających setek metrów, można obliczać pięcioznacznemi logarytmami, obliczając azymuty do części minut.

Obliczenie kątów w Δ-cie *ACE*.

(*AE*)	32°	4′	0″
(*AC*)	344°	29′	52″
α	47	34	8

(CA)	164°	29′	52″
(CE)	84	55	36
β	79	34	16

(CE)	84°	55′	36″
(AE)	32	4	0
γ	52	51	36

Sprawdzenie.

α	47°	34′	8″
β	79	34	16
γ	52	51	36
	180°	0′	0″

Obliczenie długości AE i CE.

log AE	3.573 108
log sin β	9.992 765
log AC	3.481 888
clg sin $(\alpha + \beta)$	0.098 455
log sin α	9.868 108
log CE	3.448 451

Obliczenie przyrostów boków AE i CE.

	AE	CE
Δy	+1986,67	+2797,34
log Δy	3.298 125	3.446 746
log sin φ	9.725 017	9.998 295
log d	3.573 108	3.448 451
log cos φ	9.928 104	8.946 603
log Δx	3.501 212	2.395 054
Δx	+3171,11	+ 248,34

Obliczenie spółrzędnych
punktu *E*.

y_C	− 938,95	y_A	− 128,27
Δy_{CE}	+ 2797,35	Δy_{AE}	+ 1986,67
y_E	+ 1858,40	y_E	+ 1858,40
x_C	+ 1867,34	x_A	− 1055,52
Δx_{CE}	+ 248,34	Δx_{AE}	+ 3171,11
x_E	+ 2115,68	x_E	+ 2115,69

$$y_E = + 1858{,}40$$
$$x_E = + 2115{,}68$$

§ 68. Orjentowanie pomiaru linjowego.

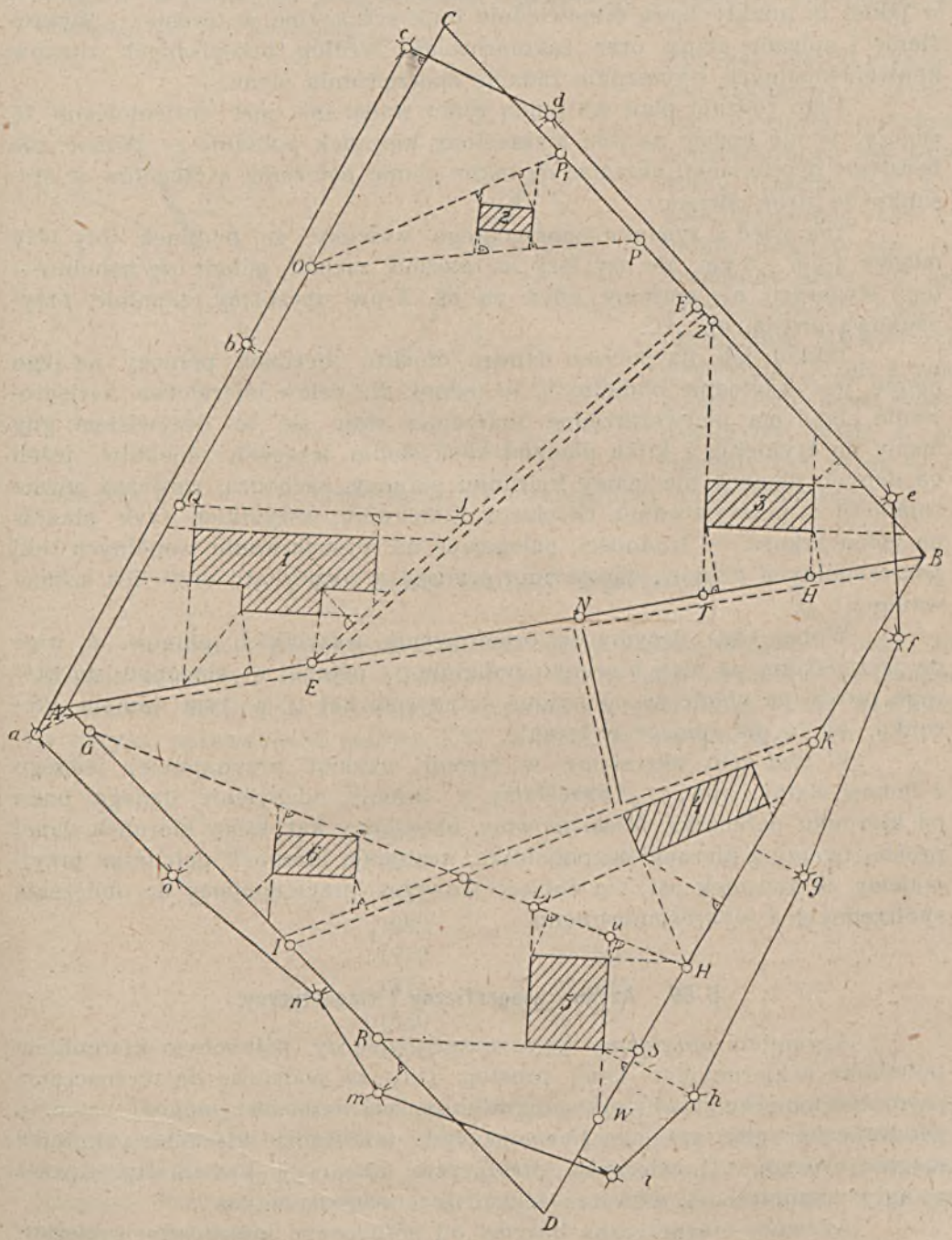
Jak wiadomo, planem nazywamy rysunek, podobny do rzutu poziomego odpowiedniego układu linij w terenie.

Przy małych obszarach łatwo sporządzić plan na podstawie obliczenia wyników pomiaru linjowego, jeżeli linje sytuacyjne, podlegające pomiarowi, leżą w otwartym terenie; wystarczy obrać kierunek jednego z boków Δ-ów, tworzących sieć linjową Δ-ów, za oś *X*-ów, początek danego boku za początek układu spółrzędnych i, po obliczeniu spółrzędnych wierzchołków Δ-ów, nanieść je na plan, obierając taki początek układu spółrzędnych i kierunek osi *X*-ów, ażeby rysunek zmieścił się na danym arkuszu. Zwykle osi *X*-ów układamy równolegle do brzegów arkusza.

Przypuśćmy, że pomiarowi podlegają zabudowania o granicy *abc*..... ..... *mnoa*. Założono w tym celu dwa Δ-y *ABC* i *ABD* o wspólnym boku *AB*. Dla zdjęcia budynków 1 2 3..... 7 założono linje pomiarowe: 1) *EF* między punktami posiłkowemi — *E*, leżącym ściśle na *AB*, i *F*, leżącym na *CB*; 2) *K* wzdłuż ściany budynku 4-go i *GH* przy rogu budynku 6-go, i przez punkt L_1 przecięcia się przedłużeń ścian budynków 5-ego i 4-ego; 3) *QJ* i szereg drugorzędnych linij pomiarowych, opierających się już to o boki głównych Δ-ów, już to o główne linje pomiarowe, — jak *OP* i O_1P_1, dla zdjęcia z domiarów bydynku 2-ego, *RS* i *UW* dla budynków 5-ego, *ZT* dla 3-ego i t. p.

W podobnej kolejności, po obliczeniu spółrzędnych Δ-ów *ABC* i *ABD*, wykreślamy plan: nanosimy na plan p. *ABC* i *D* ze spółrzędnych, kontrolując długości *AB*, *AC* i t. d., porównywując dane z planu z danemi pomiaru polowego, dla zapobieżenia błędnemu naniesieniu któregokolwiek

z tych punktów przez wadliwe odcięcie którejkolwiek ze spółrzędnych, poczem wyznaczamy na boku *AB* punkty posiłkowe *ENTH* zapomocą miar bieżących, branych z taśmy przy pomiarze *AB*, punkty FP_1 i *P* na boku



Rys. 200

BC i t. d. Łącząc na planie odpowiednie punkty posiłkowe, zbudujemy sieć linij pomiarowych *EF*, *OP*, *OP*, *JK*, *GH*, *RS*, *UW* i t. d. Następnie zaś na podstawie miar bieżących, przecięć przedłużeń ścian z linjami pomia-

rowemi, długości tych przedłużeń, pomierzonych odległości od punktów pomiarowych, a wreszcie domiarów do linij pomiarowych, względnie ich przedłużeń, naniesiemy na plan wszystkie punkty szczegółowe (załamania granic, dróg, budynków i t. p.) i połączymy je w tej samej kolejności, w jakiej te punkty łączą odpowiednie linje sytuacyjne w terenie. Wykreślenie i opisanie planu oraz zakolorowanie według przepisanych znaków konwencjonalnych wyczerpuje zadanie sporządzenia planu.

Tego rodzaju plan ma jedną tylko wadę: nie jest zorjentowany, to znaczy, że nie będzie na nim wykreślony kierunek południe — północ, nie będziemy przeto mogli określać na takim planie położenia szczegółów w stosunku do stron świata.

Tak więc z rysunku poprzedniego widzimy, że budynek 5-ty leży między 4-ym i 6-ym, ale czy leży na wschód, zachód, północ czy południe— tego stwierdzić nie możemy, gdyż za oś X-ów obraliśmy zupełnie przypadkową prostą, np. AC.

Jakkolwiek dla potrzeb danego objektu kierunek północy na jego planie, jest względnie obojętnym, to jednak dla celów miernictwa zorjentowanie planu ma pierwszorzędne znaczenie; staje się to oczywistem, gdy mamy do czynienia z kilku planami obok siebie leżących objektów: jeżeli na danych planach nie mamy kierunku północy, zachodzą wówczas pewne trudności w przerysowaniu, chociażby szkicowem, wszystkich tych planów na jeden arkusz, — trudności, polegające na wyszukiwaniu wspólnych linij poszczególnych planów, odwracaniu arkuszy o różne kąty przy ich szkicowaniu i t. p.

Wobec tego dążymy do orjentowania wszystkich planów, a więc do wykreślania na nich kierunku południe — północ, w stosunku do którego proste na planie są odchylone o ten sam kąt i w tym samym kierunku, jak to ma miejsce w terenie.

W tym celu określamy w terenie azymut przynajmniej jednego z boków siatki △-ów, t. j. określamy w terenie odchylenie danego boku od kierunku południka, ściśle mówiąc, określamy kąt, który kierunek danej prostej tworzy z kierunkiem południka; następnie kierunek południka przyjmujemy za kierunek osi X i dopiero wówczas przystępujemy do obliczenia spółrzędnych i wykreślania planu.

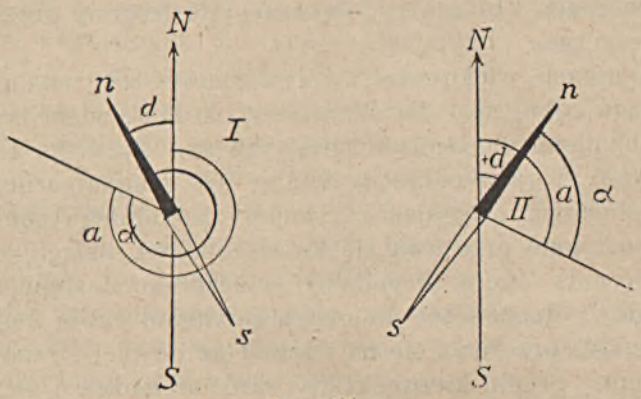
§ 69. Azymut geograficzny i magnetyczny.

Azymutem nazywamy kąt, zawarty między północnym kierunkiem południka a kierunkiem danej prostej. Gdy za podstawę do wyznaczania azymutów obieramy południk geograficzny, wówczas otrzymujemy azymuty geograficzne; gdy zaś określamy azymut na zasadzie kierunku południka magnetycznego, t. j. kierunku płaszczyzny pionowej, przechodzącej przez oś igły magnetycznej, wówczas azymut jest magnetycznym.

Azymuty magnetyczne liczymy od północnego końca igły w kierunku prawym od 0^0 do 360^0, geograficzne — od kierunku północy geograficznej w prawo od 0^0 do 360^0.

Kąt między płaszczyznami południków geograficznego i magnetycznego nazywa się deklinacją (zboczeniem magnetycznem).

Jeżeli północny koniec igły magnetycznej odchyla się na zachód od południka geograficznego, wówczas deklinacja jest zachodnią, a wielkość jej jest ujemną; gdy północny koniec igły magnetycznej jest zwrócony na wschód od południka geograficznego, deklinację nazywamy wschodnią, zaś wielkość jej jest dodatnią.



Rys. 201

Rysunek 201 (I) przedstawia deklinację *d* zachodnią (kierunek południka geograficznego jest oznaczony literami *SN*, t. j. południe-północ, zaś południk magnetyczny jest oznaczony przez oś igły magnetycznej *sn*), rys. II-gi przedstawia deklinację wschodnią. Jeżeli azymut geograficzny danej prostej oznaczymy przez *a*, zaś magnetyczny przez α, wówczas $a = \alpha + d$, oczywiście, gdy uwzględnimy znak deklinacji.

§ 70. Zmiany deklinacji magnetycznej.

Deklinacja magnetyczna zmienia się ze zmianą miejsca i czasu. Już Kolumb zauważył, że na Atlantyku w miarę posuwania się na zachód, wschodnia deklinacja przechodzi stopniowo w zachodnią. Daty deklinacji w Paryżu, notowane od połowy XVI stulecia, są następujące:

rok	deklinacja
1541	− 7° 0′
1578	− 9° 3′
1622	− 6° 0′
1662	0° 0′
1710	+ 10° 50′
1814	+ 22° 34′
1880	+ 16° 52′
1900	+ 14° 44′

Te t. zw. wiekowe wahania deklinacji spowodowały rozwój badań nad magnetyzmem ziemskim, dokonywanych perjodycznie w różnych miejscach kuli ziemskiej i dają materjał do sporządzania map izogonicznych (izogona—krzywa, łącząca na mapie punkty, w których zboczenia w danym roku są jednakowe).

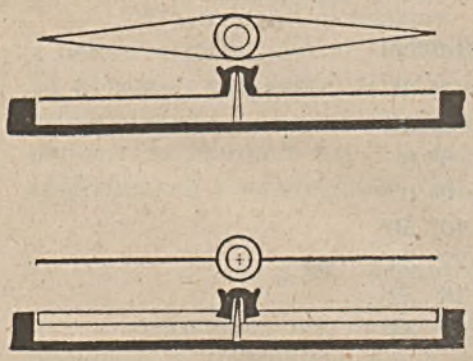
Wszystkie izogony przecinają się na biegunach geograficznych, gdyż przez bieguny przechodzą wszystkie południki geograficzne, a więc wielkość zboczenia na biegunach geograficznych waha się od $0° \pm 180°$, zależnie od tego, dla jakiego południka określamy zboczenie igły magnetycznej; następ-

nie, istnieją na kuli ziemskiej dwa punkty, zwane biegunami magnetycznemi (północny — pod 70° szerokości i 98° długości zachodniej, licząc od Greenwich, południowy—na wschodniem wybrzeżu Ziemi Królowej Wiktorji), w których igła magnetyczna zajmuje dowolne położenie, a więc z południkiem geograficznym bieguna magnetycznego może tworzyć dowolny kąt, czyli może mieć dowolne zboczenie — to znaczy, że wszystkie izogony przechodzą przez bieguny magnetyczne.

Prócz badań nad wahaniami wiekowemi, wpływającemi na zmiany w deklinacji, sięgające w ciągu roku, np., dla Warszawy około 6′, znane są badania nad dziennemi wahaniami zboczenia magnetycznego. Zjawisko to ma następujący przebieg: około 8 rano północny koniec igły magnetycznej zaczyna wychylać się ku zachodowi, osiągając maximum zachodniego zboczenia o 1-ej po południu; następnie przesuwa się ku wschodowi, osiągając maximum wschodniego zboczenia około 10 godziny wieczorem; następuje potem wychylenie ku zachodowi, dochodzące do swego maximum około 2-ej po północy, poczem wreszcie igła przesuwa się na wschód aż do 8-ej z rana. Wahania igły sięgają 15 minut. Średni kierunek igły określać można o 4-ej i 10-ej rano, 4-ej po południu i 12-ej w nocy. W tych więc godzinach należy określać azymuty magnetyczne.

§ 71. Busole.

Busole i kompasy są przyrządami, służącemi do określania azymutów magnetycznych. Składają się z koła z podziałem na stopnie, oraz igły magnetycznej, osadzonej na ostrzu, ustawionem w środku koła podziałowego. Pudełko busoli nie może zawierać części żelaznych lub stalowych.



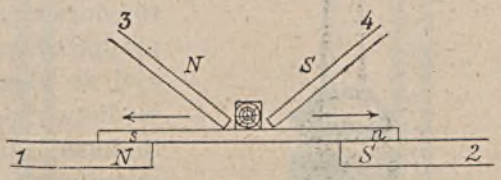
Rys. 202.

Igły magnetyczne mają najczęściej kształt rombu lub prostokąta; na rys. 202 przedstawione są dwie igły, obydwie w planie i przekroju. Igła osadzona jest na wystającem z denka busoli ostrzu. W tym celu nad otworem w środku igły nasadzony jest czopek, wewnątrz którego znajduje się agat z wydrążeniem w kształcie stożka; igla opuszcza się na ostrze tem właśnie wydrążeniem i, dzięki twardości agatu, tarcie igły przy obrocie dokoła ostrza jest minimalne.

Ponieważ igła magnetyczna wychyla się od poziomu ku dołowi (zawieszona na nitce tworzy z poziomem kąt, zwany inklinacją) na naszej półkuli północnym końcem, przeto takie wychylenie usuwa się przez wydłużenie południowej części igły, lub przez nalepienie na koniec południowy wosku w ilości, niezbędnej dla sprowadzenia igły do poziomu.

Wymiary pudełka busoli, a więc i koła, podzielonego na stopnie, są różne; im większy jest promień koła, tem dokładniej można określać położenie końca igły w stosunku do stopni podziału.

Dokładność odczytu z podziału na kole busoli zależy również od stopnia namagnesowania igły; igła dostatecznie namagnesowana, po wyprowadzeniu jej z płaszczyzny południka magnetycznego, po kilku wahnięciach ustawia się w płaszczyźnie tego południka; natomiast igła słabo namagnesowana waha się bardzo długo. Z tego względu należy igłę od czasu do czasu magnesować zapomocą czterech magnesów. Na 1-ym i 2-im magnesie, zwróconych ku sobie biegunami *N* i *S*, układamy igłę biegunem *s* na magnesie 1-ym i *n* na magnesie drugim; następnie na igle ustawiamy magnesy 3-ci i 4-ty, dotykające igły: 3-i biegunem *N*, 4-y biegunem *S*; pociągamy 3-im i 4-ym magnesem od środka igły ku końcom kilkakrotnie, dopóki igła nie namagnesuje się dostatecznie. Możemy również namagnesować igłę, układając ją wewnątrz cewki z cienkiego drutu, przez który przepuszczamy prąd elektryczny.



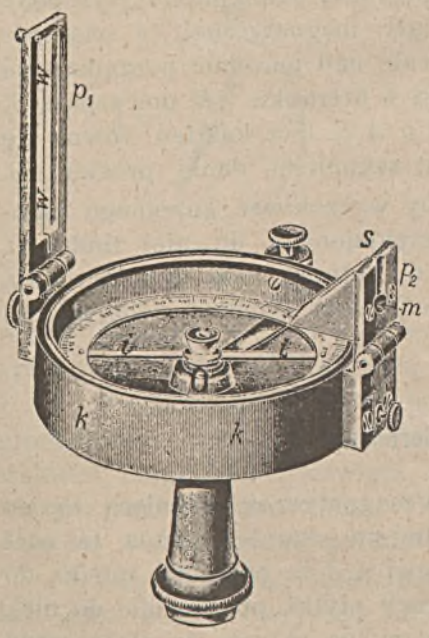
Rys. 203.

Płaszczyzna południka magnetycznego, przechodząca przez środek igły, przecina igłę wzdłuż prostej, zwanej osią magnetyczną; oś magnetyczna powinna kryć oś geometryczną igły, t. j. prostą, łączącą jej końce.

Do najczęściej stosowanych typów należą — kompas kieszonkowy, busola Schmalkaldera, busola Bézarda oraz busola z przeziernikami.

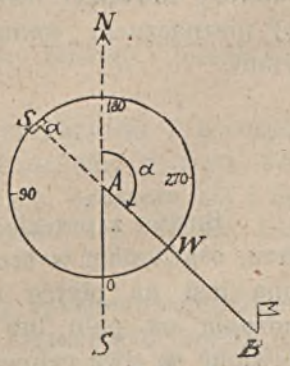
Kompas kieszonkowy jest przyrządem ogólnie znanym; rozpatrzymy busole.

§ 72. Busola Schmalkaldera.



Rys. 204.

Busola Schmalkaldera jest busolą ręczną, składająca się z okrągłego pudełka *kk*, w środku którego umocowane jest ostrze; na ostrzu spoczywa igła magnetyczna *ii*; do igły z góry jest przyklejony lekki krążek z tektury, obwód którego jest podzielony na 360° w ten sposób, że *O*° znajduje się nad południo-



Rys. 205.

wym końcem igły, zaś 180° — nad północnym. Koło z podziałem (limbus) obraca się więc razem z igłą dokoła ostrza *O*; nad ściankami pudełka wystają dwa średnicowo-przeciwległe przezierniki: p_1 z naciągniętym włosieniem *ww*, oraz p_2; w górnej części p_2 znajduje się szpara *S* dla oka — przez którą patrzymy poprzez włosień *ww* przeciwległego przeziernika na przedmiot, — zaś w dolnej części otwór *m*. Przez otwór *m*, za pośrednictwem prostokątnego równoramiennego szklanego pryzmatu *P* o ściankach przyprostokątnych, jednej ∥-ej do limbusu, a drugiej do niego ⊥-ej, którą pryzmat jest osadzony w listwie przeziernika ocznego, widzimy podziałkę limbusu, znajdującą się pod szparą dla oka w przezierniku. Ponieważ obydwie przyprostokątne ścianki są wypukłe, przeto obraz podziału jest powiększony; ustawienie pryzmatu *P* odpowiednio do oka uskutecznia się przez przesuwanie wdół lub ku górze guziczka *k* wzdłuż odnośnego wycięcia w listewce przeziernika.



Rys. 205a.

Ażeby określić azymut magnetyczny danej prostej, należy ustawić się nad początkiem danej prostej i, utrzymując busolę w ręku w położeniu poziomem (co się da wykonać tylko z pewnym stopniem przybliżenia), obracać pudełko dopóty, dopóki, przy patrzeniu przez szparę przeziernika ocznego, tyczka, ustawiona na końcu danej prostej, nie zostanie zakryta włosieniem przeziernika przedmiotowego.

Odczyt, wzięty przez pryzmat, gdy źrenica oka znajduje się poniżej szpary *S*, ale na jej przedłużeniu, daje azymut magnetyczny danej prostej (rys. 205).

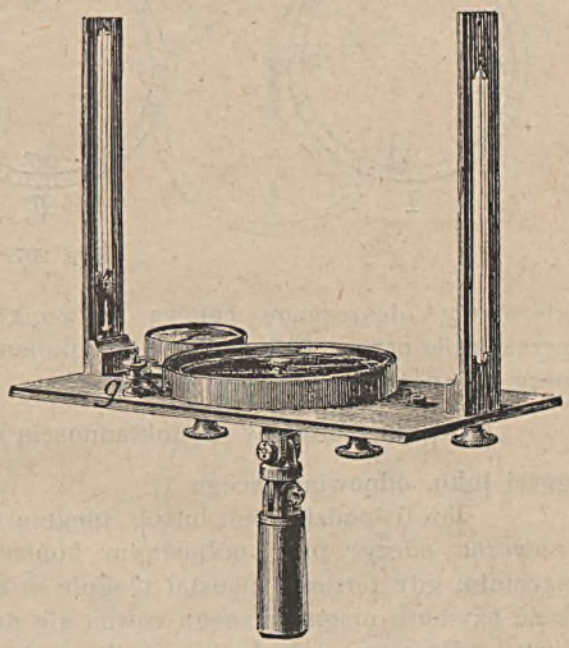
Przypuśćmy, że *SN* daje kierunek igły magnetycznej (a więc południka magnetycznego), ustawionej centrycznie nad punktem początkowym *A* prostej *AB*. Linja przezierników S_1 *W* leży w kierunku *AB*; pod szparą S_1 przeziernika ocznego odczytamy α^0, t. j. kąt *o A S*; lecz kąt ten równa się naprzemianległemu *NA W*, który właśnie jest azymutem danej prostej *AB*.

Przy użyciu tej busoli niema potrzeby wyczekiwać zupełnego uspokojenia się igły magnetycznej (a więc i przyklejonego do niej limbusu); wystarczy zauważyć dwa skrajne odczyty w jednym i drugim kierunku, przy nieznacznem wahaniu się limbusu, — średnia obydwu odczytów da azymut.

§ 73. Busola z przeziernikami.

Busola z przeziernikami posiada igłę magnetyczną, wahającą się na ostrzu, osadzonem w środku koła z podziałem na stopnie; busola ta osadzona jest na płytce metalowej, zakończonej u dołu pośrodku tulejką do osadzania na palu lub kosturze; na końcach płytki, prostopadle do niej, ustawione są dwa celowniki z przeziernikami w ten sposób, że płaszczyzna

celowa przechodzi przez ostrze igły magnetycznej. Po osadzeniu busoli na palu, sprzęgamy przez dokręcenie do pala śruby, przechodzącej przez ściankę tulejki, busolę z palem, unieruchomiając w ten sposób busolę na palu; w braku śruby, osadzamy busolę możliwie głęboko na palu, względnie na czopie statywu (rys. 206).



Rys. 206.

Numeracja podziału na stopnie na kole busoli jest albo (I) odwrotna do kierunku ruchu wskazówki zegarowej od 0° do 360°, albo (II) identyczna z kierunkiem ruchu wskazówki zegara i również od 0° do 360°, albo też (III) numeracja idzie od dwu 0°, średnicowo - przeciwległych, w obydwu kierunkach od 0° do 90°.

I i II numeracja nosi nazwę azymutowej, III—czwartakowej.

Płaszczyzna celowa przechodzi przez środek busoli, przez 0° — 180° w podziale azymutowym i 0° — 0° w podziale czwartakowym.

Często zamiast pala do osadzania busoli używa się statyw trójgra-



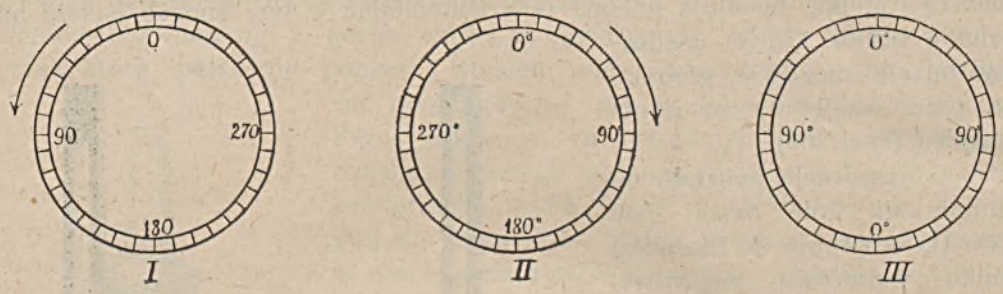
Rys. 206a.

niasty, składający się z głowicy (na której osadzamy busolę) i trzech nóg, sprzęganych śrubami z głowicą (rys. 205 a).

Zwykle igła od spodu jest przyciśnięta do przykrywki i spoczywa nieruchomo. Przy pomiarze azymutu odkręcamy śrubkę *g* (rys. 206), wskutek czego koniec dźwigni, naciskający środek igły, opuszcza się i igła zaczyna się wówczas wahać. Po pewnym czasie uspokoi się i wtedy znajduje się w płaszczyźnie południka magnetycznego.

Określania azymutów dokonywać należy przy spoziomowanej busoli; tak więc dopóty przyrząd nachylamy w różnych kierunkach, dopóki igła magnetyczna nie będzie ‖-ą do denka busoli.

Ażeby pomierzyć azymut danej prostej, ustawiamy na początku prostej busolę do poziomu i, przez obrót tulei dokoła głowicy statywu,



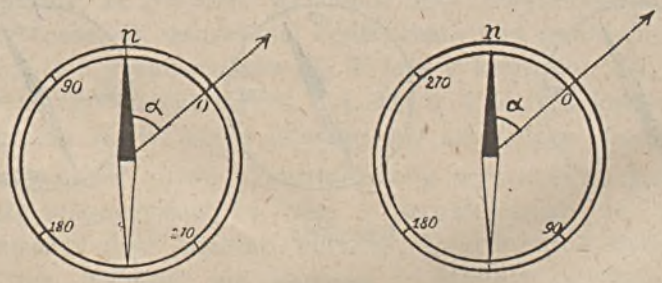
Rys. 207.

kierujemy płaszczyznę celową na punkt końcowy prostej, patrząc przez przeziernik przy 180° busoli; po uspokojeniu się igły dokonywamy odczytu przy północnym (ciemnym) końcu igły.

Odczyt notujemy z dokładnością do $\frac{1^0}{4}$, lub do 5′, zależnie od długości łuku, odpowiadającego 1°.

Jeżeli podział na busoli biegnie od 0° do 360° w kierunku lewym, wówczas odczyt przy północnym końcu igły daje bezpośrednio wielkość azymutu; gdy ten sam podział biegnie w kierunku prawym, wówczas wielkość azymutu magnetycznego równa się dopełnieniu do 360° odczytu przy końcu północnym igły (położenie 0°—w kierunku na przedmiot, przy oku — 180°). Na rys. 208, przy podziale lewym, azymutem jest α, t. j. odczyt n, wzięty przy północnym końcu igły; przy podziale prawym $\alpha = 360^0 - n$.

Przy podziale czwartakowym zamiast azymutu ustalamy czwartak, t. j. kąt mniejszy od 90°, leżący pomiędzy kierunkiem na przedmiot, a bliższym do tego kierunku końcem igły. Czwartaki zawarte są w jednej z ćwiar-

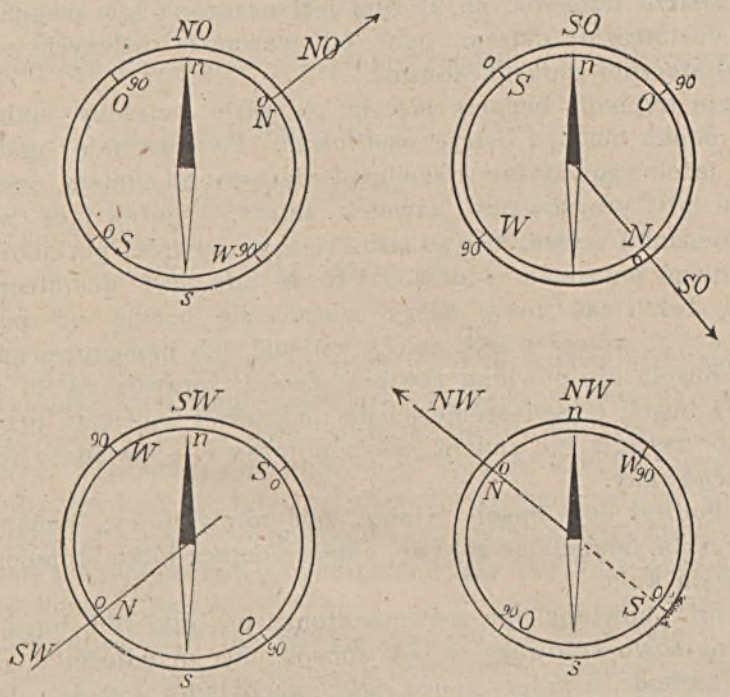


Rys. 208.

tek *NO* (*N* — północ, *O* — wschód), *SO* (południowy wschód) *NW* (północny zachód) i *SW* (południowy zachód).

Jeżeli kierunek na przedmiot bliższy jest od północnego, niż południowego końca igły, wówczas nazwa czwartaka rozpocznie się od litery *N*; jeżeli kierunek na przedmiot odchyla się w prawo od północy, więc na wschód, drugą literą czwartaka będzie *O* — zaś nazwą czwartaka *NO*; gdyby od *N* kierunek do prostej odchylał się mniej niż o 90° w lewo, nazwą czwartaka byłoby *NW* i t. d.

Wielkość czwartaka odczytujemy z limbusu przy jednym z końców igły. Busole Gerlacha mają przy końcu promienia, skierowanego ku przeziernikowi przedmiotowemu, literę *N*; średnicowo-przeciwległą jest lite-



Rys. 209.

ra *S*; o 90° w lewo od *N* jest litera *O*, zaś o 90° w prawo od *N* jest litera *W*; przy tego rodzaju opisie nazwę czwartaka stanowią litery, między któremi znajduje się północny koniec igły.

Jak wiemy z § 23,I możemy od czwartaków przejść do azymutów na zasadzie tabeli. I odwrotnie, mając azymuty, określimy czwartaki:

Czwartaki	Azymuty
$NO\ \alpha$	α
$SO\ \alpha$	$180^0 - \alpha$
$SW\ \alpha$	$180^0 + \alpha$
$NW\ \alpha$	$360^0 - \alpha$

Azymuty	Czwartaki
$90^0 > \alpha > 0^0$	$NO\ \alpha$
$180^0 > \alpha > 90^0$	$SO\ 180^0 - \alpha$
$270^0 > \alpha > 180^0$	$SW\ \alpha - 180^0$
$360^0 > \alpha > 270^0$	$NW\ 360^0 - \alpha$

§ 74. Sprawdzenie busoli.

Aby azymuty magnetyczne, określane zapomocą busoli, były dokładne, należy używać sprawdzonej busoli. Sprawdzenie polega na stwierdzeniu,

czy dana busola odpowiada zasadniczym wymaganiom, — w celu usunięcia znalezionych niedokładności.

Warunki te są następujące:

1) Ostrze trzpienia, na którym jest osadzona igła magnetyczna, powinno być dostatecznie ostrem, agat od wewnątrz należycie oszlifowany, zaś igła dostatecznie namagnesowana.

Ostrze trzpienia badamy palcem; w razie potrzeby, należy trzpień wykręcić z denka busoli i ostrze oszlifować. Powierzchnię agatu badamy przez lupę; jeżeli zauważymy szczelinę i nierówności, należy agat zmienić. Wreszcie do igły przysuwamy kawałek żelaza, i jeżeli igła wychyli się szybko w kierunku żelaza, zaś po usunięciu go powróci po kilku wahaniach do poprzedniego położenia — dowodzi to, że igła jest dostatecznie namagnesowana. Jeżeli zaś nowy odczyt różnić się będzie od poprzedniego więcej, niż o $^1/_4{}^0$, wówczas igłę należy zmienić, lub namagnesować.

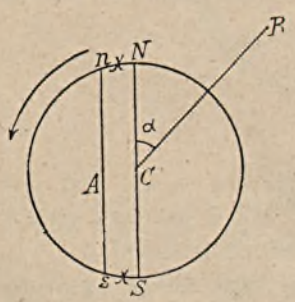
2) Busola nie powinna zawierać żelaza; sprawdzamy to przez usunięcie igły z busoli i zawieszenie jej na nici; jeżeli będziemy przysuwać do igły pudełko, zaś igła nie zmieni swego położenia — świadczy to, że warunek jest zachowany.

3) Podział koła busoli winien być prawidłowy; badamy podział zapomocą cyrkla, odkładając cięciwę, odpowiadającą kilku stopniom podziału wzdłuż obwodu koła.

4) Igła powinna być zrównoważona; na szkiełku busoli nad igłą ustawiamy pionowo śródwagę w ten sposób, by przedłużenie płaszczyzny śródwagi przechodziło przez końce igły; nachylamy busolę, dopóki pion śródwagi nie wskaże, że jej podstawa jest spoziomowana; ostrożnie zdejmujemy przykrywkę busoli i wymierzamy wysokości końców igły nad denkiem busoli: jeżeli jeden koniec jest bardziej od drugiego oddalony od denka busoli, należy go obciążyć do wyrównania, przez nalepienie kawałka wosku, laku, lub nasadzenie zgiętej blaszki miedzianej.

5) Igła powinna być osadzona centrycznie, co sprawdzamy, biorąc odczyty z obydwu końców igły; przy podziale azymutowym odczyty winny się różnić o 180°, przy czwartakowym — powinny być równe.

Różnica, zachodząca w odczytach (poza wzmiankowaną różnicą o 180° w podziale azymutowym), nie wymaga przesunięcia trzpienia, odpowiadającego ostrzu, na którem jest osadzona igła, gdyż biorąc średnią arytmetyczną odczytów przy obydwu końach igły, tem samem usuwamy wpływ ekscentryczności igły (nieśrodkowego położenia trzepienia w stosunku do limbusu busoli), a to z następujących przyczyn: jeżeli C jest środkiem limbusu, A — punkt osadzenia trzepienia ekscentrycznie osadzonej igły $n\,s$, $C\,B$ kierunek prostej, której azymut należy określić, wówczas, gdyby igła osadzona była centrycznie, azymut (CB) byłby równym (rys. 210):



Rys. 210.

$$\sphericalangle\, NCB = \alpha.$$

Przypuśćmy, że podział limbusu rośnie w kierunku lewym.

Oznaczmy $Nn = Ss = x$; azymut α przy lewym kierunku opisu podzia-

łu odpowiada odczytowi przy N z koła busoli: ponieważ odczyt bierzemy z końca północnego igły n, więc otrzymamy pewne α_1, równe:

$$\alpha_1 = \alpha - Nn = \alpha - x,$$

zaś z południowego końca igły odczytamy zamiast $\alpha + 180^0$ pewną wielkość α_2 równą,

$$\alpha_2 = \alpha + 180^0 + Ss = \alpha + 180_0 + x$$

dodając obydwa równania, otrzymamy $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha + 180_0$,

skąd:

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + (\alpha_2 - 180_0)}{2};$$

Jeżeli więc przez odczyt na południowym końcu igły rozumieć będziemy odczyt faktyczny zmniejszony (lub zwiększony, co da ten sam wynik, gdyż, np., $85^0 + 180^0 = 265^0$, zaś $85^0 - 180^0 = 360^0 + 85^0 - 180^0 = 265$) o 180^0, wówczas azymut magnetyczny jest średnią arytmetyczną odczytów, wziętych z obydwu końców igły, przytem dla lewego podziału będzie równy tej średniej, dla prawego podziału — dopełnieniu tej średniej do 360^0.

6) Osie magnetyczna i geometryczna igły powinny leżeć w płaszczyźnie ‖-ej do limbusu busoli.

Wichrowatość tych osi prawie nie spotyka się w igłach o kształcie rombu. Ponieważ odczyty bierzemy z końców osi geometrycznej, zaś igła, po odwróceniu na ostrzu, ustawia się osią magnetyczną w poprzednim, zwykłym kierunku, przeto oś geometryczna, po odwróceniu, odchyli się od swego poprzedniego położenia o kąt dwa razy większy, niż kąt między kierunkami obydwu osi. Jeżeli więc po odwróceniu igły, co się daje wykonać, gdy gniazdo z agatem można przekręcić na drugą stronę (dolną) igły, otrzymamy inny odczyt, świadczyć to będzie o istnieniu błędu w ułożeniu osi igły. Poprawkę, równą różnicy między średnią odczytów, a odczytem przy normalnem położeniu gniazda igły, należy wprowadzać z otrzymanym znakiem przy podziale azymutowym, zaś z różnemi znakami przy podziale czwartakowym (o ile chodzi o czwartaki), w zależności od ćwiartki.

7) Płaszczyzna kolimacyjna (celowa) powinna przechodzić przez 0^0 i 180^0 podziału azymutowego, lub 0^0 — 0^0 podziału czwartakowego.

Naciągniemy włosień od dołu szpary przeziernika ocznego do góry przeziernika przedmiotowego; patrząc przez przeziernik oczny, sprawdzimy, czy 0^0 i 180^0 leżą w płaszczyźnie przezierników, t. j. czy te kreski pokryte są przez włosień. Jeżeli włosień jest ‖ do prostej 0^0 — 180^0 lub 0^0—0^0, wówczas odczytywane azymuty będą prawidłowe, jeżeli zaś włosień nie jest ani ‖-y do 0^0 — 180^0, ani też nie przechodzi przez obydwie kreski, to należy limbus obrócić o pewien kąt w stosunku do płaszczyzny kolimacyjnej.

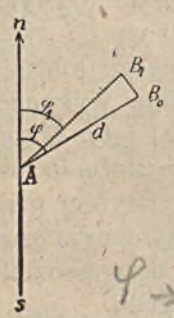
8) Płaszczyzna koliminacyjna powinna być ⊥-ą do płaszyzny limbusu. Zapomocą śródwagi sprowadzamy do poziomu dwa kierunki mniej więcej wzajemnie prostopadłe na busoli. Następnie w odległości 10 — 20 *m.* zawieszamy pion i kierujemy nań płaszczyznę kolimacyjną. Jeżeli, przesuwając oko wzdłuż przeziernika ocznego, będziemy mieli na nici pionu włosień przedmiotowy, świadczy to, iż warunek jest zachowany.

ROZDZIAŁ III.

POMIARY BUSOLOWE.

§ 75. Dokładność określenia azymutu; jej wpływ na położenie punktu.

Pomiar mniejszych obszarów wykonany być może zapomocą busoli i taśmy, oraz przyrządów pomocniczych, jak węgielnice, ruletki i t. p. Ze względu na użycie busoli, jako podstawowego przyrządu, pomiar taki nosi nazwę zdjęcia busolowego.



Rys. 211.

Przypuśćmy, że w p. A ustawiliśmy busolę z przeziernikami, i, po skierowaniu płaszczyzny kolimacyjnej na punkt B, określamy azymut (AB). Ze względu na dzienne wahania zboczenia magnetycznego i na niedokładność odczytu na kole busoli, przyjąć możemy, że dokładność określenia azymutu magnetycznego prostej AB zapomocą busoli wynosi $\pm$ 15′.

Jeżeli więc kierunek południka magnetycznego przyjmiemy za oś x, to przy długości d danej prostej, przy wielkości φ istotnego azymutu magnetycznego, koniec prostej AB będzie odpowiadał punktowi B_0 o spółrzędnych biegunowych φ i d. Ponieważ z obserwacji otrzymujemy azymut magnetyczny φ_1, obarczony błędem w granicach od + 15′ do — 15′, przeto, uważając d za dostatecznie ściśle określone, twierdzić możemy, że położenie punktu B ustalone zostało wadliwie, a to dzięki wychyleniu prostej AB od właściwego położenia AB_0 o kąt $\varphi_1 - \varphi$ do położenia AB_1. Koniec prostej B_0 przesuwa się do pewnego punktu B_1, lężącego na łuku, zatoczonym promieniem d z punktu A. Przypuśćmy, że $\varphi_1 - \varphi = 15'$. Wówczas wychylenie poprzeczne $B_0 B_1$ obliczamy dla d jako równe:

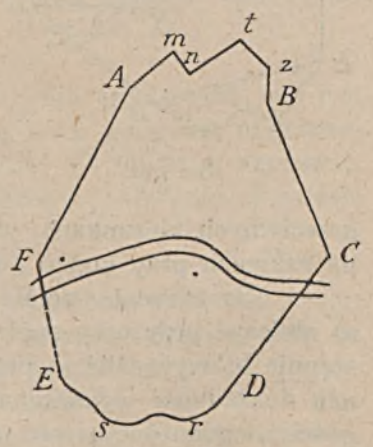
$$\frac{\varphi_1 - \varphi}{3438} d = \frac{15}{3438} d = \left(\frac{1}{230}\right) d$$

a zaokrąglając, powiemy, że błąd w wyznaczeniu położenia punktu zapomocą busoli wynosi około $\frac{1}{200}$ długości prostej AB.

Zważywszy zaś, że dokładność określenia długości zapomocą taśmy jest znacznie wyższa, możemy twierdzić, że dlatego, by długość prostej była wyznaczona z taką samą dokładnością, z jaką określamy jej kierunek, wystarczy zastosować do pomiaru długości taką metodę jej określenia, której dokładność nie jest niższa od $\frac{1}{200}$.

§ 76. Pomiar busolowy poligonów.

Przypuśćmy, że pomiarowi busolowemu dla sporządzenia mniej ścisłego planu podlega pewien obszar, ograniczony prostemi *EF*, *FA*, *BC* i *CD*, krzywą *DrsE'* i łamaną *AmntzB*, wewnątrz którego biegnie droga. Części obwodu figury, ograniczone krzywą; jak *DNSE*, lub łamaną *AmntB*, pomierzymy metodą domiarów od magistrali *AB* i *ED*; pozostanie do pomiaru poligon *ABCDEF* oraz droga. Aby dokonać pomiaru poligonu *ABCDEF*, należy: 1) określić azymuty wszystkich jego boków, oraz 2) pomierzyć długości tych boków. Punkty załamania poligonu w terenie ustalamy przez ustawienie odpowiednich znaków, np. pali. Określenia azymutu każdego boku dokonamy przez ustawienie busoli nad punktem początkowym tego boku i pomierzenie jego azymutu. Jeżeli należy 1) azymut określić nieco ściślej i 2) usunąć możność popełnienia grubych błędów, wówczas na początku linji mierzymy azymut prostej (*AB*), zaś na jej końcu — odwrotny (*BA*). Jak wiadomo, powinno być:



Rys. 212.

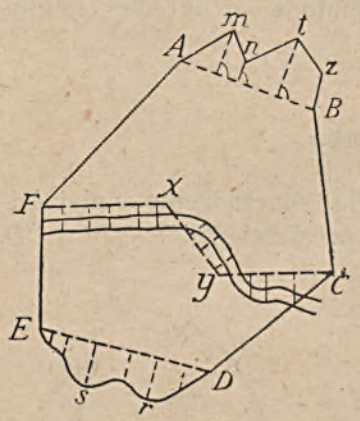
$$(BA) = (AB) \pm 180^0$$

gdzie (*AB*) i (*BA*) oznaczają odczytane z busoli azymuty magnetyczne.

Przy bardzo pośpiesznej pracy możemy się ograniczyć do ustawiania busoli w co drugim punkcie, mierząc w nich azymuty proste kolejnych boków, rozpoczynających się w tych punktach, i azymuty odwrotne prostych, kończących się w tych punktach (przyjmując bieg prostych, odpowiadający kierunkowi posuwania się busoli wzdłuż obwodu poligonu, które to posuwanie się najczęściej uskutecznia się w kierunku ruchu wskazówki zegara, umieszczonego wewnątrz mierzonego obszaru). Tak, np., w p. *A* pomierzymy azymuty (*AB*) i (*AF*), następnie w punkcie *C* azymuty (*CD*) i (*CB*) i t. d.

Po ukończeniu pomiaru azymutu w każdym punkcie, mierzymy długości kolejnych boków poligonu — jednego boku, lub dwu, w zależności od tego, czy busolę ustawiamy w każdym punkcie, czy w co drugim punkcie. Jednocześnie wykreślamy szkic polowy i notujemy odcięte i rzędne punktów, branych z domiarów, przecięcia danego boku z linjami sytuacyjnemi i t. p., łącząc wykreślane punkty w taki sposób, aby bieg wykreślanych linij na szkicu odpowiadał biegowi tych samych prostych w terenie. Obok prostych na szkicu wypisujemy pomierzone azymuty.

Zwykle punkty numerujemy liczbami arabskiemi, nie zaś literami; przytem w szkicach bezwzględnie powinny być wpisane te same numery, któremi oznaczyliśmy pale w terenie; numery nie powinny się powtarzać.



Rys. 213.

Po pomiarze poligonu obwodowego przystępujemy do pomiaru szczegółów wewnętrznych. Dla zdjęcia drogi obieramy w jej pobliżu punkty X i Y, mierzymy długości prostych FX, XY, YC oraz azymuty tych prostych. Przy pomiarze prostych, zapomocą węgielnicy i taśmy płóciennej mierzymy domiary do szczegółów (w danym wypadku do drogi), wykreślając odręcznie odpowiedni szkic. Często zamiast azymutów notujemy pomierzone czwartaki (gdy podział na limbusie jest czwartakowym).

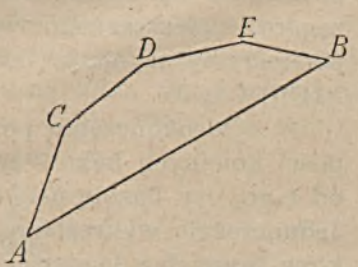
Boki należy mierzyć dwukrotnie i w przeciwnych kierunkach, wypisując obydwa wyniki, dwukrotnie podkreślone, na szkicach przy końcu boków.

Na zasadzie pomierzonych długości i azymutów boków możnaby a) obliczyć przyrosty spółrzędnych i spółrzędne punktów poligonu, a następnie b) wykreślić te punkty ze spółrzędnych na planie. Ponieważ jednak dokładność wyznaczenia punktu, zależy od dokładności pomiaru długości i azymutów, przeto ścisłe obliczanie poligonu busolowego chybia celu, tem bardziej, że przy starannem wykreślaniu kierunków zapomocą przenośnika błąd wykreślenia prostej pod danym azymutem nie sięga $\pm$ 15′, t. j. dokładności określania azymutu z busoli. Z tego więc względu plan zdjęcia busolowego wykreślamy odrazu, nie uciekając się do obliczania spółrzędnych.

Wykreślenie planu przy użyciu przenośnika wymaga ustalenia skali planu, wykreślenia na arkuszu papieru kierunku południka magnetycznego (zwykle $\parallel$-e do brzegu arkusza) i obrania położenia 1-ego punktu na planie w taki sposób, aby cała figura mogła się zmieścić na danym arkuszu.

§ 77. Ustalenie skali i sporządzenie planu przy zdjęciu busolowem.

Przy zdjęciu busolowem należy w terenie punkty poligonu ustalać możliwie w niewielkiej wzajemnej odległości, a to ze względów następujących: Przypuśćmy, że zamiast wyznaczenia poligonu $ACDEB$ połączyliśmy punkty A i B jedną prostą, przez co ilość prostych zmniejszyliśmy o trzy; określając azymut magnetyczny AB, popełniamy błąd (weźmy najgorszy wypadek) + lub — 15′, co wychyli określony z azymutu i długości d punkt B o $\frac{d}{200}$ od właściwego położenia. Załóżmy dla uproszczenia $AC = CD = DE = EB = \frac{d}{4}$



Rys. 214.

i takiej samej, jak poprzednio, wielkości błąd w azymucie każdej prostej. Ponieważ z teorji błędów i z doświadczenia wynika, że błędy rzeczywiste występują z różnemi znakami, przeto trudno przypuszczać, aby błąd azymutu w czterech kolejnych bokach występował stale z tym samym znakiem; gdyby to miało miejsce, dałoby wychylenie ostatniego punktu od właściwego położenia również o $\frac{d}{200}$.

Gdy jednak tylko dla jednego boku błąd azymutu wystąpi ze znakiem odwrotnym od znaku błędów w pozostałych bokach, wówczas wychylenia dwu boków, jako wprost przeciwne, zniosą się wzajemnie częściowo; całkowicie pozostanie wpływ błędów azymutów w dwu bokach, wyrażający się przez wielkość $2. \frac{1}{200} \cdot \frac{d}{4} = \frac{d}{400}$.

W praktyce zbyt częste ustawianie busoli, jako niedogodne, nie jest stosowane; z tego względu za długość przeciętną boku poligonu, mierzonego busolą, przyjmujemy wielkość 50 *m.*, przy której dla błędu w azymucie, równego $\pm$ 15′, wychylenie punktu od właściwego położenia wyniesie $\pm \frac{1}{200}$ 50 *m.* = 0.25 *m.*

Jeżeli położenie punktu jest wyznaczone z pomiaru polowego z błędem 0.25 *m*, to niema celu wyznaczać dokładniej położenie tego punktu na planie, zaś z drugiej strony — określenie położenia punktu na planie nie powinno zawierać większego błędu, niż to zaszło w terenie.

Jeżeli najmniejszy odcinek, który możemy oszacować przy wnoszeniu punktu na plan, wynosi 0,1 *mm*, to, gdy plan ma być sporządzony w skali $\frac{1}{N}$, błąd ten odpowie odcinkowi w terenie $\frac{N}{10}$ *mm.*; powino być

$$\frac{N}{10} \text{ mm.} \leqslant 0.25 \text{ m.} = 250 \text{ mm.},$$

stąd

$$N \leqslant 2500$$
$$\frac{1}{N} \geqslant \frac{1}{2500}$$

Oczywiście gdy boki poligonu busolowego będą dłuższe od 50 *m.*, odpowiednio wzrośnie mianownik skali liczbowej, zgodnie z relacją:

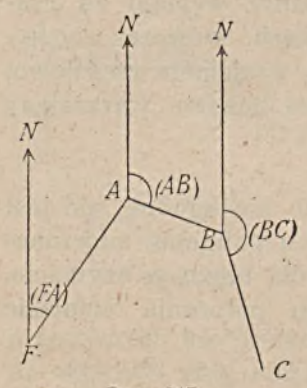
$$\frac{N}{10} \text{ mm.} \leqslant \frac{d}{200}$$

skąd

$$N \leqslant \frac{d}{20} \text{ i } \frac{1}{N} \geqslant \frac{20}{d}$$

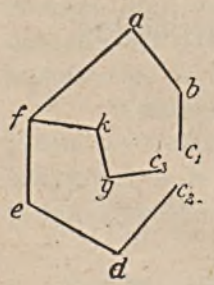
gdzie *d* jest wyrażone w milimetrach. Stąd wniosek: aby dokładność wniesienia punktów na plan odpowiadała dokładności pomiaru polowego, nie należy stosować, przy przeciętnej długości *d mm.* boku poligonu busolowego, skali liczbowej mniejszej od $\frac{20}{d}$, gdzie *d* jest wyrażone w *mm.*

Po ustaleniu podziałki przystępujemy do kreślenia planu. W tym celu wykreślamy przez środek arkusza południk (najczęściej ‖-e do brzegów arkusza) i wyznaczamy pierwszy punkt pomierzonego poligonu w takim punkcie arkusza, ażeby cały poligon był umieszczony na danym arkuszu możliwie symetrycznie w stosunku do południka. Przypuśćmy, że wykreślamy poligon *ABCDEF* (rys. № 213). Jako pierwszy punkt obieramy punkt *F*, od którego zapomocą przenośnika i ekierek wykreślamy na planie prostą *FA* pod azymutem *FA* (patrz § 23) i odcinamy na niej zapomocą cyrkla długość *FA*, wziętą z podziałki metalowej, odpowiadającej skali liczbowej planu (rys. 215 i 216). Przez wyznaczony punkt *a* wykreślamy kierunek *ab* pod azymutem (*AB*) i odcinamy *bc*, wzięte z podziałki, jako długość BC_1. Przypuśćmy, że wyznaczony punkt c_1 leży w odległości około $^1/_2$ obwodu poligonu, licząc od punktu *f*. Oczywiście każde wykreślenie prostej pod danym azymutem i każde odcięcie na takiej prostej danej długości jest połączone z pewnym błędem operacyjnym, wpływ którego coraz więcej daje się odczuwać w miarę wyznaczania punktów, coraz bardziej oddalonych od punktu początkowego. Ponieważ zaś, prócz tych błędów, na położenie punktu wywiera wpływ także błąd określenia azymutu, a w pewnej mierze i błąd określenia długości, przeto punkt *c* odchyli się od swego właściwego położenia na planie.



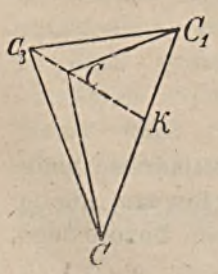
Rys. 215.

Jeżeli dalej nanosić będziemy na podstawie długości i odwrotnych azymutów proste *fe*, *ed* i *dc*, to wyznaczony w ten sposób punkt c_2 wychyli się od poprzednio określonego na planie punktu c_1. Gdy analogicznie naniesiemy poligon rozwarty *FXYC*, otrzymamy zamiast punktu *c* punkt c_3.



Rys. 216.

Oczywiście rzeczywiste położenie punktu *C* nie odpowie żadnemu z punktów c_1 c_2 c_3, gdyż każdy z nich naniesiony jest z pewnym błędem, prawdopodobnie tem większym, im większą jest długość tego poligonu, za pośrednictwem którego dany punkt został wyznaczony. Gdyby wewnętrznego poligonu nie było, zaś obydwa punkty c_1 i c_2 otrzymane zostały z poligonów $fabc_1$ i $fedc_2$ równej mniej więcej długości, wówczas za ostateczne położenie punktu *C* na planie wybralibyśmy środek odcinka C_1 C_2. (Rys. 217) Odległości punktów C_1 czy C_2 od określonego punktu *C* nazywamy odchyłkami odpowiednich poligonów busolowych $fabc_1$ $fedc_2$. Gdy trzy poligony busolowe, wychodzące z punktu *F* w terenie, spotykają się w punkcie *C*, którego położenie na planie dla każdego z poligonów wyznaczają punkty C_1 C_2 i C_3, wówczas za ostateczne położenie punktu *C* przyjmiemy punkt, leżący wewnątrz Δ-a C_1 C_2 C_3 (Δ-a błędów) na dwusiecznej kąta C_3 w odległości $^1/_3$ jej długości, licząc od C_3. Odchyłkami poszczególnych poligonów, będą odcinki CC_3, CC_2 i CC_1. Odchyłka CC_3



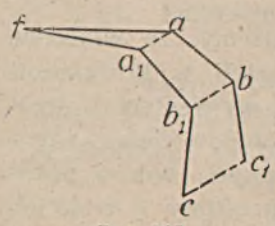
Rys. 217.

jest mniejsza od dwu innych, gdyż poligon wewnętrzny *fxyc*, jako krótszy od dwu pozostałych, tem samem jest wykreślony dokładniej.

Przystąpimy teraz do rozpatrzenia sposobu, zapomocą którego wprowadzimy poprawki do położenia punktów poligonowych, t. j. rozpatrzymy metody rozrzucenia odchyłki w poligonie.

§ 78. Rozrzucenie odchyłki na punkty poligonowe.

Przypuśćmy, że należy wyrównać poligon *fabc*, w którym punkt *f* jako początkowy, pozostaje bez zmiany, zaś p. c_1, na skutek określenia najprawdopodobniejszego jego położenia, ulega przesunięciu do punktu *c*; ponieważ błąd punktu c_1 jest spowodowany błędami punktów poprzedzających, przeto wyrównanie położenia punktu c_1 do *c* pociągnąć powinno za sobą odpowiednie przesunięcie wszystkich punktów danego poligonu. Dla celów praktycznych wystarczy przesunąć wszystkie punkty abc_1 poligonu po prostych, równoległych do kierunku c_1 *c*, o wielkości, proporcjonalne do sum boków poligonu, poprzedzających dany punkt, poczynając od początkowego punktu *f*; tak więc, jeżeli oznaczymy:



Rys. 218.

$$FA = d_1$$
$$AB = d_2$$
$$BC = d_3$$

zaś

$$d_1 + d_2 + d_3 = D$$

oraz

$$cc_1 = l$$

wtedy przesunięcia poszczególnych punktów, $\parallel$-e do c_1 *c* i zwrócone w tym samym kierunku, będą odpowiednio równe odcinkom:

$$aa_1 = \frac{l}{D} d_1$$

$$bb_1 = \frac{l}{D} (d_1 + d_2)$$

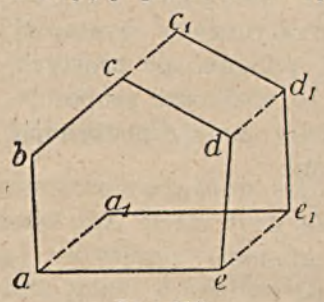
$$cc_1 = \frac{l}{D} (d_1 + d_2 + d_3) = l$$

Długość cc_1 odcinamy z podziałki w skali planu; do obliczenia więc użyte zostaną wielkości *l*,*D*, d_1 d_2 d_3..., wyrażone w metrach. Obliczone aa_1 i bb_1 odcinamy na $\parallel$-ch do c_1 *c* kierunkach. W ten sposób wyrównanym poligonem na planie będzie fa_1 b_1 c_1, który też podlega ostatecznemu wykreśleniu.

Co się tyczy wielkości odchyłki cc_1, to praktyka ustaliła, że dla pomiarów busolowych za normę dla wielkości odchyłki należy przyjąć $\frac{1}{200}$ długości ciągu, jakkolwiek zwykle uzyskujemy nieco większą dokładność. Jeżeli więc l jest większe od $\frac{D}{200}$, wówczas należy przypuszczać przeoczenie grubego błędu w pomiarze lub wykreśleniu.

§ 79. Odnalezienie błędu w pomiarze lub wykreśleniu boku.

Opiera się na następującem rozważaniu: przypuśćmy, że właściwe położenie poligonu na planie powinno być $a\ b\ c\ d\ e$; jeżeli w którymkolwiek z boków, np., bc kryje się gruby błąd (pomiaru lub wykreślenia), przesuwający punkt c do c_1, zaś poza tem innych grubych błędów niema, wówczas długości i azymuty następnych boków pozostają bez zmiany i boki te wykreślimy $\parallel$-e do ich właściwych kierunków; w ten sposób punkt d przesunie się do d_1 tak, że $cc_1 = dd_1 = ee_1 = aa_1$, i wszystkie te przesunięcia, a więc i niedopuszczalna odchyłka aa_1, będą równoległe do cc_1 jak również i do bc.



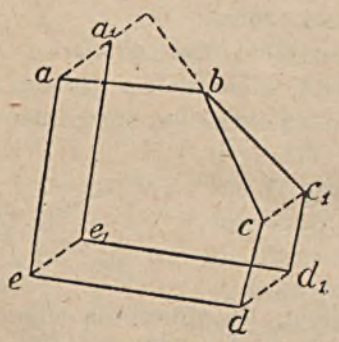
Rys. 219.

Stąd wniosek: jeżeli gruby błąd został popełniony w długości boku, to błędu tego szukać należy w jednym z boków, równoległych do odchyłki; błąd może tkwić w wykreśleniu długości boku, albo w pomiarze w terenie.

§ 80. Odnalezienie błędu w azymucie.

Przypuśćmy, że boki są pomierzone i wykreślone prawidłowo, natomiast popełniono gruby błąd w określeniu, albo wykreśleniu azymutu prostej, np., bc, wskutek czego punkt c przesunął się do c_1, t. j. bok bc został wykreślony jako bc_1. Ponieważ dalsze boki i azymuty zostały pomierzone i wykreślone prawidłowo, przeto poligon będzie dalej wykreślony w ten sposób, że

$$c_1 d_1 = \text{i} \parallel cd$$
$$d_1 e_1 = \text{i} \parallel de$$
$$e_1 a_1 = \text{i} \parallel ea$$



Rys. 220.

a więc przesunięcia punktów d, e i a do d_1, e_1 i a_1 będą także równe i $\parallel$-e, czyli i aa_1 $\parallel$-e do cc_1; ponieważ zaś przesunięcie cc_1 wykonane zostało wzdłuż łuku cc o promieniu bc, przeto, skoro dany gruby błąd w azymucie nie jest zbyt wielki (co można przypuścić, gdyż najczęściej grube błędy w azymutach nie przekraczają 5^0), możemy

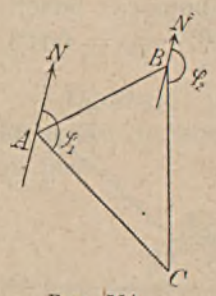
przyjąć $cc_1 \perp bc_1$, że zaś aa_1 jest $\parallel$ do cc_1, więc $aa_1 \perp bc_1$, t. j. błędu w azymucie należy szukać w tym boku, który jest prostopadły do odchyłki.

Jeżeli powtórzenie pomiaru długości lub azymutu na gruncie nie wykryje błędu w boku, co do którego istniało podejrzenie, wówczas należy przypuszczać, że zaszło kilka błędów, i pomiar trzeba powtórzyć dla tych poligonów, które nie odpowiadają pozostałym, jak np. w tym wypadku, gdy obwodowe poligony dają dozwoloną odchyłkę, a wewnętrzny daje wynik, rażąco odmienny od dwu poprzednich; wewnętrzny poligon należy wówczas sprawdzić.

§ 81. Pośrednie określanie odległości i położenia punktów zapomocą busoli.

Przypuśćmy, że z dwu punktów poligonu busolowego widoczny jest trzeci, który trzeba określić bez pomiaru odległości. Dwa dane punkty A i B są wniesione na plan, na którym należy wyznaczyć i określany punkt.

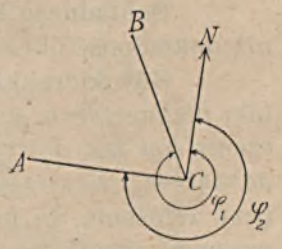
Ustawiając busolę w A i B w terenie, mierzymy azymuty kierunków AC, BC t. j. φ_1 φ_2 (rys. 221).



Rys. 221.

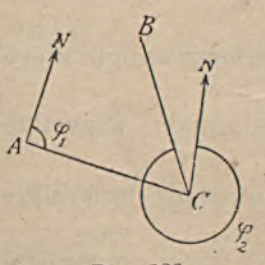
Wykreślając z tych azymutów na planie kierunki AC i BC, określimy punkt przecięcia się C. Zagadnienie to, zwane wcięciem wprzód, ma najczęściej zastosowanie wówczas, gdy punkt C jest niedostępny. Odległości AC i BC określimy z planu, korzystając z podziałki w skali planu.

(Rys. 222): Może zajść wypadek, że obydwa dane punkty A i B są niedostępne, natomiast w punkcie C możemy ustawić busolę. Określimy w polu azymuty $\varphi_1 = (CB)$ i $\varphi_2 = (CA)$, obliczamy odwrotnie azymuty $(BC) = \varphi_1 \pm 180^0$, $(AC) = \varphi_2 \pm 180^0$ i, wykreśliwszy odpowiednio przez punkty A i B na planie kierunki AC i BC, otrzymamy punkt C w przecięciu się tych prostych. Zagadnienie niniejsze nosi nazwę wcięcia wstecz.



Rys. 222.

Wcięcie boczne polega na określeniu w danym punkcie A azymutu φ_1 kierunku do określonego punktu C oraz na wyznaczeniu w określanym punkcie C azymutu prostej $(CB) = \varphi_2$. Na planie przez punkt A poprowadzimy prostą pod azymutem φ_1, zaś przez punkt B — pod azymutem $\varphi_2 \pm 180^0$. Przecięcie się wykreślonych prostych daje punkt C na planie (rys. 223).

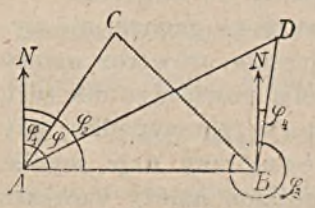


Rys. 223.

Zagadnienie określenia odległości pomiędzy dwoma niedostępnemi punktami sprowadza się w braku punktów, których położenie na planie i w terenie jest ustalone, a z których byłyby widoczne końce określanej prostej, do ustalenia w terenie takiej prostej, z każdego końca której byłyby widoczne obydwa niedostępne punkty, oraz drugi koniec naszej pomocniczej prostej, zwanej podstawą, albo bazą.

Mierzymy $d = AB$ oraz azymuty

$$\varphi = (AB)$$
$$\varphi_1 = (AC)$$
$$\varphi_2 = (AD)$$
$$\varphi_3 = (BC)$$
$$\varphi_4 = (BD)$$



Rys. 224.

Nanosimy na plan pod azymutem φ przez dowolny punkt a długość $d = AB$, przez punkt a prowadzimy kierunki do c i d pod azymutami φ_1 i φ_2, zaś przez punkt b pod azymutami φ_3 i φ_4. W przecięciu się odpowiednich kierunków odnajdziemy punkty c i d, odległość między któremi, wzięta z podziałki w skali planu, jest określana długością CD.

§ 82. Określenie kąta zapomocą busoli.

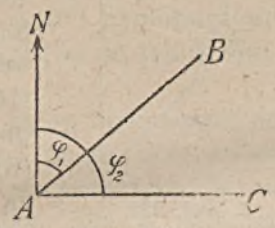
Ażeby w terenie określić wielkość kąta BAC zapomocą busoli, ustawiamy busolę w p. A i mierzymy azymuty $\varphi_1 = (AB)$ i $\varphi_2 = (AC)$, Oczywiście: $\sphericalangle ABC = \varphi_2 - \varphi_1$.

Jeżeli zaś kąt ABC określić chcemy z azymutów $\varphi_3 = (CA)$ i $\varphi_1 = (AB)$, określonych przy pomiarze busolowym poligonu, wówczas, ponieważ

$$\varphi_2 = (AC) = (CA) \pm 180^0 = \varphi_3 \pm 180^0,$$

więc

$$\sphericalangle BAC = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 \pm 180^0 - \varphi_1$$



Rys. 225.

Dokładność kąta, określonego z różnicy azymutów, jest mniejsza, niż dokładność określenia azymutu, a więc jest mniejsza od 15′.

Gdy kierunki poszczególnych prostych są wyznaczone przez czwartaki magnetyczne, wówczas albo zamieniamy czwartaki na azymuty i obliczamy kąt jak powyżej, albo też od czwartaków przechodzimy bezpośrednio do kątów; rozpatrzmy zależność, zachodzącą pomiędzy czwartakami i kątami przy założeniu, że posuwamy się wzdłuż poligonu busolowego w kierunku prawym, określając kąty poligonu, położone z prawej strony tego poligonu,

Zachodzą cztery wypadki, a mianowicie:

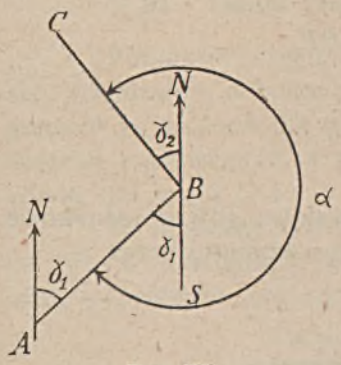
a) gdy czwartaki boków, obejmujących dany kąt, mają pierwsze litery jednakowe, *NO* i *NW*, lub *SO* i *SW*

b) gdy czwartaki boków, obejmujących dany kąt, mają drugie litery jednakowe, np. *NO* i *SO*, lub *NW* i *SW*,

c) gdy czwartaki boków, obejmujących dany kąt, mają wszystkie litery jednakowe: *NO* i *NO*, *SW* i *SW* i t. d.

d) gdy czwartaki boków, obejmujących dany kąt, mają wszystkie litery nejednakowe, np. *NO* i *SW*, *SO* i *NW*.

a) Pierwsze litery czwartaków są jednakowe (rys. 226): dla prostej AB — $NO\gamma_1$, dla prostej BC $NW\gamma_2$, przeto kąt α, liczony w prawo od kierunku ABC posuwania się wzdłuż poligonu, obliczymy z



Rys. 226.

$$\sphericalangle NAB = \sphericalangle ABS = \gamma_1$$
$$\alpha = \sphericalangle ABC = 180^0 + (\gamma_1 + \gamma_2)$$

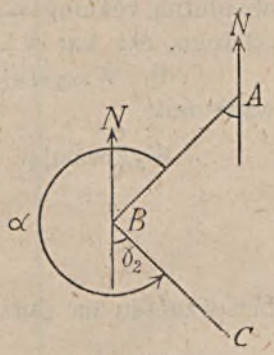
Czwartakami prostych AB i BC (rys. 227) są $SW\gamma_1$ i $SO\gamma_2$; ponieważ $\sphericalangle NBA = \sphericalangle SAB = \gamma_1$, przeto kąt α, liczony w prawo od kierunku ABC posuwania się, jest równy $\alpha = \sphericalangle ABC = 180^0 + (\gamma_1 + \gamma_2)$. Czwartakami prostych AB i BC (rys. 228) są $SO\gamma_1$ i $SW\gamma_2$; ponieważ $\sphericalangle SAB = \sphericalangle ABN = \gamma_1$, przeto kąt prawy α, liczony w prawo od kierunku posuwania się wzdłuż poligonu ABC, jest równy $\gamma = 180^0 - (\gamma_1 + \gamma_2)$.

Czwartakami prostych AB i BC (rys. 229) są $NW\ \gamma_1$ i $NO\ \gamma_2$; ponieważ $\sphericalangle ABS = \sphericalangle BAN = \gamma_1$, przeto kąt prawy α, liczony w prawo od kierunku $A\ B\ C$, jest równy

$$\alpha = 180^0 - (\gamma_1 + \gamma_2)$$

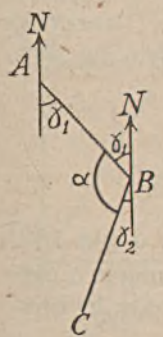
Ogólnym więc wzorem dla kąta prawego w stosunku do kierunku posuwania się wzdłuż poligonu jest

$$\alpha = 180^0 \pm (\gamma_1 + \gamma_2)$$



Rys. 227.

t. j. kąt prawy jest dopełnieniem lub uzupełnieniem sumy czwartaków γ_1 γ_2 do 180° w zależności od tego, czy kąt α jest mniejszym, czy większym od 180°, co łatwo wywnioskować z nazwy czwartaków boków pierwszego i drugiego, obejmujących dany kąt.



Rys. 228.

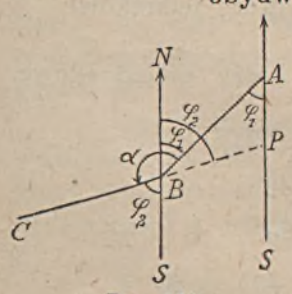
b) Drugie litery czwartaków są jednakowe. Wykreślając proste AB i BC (jak powyżej) dla czwartaków 1) $NO\ \gamma_1$ i $SO\ \gamma_2$, 2) $SO\ \gamma_1$ i $NO\ \gamma_2$, 3) $NW\ \gamma_1$ i $SW\ \gamma_2$, 4) $SW\ \gamma_1$ i $NW\ \gamma_2$, dla kąta prawego otrzymujemy wzór

$$\alpha = 360^0 \pm (\gamma_1 + \gamma_2)$$



Rys. 229.

c) Wszystkie litery nazw czwartaków obydwu prostych są jednakowe. Zachodzą połączenia nazw dla prostych AB i BC: 1) $NO\ \gamma_1$ i $NO\ \gamma_2$, 1) $NW\ \gamma_1$ i $NW\ \gamma_2$, 3) $SO\ \gamma_1$ i $SO\ \gamma_2$, 4) $SW\ \gamma_1$ i $SW\ \gamma_2$.



Rys. 230.

Rozpatrzmy którąkolwiek z tych grup, np. 4-ą — $SW\ \varphi_1$ i $SW\ \varphi_2$ (rys. 230).

Przedłużając prostą CB do CBP, otrzymamy:

$$\varphi_1 = \sphericalangle SAB = \sphericalangle ABN$$
$$\varphi_2 = \sphericalangle CBS = \sphericalangle PBN$$

stąd

$$\alpha = \sphericalangle ABC = 180^0 - \sphericalangle ABP,$$

że zaś:

$$\sphericalangle ABP = \varphi_2 - \varphi_1$$

więc

$$\alpha = 180^0 - (\varphi_2 - \varphi_1)$$

Wzór dla wszystkich 4 połączeń liter czwartaków, gdy są jednakowe u obydwu prostych dla kąta prawego, z oznaczeniem azymutu przez γ,

będzie:

$$\alpha = 180^0 \pm (\gamma_2 - \gamma_1)$$

przytem niezależnie od tego, czy $\gamma_2 > \gamma_1$, czy odwrotnie $\gamma_1 > \gamma_2$, wielkość absolutną różnicy $\gamma_2 - \gamma_1$ dodajemy lub odejmujemy od 180^0 w zależności od tego, czy kąt α jest większy, czy mniejszy od 180^0.

d) Wszystkie litery nazw czwartaków obydwu prostych różnią się wzajemnie.

Wykreślając 4 wypadki

1) $NO\ \gamma_1$ i $SW\ \gamma_2$
2) $NW\ \gamma_1$ i $SO\ \gamma_2$
3) $SO\ \gamma_1$ i $NW\ \gamma_2$
4) $SW\ \gamma_1$ i $NO\ \gamma_2$,

bez względu na rodzaj zależności $\gamma_1 \gtrless \gamma_2$, otrzymamy wzór:

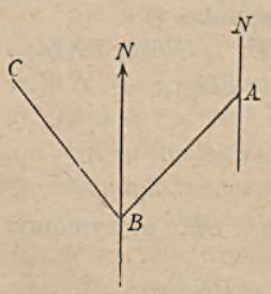
$$\alpha = 360^0 \pm (\gamma_2 - \gamma_1)$$

Jako ogólne prawidło dla obliczania kąta prawego z czwartaków stosować można następujące:

Kąt prawy oblicza się z sumy czwartaków, gdy ich nazwy mają po jednakowej literze, przytem, gdy pierwsze litery są jednakowe, tworzymy kąt, zmieniając 180^0 o tę sumę, gdy drugie są jednakowe, zmieniamy o nią 360^0.

$$\alpha = \begin{cases} 180^0 \ldots\ldots \text{wszystkie litery jednakowe} \\ \pm (\gamma_2 + \gamma_1) \\ 360^0 \ldots\ldots \text{wszystkielitery niejednakowe} \end{cases}$$

Kąt prawy oblicza się z różnicy czwartaków, zmieniając o nią 180^0 gdy wszystkie litery obydwu czwartaków są jednakowe, zaś zmieniając o różnicę czwartaków 360^0, otrzymujemy kąt α w wypadku, gdy czwartaki obydwu prostych nie mają wcale jednakowych liter.



Rys. 231.

$$\alpha = \begin{cases} 180^0 \ldots\ldots \text{wszystkie litery jednakowe} \\ \pm (\gamma_2 - \gamma_1) \\ 360^0 \ldots\ldots \text{wszystkie litery niejednakowe.} \end{cases}$$

Przykład (rys. 231):

$(AB) = SW\ 38^0\ 40'$

$(BC) = NW\ 41^0\ 25'$

$$\alpha = 360^0 + (41^0\ 25' + 38^0\ 40') = 80^0\ 5'$$

§ 83. Tablice tangensów w zastosowaniu do wykreślania planów.

Ponieważ często za podstawę do wykreślania planów przyjmujemy sieć kwadratów o bokach 10 *cm.*, przeto dla potrzeb geodezji tablice tangensów są ułożone dla promieni, odpowiadających 10 *cm.*, w skalach, najczęściej stosowanych, a więc 1:5000, co stanowi 500 *m.*, 1:1000, co odpowiada 100 *m.*, i t. d.

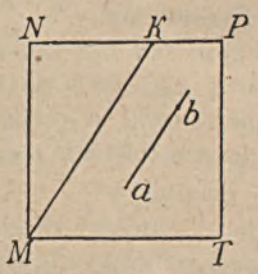
W tablicach tych*) w lewej kolumnie mamy wielkość kątów od 0^0 do 45^0; w następnych kolumnach mamy wielkości stycznych, odpowiadających wypisanym nad każdą kolumną długościom.

Wyciąg z tablic tangensów

Kąt	Promień w m-ach		
5^0	400	200	100
—	—	—	—
30′	38.52	19.26	9.63
31′	38.63	19.32	9.66
32′	38.75	19.38	9.69
—	—	—	—
—	—	—	—
—	—	—	—

Rozpatrzmy użycie tych tablic.

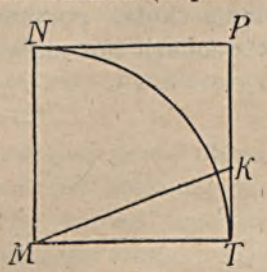
1) Dany jest (rys. 232) azymut prostej $(AB) = 32^0 40'$, a więc i czwartak NO $32^0 40'$. Punkt a leży wewnątrz kwadratu $MNPT$ siatki. Kierunek N odpowiada kierunkowi MN boku kwadratu. Jeżeli skala planu jest, np., 1:5000, wówczas długość boku kwadratu wynosi 10 *cm.* $\times$ 5000 = 500 *m.* W kolumnie 500 *m.* dla $32^0 40'$ odnajdujemy 320.0 *m.* Jeżeli za promień i kierunek zerowy przyjmiemy MN, zaś za środek koła p. M wówczas wielkość 320.0 *m.* odłożymy na prostej NP, gdyż czwartak NO $32^0 40'$ wskazuje, że prosta odchyla się od kierunku północy (MN) na wschód (w prawo).



Rys. 232.

Otrzymamy w ten sposób punkt K, zaś prosta MK jest prostą o azymucie $32^0 40'$. Należy kierunek MK przesunąć zapomocą ekierek równolegle do siebie aż do punktu a i wykreślić prostą ab.

Gdyby azymutem AB był kąt $> 45^0$, np. 80^0, wówczas (rys. 233), ponieważ tablice nie podają długości stycznych dla kątów większych od 45^0, przeto korzystamy z zależności $ctg\ 80^0 = tg\ 10^0$ i, biorąc

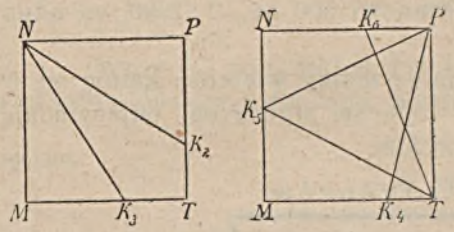


Rys. 233.

*) Tablice tangensów wyd. *Przeglądu Mierniczego* są ułożone dla promieni: 100, 200, 400 i 500.

z tablic dla 10° długość 88,3, odkładamy ją na TP od punktu T. Otrzymujemy punkt K; kierunek $(MK) = 80°$.

Przypuśćmy, że z M promieniem MN zatoczyliśmy łuk; linja TK jest linją cotangensową kąta α; stąd właśnie wynika powyższa konstrukcja.



Rys. 234.

Dla kątów $180° > \alpha > 90°$ mamy 2 wypadki $\alpha < 135°$ i $\alpha > 135°$.

Gdy $\alpha < 135°$, tworzymy $\alpha - 90°$ i odpowiedni tangens (rys. 234 lewy) odłożymy od P do K_2; gdy $\alpha > 135°$, obliczamy $180° - \alpha$ i tangens otrzymanego kąta odłożymy (rys. 234 lewy) jako MK_3, zaś sam kierunek wykreślimy, jako NK_3.

Dla $270° > \alpha > 180°$ (rys. 234 prawy) mamy: 1) $\alpha_1 < 225°$, t. j. SW $(\alpha - 180)$; wówczas tangens kąta $\alpha_1 - 180°$ odkładamy, jako TK_4, zaś kierunek o azymucie α_1 będzie PK_4; 2) $\alpha_2 > 225°$; odetniemy tangens $270 - \alpha_2$ od N wdół i otrzymamy kierunek PK_5.

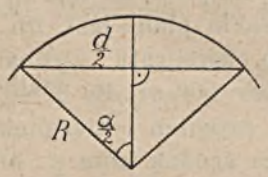
Dla $360° > \alpha > 270°$ przy $\alpha < 315°$ odcinamy tangens $\alpha - 270°$ od M ku górze i kreślimy TK_5; przy $\alpha > 315°$ odcinamy tangens $360° - \alpha$ od P w lewo i otrzymujemy kierunek TK_6.

Siatka kwadratów winna być odpowiednio ściśle wykreślona i przesunięcie $\parallel$-e kierunku zapomocą ekierek winno być starannie wykonane, aby przeniesiony w ten sposób kierunek odpowiadał założonemu.

§ 84. Tablice cięciw.

Tablice cięciw służyć mogą również do odcinania kierunków. Obliczane są na zasadzie wzoru

$$\frac{d}{2} = R \sin \frac{\alpha}{2},$$



Rys. 235.

skąd (rys. 235):

$$d = 2 R \sin \frac{\alpha}{2}$$

Dla założonego R, równego pewnej wielkości, dogodnej dla wykreślenia koła, podane są dla poszczególnych α odpowiednie d. Tablice te w geodezji nie mają takiego zastosowania, jak tablice tangensów.

ROZDZIAŁ IV.

KĄTOMIERZE.

§ 85. Ogólne uwagi.

Do określania wielkości rzutów kątów, zawartych między kierunkami, — na płaszczyznę poziomą, t. j. do określania t. zw. kątów poziomych, służą różne przyrządy, jak np. astrolabje, teodolity, gonjometry i t. p., zwane kątomierzami; często zachodzi również potrzeba ściślejszego niż w pochylnikach określania kątów pochylenia obserwowanych kierunków do poziomu; do tego celu służą t. zw. koła wysokościowe, tworzące zwykle część składową kątomierza.

Rozpatrzmy przedewszystkiem konstrukcję, teorję i użycie przyrządów, służących do pomiaru kątów poziomych.

Jak wiemy, kątem poziomym, zawartym pomiędzy dwoma kierunkami, jest kąt linjowy kąta dwuściennego, którego ściany przechodzą przez dane kierunki prostopadle do poziomu. Ażeby mierzyć kąty poziome, należy w dowolnym punkcie pionu wierzchołka kąta (a więc na krawędzi kąta dwuściennego):

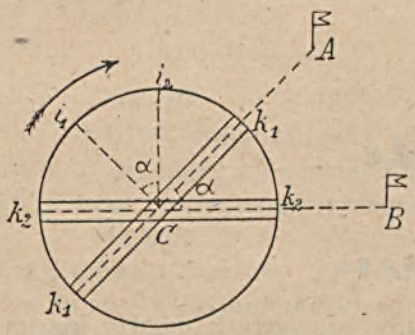
1) ustawić do poziomu koło, o obwodzie, podzielonym na równe części (stopnie i części stopnia), którego środek znajduje się ściśle na pionie wierzchołka kąta. Koło takie nazywamy limbusem;

2) określać na obwodzie limbusu odczyty (stopnie i dalsze części), odpowiadające punktom przecięcia się z obwodem limbusu płaszczyzn pionowych kąta dwuściennego, przechodzących przez obserwowane kierunki. Różnica dwu takich odczytów da wartość mierzonego kąta.

W kątomierzach—płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez obserwowany kierunek, odpowiada płaszczyzna celowa (zwana też kolimacyjną). Jest to płaszczyzna ruchoma, obracająca się dokoła środka limbusu, a w większości przyrządów tego typu przechodząca przez jego środek; przy obrocie dokoła środka limbusu, płaszczyzna kolimacyjna stale powinna być prostopadła do limbusu, więc, skoro limbus jest poziomym, powinna być pionową.

Najprostszym typem płaszczyzny kolimacyjnej byłby linjał, będący ruchomą średnicą limbusu, na końcach którego umieszczona byłaby para przezierników, leżących w płaszczyźnie, przechodzącej przez środek limbusu i prostopadłej do niego.

Ruchomy linjał w kątomierzach tego typu nosi nazwę alhidady. Na linjale, na końcu średnicy, wycięta jest kreska, zwana indeksem, zapomocą której otrzymujemy z podziału na limbusie odczyt, odpowiadający położeniu płaszczyzny kolimacyjnej. Indeks powinien właściwie leżeć w płaszczyźnie kolimacyjnej; wszelako nie zawsze to zachodzi, zwłaszcza w tych przyrządach, gdzie alhidada jest pełnem kołem, spółśrodkowem z limbusem. Indeks może być oddalony od płaszczyzny kolimacyjnej o łuk, mierzony na obwodzie limbusu, równy pewnej stałej wielkości, np. 90°.



Rys. 236.

Jeżeli bowiem (rys. 236) skierujemy płaszczyznę kolimacyjną $k_1 k_1$ do punktu A i indeks zajmie położenie i_1, to, po skierowaniu płaszczyzny kolimacyjnej na p. B, tak p. k_1, jak oddalony od niego o stały łuk $i_1\ k_1$ indeks, przesuwa się o łuki $k_1\ k_2 = i_1\ i_2$, równe kątowi α między kierunkami $C\,B$ i $C\,A$. Jeżeli podział na limbusie idzie w kierunku prawym, wówczas od odczytu i_2 odejmiemy i_1, t. j. $\alpha = i_2 - i_1$; jeżeli zaś opis podziału rośnie w kierunku lewym, wówczas (rys. 237);

$$\alpha = i_1 - i_2$$

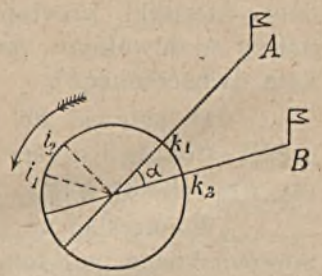
Łatwo ustalić zasadnicze warunki, którym powinien odpowiadać kątomierz. Przyrząd cały powinien być tak skonstruowany, aby można było:

1) szybko i dokładnie ustawić środek limbusu nad wierzchołkiem mierzonego kąta;

2) szybko ustawić do poziomu płaszczyznę limbusu;

3) możliwie dokładnie kierować płaszczyznę kolimacyjną wzdłuż kierunków, tworzących ramiona mierzonego kąta;

4) możliwie dokładnie brać z limbusu odczyty, odpowiadające danym położeniom płaszczyzny kolimacyjnej.



Rys. 237.

Do ustawiania przyrządu centrycznie nad wierzchołkiem kąta służą statywy i pion; płaszczyznę limbusu sprowadzamy do poziomu zapomocą libeli; dokładne ustawienie płaszczyzny kolimacyjnej w danym kierunku uzyskiwano dawniej zapomocą przezierników, obecnie zapomocą lunety, zaś dokładne odczyty z limbusu otrzymujemy zapomocą nonjuszów (wernjer).

Śród wielkiej liczby przyrządów, służących do pomiaru kątów, rozróżniamy typy:

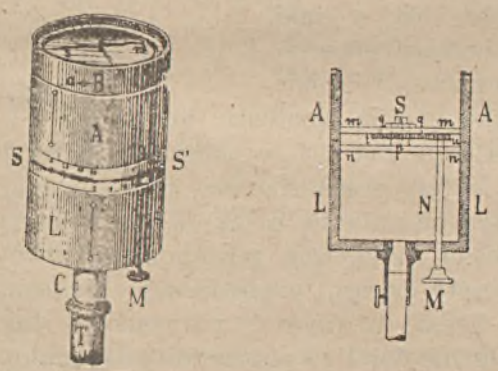
1) mniej dokładne, w których sprowadzanie limbusu do poziomu uskutecznia się przy pomocy libeli, lub bez niej, lecz które nie posiadają lunet;

2) kątomierze z lunetami.

Pierwsze stanowią przeżytek i używane są przy bardzo mało dokładnych pracach, jak np. pomiary granic drzewostanów w lasach. Rozpatrzymy je pokrótce, jako kątomierze, od których przejście do więcej skomplikowanych typów da nam obraz rozwoju historycznego instrumentów geodezyjnych, używanych w miernictwie.

§ 86. Gonjometr.

Gonjometr (rys. 238) składa się z dwu metalowych walców, osadzonych centrycznie jeden na drugim. Dolny walec u góry jest zakończony stożkową powierzchnią, na której naniesiony jest podział na 360°; górny walec u dołu na obwodzie posiada nonjusz (wernjer), t. j. podział pomocniczy, zapomocą którego odczytujemy stopnie i części stopnia. Górny walec może obracać się dokoła osi matematycznej obydwu walców w czasie, gdy dolny walec z podziałem na stopnie na jego górnym obwodzie pozostaje nieruchomy. W ściance górnego walca są dwie płaszczyzny celowe, wzajemnie prostopadłe, w postaci dwu par przezierników, z których jedna służy do celowania, druga do tyczenia prostopadłych, do prostych w kierunku których jest ustawiana pierwsza płaszczyzna. U dołu gonjometr zakończony jest tuleją, osadzaną na kosturze, lub trójgraniastym statywie, składającym się z głowicy i trzech nóg. Głowica u góry zakończona jest czopem, na który nasadzamy gonjometr tuleją.



Rys. 238.

Przez dolną podstawę gonjometru przechodzi pręt MN, wprawiany w obrót zapomocą główki M, a zakończony u góry kółkiem zębatem u, wprawiającem w ruch drugie kółko zębate t o większej średnicy. Większe kółko jest osadzone na krótkiej osi p, ustawionej dolnym końcem na krążku $n\,n$, bedącym wewnętrzną górną podstawą dolnego walca, przez którą przechodzi pręt MN, zakończony u góry kółkiem zębatem.

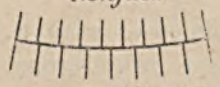
Drugi krążek $m\,m$, stanowiący wewnętrzną dolną podstawę alhidady, t. j. górnego walca, przechodzi centrycznie przez krótką oś p większego kółka zębatego, połączonego trwale z tym krążkiem. Ruch obrotowy mniejszego kółka zębatego powoduje taki sam ruch większego kółka t, a tem samem wprawia w obrót górny krążek, a więc całą alhidadę.

Podział na limbusie biegnie w kierunku lewym od 0° do 360°. U góry gonjometr jest zaopatrzony w busolę. Po osadzeniu gonjometru na

czopie *T* i dokręceniu do czopa śrubki, przechodzącej przez tuleję, unieruchomimy dolną część gonjometru, a więc i limbus; obracając zaś górny walec gonjometru, możemy płaszczyznę kolimacyjną (przezierników) skierować na obserwowany punkt. Odczyt, odpowiadający danemu położeniu płaszczyzny kolimacyjnej, bierzemy zapomocą nonjuszu. W dolnym walcu, pod średnicą 0^0 — 180^0, znajdują się przezierniki: oczny — pod 0^0, przedmiotowy — pod 180^0.

§ 87. Nonjusz*).

Do określania części stopnia służą tak zwane nonjusze (rys. 239) wernjer'y). W kątomierzach są to łuki alhidady, spółśrodkowe z obwodem podziału na limbusie i bezpośrednio stykające się na całej swej długości z tym obwodem.

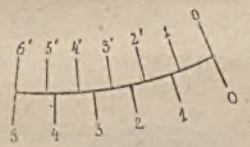


Rys. 239.

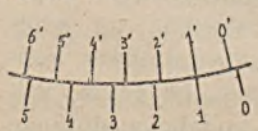
Długość łuku nonjuszu odpowiada łukowi limbusu o całkowitej liczbie podziałek; przytem sam nonjusz podzielony jest na równe części kreskami w ten sposób, że ilość podziałek na nonjuszu jest o jedną podziałkę większa, lub mniejsza, od liczby podziałek limbusu, zawartych w łuku limbusu o długości, równej łukowi nonjuszu. Jeżeli n działkom na limbusie odpowiada $n + 1$ działek nonjuszu, wówczas nonjusz nazywamy zwykłym; jeżeli zaś n działkom limbusu odpowiada $n - 1$ działek nonjuszu — wówczas nonjusz jest wstecznym.

Wartością podziałki nonjuszu, właściwiej dokładnością nonjuszu, nazywamy różnicę między długościami działek limbusu i nonjuszu wyrażoną w jednostkach kątowych.

Przypuśćmy (rys. 240), że nonjusz jest zbudowany w taki sposób, że pięciu działkom stopniowym limbusu odpowiada 6 działek $\frac{20}{19}$ nonjuszu (zwykłego). Jeżeli więc alhidadę obrócimy dokoła osi w taki sposób, by kreski zerowe nonjuszu i limbusu przedłużały się wzajemnie, wówczas kreska nonjuszu 6′ będzie przedłużeniem 5-ej kreski limbusu. Dokładnością nonjuszu będzie łuk 1′1. Jeżeli teraz alhidadę obrócimy (rys. 241) o łuk 1′1 w kierunku lewym wówczas kreska 1′ będzie przedłużeniem kreski 1 limbusu, zaś 0′ nonjuszu odsunie się o łuk równy długości łuku 1′1 do 0^0 limbusu. Ponieważ zero nonjuszu uważamy za indeks, przeto odczyt, odpowiadający danemu położeniu indeksu, będzie równym 0^0 z limbusu + łuk 00′, który równa się łukowi 1′1 z poprzedniego rysunku.



Rys. 240.



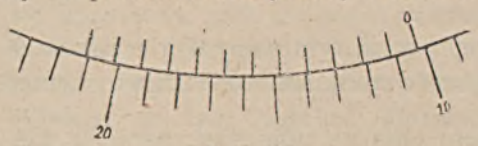
Rys. 241.

Jeżeli od 1-go położenią odwrócimy alhidadę w kierunku lewym w ten sposób, że, np., 5′ kreska nonjuszu znajdzie się na przedłużeniu 5 kreski limbusu, to, ponieważ limbus i nonjusz są podzielone na równe części, więc (rys. 240):

$$2' - 2 = 2\,(1'1)$$
$$3' - 3 = 3\,(1'1)$$
$$4' - 4 = 4\,(1'1)$$ it.d., zaś o rys. 241-ym

*) Właściwym terminem jest wernjer, gdyż idea i wykonanie należy do Pierre Vernier.

powiedzieć można, iż zero nonjuszu odsunęło się w prawo od najbliższej lewej kreski limbusu o łuk równy 5 (1'1). Oznaczając różnicę między długościami działek limbusu i nonjuszu, t. j. dokładność nonjuszu, przez t otrzymujemy bardzo prostą regułę dla korzystania z nonjuszu zwykłego: odczyt równa się mniejszej co do wielkości numeru kresce limbusu, z tych dwu kresek, pomiędzy ktoremi znajduje się zero nonjuszu, więcej dokładność nonjuszu, mnożona przez numer kolejny tej kreski nonjuszu, która znalazła się na przedłużeniu jednej z kresek limbusu.



Rys. 242.

Limbus jest dzielony na stopnie i części: 30' lub 20', a nawet 10'-we, przytem co 5° lub 10° mamy na limbusie odpowiedni napis; z liczby drzediałów, zawartych w 10°, określimy długość podziałki limbusu; tak więc odczytem dla rys. Nr 242 będzie $10' + 3\,t$, ponieważ 3-a kreska nonjuszu przedłuża jedną z kresek limbusu.

Określmy dokładność nonjuszu. Oznaczmy długość podziałki limbusu przez l, nonjuszu przez n; po zestawieniu zera nonjuszu z jedną z kresek limbusu okaże się, że w długości nonjuszu zawiera się m podziałek limbusu i $m \pm 1$ działek nonjuszu (+ dla nonjuszu zwykłego, — dla wstecznego).

Długość nonjuszu w podziałkach limbusu wynosi lm; zaś w podziałkach nonjuszu wyniesie:

dla nonjuszu zwykłego $n\,(m+1)$	dla nonjuszu wstecznego $n\,(m-1)$
stąd	
$lm = n\,(m+1)$	$lm = n\,(m-1)$
$m\,(l-n) = n$	$m\,(l-n) = -n$
$t = l - n = \frac{n}{m}$	$t = l - n = -\frac{n}{m}$
lecz:	lecz:
$n = \frac{lm}{m+1}$	$n = \frac{lm}{m-1}$
$t = \frac{lm}{(m+1)\,m} = \frac{l}{m+1};$	więc $t = -\frac{lm}{(m-1)\,m} = -\frac{l}{m-1};$

Stąd wynika, że bezwzględna dokładność nonjuszu równa się wartości kątowej jednej podziałki limbusu, podzielonej przez liczbę podziałek nonjuszu. Przypuśćmy, że limbus ma kreski co $\frac{1}{2}°$; nonjusz jest podzielony na 15 części; dokładnością nonjuszu jest $t = \frac{30'}{15} = 2'$

Często, dla uproszczenia rachunku, kreski nonjuszu mają opis co 5-ą lub 10-ą kreskę; tak więc dla 2'-owego nonjuszu piąta kreska ma u góry napis 10', dziesiąta 20' i t. p.

Wzór $t = \frac{l}{m+1}$ wskazuje, w jaki sposób możemy skonstruować

nonjusz o danej dokładności; założymy, że mamy nonjusz 1'-owy przy limbusie, podzielonym co 30'; określimy $m + 1 = \frac{l}{t} = \frac{30'}{1'} = 30$, skąd $m = 29$.

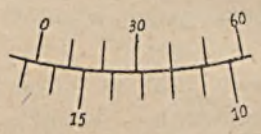
A więc długość danego nonjuszu zwykłego równa jest 29 podziałkom limbusu; ponieważ zaś nonjusz ma być zwykły, przeto ta długość na nonjuszu dzieli się na $(29 + 1) = 30$ części.

Najczęściej spotykanym typem nonjuszu jest nonjusz zwykły, nonjusze wsteczne rzadko są stosowane.

Nonjusze zwykłe mają podział, rosnący w tym samym kierunku, co i numeracja na limbusie; ponieważ dokładność nonjuszu wstecznego wynosi $t = -\frac{l}{m-1}$, t. j. jest liczbą ujemną, przeto opis na nonjuszu rośnie w kierunku odwrotnym do opisu na limbusie. Użycie nonjuszu wstecznego przy takim jego opisie polega na odczytaniu mniejszej z tych kresek limbusu, pomiędzy któremi znalazło się zero nonjuszu i na dodaniu iloczynu z numeru kreski nonjuszu, będącej przedłużeniem jednej z kresek limbusu, — przez dokładność nonjuszu.



Rys. 243.



Rys. 244.

Rysunek 243 przedstawia nonjusz wsteczny: limbus jest podzielony co 1^0; siedmiu działkom limbusu odpowiada 6 nonjuszu; dokładność nonjuszu wynosi $t = \frac{1^0}{6} = 10'$; na rys. № 244 wskazane jest położenie alhidady, przy którem odczyt wynosi $16^0 + 4.10' = 16^0 40'$.

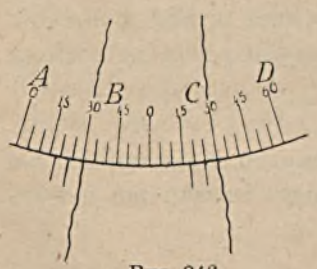
Wsteczne nonjusze stosowane są, np. na podziałkach przy barometrach rtęciowych; rysunek 245 przedstawia nonjusz, którego 10 części odpowiada 11 częściom podziałki milimetrowej; dokładność nonjuszu $t = \frac{1\ mm.}{10} = 0{,}1\ mm.$, odczyt więc wynosi:

$$59{,}7\ cm. + 5 \times 0.1\ mm. = 59{,}75\ cm.$$



Rys. 245

Używane są nonjusze, mające zero w środku; budowa takiego nonjuszu polega na następującem rozumowaniu: zbudujmy na łuku dwa nonjusze, w których początkiem II-ego nonjuszu jest koniec I-go; odległość między temi samemi kreskami obydwu nonjuszów równa się, oczywiście, długości nonjuszu; a więc te same kreski obydwu nonjuszów ustawiają się w tych samych częściach przedziałów między najbliższemi kreskami limbusu i te same kreski każdego nonjuszu są przedłużeniami dwu kresek limbusu, odległych od siebie o długość nonjuszu. Jeżeli więc odrzucimy części A i D I-ego i II-go nonjuszu (rys. 246), to część B I-ego zastąpi



Rys. 246.

taką samą odrzuconą część D drugiego nonjuszu i otrzymamy jeden nonjusz BC z zerem już to w środku, gdy odrzucamy $^1/_2$ każdego nonjuszu, już to w $^1/_4$ lub $^3/_4$ nonjuszu, zależnie od tego, czy odrzucamy $^3/_4$, czy $^1/_4$ I-go nonjuszu. Odczyt składa się z odczytu przy zerze nonjuszu, więcej dokładność nonjuszu, mnożona przez liczbę kresek w prawo od zera do kreski, będącej przedłużeniem kreski limbusu. Jeżeli zaś w prawo od zera takie kreski na nonjuszu nie będzie, to liczymy kolejno dalej w prawo od lewego końca nonjuszu, będącej przedłużeniem kreski limbusu. Odczyt znakomicie się upraszcza, gdy w opisie podziału nonjusza uwzględniona jest jego dokładność i gdy ten opis idzie w jednym kierunku od zera, przeskakując od końca podziału nonjuszu znów do początku z innej strony zera i dalej postępując w tym samym kierunku do końca.



Rys. 247.

Odczyt na rysunku Nr. 247 wynosi 68° 15′.

Ze wzoru $t = \frac{l}{m+1}$ dla zwykłego nonjuszu wynika, że wielkość t przy danym podziale na limbusie może być nawet bardzo małą przy odpowiednio wielkiem m. Tak np., przy $l = 20' = 1200''$, przy $m = 599$, otrzymamy $t = 2''$. W praktyce taki nonjusz nie mógłby być stosowany ze względu na to, że, przy kryciu się zera nonjuszu z dowolną kreską limbusu pierwsza kreska nonjuszu odsunięta byłaby od następnej kreski na limbusie licząc od kreski przy 0 nonjuszu) o 2″, t. j. $\frac{2}{360.60.60} = \frac{1}{648000}$ obwodu imbusu, co przy 10-centymetrowym promieniu limbusu wynosi około $\frac{1}{1000}$ *mm*, czyli o wielkość, nie dającą się oszacować, a ponieważ zupełnie wyraźnie możemy odróżniać odcinki 0,03 *mm*., więc kilkanaście kresek nonjuszu równie dobrze mogłoby się nam wydawać przedłużeniem danej kreski limbusu, jak i każda z nich. Z tego względu najbardziej dokładne nonjusze są 10″-owe (5″-owe spotykamy bardzo rzadko) i to w teodolitach o większych limbusach (dużych średnicach).

W kątomierzach mamy najczęściej do czynienia z nonjuszami o dokładności 1′, 30″, 20″ i 10″.

Zwykle na obydwu końcach nonjuszu mamy po jednej dodatkowej kresce, która służy do sprawdzania dokładności podziału.

§ 88. Sprawdzenie gonjometru.

Gonjometr powinien odpowiadać następującym warunkom:

1) podział limbusu winien być prawidłowy;
2) podział nonjuszu winien być prawidłowy;
3) płaszczyzny kolimacyjne alhidady powinny być ⊥-e do płaszczyzny limbusu;
4) płaszczyzny kolimacyjne limbusu i alhidady powinny leżeć w jednej płaszczyźnie przy połączeniu zer limbusu i nonjuszu

5) alhidada powinna być centrycznie osadzona na limbusie; pominięcie tego warunku powoduje błąd ekscentryczności alhidady;

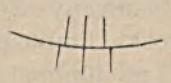
6) busola na gonjometrze powinna odpowiadać wymaganiom, stawianym busoli (patrz dział o busolach § 74).

I. Sprawdzenia podziału na limbusie dokonywamy zapomocą nonjuszu; przypuśćmy, że 29°-om limbusu odpowiada długość nonjuszu.

Przez obrót alhidady sprowadzamy kolejno zero nonjuszu na poszczególne kreski limbusu i sprawdzamy, czy koniec nonjuszu w każdem jego położeniu jest odległy od zera nonjuszu o 29° na limbusie, t. j. o nominalną długość nonjuszu.

W taki sposób możemy wykryć grubsze błędy podziału na limbusie, przesuwając co 1° zero nonjuszu

II. Aby sprawdzić podział nonjuszu, zestawiamy kolejno każdą kreskę nonjuszu z tą samą kreską limbusu; przy takiem zestawieniu określimy, czy dwie sąsiednie (w stosunku do badanej) kreski nonjuszu ustawiają się do niej w jednakowej odległości, co szacujemy na oko zapomocą dwu sąsiednich kresek na limbusie (rys. 248).



Rys. 248.

III. Prostopadłość płaszczyzn kolimacyjnych do płaszczyzny limbusu sprawdzić możemy po spoziomowaniu płaszczyzny limbusu zapomocą takiego ustawienia gonjometru, aby przedłużenie górnej płaszczyzny gonjometru przechodziło przez widnokrąg; poza tem igła magnetyczna wskaże, czy jej końce leżą w poziomie limbusu busoli. Po sprowadzeniu w ten sposób gonjometru do poziomu, zawieszamy w odległości 10 metrów od gonjometru pion, którego ciężarek może być zawieszony w wiadrze w wodą, a to celem szybszego uspokojenia pionu. Kierując kolejno każdą z płaszczyzn przezierników na pion, przesuwamy oko wzdłuż przeziernika ocznego, obserwując, czy włosień przedmiotowy nie odchyla się od pionu. Gdy przy przesuwaniu oka stwierdzimy, że włosień przeziernika przedmiotowego kryje stale pion — warunek jest zachowany.

IV. Dla sprawdzenia czy przy połączeniu zer nonjuszu i limbusu, płaszczyzny kolimacyjne limbusu i alhidady przedłużają się wzajemnie, należy po połączeniu zer obserwować jakikolwiek odległy punkt za pośrednictwem płaszczyzny kolimacyjnej alhidady. Jeżeli ten punkt leży w tej płaszczyźnie, to powinien leżeć i w płaszczyźnie kolimacyjnej limbusu, co łatwo sprawdzić, umieszczając oko przy szparze przeziernika ocznego dolnego walca gonjometru i obserwując, czy włosień przeziernika przedmiotowego kryje, lnb nie, ten sam punkt.

V. Centryczne osadzenie alhidady na limbusie sprawdzimy wówczas, gdy mamy dwa nonjusze, odległe o 180°. Jeżeli w kilku położeniach alhidady na obwodzie limbusu odczyty z obydwu nonjuszów nigdzie nie różnią się więcej, niż o dwukrotną dokładność nonjuszu plus 180°, to twierdzić można, że osadzenie alhidady na limbusie jest dostatecznie dokładne. Uzasadnienie tego i dalsze rozwinięcie zniewala zająć się bardziej szczegółowo ekscentrycznością alhidady.

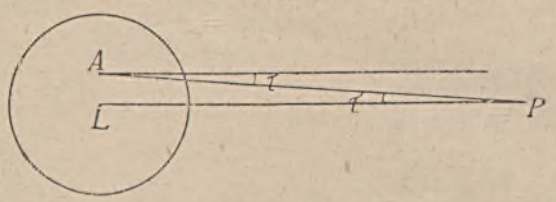
§ 89. Ekscentryczność alhidady.

Rozpatrzymy ekscentryczność alhidady w przyrządach, zwykle stosowanych, a więc zaopatrzonych w dwa nonjusze, odległe od siebie o 180° na obwodzie limbusu.

Stwierdzimy przedewszystkiem, że średnia odczytów na obydwu nonjuszach, przy alhidadzie, mimośrodkowo osadzonej w stosunku do limbusu, daje ten sam wynik, jaki otrzymalibyśmy dla takiego samego położenia płaszczyzny kolimacyjnej przy właściwem osadzeniu alhidady.

Ponieważ kątomierze służą do pomiaru kątów między kierunkami na punkty, odległe zwykle o kilkadziesiąt i więcej metrów od wierzchołka kąta, przeto stwierdzimy przedewszystkiem, że możemy przyjąć kierunki, idące ze środka alhidady i limbusu do obserwowanego punktu, za równoległe.

W najgorzej wykonanych przyrządach odległość środka alhidady od środka limbusu nie przekracza części *mm*.



Rys. 249.

Przypuśćmy, że kątomierz ustawiony jest środkiem limbusu w punkcie L i obserwacji podlega taki punkt P że środek alhidady A jest najbardziej odległy od kierunku LP; nastąpi to przy takiem położeniu alhidady, gdy $AL \perp LP$; wówczas kierunek AP utworzy z LP największy z kątów; które mogą być zawarte między kierunkami z A i L do P przy wszelkich położeniach alhidady i limbusu. Biorąc kierunek AP zamiast LP, popełniamy błąd τ, wskutek którego celowa LP przechodzi do położenia AP. Gdy odcinek AL, t. j. t. zw. linjowy mimośród, oznaczymy przez m, zaś LP przez D,

wówczas

$$tg\ \tau = \frac{AL}{LP} = \frac{m}{D};$$ ponieważ kąt τ jest niewielki

przeto

$$tg\tau = \sin\tau = \tau \sin 1''$$

więc

$$\tau = \frac{m}{D \sin 1''}$$

nawet przy

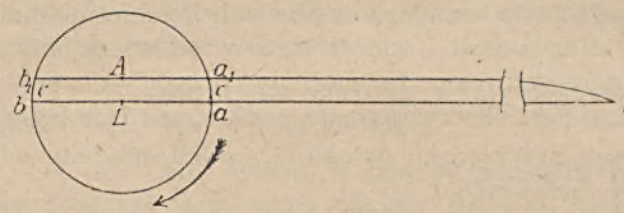
$$m = 1{,}0\ mm \text{ i } D = 20\ mtr.$$

$$\tau = \frac{1{,}0}{20000}\ 206265 = 10''$$

Ponieważ zaś przy krótkich bokach zwykle mierzy[illegible] kąty gonjometrem z dokładnością do 2′, przeto błąd $\tau = 10''$ uw[illegible]my za błąd, nie mający praktycznego znaczenia, a wobec tego nie bę[illegible]iemy go brać następnie zupełnie pod uwagę, t. j. przyjmiemy, że kierunki, [illegible]ane ze środ-

ka alhidady i limbusu do punktów obserwowanych, są do siebie równoległe.

Przypuśćmy, iż przy mimośrodkowo osadzonej alhidadzie celujemy do pewnego punktu; załóżmy dla uproszczenia, że zera nonjuszów znajdują się na przedłużeniu płaszczyzny kolimacyjnej. Oznaczając (rys. 250) przez A i L środki alhidady i limbusu, otrzymamy przy celowaniu do P odczyty z nonjuszów: a_1 i b_1; gdyby płaszczyzna kolimacyjna przechodziła przez środek limbusu, t.j. gdyby nie było ekscentryczności alhidady, otrzymalibyśmy właściwe odczyty a i b. Ponieważ, jak z poprzedniego wynika, kierunki AP i LP są równoległe, przeto łuki $a_1\ a$ i $b_1\ b$ są równe i stąd, oznaczając $a_1\ a = bb_1 = c$, napiszemy dla prawego podziału na limbusie:



Rys. 250.

$$a_1 = a - c$$
$$b_1 = b + c$$

skąd

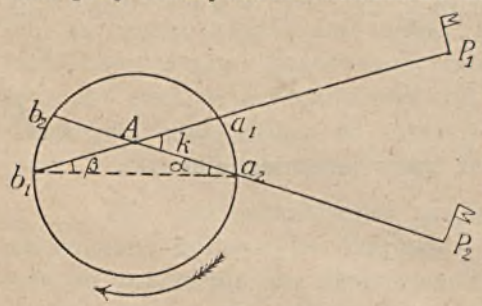
$$a_1 + b_1 = a + b,$$

a więc i

$$\frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{a + b}{2},$$

czyli średnia arytmetyczna odczytów na obydwu nonjuszach usuwa błąd ekscentryczności alhidady, gdyż otrzymujemy taki sam wynik, jakiby zachodził przy centrycznem osadzeniu alhidady.

Przy pomiarze kąta mierzymy dwa kierunki (rys. 251) do punktów P_1 i P_2, odczytując z obydwu nonjuszy przy celowaniu do P_1 — $a_1\ b_1$ i przy celowaniu do P_2 — a_2 i b_2. Połączmy prostą $a_2\ b_1$ punkty, odpowiadające na limbusie odczytom a_2 i b_1. Otrzymamy kąt $\alpha = b_2\ a_2\ b_1$ i $\beta = a_1\ b_1\ a_2$.



Rys. 251.

Mierzony kąt P_1AP_2 = jako ze wnętrzny, jest równym

$$k = \alpha + \beta$$

lecz α i β jako wpisane, mierzą się połową odpowiednich łuków

$$\alpha = \frac{b_1\ b_2}{2} = \frac{b_2 - b_1}{2}$$

$$\beta = \frac{a_1\ a_2}{2} = \frac{a_2 - a_1}{2}$$

stąd

$$k = \frac{b_2 - b_1}{2} + \frac{a_2 - a_1}{2} = \frac{a_2 + b_2}{2} - \frac{a_1 + b_1}{2};$$

t. j. kąt pomierzony równa się różnicy średnich arytmetycznych odczytów na obydwu nonjuszach, odpowiadających celom do każdego punktu.

Każdy z odczytów składa się ze stopni i minut; odczyty a_2 i b_2, jak również a_1 i b_1, na obydwu nonjuszach różnią się o 180° i co najwyżej o trzykrotną dokładność nonjuszu; kątomierzy, dających większe różnice, nie należy używać do pomiaru. Możemy przeto twierdzić, że odczyty na obydwu nonjuszach w stopniach różnią się o 180° i mogą dawać niewielkie różnice w minutach. Jeżeli na poprzednim rysunku odczyty a_2, a_1, b_2, b_1 oznaczymy przez A_2, A_1, B_2, B_1, wówczas każdy z tych odczytów składa się ze stopni (oznaczmy je przez duże litery A_2', A_1', B_2' i B_1') i minut (oznaczmy je przez a_2, a_1, b_2, b_1).

Będzie więc

$$A_2 = A_2' + a_2$$
$$A_1 = A_1' + a_1$$
$$B_2 = B_2' + b_2$$
$$B_1 = B_1' + b_1$$

podstawiając te wielkości do wzoru dla k i pamiętając,

że

$$B_1' = A_1' + 180^0$$
$$B_2' = A_2' + 180^0,$$

otrzymamy

$$k = \frac{A_2 + B_2}{2} - \frac{A_1 + B_1}{2} = \frac{A_2' + a_2 + B_2' + b_2}{2} -$$

$$- \frac{A_1' + a_1 + B_1' + b_1}{2} = \frac{A_2' + a_2 + A_2' + 180 + b_2}{2} -$$

$$- \frac{A_1' + a_1 + A_1' + 180^0 + b_1}{2} = A_2' \frac{a_2 + b_2}{2} - A_1' \frac{a_1 + b_1}{2}$$

Stąd wynika prawidło:

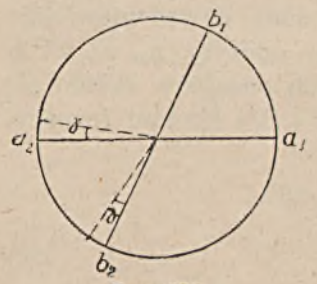
Aby otrzymać wielkość kąta, należy do odczytu stopni z I nonjuszu dodać średnie arytmetyczne minut na każdym nonjuszu dla każdego kierunku i uzyskać różnicę otrzymanych w ten sposób wielkości.

Wyraz $A_2' \frac{a_2 + b_2}{2}$ należy rozumieć jako, np., $130^0 \frac{5' + 7'}{2}$, t. j. 130° 6′

Może zajść zbieg odczytów: I nonjusz 57° 1′ i II nonjusz 59′. Oczywiście II nonjusz daje odczyt 56° 59′, a nie 57° 59′, w tym więc wypadku otrzymujemy średnią w sposób następujący:

$$57^0\,\frac{1' + (59' - 60')}{2} = 57^0 0'$$

Różnice w odczytach z obydwu nonjuszów mogą mieć inną przyczynę, niż ekscentryczność alhidady; może bowiem zajść wypadek, że środek alhidady znajduje się w środku limbusu, natomiast nonjusze nie są osadzone zupełnie ściśle w odległości 180°, mierzonej na obwodzie limbusu. Położenie jednego z nich, np. I-ego, przyjmujemy za dokładne, wówczas drugi nonjusz będzie odchylony od właściwego (średnicowo-przeciwległego) położenia o pewien kąt γ. Błąd ten nie wpływa na wynik pomiaru kątów, gdyż odczyty z drugiego nonjuszu we wszystkich kierunkach są zniekształcone o tę samą wielkość γ, t. j.



Rys. 252.

$$a_2 = a_1 + 180^0 + \gamma$$

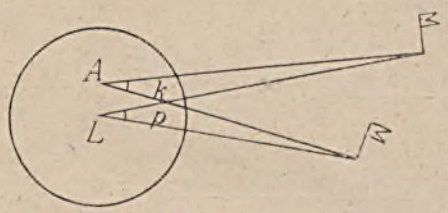
$$b_2 = b_1 + 180^0 + \gamma$$

więc

$$k = \frac{a_1 + a_2}{2} - \frac{b_1 + b_2}{2} = \frac{a_1 + a_1 + 180^0 + \gamma}{2} -$$

$$- \frac{b_1 + b_1 + 180^0 + \gamma}{2} = \frac{a_1 + a_2}{2} - \frac{b_1 + b_2}{2};$$

co znaczy, że wynik pomiaru kąta będzie taki sam, niezależnie od tego, czy się bierze, lub nie, pod uwagę wielkość γ, — i przytem będzie wolny od wpływu τ.



Rys. 253.

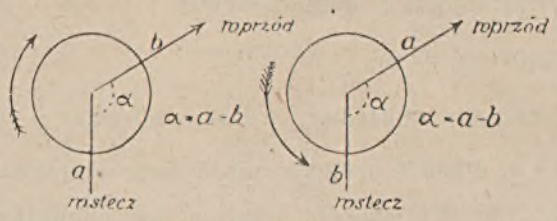
Przy rozpatrywaniu ekscentryczności alhidady określimy kąt k, pod którym widzimy obserwowane ze środka alhidady punkty.

Ponieważ jednak nad wierzchołkiem mierzonego kąta ustawiamy środek limbusu L, przeto obchodzi nas głównie wielkość kąta p i różnica $k—p$. Poprzednio jednak dowiedliśmy już, że kierunki z A i L do poszczególnych punktów różnią się o wielkości niższego w stosunku do dokładności nonjuszu rzędu, a więc to samo dotyczy kątów p i k, jako wielkości, powstałych z różnicy takich kierunków. Wobec tego przyjmujemy, iż $p = k$ ze stopniem dokładności, znacznie przewyższającym dokładność nonjuszu.

§ 90. Pomiar kątów przy pomocy gonjometru.

Ażeby pomierzyć kąt w terenie ustawiamy gonjometr ściśle nad wierzchołkiem danego kąta (nad palem), za pomocą pionu, zawieszonego pod głowicą statywu, sprowadzając jednocześnie gonjometr do poziomu. Gdy wciśniemy wreszcie nóżki statywu w ziemię na tyle mocno, że przyrząd

można uważać za nieruchomy, zaciskamy śrubę tulei i przystępujemy do właściwego pomiaru. Kolejność celowania wzdłuż ramion kąta uzależniona jest od kierunku podziałki na limbusie. Jeżeli, mierząc kąty poligonu, chcemy mieć kąt, leżący z prawej strony kierunku posuwania się wzdłuż poligonu, a podział na limbusie jest prawym, wówczas od celu wstecz odejmujemy cel wprzód; zaś przy podziale lewym od celu wprzód odejmujemy cel wstecz.



Rys. 254.

Ponieważ przy jednokrotnym pomiarze kąta łatwo o gruby błąd (5^0, 10^0, 1^0, 10^0) w odczycie, co da zły wynik, wobec tego każdy kąt mierzymy dwa razy: 1-szy raz, posługując się płaszczyzną kolimacyjną, pprzechodzącą przez zero nonjuszu, drugi raz — płaszczyzną kolimacyjną, prostopadłą do pierwszej.

Dane z pomiaru wnosimy do dziennika pomiaru kątów, notując przy każdym celu obydwa nonjusze.



Rys. 255.

Stanowisko	Cel do punktu	Nonjusze I	Nonjusze II	Średnica	Kąty	Średni kąt
a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
	3	127°42′	40	41		
					101°8′	
	5	26°32	34	33		
4						101°9′,0
	3	37°44′	42′	43		
					101°10′	
	5	296°30′	34′	33		
	4				4 — 5	*NO* $5^1/_4{}^0$
5	6	i t. d.				

Przy pomiarze wnosimy dane pomiaru do kolumn *a b c d*; obliczamy zaś kolumny *e*, *f* i *g*.

Równocześnie z pomiarem kątów notujemy azymuty, lub czwartaki boków, wpisując je (4 — 5 *NO* $5^1/_4{}^0$) do dziennika i kontrolując kąty zgodnie z § 82 z azymutów lub czwartaków. Kontrola z azymutów może się różnić od wyniku pomiaru kąta o 30′ — 45′; większe różnice wskazują na niedokładne notowania azymutów przy pomocy igły magnetycznej.

§ 91. Odchyłka kątowa.

Gdy pomierzymy wszystkie kąty w poligonie zamkniętym i otrzymamy sumę $\sum$ kątów, suma ta nie powinna się zbyt wiele rożnić od sumy teoretycznej kątów wieloboku, która przy n kątach wynosi

$$S = 180^0 \ (n - 2).$$

Pomiar uważamy za dostatecznie dokładny, jeżeli odchyłka $p = \sum - S$ nie przekracza $\pm 3t\sqrt{n}$, gdzie t oznacza dokładność nonjuszu, która w gonjometrze równa się 2'. W ten sposób wzorem na odchyłkę w sumie kątów zamkniętego poligonu jest

$$p \leqslant \pm 6'\sqrt{n}$$

gdzie n jest ilością kątów.

§ 92. Sporządzanie planu na zasadzie pomiaru gonjometrem i taśmą.

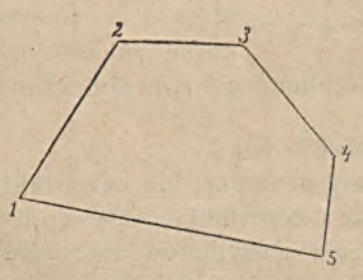
Sporządzanie planu poprzedza rozrzucenie odchyłki kątowej i obliczenie azymutów, oraz czwartaków.

Odchyłkę $p = \Sigma - S$ dzielimy na n kątów danego poligonu i wyniki dodajemy ze znakiem odwrotnym do każdego z kątów, zaokrąglając do 1'; tak np., jeżeli przy 8 kątach mamy 8 minut odchyłki, co nie przekracza odchyłki dopuszczalnej $6'\sqrt{n} = 6'\sqrt{8} = 17'$, to rozrzucamy po 2 na 3 kąty z krótszemi ramionami, pozostałe 2' rozrzucimy na 2 z pozostałych 3 kątów. Taka dowolność jest uzasadniona wskutek tego, że kąty o krótkich bokach mierzą się mniej dokładnie od kątów o bokach dłuższych.

Rozrzucenie odchyłki daje poprawione kąty, z których na zasadzie azymutu magnetycznego jednego z boków, pomierzonego w polu, obliczamy kolejno azymuty następnych boków ze wzoru

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n \pm 180^0 - \alpha$$

gdzie przez α oznaczyliśmy kąt wewnętrzny poligonu, — zaś obliczenie azymutów postępuje w kierunku prawym t. j tak, jak pomiar kątów.



Rys. 256.

Obliczone azymuty dla uniknięcia grubych błędów rachunku, mogących się wzajemnie znieść (+) zestawiamy z czwartakami, pomierzonemi w polu; różnica nie powinna przekraczać 45'. Rachunek kończymy na obliczeniu z ostatniego kąta azymutu tego boku, od którego rozpoczęliśmy rachunek, przytem powinniśmy otrzymać zupełnie identyczny wynik, gdyż kąty zostały uprzednio wyrównane do teoretycznej sumy.

Schemat obliczenia.

NN punktów	Kąty pomierzone	Poprawki	Kąty poprawione	Uwagi
1	60° 3′	+ 1	60° 4′	
2	105° 45′	+ 1	105° 46′	
3	160° 24′	+ 2	160° 26′	azymut 1-2
4	123° 20′	+ 1	123° 21′	45° 30′
5	90° 22′	+ 1	90° 23′	
suma Σ =	539° 54′	suma + 6	540° 0′	
suma teoret. =	540° 0′			
odchyłka =	— 0° 6′			

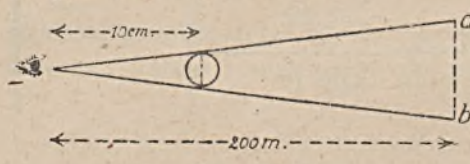
Obliczenie azymutów i czwartaków.

Boki			
1 — 2	45° 30′	*NO*	45° 30′
	+ 180°		
	225° 30′		
	— 105° 46′		
2 — 3	119° 44′	*SO*	60° 16′
	+ 180°		
	299° 44′		
	— 160° 26′		
3 — 4	139° 18′	*SO*	40° 42′
	+ 180°		
	319° 18′		
	— 123° 21′		
4 — 5	195° 57′	*SW*	15° 57′
	+ 180°		
	375° 57′		
	— 90° 23′		
5 — 1	285° 34′	*NW*	74° 26′
	+ 180°		
	465° 34′		
	— 60° 4′		
	405° 30′		
	— 360°		
1 — 2	45° 30′	*NO*	45° 30′

Po obliczeniu azymutów wykreślamy plan z czwartaków przy pomocy przenośnika lub z tablic tangensów, obierając położenie pierwszego punktu na planie tak, aby cała figura mogła się na nim zmieścić.

§ 93. Wady gonjometru jako kątomierza.

Pomiar kątów zapomocą gonjometru nie może dać dokładnych wyników z dwu przyczyn: 1) ustawienie limbusu do poziomu nie jest ścisłe; 2) przezierniki dają niewielką dokładność celu. Mała dokładność w ustawieniu limbusu do poziomu powoduje odchylenie płaszczyzny kolimacyjnej od położenia pionowego, wskutek czego krawędź kąta dwuściennego, utworzonego przez dwa położenia płaszczyzny kolimacyjnej, jest odchylona od pionu i kąt linjowy takiego kąta dwuściennego nie będzie rzutem mierzonego kąta na płaszczyznę poziomą.



Rys. 257.

Poza tem dokładność celu jest niewielka. Przypuśćmy, że średnica włosienia wynosi 0,2 *mm.*, odległość oka od włosienia 10 *cm.* W odległości 200 metrów od gonjometru włosień, przy nieruchomem oku, zakryje przestrzeń o szerokości *ab*, równej

$$ab = 0{,}2\ mm. \cdot \frac{200\ m}{10\ cm} = 0{,}4\ m$$

Ustawienie więc płaszczyzny kolimacyjnej na tyczkę o średnicy 0,03 *m* nie może być dokładnem, chociażby z tego względu, że kąt, pod którym widzimy włosień przez przeziernik oczny, według obliczenia

$$\varphi = \frac{0{,}2\ mm}{10\ cm} \cdot 3438 = 7'$$

wynosi około 7′, czyli błąd samego celu może wynosić kilka minut.

Z tego względu we współczesnych kątomierzach przezierniki są zastąpione przez lunety, zaś do właściwego spoziomowania limbusu używane są libele.

§ 94. Teodolit.

Teodolit jest najdoskonalszym w konstrukcji typem kątomierza.

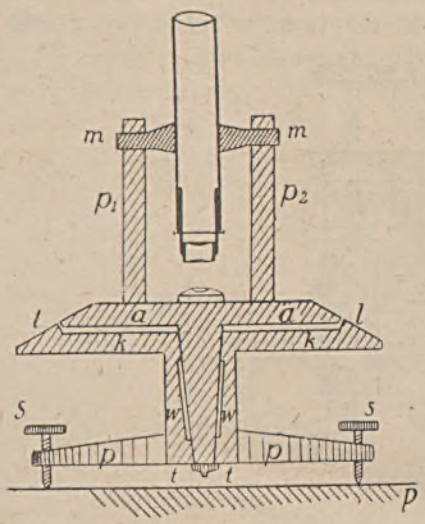
Ściśle mówiąc, służy on do pomiaru kątów poziomych, jakkolwiek, przez wyposażenie teodolitu w części dodatkowe, możemy go zastosować do pomiaru kątów wysokościowych oraz do określania różnic wysokości, a więc do niwelacji. Tak zmodyfikowany teodolit nosi nazwę uniwersalnego teodolitu.

Rozpatrzmy przedewszystkiem najprostszy typ zwykłego teodolitu.

Zwykły teodolit składa się z trzech zasadniczych części: 1) spodarki z limbusem, 2) alhidady, 3) lunety.

Dolna część przyrządu, zwana spodarką, składa się z trójramiennej podstawki z trzema śrubami nastawowemi *S*, przechodzącemi przez każde

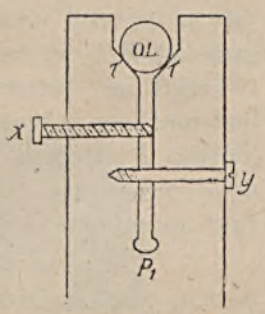
ramię spodarki. Gdy teodolit ustawimy na płaszczyźnie *P*, możemy, wkręcając lub wykręcając śruby nastawowe, zmieniać położenie całego instrumentu w stosunku do płaszczyny *P*. Trójramienna podstawka *pp* przechodzi wyżej w wydrążony stożkowo walec *ww*. W wydrążeniu tem spoczywa stożkowa oś alhidady, przykręcana śrubką *tt*. U góry walec *ww* przechodzi w ścięty stożek *kk*, na obwodzie którego mamy osadzone posrebrzone koło *l* z podziałem na stopnie, zwane *limbusem*.



Rys. 258.

Zwykle trójramienna podstawka *pp*, walec *ww* i ścięty stożek *kk*, t. j. cała spodarka są odlane z jednego metalu.

W stożkowem wydrążeniu walca *ww* osadza się metalowa stożkowa oś *o* alhidady, przechodząca u góry w stożkowo ścięta alhidadę *aa*, spółśrodkową z limbusem. Na jednej ze średnic alhidady mamy centrycznie osadzone nonjusze. Na alhidadzie ustawione są, stale z nią połączone, dwie podstawki p_1 p_2 lunety, zakończone u góry łożyskami, w których układa się, metalową osią obrotu *mm* trwale z nią złączona luneta. Obracając tę oś w łożyskach, tem samem obracamy dokoła osi obrotu lunetę. Luneta powinna być osadzona w teodolicie w ten sposób, aby punkt przecięcia się osi lunety z matematyczną osią obrotu lunety znajdował się na prostopadłej, wystawionej ze środka limbusu do jego płaszczyzny.

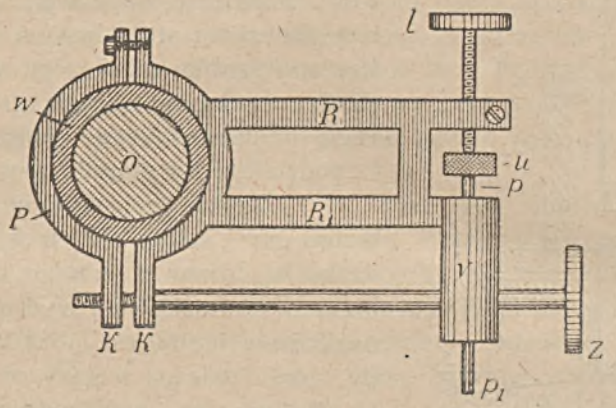


Rys. 259.

(Rys. 259). Podstawka p_1 lunety ma podłużne wycięcie, idące od spodu łożyska osi obrotu lunety wdół. Wycięcie to możemy rozszerzyć, odkręcając śrubkę *y*, lub zwęzić, odkręcając śrubkę *x* i dokręcając *y*. Zwężenie wycięcia podnosi dany koniec osi obrotu lunety, rozszerzenie—opuszcza ten koniec osi. Ponieważ oś obrotu lunety powinna być ∥-ą do płaszczyzny limbusu, aby płaszczyzna kolimacyjna (t. j. płaszczyzna, w której wiruje oś celowa lunety przy obracaniu lunety dokoła jej osi obrotu, gdy oś lunety i oś obrotu są prostopadłe) była ⊥-ą do płaszczyzny limbusu,—śrubki *x* i *y* podstawki p_1 umożliwiają nadanie osi obrotu odpowiedniego położenia.

Dla unieruchomiania alhidady lub lunety w pewnem położeniu korzystamy z tak zwanych śrub zaciskowych; ażeby przesuwać alhidadę lub lunetę od danego położenia o nieznaczny kąt — korzystamy ze śrub mikrometrycznych, zwanych też leniwkami. Spotykamy dwa typy konstrukcji takich śrub — typ pierścieniowy i kleszczowy. Konstrukcja pierścieniowa jest następująca (rys. 260): na tulei *w* spodarki osadzony jest pierścień *P* z ramionami $\mathcal{R}$ $\mathcal{R}_1$. Końce pierścienia *K K* są nieco od siebie oddalone; w ten sposób pierścień może przy pomocy śruby zaciskowej *Z*, przechodzącej przez końce *K K* pierścienia, ściskać walec *w*, lub zwalniać go. Przy zwolnionym zacisku pierścień i ramiona RR_1 mogą obracać się dokoła walca *w*; obrót

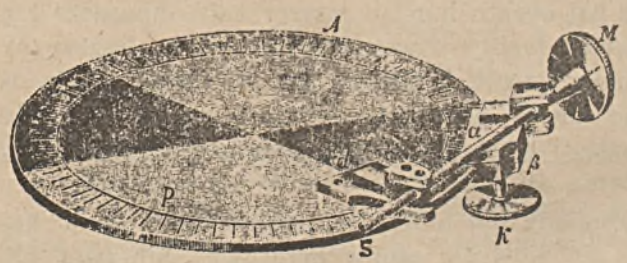
śruby *z* ruch ten przerywa. Z ramieniem R_1 połączony jest stale walec *v*, przez który przechodzi pręcik pp_1, z osadzoną na nim trwale wewnątrz walca *v* płytką *z*. Płytkę tę naciska nawinięta na pręt *pp* sprężynka, wskutek czego pręt *pp* naciska stale na płaski sztyft *u*, przytwierdzony do



Rys. 260.

alhidady. Przez ramię *R* przechodzi śrubka mikrometryczna *l*, zwana leniwką, o koniec której opiera się sztyft *u*. Przy odkręconym zacisku *Z* alhidada może się obracać dokoła osi, pociągając za sobą, za pośrednictwem sztyftu *u*, cały ustrój pierścieniowy. Natomiast po zakręceniu zacisku *Z*, ramiona RR_1 są unieruchomione, gdyż unieruchomiona jest alhidada, a więc i sztyft *u*; przesuwanie alhidady wtedy i złączonego z nią sztyftu *u* jest możliwe jedynie w nieznacznych granicach i to tylko przy działaniu leniwki *l*. Możemy wprawdzie, naciskając ręką na pręcik *pp* w kierunku do *Z*, przesunąć nieco alhidadę (oraz *u*) ku zaciskowi *Z*, lecz po odsunięciu ręki sprężynka odepchnie sztyft *u* aż do zetknięcia się z końcem leniwki *l*.

Walec *v* wewnątrz napełniony jest oliwą, która, gęstniejąc w czasie mrozu, osłabia działanie sprężyny, wskutek czego, przy wykręcaniu śruby *l*, sztyft *u* nie posuwa się za śrubą, a pozostaje na miejscu. Wówczas należy nacisnąć wystający koniec p_1 pręcika lub odręcznie przesunąć nieco alhidadę. Biorąc pod uwagę takie działanie sprężyny, przesunięcie mikrometryczne alhidady zawsze kończymy wkręceniem śruby *l*, a nie wykręcaniem.



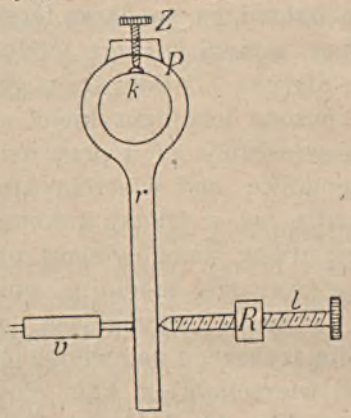
Rys. 261.

Konstrukcję kleszczową śruby mikrometrycznej spotkać możemy w teodolitach przestarzałych, w których koło alhidady jest osadzone wewnątrz koła limbusowego, czyli podziały limbusu i nonjuszu są wniesione nie na boczne powierzchnie ściętych stożków, a na płaszczyzny.

(Rysunek 261). Zakręcając zacisk *K*, ściskamy koło limbusowe, wskutek czego unieruchomimy cały ustrój kleszczowy, a wraz

z nim i alhidadę P za pośrednictwem płytki d. Obracając kółko u leniwki, powodujemy mikrometryczne przesunięcie płytki d, a więc i alhidady, gdyż śruba s przechodzi przez naśrubek płytki d. Działanie ustroju kleszczowego jest mniej dokładne, niż ustroju pierścieniowego.

(Rys. 262): Będziemy mogli łatwo przedstawić sobie działanie leniwki lunety, jeżeli dodamy, że oś obrotu lunety k przechodzi przez pierścień P, zakończony u dołu długiem ramieniem r, grającem rolę sztyfta u w ustroju pierścieniowym alhidady. Zacisk z przy dokręceniu sprzęga oś obrotu lunety z pierścieniem i odtąd obrót osi jest możliwy tylko przy równoczesnym obrocie pierścienia, spowodowanym przez obrót leniwki l i działanie sprężynki wewnątrz walca v. Dodać jeszcze należy, że śrubka l przechodzi przez ramię R, połączone trwale z podstawką lunety. Tak samo połączony jest z tą podstawką walec v.



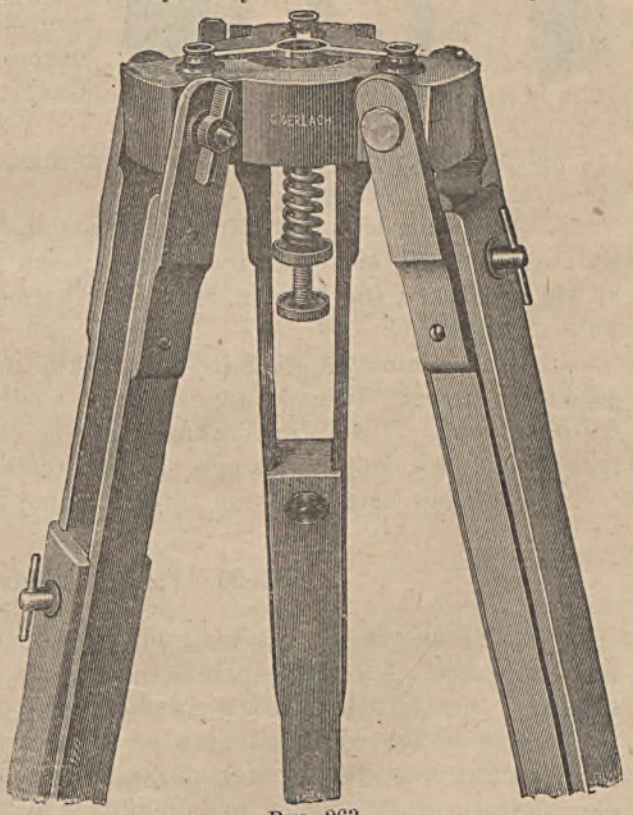
Rys. 262.

Śruba zaciskowa z, przy jej dokręceniu, naciska na oś obrotu k lunety nie bezpośrednio, lecz za pośrednictwem guziczka o kulistej powierzchni w styku z osią obrotu; promień tej powierzchni odpowiada promieniowi przekroju osi w styku. Na alhidadzie, prócz dwu nonjuszów, mamy jedną, albo dwie libele, wzajemnie prostopadłe, służące do poziomowania teodolitu. Jedna z nich często bywa umieszczona na podstawie lunety.

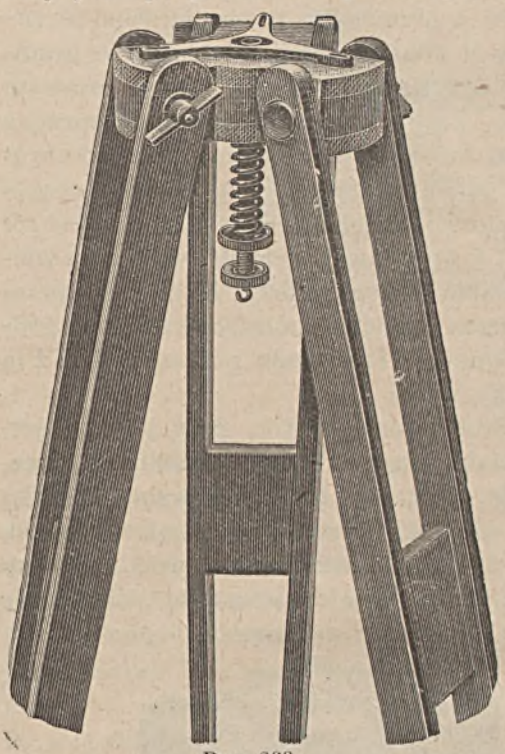
Co się tyczy materjału, z którego sporządzona jest stożkowo ścięta oś alhidady, należy zauważyć, że na oś obiera się materjał twardszy, niż dla tulei walca spodarki; zwykle oś alhidady jest stalowa.

§ 95. Statywy.

Teodolit przy pomiarach ustawia się na statywie, składającym się z głowicy i 3 nóżek. Na rys. 263 widzimy francuski statyw z rozsuwanemi nóżkami, na rys. 263a — zwykły statyw. Nóżki sprzęgają się z ramionami głowicy śrubami zaciskowemi. Do unieruchomiania teodolitu na statywie służy śruba dolna spodarki teodo-


Rys. 263.

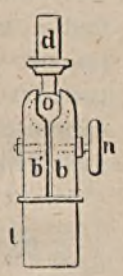
litu, zapomocą której sprzęgamy teodolit z głowicą. Na śrubę sprzęgającą nawinięta jest sprężyna, którą przyciskamy do głowicy, nakręcając górny krążek śruby. Dolny krążek służy do nakręcania śruby sprzęgającej głowicy na śrubę dolną teodolitu. Gdy śruba sprzęgająca głowicy jest połączona ze spodarką teodolitu i gdy wtedy dokręcimy górny krążek, wówczas sprężyna wywiera nacisk ku dołowi na spodarkę teodolitu, a tem samem sprzęga teodolit z głowicą statywu. U dołu śruba głowicy zakończona jest haczykiem, na którym zawieszamy pion przy ustawianiu teodolitu nad wierzchołkiem kąta. Głowica ma w środku kilkocentymetrowy otwór, umożliwiający nieznaczne przesuwanie teodolitu, połączonego ze śrubą sprzęgającą, po głowicy, dla szybszego ustawienia teodolitu nad wierzchołkiem kąta. Połączenia teodolitu ze statywem dokonywać należy w następującej kolejności: zapomocą dolnego krążka nakręcamy śrubę sprzęgającą na dolną śrubę teodolitu, poczem przez nakręcanie górnego krążka podnosimy sprężynę do głowicy i przyciskamy ją mocno do głowicy przez obrót tego krążka.



Rys. 263a.

Statyw powinien być tak mocno wciśnięty w ziemię, by przy niezbyt silnem naciśnięciu pozostał nieruchomy.

W najbardziej prymitywnych kątomierzach, obecnie rzadko stosowanych, spodarką był t. zw. orzech (rys. 264), składający się z czopa *d* (na którym osadza się kątomierz), zakończonego kulą metalową *O*.



Rys. 264.

Kula metalowa wchodzi w łożysko; przy pomocy śruby *n* ściskamy orzech dwiema odpowiednio wydrążonemi połówkami *b* i *b'* łożyska. U dołu spodarka ta kończy się tuleją *l*, osadzoną na czopie t. zw. trójgraniastego statywu (patrz rys. 205 a).

Teodolit ustawiamy na trzyramiennej płytce metalowej głowicy.

§ 96. Przyrządy optyczne.

W praktyce geodezyjnej, przy obserwacjach, oddawna już zwrócono uwagę na fakt, że użycie przezierników nie daje dostatecznie ścisłych wyników, a to z następujących względów: ilość promieni, przechodzących przez przeziernik oczny, jest mniejsza od ilości promieni, które wpadają do oka nieosłoniętego, wskutek czego obraz przedmiotu jest mniej jasny; następnie, oko, patrząc przez włosień przedmiotowy na obserwowany przedmiot, zesta-

wia niejednakowo wyraźne obrazy włosienia i przedmiotu, co się odbija na dokładności celu; przy odległych przedmiotach włosień zasłania całkowicie przedmiot, tak że o dokładnem celowaniu niema mowy.

Z powyższych względów przezierniki obecnie nie są stosowane i funkcje przezierników pełnią lunety.

Ponieważ jednak w praktyce mamy do czynienia z obserwacją nietylko odległych, ale i bardzo bliskich przedmiotów, przeto w przyrządach geodezyjnych często są stosowane lupy, lub dla dokładniejszych obserwacyj mikroskopy.

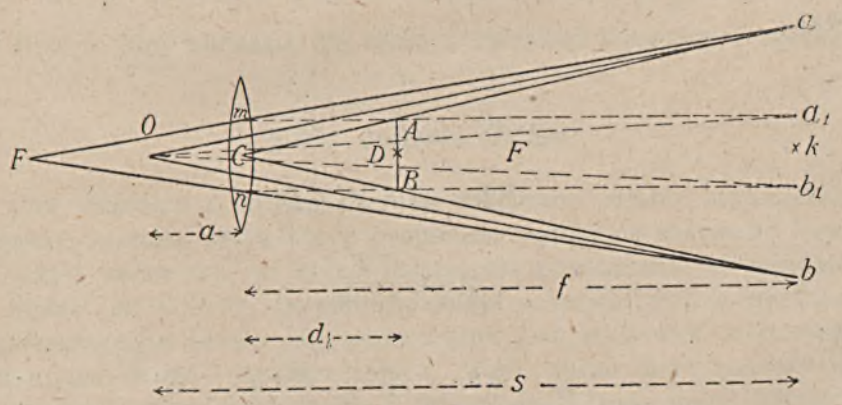
§ 97. Lupa.

Zbliżenie przedmiotu do oka więcej, niż na odległość wyraźnego widzenia, dzięki ograniczonej akomodacji oka chybia celu, gdyż zbyt bliskich przedmiotów nie widzimy wyraźnie. Dla normalnego oka odległość najlepszego widzenia wynosi około 25 *cm*. Dla każdego oka istnieje pewne minimum odległości, t. zw. punktu bliskiego, na którym możemy jeszcze skupić spojrzenie.

Aby widzieć przedmioty bardzo bliskie stosujemy lupy, które w swej najprostszej postaci są soczewkami. Lupę umieszczamy pomiędzy okiem a przedmiotem.

Określimy powiększenie lupy, t. j. stosunek kąta widzenia przedmiotu, obserwowanego przez lupę, do kąta widzenia pod którym oko widzi bezpośrednio przedmiot z odległości najlepszego widzenia.

Wiadomo z optyki, że dla otrzymania, przez lupę urojonego obrazu prostego i powiększonego należy lupę ustawić w takiej odległości od przedmiotu, aby ta odległość była nie mniesza od odległości ogniskowej lupy.



Rys. 265.

Przypuśćmy, że ogniskiem głównem soczewki jest punkt *F*; oko umieszczone jest w takim punkcie *O*, dla którego odległość *C O* od środka *C* soczewki jest mniejsza od odległości ogniskowej *F C* soczewki; podobnie ustawiony jest przedmiot *A B*, którego obraz prosty i powiększony znajduje się w *a b*. Oko widzi przez lupę obraz pod kątem *a O b*; *a b* jest w odległości najlepszego widzenia, tak też należy ustawić dla oka lupę.

Gdyby lupy nie było, wtedy, przy umiejscowieniu oka w punkcie O musielibyśmy oddalić przedmiot na odległość najlepszego widzenia, t. j do położenia $a_1\ b_1$ i wówczas dany przedmiot widzielibyśmy pod kątem $a_1\ Ob_1$.

Powiększeniem P lupy nazywamy stosunek kątów, pod któremi widzimy przedmiot przez lupę i bez niej na odległości najlepszego widzenia, t. j.

$$P = \frac{\sphericalangle\ a\ O\ b}{\sphericalangle\ a_1\ O\ b_1}$$

Dla niewielkich kątów, stosunek kątów możemy przyrównać do stosunku ich tangensów

$$P = \frac{tg\ a\ O\ b}{tg\ a_1\ O\ b_1}$$

lecz powyższy stosunek możemy zastąpić przez

$$P = \frac{a\ b}{a_1 b_1} = \frac{a\ b}{AB};$$

z podobieństwa $\triangleleft$-ów $a\ C\ b$ i $A\ B\ C$, zakładając, że $C\ D = d$ i $C\ K = f$, otrzymujemy

$$\frac{a\ b}{AB} = \frac{f}{d}$$

ponieważ zaś dla obrazów urojonych mamy równanie dla ogniskowej F soczewki:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

skąd

$$F f - d F = d f$$

więc

$$d = \frac{f F}{f + F}$$

przeto

$$P = \frac{a\ b}{AB} = \frac{f}{d} = \frac{F + f}{F};$$

lecz, przyjmując odległość od oka do obrazu za $O\ k = s$ i odległość oka od lupy za $O\ C = a$, otrzymamy $f = s - a$

skąd

$$P = \frac{F + s - a}{F} = \frac{s}{F} + 1 - \frac{a}{F};$$

Jak stąd widzimy, dla danej lupy (a więc danego F) powiększenie zależy od odległości oka od obrazu i lupy.

$$\text{Przy } a = o \qquad P \max = \frac{s}{F} + 1$$

$$\text{przy } a = F \qquad P \min = \frac{s}{F}$$

Aby powiększenie lupy było stałem, należy ustalić a, t. j. odległość od oka do lupy, gdyż dla danego oka przy tym samym przedmiocie i S będzie stałem. Jednak dla oka krótko i dalekowidza powiększenie tej samej lupy będzie innem, niż dla oka normalnego. Największe powiększenie uzyskuje dalekowidz, gdyż

dla oka dalekowidza, S więc i $P > S$ więc i P normalnego;

dla oka normalnego: S oraz $P > S$ a więc i P krótkowidza.

Co się tyczy soczewek, to ta soczewka daje większe powiększenie, której ogniskowa F jest mniejsza; jednak przy zbyt małych ogniskowych promienie krzywizn również są zbyt małe, a przez taką małą lupę możemy obserwować tylko niewielkie przedmioty.

Za przybliżony wzór dla powiększenia lupy obieramy albo

$$P = \frac{S}{F} + \frac{1}{2}$$

albo też wprost

$$P = \frac{S}{F}$$

Ręczne lupy składają się tylko z soczewki i oprawy z rączką.

§ 98. Soczewki złożone.

Jak wiadomo z optyki, aberacja sferyczna osłabia się znacznie przez zmniejszenie otworu, przez który promienie padają na soczewkę, oraz przez użycie takiej soczewki, w której promienie powierzchni sferycznych mają się do siebie, jak 1 do 6; podobnie działają soczewki płasko-wypukłe. Aberacja chromatyczna usuwa się przez układ dwu soczewek, z których jedna jest zbierająca, druga — rozpraszająca. Taki układ nosi nazwę soczewki achromatycznej, gdyż biały promień, po rozszczepieniu przez soczewki, wychodzi z nich w postaci pęku równoległych promieni, a więc jako promień biały.

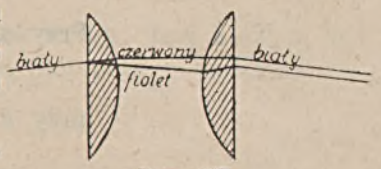


Rys. 266.

Soczewka achromatyczna składa się: 1) z dwu przylegających do siebie soczewek, z których zbierająca, zwrócona do przedmiotu, jest wykonana z kronglasu, a druga— rozpraszająca — z flintglasu; jeżeli promienie soczewek są tak dobrane, że jednocześnie usuwa się i aberacja sferyczna, wówczas taka złożona soczewka nosi nazwę *apla-*

natycznej; — albo 2) z dwu rozsuniętych zbierających soczewek, zrobionych z tego samego szkła. Układ taki, gdy usuwa i sferyczną aberację, nazywa się *dialitycznym*.

Układ aplanatyczny soczewek powiększa ogniskową F, a więc daje małe powiększenie; układ zaś dialityczny zmniejsza ogniskową, co dodatnio wpływa na powiększenie lupy.



Rys. 267.

Jeżeli promienie idą od punktu, położonego daleko od osi soczewki, to po załamaniu schodzą się w dwu krótkich prawie prostopadłych odcinkach, zamiast w jednym punkcie, powodując niejasność obrazu; zjawisko to nosi nazwę *astygmatyzmu*. W celu usunięcia tego zjawiska zatrzymujemy boczne promienie przez zasłony nieprzezroczyste, zwane *diafragmami*, posiadające okrągły otwór, którego środek leży na osi soczewki; jeżeli mamy diafragmę w układzie dialitycznym między soczewkami i soczewka, zwrócona ku oku jest aplanatyczna, wówczas taki układ soczewek nazywamy *ortoskopowym*; układ ten usuwa astygmatyzm, o ile powierzchnie graniczne soczewki aplanatycznej są ściśle kuliste.

§ 99. Lupa Wilsona.

Używana jest przy nonjuszach kątomierzy; w tej lupie odległość soczewki od oka $a = F$, więc powiększenie

$$P = \frac{S}{F},$$

przy $S = 25$ *cm* (dla normalnego oka) i $F = 5$ *cm*, $P = 5$.

Lupa znajduje się w rurce metalowej *ww*, wyczernionej wewnątrz sadzą, która pochłania boczne promienie; w środku rurki znajduje się diafragma *b b*; właściwa lupa *c c* jest umieszczona w końcu rurki, zwróconej ku nonjuszowi; w drugim zaś końcu znajduje się otwór *a a* dla oka. Z alhidadą połączone jest ruchome ramię P, zakończone rurką K, wewnątrz której możemy przesuwać lupę, zbliżając ją lub oddalając od nonjuszu. Przez obrót ramienia P dokoła środka alhidady możemy lupę przesuwać nad nonjuszem równolegle do niego.


Rys. 268 a.



Rys. 268 b.

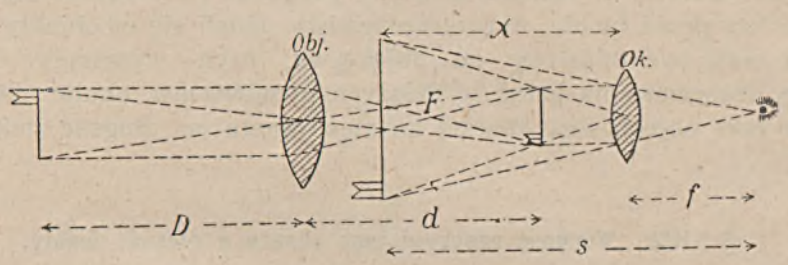
§ 100. Luneta Keplera.

W przyrządach geodezyjnych używane są lunety astronomiczne, dające obrazy odwrotne; lunety te są dioptrycznemi, t. j. składają się ze szkieł sferycznych. Najczęściej stosowanym typem jest luneta Keplera, wynaleziona w roku 1611.

Luneta Keplera składa się z dwu soczewek, z których pierwsza wysunięta ku przedmiotowi, zwana objektywem, daje obraz rzeczywisty odwrócony, zaś druga, grająca rolę lupy, powiększa powstały obraz. Druga soczewka nazywa się okularem; przy niej ustawia się oko obserwatora przy obserwacjach.

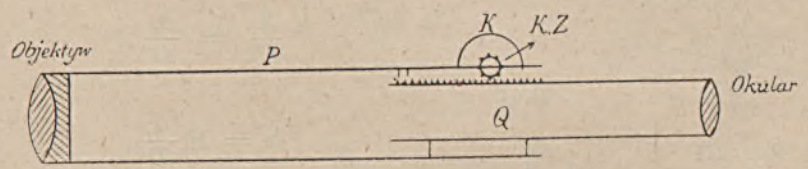
Ogniskowa objektywu jest znacznie większa od ogniskowej okularu; pierwsza waha się od 12 *cm.* wzwyż, druga wynosi jeden do trzech *cm.*

Przebieg promieni od przedmiotu do oka przez lunetę przedstawiony jest na rys. Nr. 269.



Rys. 269.

Przekrój lunety daje szczegóły konstrukcyjne (rys. Nr. 270).



Rys. 270.

Objektyw osadzony jest w rurce *P*, okular w rurce okularu *Q* Rurka okularu przesuwa się wewnątrz rurki objektywu przy pomocy kółka zębatego *K Z*, wprawianego w ruch przez obrót kółka kremoljery *K* Obracając kółko kremoljery, wysuwamy lub wsuwamy wyciąg (rurkę) okularowy w rurce objektywu, gdyż zęby kółka przesuwają tryby zazębionej płytki, przykręconej do rurki okularu. Wnętrze rurki jest wyczernione sadzą dla pochłaniania promieni bocznych.

§ 101. Przesuwanie okularu.

Jeżeli przez *D* oznaczymy odległość przedmiotu od objektywu, zaś przez *d* odległość obrazu rzeczywistego od środka objektywu, wreszcie przez *F* ogniskową objektywu, wówczas, jak wiemy z optyki, zależność między temi wielkościami ujęta będzie we wzorze:

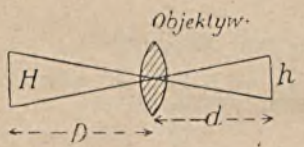
$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$$

gdzie *F* jest wielkością stałą, czyli i suma $\frac{1}{D} + \frac{1}{d}$ jest wielkością stałą.

Ponieważ przedmioty mogą się znajdować w rozmaitej odległości D od objektywu, przeto ze zmianą D ulega zmianie również d. Ponieważ zaś ze zmianą d musimy przesuwać okular i to o tyle, aby obraz urojony znalazł sie w odległości najlepszego widzenia, przeto wnioskujemy, że dla przedmiotów, znajdujących się w niejednakowych odległościach od objektywu, stopień wysuwania okularu jest niejednakowy. D może wahać się od ∞ do 10 m, gdyż bliższe przedmioty nie są obserwowane zapomocą lunety; przy zmniejszaniu się D, t. j. zwiększaniu się $\frac{1}{D}$, musi ulegać zmniejszaniu się $\frac{1}{d}$, a więc zwiększeniu d. Innemi słowami, ponieważ przy obserwacji bliższych przedmiotów przez lunetę, obraz rzeczywisty oddali się od objektywu, przeto i okular musi być oddalony od objektywu, czyli wysunięty. Odwrotnie, w miarę obserwowania coraz to dalszych przedmiotów, okular będzie wsuwany w rurę objektywu. Inaczej mówiąc, luneta ma długość zmienną.

§ 102. Wielkość rzeczywistego obrazu a długość lunety.

Wielkość rzeczywistego obrazu w zależności od wielkości i oddalenia przedmiotu określa proporcja



Rys. 271

skąd

$$\frac{h}{H} = \frac{d}{D},$$

$$h = H\frac{d}{D}$$

lecz z zasadniczego równania optyki

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$$

mamy:

$$\frac{D}{d} = \frac{D - F}{F} \text{ i } \frac{d}{D} = \frac{F}{D - F}$$

stąd:

$$h = H\frac{F}{D - F}$$

Jak stąd widzimy, dla odległości od 50 m, przy których $D - F$ niewiele się różni od D, można przyjąć, że w miarę oddalania się przedmiotu wielkość obrazu zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do odległości.

Określimy długość lunety, t. j. odległość okularu od objektywu.

Oko ustawiamy przy przedniem ognisku okularu, t. j. w odległości f od okularu; oznaczymy przez S odległość od oka do urojonego obrazu, przez x odległość tego obrazu od okularu i przez L odległość od objektywu do okularu. Jeżeli okular ustawimy w ten sposób, by obraz urojony znajdował się w odległości najlepszego widzenia, wówczas mamy:

(1) $f + X = S$

(2) $\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$ równanie objektywu

(3) $\frac{1}{L-d} - \frac{1}{X} = \frac{1}{f}$ równanie okularu

Z 3-ego równania mamy $L = d + \frac{Xf}{f+X}$

Z 2-ego „ „ $d = \frac{FD}{D-F} = \frac{F}{1-\frac{F}{D}}$

Z 1-ego „ „ $X = S - f$

więc

$$L = \frac{F}{1-\frac{F}{D}} + \frac{(S-f)\,f}{f+S-f}$$

skąd

$$L = \frac{F}{1-\frac{F}{D}} + f - \frac{f^2}{S}$$

Przy znacznych D wyraz $\frac{F}{D}$ można odrzucić, jak i $\frac{f^2}{S}$, które też jest niewielkie; wówczas, w przybliżeniu, $L = F + f$, t. j długość lunety równa się sumie ogniskowych objektywu i okularu.

§ 103. Zmiana długości lunety.

Wzór na długość lunety

$$L = \frac{F}{1-\frac{F}{D}} + f - \frac{f^2}{S}$$

nasuwa następujące wnioski:

1). Ponieważ dla tego samego oka odległość S od urojonego obrazu jest stałą i f i F dla danej lunety są również stałe, przeto długość lunety, dla danego obserwatora, zmieniać się może jedynie ze zmianą odle-

głości D od przedmiotu. Wielkość zmiany długości lunety określa pierwszy wyraz

$$\frac{F}{1 - \frac{F}{D}} = A$$

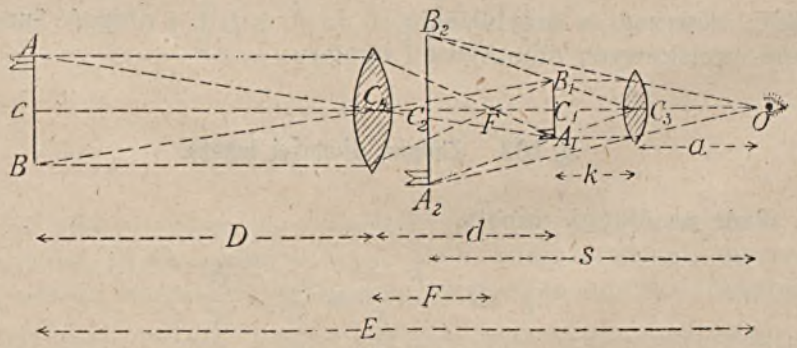
Określamy wielkość tego wyrazu dla objektywu o $F = 20$ *cm.* i rozmaitych D.

D	∞	500	200	100	10	metrów
A	0.200 000	0.20008	0.2002	0.2005	0.2041	

Jak widzimy z tej tabelki, zmniejszenie odległości przedmiotu od ∞ do 500 metrów pociąga za sobą konieczność wydłużenia lunety o 0,08 *mm*; przysunięcie przedmiotu od 500 do 100 *m* wydłuży lunetę o 0,4 *mm*; znaczniejsze zmiany zajdą przy bliskich odległościach: od 100 do 10 *m*, kiedy to zmiana długości sięga 4 *mm*.

2) Dla tej samej odległości D przedmiotu od objektywu dana luneta ma długość zmienną, uzależnioną od właściwości oczu różnych obserwatorów, dla których odległość S najlepszego widzenia nie jest jednakowa. W tym wypadku zmiany długości lunety zależą od wyrazu $\frac{f^2}{S}$; dla dalekowidza S jest większe od S krótkowidza, zatem $\frac{f^2}{S}$ dalekowidza jest mniejsze od $\frac{f^2}{S}$ krótkowidza, czyli długość lunety L dla dalekowidza będzie większa, niż dla krótkowidza; stąd wniosek: dalekowidz po krótkowidzu wysunie okular, odwrotnie.

§ 104. Powiększenie lunety.



Rys. 272.

Oznaczmy przez

D odległość przedmiotu od objektywu

E „ „ „ oka

d odległość rzeczywistego obrazu od objektywu

k „ „ „ „ okularu

s „ urojonego obrazu od oka

a „ oka od okularu

F ogniskową objektywu

f „ okularu

Powiększeniem dla małych kątów nazywamy stosunek tangensów kątów, pod któremi widzimy obraz urojony i przedmiot.

Powiększenie

$$P = \frac{tg\ A_2\ OC_2}{tg\ A\ O\ C} = \frac{\frac{A_2\ C_2}{O\ C_2}}{\frac{A_1 C}{O\ C}} = \frac{A_2\ C_2 \times O\ C}{A\ C \times O\ C_2} = \frac{A_2\ C_2}{A_1\ C_1} \cdot \frac{A_1\ C_1}{A\ C} \cdot \frac{D\ C}{O\ C_2}$$

ale

$$\frac{A_2\ C_2}{A_1\ C_1} = \frac{s-a}{k} \text{ z } \triangle\text{-ów } A_2\ C_2\ C_3 \text{ i } A_1\ C_1\ C_3$$

$$\frac{A_1\ C_1}{A\ C} = \frac{d}{D} \text{ z } \triangle\text{-ów } A_1\ C_1\ C_4 \text{ i } A\ C\ C_4$$

$$\frac{O\ C}{O\ C_2} = \frac{E}{S}$$

więc

$$P = \frac{s-a}{k} \cdot \frac{d}{D} \cdot \frac{E}{S}$$

lecz z równania dla okularu

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{s-a} = \frac{1}{f}$$

mamy

$$\frac{s-a}{k} = \frac{s-a}{f} + 1 = \frac{s-a+f}{f}$$

zaś z równania dla objektywu

$$\frac{1}{D} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}$$

mamy:

$$\frac{D}{d} = \frac{D}{F} - 1 = \frac{D-F}{F}$$

więc

$$\frac{d}{D} = \frac{F}{D - F}$$

stąd

$$P = \frac{s - a + f}{f} \cdot \frac{F}{D-F} \cdot \frac{E}{S} = \frac{F}{f} \cdot \frac{E}{D-F} \cdot \frac{s - a + f}{s} =$$

$$= \frac{F}{f} \cdot \frac{E}{D - F} \left(1 + \frac{f - a}{s}\right)$$

Przyjmując przybliżenie $D = E - F$, otrzymamy

$$\frac{E}{D - F} = \frac{E}{E - 2F} = \frac{1}{1 - \frac{2F}{E}};$$

jest to wielkość bliska jedności ze względu na bardzo nieznaczną wielko : ułamka $\frac{2F}{E}$.

Ponieważ oko ustawia się przy okularze w odległości a bliskiej f przeto $\frac{f - a}{s}$ jest bliskie zera. Przybliżonym więc wzorem dla powiększenia lunety będzie

$$P = \frac{F}{f}$$

Z ogólnego wzoru wnioskujemy, że powiększenie lunety zależy od

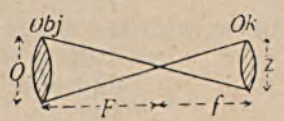
1) ogniskowych objektywu i okularu.
2) odległości oka od okularu.
3) właściwości oka (S krótkowidza jest mniejsze od S dalekowidza, P krótkowidza $>$ P dalekowidza).

Ze wzoru $P = \frac{F}{f}$ wynika, że dla uzyskania większych P należy dobierać objektywy z dużemi, zaś okulary z małemi ogniskowemi.

Powiększenie wszakże ogniskowej objektywu pociąga za sobą konieczność budowy wielkich lunet, gdyż obraz rzeczywisty powstaje zbyt daleko od objektywu; nadmierne zaś zmniejszanie ogniskowej okularu, pociągające za sobą konieczność zmniejszania wymiarów soczewki okularu jest również niedogodne, gdyż wówczas najdrobniejsze skazy lub pyłki na szkle zacieniają i zniekształcają obrazy. Badania nad okularami dowiodły, że nie należy zmieniać ogniskowych okularu do wymiarów poniżej 6 *mm*. Stąd dochodzimy do wzoru na największe powiększenie lunety przy danym objektywie, mianowicie;

$$P\,max = \frac{F\,mm}{6\,mm},$$

Aby określić najmniejsze powiększenie lunety przy danym objektywie postawimy warunek, ażeby wszystkie promienie, wchodzące przez objektyw, po przejściu przez jego ognisko wpadały do oka. Ponieważ ogniskowa okularu niewiele się różni od odległości ogniska objektywu od okularu, przeto dołączamy warunek, aby średnica okularu odpowiadała pękowi promieni, przechodzącemu przez ognisko objektywu.



Rys. 273.

Oznaczając średnicę objektywu przez O, średnicę okularu, równą średnicy źrenicy, przez z, mamy dla pęku promieni równoległych, padających na objektyw. Przybliżenie:

$$F : f = o : z,$$

skąd

$$f = \frac{F \cdot z}{o}$$

więc dla danego objektywu minimalnem powiększeniem lunety będzie

$$P = \frac{F}{f} = \frac{Fo}{Fz} = \frac{o}{z};$$

Im większe jest powiększenie lunety, tem na większą powierzchnię tatkówki oka padają promienie, idące od tego samego przedmiotu, i tem mniej jasny i wyrazisty jest obraz. Jeżeli warunki atmosferyczne są mniej sprzyjające, zjawisko to występuje silniej. Z tego względu do lunet większych przyrządów geodezyjnych, służących dla obserwacji na większych odległościach, dołączone są zapasowe okulary o różnej długości ogniskowych; zmieniając w lunecie okulary, tem samem zmieniamy powiększenie lunetyć a w związku z tem i przejrzystość obrazów.

§ 105. Określenie powiększenia lunety.

Powiększenie możemy określić: 1) z ogniskowych objektywu i okularu, 2) z obrazu słońca, 3) z łaty, 4) z dynametru.

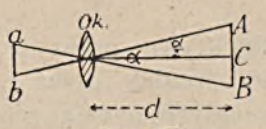
I. Zwracamy oddzieloną od lunety soczewkę objektywu ku słońcu; przesuwamy za soczewką arkusz papieru, uchwycimy główne ognisko soczewki na papierze w tem jej położeniu, w którem promienie słońca, po przejściu przez soczewkę, przetną się w jednym punkcie; wówczas średnica obrazu jest najmniejsza.

Mierząc podziałką lub cyrklem odległość papieru od soczewki, otrzymamy długość ogniskowej F dla objektywu. Postępując w podobny sposób z soczewką okularu, otrzymamy jego ogniskową f. Powiększenie $P = \frac{F}{f}$.

Ponieważ jednak ogniskowe są odległościami ognisk od środków optycznych soczewek, których położenia nie znamy, przeto powyższe określenia f i F dają poważny błąd P.

II. Kierujemy lunetę na odległy przedmiot i, przesuwając zapomocą kremoljery wyciąg okularu, ustawiamy okular w taki sposób, by obraz

odległego przedmiotu był wyraźnym. Następnie kierujemy lunetę na słońce, nie zmieniając położenia okularu. W bliskiej odległości od okularu ustawiamy za nim arkusz papieru, na którym zarysuje się w pewnem położeniu papieru wyraźne jasne koło. Mierzymy średnicę D koła i odległość d papieru od okularu.



Rys. 274.

Obliczymy kąt α, pod którym widzimy przez okular obraz słońca ab; $tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{AC}{d} = \frac{D}{2d}$, stąd obliczymy $\frac{\alpha}{2}$ i α.

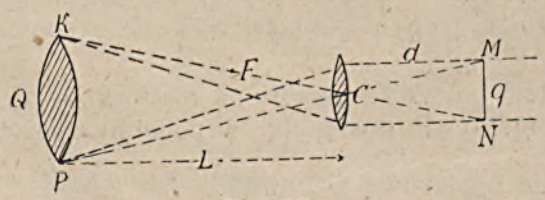
Z tablic astronomicznych dla danego dnia wypiszemy kąt β, pod którym widzimy średnicę słońca okiem nieuzbrojonem (kąt ten waha się około 32′). Powiększenie $P = \frac{\alpha}{\beta}$.

III. Zapomocą łaty określamy powiększenie w następujący przybliżony sposób: w odległości kilkunastu metrów od lunety ustawiamy pionowo łatę, podzieloną na centymetry. Kierujemy na nią lunetę i, patrząc jednem okiem bezpośrednio na łatę, drugiem zaś przez lunetę, ujrzymy na łacie kilka mglistych szerokich podziałek, widzianych tak dzięki lunecie, i cały szereg małych, widzianych gołem okiem. Ilość działek małych, mieszczących się w jednej dużej, daje w przybliżeniu powiększenie lunety.

W ten sam sposób, patrząc na łatę, ujrzeć możemy wielkie białe koło, przecinające ustawioną o kilka metrów łatę. Stosownie do naszych wskazówek pomocnik oznaczy na łacie dolny i górny kraniec tego koła, skąd wymierzymy, licząc decymetry i centymetry na łacie, średnicę tego koła D. Następnie, patrząc jednem okiem na łatę przez lunetę, policzymy widzianą w lunecie ilość d centymetrów łaty. Powiększenie: $P = \frac{D\,cm}{d\,cm}$.

IV. Określenie powiększenia lunety zapomocą dynametru.

Jeżeli skierujemy lunetę na bardzo odległy przedmiot, to długość lunety wynosi prawie ścisłe $F + f$, a więc ogniska objektywu i okularu znajdują się w jednym punkcie. Gdy do objektywu wpada rozproszone światło, wówczas na papierze, trzymanym za okularem, tworzy się jasne kółko—obraz objektywu. Oznaczmy przez F_0 ognisko okularu i objektywu, przez Q średnicę objektywu, q — średnicę okularu, $L = F + f$ — długość lunety, d odległość obrazu objektywu od okularu.



Rys. 275.

Dla ścisłego oznaczenia q, ustawiamy papier w takiej odległości od okularu, aby obraz objektywu był najwyraźniejszym. Nastąpi to w punkcie M, w którym przecinają się promienie, przechodzące 1) przez ognisko okularu, a więc wychodzące z okularu ‖-e do osi ogniskowej, oraz 2) przez środek optyczny okularu.

Dla rzeczywistego obrazu objektywu, utworzonego przez promienie, przechodzące przez okular, którego ogniskową jest f, mamy równanie:

$$\frac{1}{L} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f},$$

skąd

$$\frac{L}{d} = \frac{L-f}{f},$$

a ponieważ

$$L = F + f,$$

więc

$$\frac{L}{d} = \frac{F}{f},$$

lecz z △-ów KCP i MCN

mamy

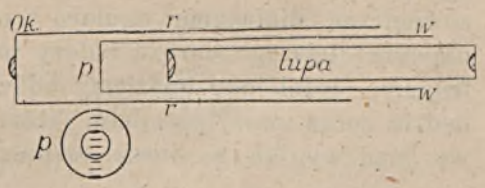
$$\frac{L}{d} = \frac{Q}{q},$$

skąd

$$P = \frac{F}{f} = \frac{Q}{q}.$$

Powiększenie lunety równa się tedy stosunkowi średnicy otworu objektywu do średnicy obrazu objektywu.

Do ścisłego określenia wielkości q służy przyrząd, zwany dynametrem Ramsdena. Jest to rurka metalowa $r\,r$, wewnątrz której może się przesuwać druga rurka $w\,w$ z płytką szklaną p o podziałce milimetrowej; wewnątrz zaś rurki $w\,w$ przesuwać się może lupa, składająca się z dwu soczewek. Cały przyrząd przykładamy do okularu lunety, ustawionej na nieskończoność i skierowanej na rozproszone światło.



Rys. 276.

Następnie przesuwamy lupę wewnątrz rurki ww do chwili, gdy wyraźnie widać będzie podziałkę na płytce, poczem przesuwamy rurkę ww z nastawioną na płytkę lupą wewnątrz rurki $r\,r$, dotykającej diafragmy okularu, dopóki, patrząc przez lupę, nie zobaczymy wyraźnie obrazu objektywu w postaci kółka. Odczytujemy wówczas dokładnie średnicę kółka q w milimetrach.

Często zamiast dynametru używamy ekranu z kalki woskowej, naklejonej na drewniany trójkącik z wycięciem pośrodku. Na kalce są wykreślone w milimetrowych odstępach równoległe proste. Przesuwając taki ekran za okularem, chwytamy najwyraźniejsze położenie obrazu objektywu w postaci kółka i odczytujemy ilość milimetrów q w średnicy kółka.


Rys. 277.

Mając zmierzoną cyrklem średnicę Q otworu objektywu, obliczamy powiększenie $P = \frac{Q\ mm}{q\ mm}$.

§ 106. Miejsce oka.

Miejsce za okularem, w którem otrzymujemy najwyraźniejszy obraz objektywu, nazywa się miejscem oka. W miejscu oka przechodzi największa ilość promieni po wyjściu z okularu, gdyż obraz objektywu jest tu najwyraźniejszy. To też w tem miejscu ustawić należy przy obserwacjach oko. Na podstawie proporcji z poprzedniego paragrafu:

$$\frac{L}{d} = \frac{F}{f}$$

mamy

$$d = \frac{Lf}{F} = \frac{(F+f)\,f}{F}$$

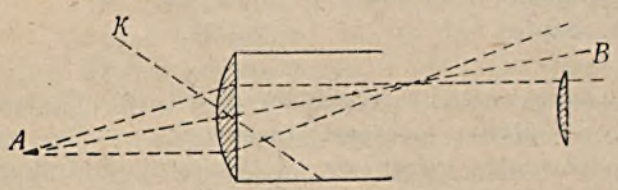
skąd

$$d = f + \frac{f^2}{F}$$

co, biorąc pod uwagę, że f jest znacznie mniejsze od F, daje prawie

$$\underline{\underline{d = f,}}$$

z czego wynika, że oko należy umieszczać za okularem w odległości, równej ogniskowej okularu. W takiej też odległości od okularu ustawia się za nim zewnętrzną diafragmę okularu z otworem pośrodku; dla uzyskania przeto najwyraźniejszego obrazu należy umieszczać oko możliwie blisko od tej diafragmy. Jeżeli oko będziemy oddalać od jego miejsca, to do oka dochodzić będzie coraz mniej promieni, które za miejscem oka rozchodzą się stożkowo, stąd wynika, że obraz, rozpatrywany przez okular, będzie mniej jasny.



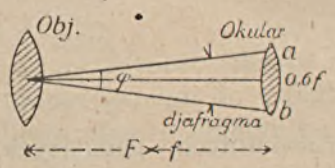
Rys. 278.

Każdy punkt przedmiotu wysyła na objektyw cały pęk (stożek) promieni, które po przejściu przez objektyw przecinają się w obrazie danego punktu i idą dalej. Część tych promieni padnie na okular, część zostanie pochłonięta przez sadzę na ściankach rurki okularu; wskutek tego obraz urojony danego punktu będzie mniej jasnym od innych, i tem mniej, im punkt dalej jest odsunięty od osi optycznej; jeżeli odległość punktu (np. K) od osi jest zbyt wielka, to promienie, przechodzące przez objektyw, wogóle nie dochodzą do okularu, pochłonięte przez sadzę w rurce objektywu. Aby obrazy, rozpatrywane z miejsca oka, były wyraźne, należy usunąć te stożki promieni, których osie, jak np. $A\,B$, nie padają na okular. W ten sposób wprawdzie zmniejsza się ilość widzianych przez lunetę przedmiotów, ale zato obrazy będą wyraźniejsze. W tym celu, w miejscu lunety, gdzie powstają obrazy rzeczywiste, ustawia się diafragma, wstrzymująca te stożki promieni, których osie przechodzą obok okularu.

Diafragma ta zwykle umieszczona jest w rurce okularu, a więc znajduje się w stałej odległości od okularu. Średnica diafragmy wynosi zwykle mniej niż 0.6 ogniskowej okularu, gdyż doświadczenia wykazały, że podstawa stożka promieni, wychodzącego ze środka objektywu i przechodzącego przez diafragmę do okularu, na okularze nie powinna przekraczać 0.6 ogniskowej okularu; średnica diafragmy powinna być przeto odpowiednio mniejszą.

§ 107. Pole lunety.

Przez pole lunety rozumiemy przestrzeń, obserwowaną przy nieruchomej lunecie; pole lunety określa kąt, którego wierzchołkiem jest optyczny środek objektywu, zaś ramionami są proste, przechodzące przez końce średnicy diafragmy okularu.



Rys. 279.

Im większy jest kąt φ, tem większą przestrzeń możemy obserwować. Średnica *ab* użytecznego otworu okularu określa wielkość kąta φ; ponieważ w przybliżeniu długość lunety wynosi $F + f$, zaś średnica użytecznego otworu okularu wynosi około 0.6 f, przeto

$$tg\frac{\varphi}{2} = \frac{^1/_2\ 0.6\ f}{F + f}$$

skąd

$$\varphi' = 3438' \frac{0.6\ f}{F + f} = \frac{2063}{\frac{F}{f} + 1} = \frac{2063}{P + 1};$$

Pole lunety jest więc odwrotnie proporcjonalne do jej powiększenia P.

Załączona tabelka zawiera szereg liczbowych danych

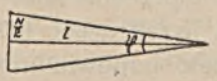
Dla powiększenia lunety P	10	20	40
pole jej widzenia wynosi	3° 8′	1°38′	50′

Praktycznie pole lunety określamy jednym z załączonych sposobów:

1) Gdy badana luneta jest częścią składową kątomierza, wówczas skierujemy lunetę na wyraźny punkt w ten sposób, by badany punkt znalazł się na końcu poziomej średnicy pola widzenia; odczytujemy limbus, poczem lunetę przesuwamy o tyle, aby dany punkt znalazł się na drugim końcu tej średnicy; znów notujemy odczyt limbusu; różnica obydwu odczytów daje pole lunety.

2) Gdy zaś dany przyrząd nie jest kątomierzem, wówczas w odległości l, równej kilkudziesięciu (30 — 50) *m.*, od lunety ustawiamy pionową

łatę, podzieloną na centymetry. Kierujemy lunetę na łatę w taki sposób, aby obraz łaty leżał na średnicy pola widzenia. Jeżeli w polu widzenia mieści się N *cm.* wówczas, wobec tego, że



Rys. 280

$$tg\,\frac{\varphi}{2} = \frac{N}{2l},$$

więc

$$\frac{\varphi}{2} = 3438\,\frac{N}{2l}$$

skąd

$$\varphi = 3438\,\frac{N\,cm}{l\,cm.}$$

§ 108. Jasność obrazu.

Jasnością obrazu nazywamy ilość promieni świetlnych, padających na jednostkę powierzchni. Ilośc promieni wyznaczyć się nie da; możemy jedynie powiedzieć, że ilość promieni jest proporcjonalna do wielkości powierzchni, na którą źródło światła wysyła promienie. Przytem powierzchnie, których jasność porównywamy, muszą być pochylone do kierunku promieni pod jednakowym kątem. Proporcjonalność do powierzchni w figurach podobnych możemy przyrównać do proporcjonalności do kwadratów odpowiednich boków, dla kół — do kwadratów średnic lub promieni.

Jeżeli nieznany spółczynnik proporcjonalności, t. j. ilość promieni, wysyłanych przez źródło światła na jednostkę powierzchni, ustawionej ⊥-e do kierunku promieni, oznaczymy przez k, wówczas dla źrenicy oka o średnicy d ilością promieni, wysyłanych przez to samo źródło, będzie $z = \pi k \frac{d^2}{4}$.

Gdy patrzeć będziemy przez lunetę, to ilość światła, padającego na źrenicę, będzie proporcjonalna do kwadratu średnicy Q otworu objektywu; ponieważ jednak około 15% promieni, idących od przedmiotu przez lunetę, jest pochłonięta przez sadzę na wewnętrznych ściankach lunety, przeto faktycznie przez okular przejdzie ilość promieni równa $n = \frac{85k}{100}\pi\frac{Q^2}{4}$.

Jeżeli jednak taka ilość promieni wpada do źrenicy, to promienie te, przy powiększeniu P lunety, idą, jak odnosimy wrażenie, od urojonego obrazu o powierzchni P^2 razy większej od wielkości obrazu, wytwarzanego na siatkówce bez użycia lunety; wskutek tego jasność obrazu urojonego, rozpatrywanego przez okular, będzie P^2 razy mniejsza od jasności n rzeczywistego obrazu. Jasność więc M urojonego obrazu będzie równą

$$M = \frac{n}{P^2}$$

Nie znając k, możemy określić tylko względną jasność obrazu J, t. j. wielkość, wskazującą, ile razy jasność urojonego obrazu jest mniejsza od jasności tego samego przedmiotu, rozpatrywanego gołem okiem. Tak więc: względna jasność obrazu jest równa:

$$J = \frac{M}{z} = \frac{85}{100} k \frac{\pi Q^2}{4 P^2} : k \pi \frac{d^2}{4} = 0{,}85 \frac{Q^2}{P^2 d^2}$$

i jeżeli Q i d są podane w tych samych jednostkach, to, oznaczając stałą dla danego oka $\frac{0{,}85}{d^2}$ przez C, otrzymamy

$$J = C \frac{Q^2}{P^2}$$

Jasność obrazu rozpatrywanego przez lunetę jest tedy odwrotnie proporcjonalna do kwadratu powiększenia i wprost proporcjonalna do kwadratu otworu objektywu.

Stąd wniosek: przy lunetach o znacznych powiększeniach obrazy przedmiotów są mniej jasne, niż obrazy tych samych przedmiotów, rozpatrywanych przez słabsze lunety.

Dla obserwacji przedmiotów, przy słabem oświetleniu, należy dobierać lunety o małem powiększeniu, natomiast o dużych objektywach.

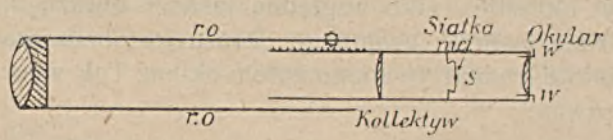
Jakkolwiek lunety osłabiają jasność przedmiotów, to jednak dzięki usunięciu bocznych promieni i powiększeniu obrazu, wskutek czego większa ilość elementów nerwu wzrokowego jest podrażniona—obrazy, widziane przez lunetę, są bardziej szczegółowe, chociaż i mniej efektowne, niż obrazy widziane gołem okiem. Poza tem nieocenione wprost usługi wyświadcza luneta krótkowidzom, którzy mogą obserwować przez nią wyraźnie przedmioty odległe.

§ 109. Okulary.

Przy lunetach przyrządów geodezyjnych stosowane są obecnie okulary złożone trzech typów: 1) Huygensa, 2) Ramsdena i 3) Kellnera.

Okular Huygensa składa się właściwie z dwu soczewek rozstawionych; jedna z nich, bliższa od objektywu, zwana kolektywem, załamuje przechodzące przez lunetę promienie silniej niż objektyw i współdziała z objektywem przy wytwarzaniu rzeczywistego obrazu. W ten sposób kolektyw okularu Huygensa tworzy z objektywem lunety układ dwu soczewek (rys. 281).

Kolektyw jest osadzony trwale w rurce, zwanej wyciągiem siatkowym, i razem z nią przesuwać się może wewnątz rurki objektywu na skutek działania kremoljery. W wyciągu siatkowym mieści się również właściwy okular, osadzony w wyciągu okularowym ww, który może być prze-



Rys. 281.

suwany w wyciągu siatkowym. Kolektyw i właściwy okular (soczewka oczna) są soczewkami płaskowypukłemi. Ogniska tych obydwu soczewek znajdują się w jednym punkcie między okularem i kolektywem; odległość między temi soczewkami jest stała. Przesunięcie rurki siatkowej pociąga za sobą tej samej wielkości i tego samego kierunku przesunięcie kolektywu i okularu, umocowanych w wyciągu siatkowym. Pomiędzy kolektywem a okularem znajduje się diafragma z naciągniętemi w kształcie krzyża nitkami pajęczemi. Ponieważ skrzyżowanie nitek, właściwie przecięcie się dwu prostopadłych nitek, oraz środek optyczny objektywu stanowią t. zw. oś celową lunety, gdyż lunetę wówczas uważamy za skierowaną ściśle na obserwowany punkt, kiedy przecięcie się nitek kryje obraz tego punktu,—przeto siatka nitek umieszcza się w tem miejscu lunety, w którem tworzy się rzeczywisty obraz przedmiotu. Wobec tego, że odległość najlepszego widzenia dla każdego oka jest nieco inna, właściwy okular (soczewka oczna) może się nieco przesuwać wewnątrz wyciągu siatkowego zapomocą wsuwania lub wysuwania rurki *w w*, w której osadzona jest soczewka oczna. Przez takie przesuwanie okularu możemy lunetę nastawić odpowiednio dla danego oka, co znaczy, iż wyciąg okularowy *w w* a więc i osadzony w nim okular, przesuniemy o tyle, że siatka nitek będzie wyraźnie widoczna. Nazywamy takie przesuwanie ustawieniem lunety dla oka. Przesuwając zaś wyciąg siatkowy *r r* zapomocą obrotu kremoljery, przesuniemy jednocześnie kolektyw i okular o taką odległość i w takim kierunku, przy których obraz przedmiotu w płaszczyźnie siatki nitek zarysuje się wyraźnie. To ostatnie przesunięcie rurki okularowej nazywamy, nastawianiem lunety na ostrość obrazu.

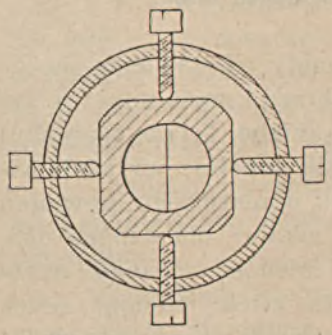
Rys. 283: Krzyż nitek pajęczych jest naciągnięty na diafragmie, znajdującej się wewnątrz wyciągu siatkowego i umocowanej wewnątrz tego wyciągu zapomocą 4 śrubek, przechodzących przez ścianki wyciągu: dwu bocznych, jednej górnej i jednej dolnej. Wykręcając górną i wkręcając dolną śrubkę, możemy diafragmę z krzyżem nitek podnosić ku górze, i odwrotnie; przesuwanie boczne diafragmy i krzyża uskutecznia się przez odpowiedni obrót bocznych śrubek. Przesuwanie tego rodzaju stosuje się dla doprowadzenia krzyża nitek, a więc osi celowej lunety, do właściwego położenia; rozpatrzymy to przy omawianiu rektyfikacji osi celowej.

Dzięki osadzeniu śrubki (rys. 282), połączonej stale z wyciągiem okularowym, w ukośnem wycięciu rurki wyciągu siatkowego, umożliwione jest przesuwanie okularu wprzód lub wstecz o nieznaczną wielkośc zapomocą obrotu wyciągu okularowego dokoła osi. Przy tym obrocie śrubka *S*, ślizgając się w ukośnem wycięciu, tem samem przesuwa okular podłużnie.



Rys. 282.

Krzyż nitek pajęczych zastąpiony jest często w przyrządach cienką płytką szklaną z naciętemi na niej pod prostym kątem kreskami. Tego rodzaju urządzenie nie jest wrażliwe na wilgoć, jak to ma miejsce przy nitkach pajęczych, które pod wpływem wilgoci zwisają.

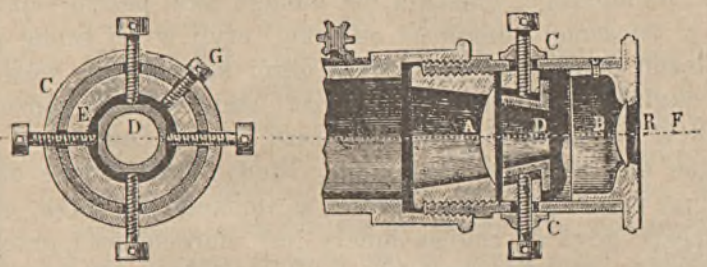


Rys. 283.

Nitki w okularze Huygensa są wyraźnie widoczne jedynie przy krzyżu, t. j. w środku pola widzenia. Okular Huygensa, po wykręceniu z lunety, nie może być używany jako lupa.

Często okular Huygensa nazywają negatywnym.

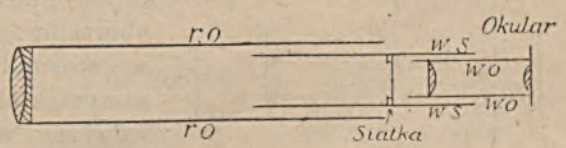
Okular Ramsdena, zwany dodatnim, składa się z dwu soczewek (dialityczny układ) płaskowypukłych, zwróconych ku sobie krzywiznami, a umieszczonych w wyciągu okularowym *w o*, który może być przesuwany wewnątrz wyciągu siatkowego *w s*, zawierającego



Rys. 284.

krzyż nitek; zapomocą obrotu kremoljery przesuwać możemy wyciąg siatkowy łącznie z okularowym wewnątrz rurki objektywu *r o* (rys. 283 i 284).

Różnica działania okularów obydwu powyższych typów polega na tem, że w okularze Huygensa kolektyw załamuje promienie, które przeszły przez objektyw, — przed miejscem rzeczywistego obrazu, dawanego przez objektyw: załamuje promienie przed ich przecięciem się, czyli zbliża obraz rzeczywisty do objektywu. Wskutek tego, lunety z okularami Huygensa są krótsze niż lunety z okularami Ramsdena.



Rys. 285.

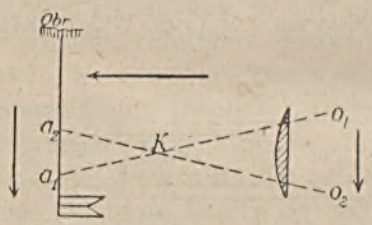
Przy jednakowych objektywach, okular Huygensa daje w porównaniu do lunety Keplera $1^1/_2$ razy większe pole widzenia, dwa razy większą jasność i około $65^0/_0$ powiększenia; zaś okulary Ramsdena dają nieco większe powiększenie, ale mniejsze pole widzenia i mniejszą jasność od lunet Keplera.

Okular Kellnera, zwany ortoskopowym, tem się różni od Ramsdena, że soczewka oczna jest achromatyczna, oraz tem, że między soczewkami okularu znajduje się diafragma.

Prócz trzech powyższych typów, firma Hensoldta w Wetzlar wyrabia t. zw. euryskopowe okulary, w których obydwie soczewki w okularze typu Ramsdena są achromatyczne. Okulary te dają obrazy bez zabarwienia; miejsce oka leży nieco dalej od okularu niż w poprzednich typach, pole widzenia jest znacznie większe i obrazy są płaskie — a więc zupełnie wyraźne.

§ 110. Obserwacje przy użyciu lunety. Paralaksa nitek.

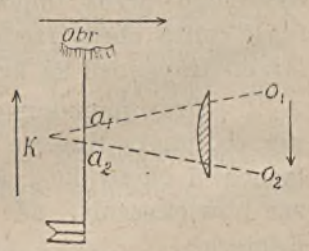
Każdą obserwację poprzedza ustawienie lunety. Ustawienie lunety polega: 1) na otrzymaniu przez okular wyraźnego obrazu krzyża nitek; w tym celu należy skierować lunetę na białe lub szare tło (niebo, ściana budynku) i wyciąg okularowy przesuwać tak, by nitki stały się zupełnie wyraźnie widoczne; wyciąg siatkowy, przy przesuwaniu wyciągu okularowego, powinien pozostać nieruchomym. W ten sposób ustawimy okular dla danego oka; 2) na usunięciu paralaksy; zjawisko to wynika z niedość ścisłego wprowadzenia płaszczyzny obrazu na płaszczyznę krzyża nitek. Celując przez lunetę do danego przedmiotu uzyskujemy wyraźny obraz przedmiotu w lunecie przez obrót kremoljery; ponieważ nici są już poprzednio ustawione na odległość najlepszego widzenia dla danego oka, przeto i obraz powinien się znaleźć w tej samej odległości od oka, czyli w tej samej płaszczyźnie, co i nici. Jeżeli dopięliśmy tego przez obrót kremoljery, wówczas, przesuwając przy okularze oko wdół i ku górze, stale widzieć będziemy przecięcie się nitek w tym samym punkcie obrazu. Jeżeli natomiast płaszczyzny obrazu i nitek nie kryją się wzajemnie, wtedy przesuwanie oka przy okularze powoduje przesuwanie się obrazu w stosunku do nitek, co nie powinno mieć miejsca, gdyż oś celowa lunety jest nieruchoma i przedmiot obserwowany również; zjawisko paralaksy uniemożliwia więc ścisłe skierowanie osi celowej lunety na dany punkt.



Rys. 286.

Jeżeli (rys. 286), przesuwając oko wdół od położenia O_1 do O_2, obserwujemy coraz niższe punkty obrazu a_1 a_2, co zachodzi przy obniżaniu się obrazu, t. j. przesuwaniu się w stosunku do krzyża K nitek w tym samym kierunku, w jakim przesuwa się oko, wówczas wyciąg siatkowy wraz z krzyżem nitek i okularem należy wsunąć do lunety o tyle, aby obraz w stosunku do krzyża nie zmienił swego położenia przy przesuwaniu oka.

Jeżeli natomiast (rys. 287) przy obniżeniu oka od O_1 do O_2 widzimy coraz to wyższe punkty obrazu, t. j. obraz przesuwa się w stosunku do krzyża K nitek w przeciwnym kierunku do ruchu oka, wówczas krzyż nitek należy przysunąć do obrazu, co w danym wypadku odpowiada wysunięciu z lunety wyciągu siatkowego.



Rys. 287.

§ 111. Badanie lunet.

Dobra luneta powinna: 1) dawać wyraźne obrazy, 2) mieć osie objektywu i okularu na jednej prostej, łączącej środki optyczne soczewek, a zwanej osią optyczną, 3) pozwalać na przesuwanie osi celowej wzdłuż optycznej, t. j. mieć prawidłowo zbudowaną kremoljerę i krzyż nitek, ułożony na osi geometrycznej lunety.

1). Wyrazistość obrazów badamy przez obserwację czarnych figur, jak koło, △-y, kwadrat i t. p., namalowanych na białej tablicy, ustawionej w odległości około 100 *m* od lunety. Jeżeli, obserwując figury, widzimy, że są czarne, granice ich wyraźne, oraz kształt nie jest zdeformowany, wówczas luneta daje wyraźne obrazy.

Stopień wyrazistości obrazu zależy od ostrości lunety, t. j. tego najmniejszego kąta, pod którym jeszcze zupełnie wyraźnie widzimy przedmioty.

Określania najmniejszego kąta widzenia lunety dokonywamy zapomocą skali Stampfera, składającej się z szeregu czarnych pasków różnej szerokości na białem tle. Szerokość pasków Stampfera zmniejsza się według postępu geometrycznego, w którym za szerokość 1-ej kreski Stampfer przyjął 6 *mm.*; za wykładnik postępu 0,975. Odstępy między paskami równają się szerokościom pasków sąsiednich, położonych z prawej strony (rys. 288). Gdy taką skalę ustawimy w pewnej odległości *D* od lunety, przesuwając lunetę w kierunku coraz to cieńszych kresek, napotykamy tę, która jeszcze wyraźnie oddziela się od sąsiednich, dalsze zaś, położone na prawo, zlewają się w szarą masę. Jeżeli szerokość ostatniej wyraźnie widzianej kreski wynosi *a*, wówczas (rys. 289):



Rys. 288.

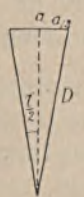
$$tg \frac{\tau}{2} = \frac{a}{2D}$$

$$\tau = 206265'' \frac{a}{D}$$

Jest to najmniejszy kąt widzenia (ostrość) lunety.

Często, zamiast pasków wykreślane są czarne kółka lub litery których rozmiary i wzajemne odstępy zmniejszają się w proporcji geometrycznej.

2) Centryczne utawienie soczewek w lunecie najłatwiej zbadać wówczas, gdy luneta może być obracana dokoła swej osi geometrycznej, po ustawieniu jej na widełkach, stycznych do pierścieni lunety.



Rys. 289.

Przez tak ustawioną lunetę rozpatrujemy punkt dowolny, przyczem przez obrót kremoljery uniewidoczniamy krzyż nitek; gdy teraz obrócimy lunetę dokoła osi geometrycznej i zauważymy, że obserwowany obraz również zatacza koło, wówczas oznacza to, że okular lub objektyw jest wadliwie osadzony; osadzić soczewki we właściwy sposób powinna fabryka, ponieważ poprawienie lunety jest dla technika zbyt kłopotliwe.

Gdy luneta jest połączona trwale z przyrządem, sprawdzenia centryczności osadzenia dokonywać można przez obserwację wyraźnej gwiazdy.

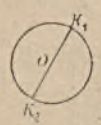
Jeżeli soczewki są centrycznie osadzone, to przy obrocie kremoljery obraz gwiazdy zamienia się w kółko, składające się z kilku jasnych pierścieni; źle osadzone soczewki dają w tym wypadku pierścienie zniekształcone i przerywane, samo zaś kółko traci formę i zmienia kolory.

3) Ażeby stwierdzić, czy kremoljera działa prawidłowo, należy mieć kika wytyczonych punktów, leżących w jednym poziomie.

Omówimy obszerniej ten temat w dziale o niwelacji.

Jeżeli oś celowa lunety jest pozioma, wówczas odczyty, brane z łaty, przestawianej z jednego punktu do drugiego, powinny być jednakowe. Ponieważ w miarę odsuwania łaty należy wsuwać wyciąg siatkowy, więc zmiany w odczytach dowiodą niewłaściwego działania kremoljery, wskutek którego krzyż nitek nie przesuwa się wzdłuż osi geometrycznej, a cokolwiek odchyla się od niej.

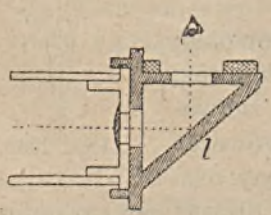
Aby sprawdzić, czy krzyż nitek leży na osi geometrycznej lunety, należy lunetę ustawić pierścieniami na widełkach, wewnątrz których mogłaby być obracana dokoła osi geometrycznej; gdy oś osadzonej na widełkach lunety skierowana jest na dowolny punkt (np. na ścianie), wówczas, jeżeli przy obrocie lunety dokoła osi geometrycznej krzyż nitek nie odsuwa się od powyższego punktu, oznacza to, że krzyż leży na osi geometrycznej; gdy zaś na niej nie leży, wówczas przy obrocie lunety krzyż zatoczy koło, którego środkiem jest przecięcie się geometrycznej osi lunety ze ścianą. Należy teraz wyznaczyć środek tego koła tak, by wypadł w środku odcinka, łączącego na ścianie przecięcia się z nią osi celowej lunety w dwu jej położeniach, różniących się wzajemnie o połowę obrotu lunety w łożyskach. Działając odpowiednio śrubami rektyfikacyjnemi krzyża nitek, sprowadzimy go do takiego położenia, że oś celowa przetnie ścianę (rys. 290) w punkcie *O*. Wówczas krzyż nitek znajdzie się na osi geometrycznej lunety.



Rys. 290.

§ 112. Pryzmat okularowy.

Firmy optyczne dodają do lunet pryzmaty optyczne, które nakręcamy na okular w ten sposób, że jedna przyprostokątna ścianka pryzmatu przylega do okularu ⊥-e do osi lunety, druga taka sama ścianka jest zwrócona ku oku, leżąc ∥-e do osi lunety, trzecia zaś ścianka, przeciwprostokątna, pochylona jest do osi lunety pod kątem 45°. Ta trzecia ścianka, oprawiona w miedź, jest lustrem. Oprawa pryzmatu w ściance, zwróconej ku oku, zawiera ruchome czerwone szkiełko, stosowane przy obserwacjach słońca.



Rys. 291.

Pryzmat usuwa niedogodność, powstającą w razie konieczności rozpatrywania obrazu w lunecie, zwróconej objektywem do góry.

Promienie, idące od obrazu przez okular, odbijają się od lustra *l* i idą do oka (rys. 291).

§ 113. Libele.

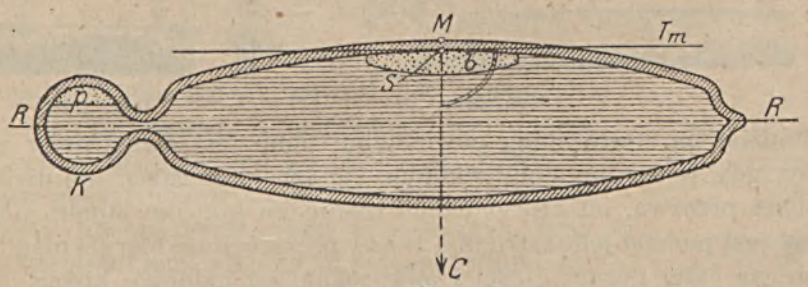
Libela jest przyrządem, zapomocą którego proste i płaszczyzny sprowadzamy do poziomu. Libela, zapomocą której sprowadzamy do poziomu proste, ze względu na swój kształt nazywa się rurkową; ponieważ płaszczyznę wyznaczają dwie położone na niej proste, przeto, sprowadzając je kolejno do poziomu, tem samem sprowadzimy przy użyciu libeli rurkowej całą płaszczyznę do poziomu. Zapomocą zaś libeli pudełkowej możemy odrazu sprowadzić płaszczyznę do poziomu; natomiast przy użyciu libeli pudełkowej ustawić do poziomu jedną z prostych, leżących w danej płaszczyźnie, bez ustawienia do poziomu płaszczyzny, — nie możemy.

Libele rurkowe są dokładniejsze; libele pudełkowe używane są tam, gdzie dokładność sprowadzenia płaszczyzny do poziomu może być niewielką.

W poprzednich rozdziałach rozpatrzyliśmy śródwagę jako przyrząd, sprowadzający do poziomu proste i płaszczyzny; śródwaga jednak jest tak mało dokładną w porównaniu z libelą, że ma pewne zastosowanie tylko w budownictwie.

§ 114. Libele rurkowe.

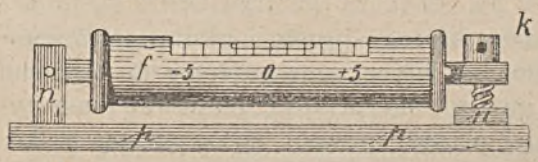
Libela rurkowa (rys. 292) została wynaleziona przez Thévenota w 1661 r. Obecnie libele są walcowemi rurkami szklanemi, oszlifowanemi wewnątrz zapomocą drutów stalowych o chropowatej powierzchni; wewnętrzna powierzchnia rurki libeli jest powierzchnią, powstałą



Rys. 292.

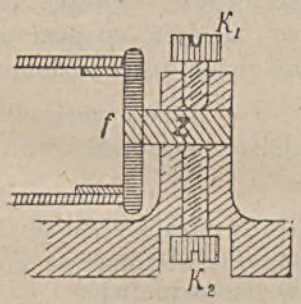
od obrotu łuku dokoła osi rurki. Rurka jest napełniona mocno nagrzaną cieczą (eter lub spirytus), która, stygnąc po napełnieniu rurki, wydziela parę, utrzymująca się nad powierzchnią cieczy w postaci bańki *b* (pęcherzyk); po napełnieniu rurki cieczą, otwory zostają zalutowane lub, w bardzo dokładnych libelach—zakorkowane szklanemi korkami. Często libela jest połączona z komorą *K*, zawierającą ciecz i bańkę *p*; jeżeli pod wpływem obniżenia temperatury bańka się zbyt wydłuża, możemy, przechylając komorę ku górze część pary bańki usunąć z rurki libeli do komory, wskutek czego długość bańki zmniejszy się; odwrotnie, przy zbyt wielkiem skróceniu bańki, parę, zawartą w komorze, możemy dołączyć częściowo do bańki w rurce libeli i wydłużyć ją w ten sposób.

Szklana rurka libeli ułożona jest w futerale (oprawie) miedzianym z wycięciem u góry (a nieraz i u dołu), przez które widzimy część rurki, podzieloną poprzecznemi kreskami.



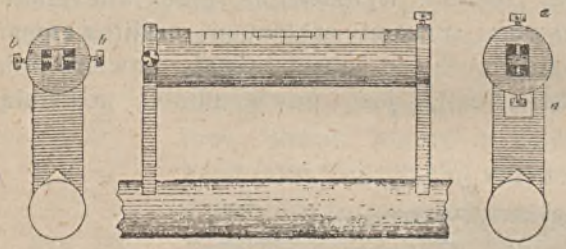
Rys. 293.

Futerał *f* libeli połączony jest (rys. 293) z nóżkami *n*, ustawionemi na podstawce libeli *p*; śrubka *k* może opuszczać lub podnosić koniec futerału, a więc i całą libelę (podobnie: k_1 k_2—rys. 294).



Rys. 294.

Taki typ libeli rurkowej ma na celu ustawianie jej na płaszczyźnie za pośrednictwem podstawki *p* libeli; do innych typów należą t. zw. nasadkowe libele (rys. 294a), osadzone na osi obrotu lunety lub na jej pierścieniach zapomocą dwu nóżek, oraz t. zw. libele wiszące (rys. 294b), zawieszane na walcu metalowym za pośrednictwem dwu ramion w kształcie zagiętych haczyków. Libele nasadkowe i wiszące zaopatrzone są w śrubki rektyfikacyjne, zapomocą których oś libeli może być przesuwana tak w kierunku poziomym, jak pionowym.

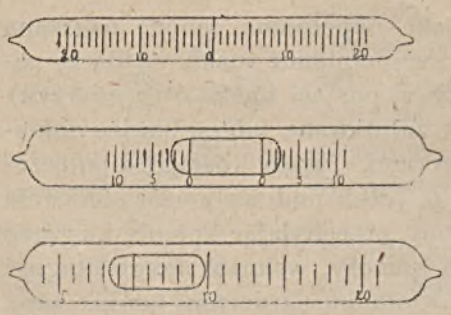


Rys. 294a.



Rys. 294b.

Podział na zewnętrznej powierzchni libeli jest dwustronny albo jednostronny, gdy w środku libeli znajduje się kreska zerowa, lub dwie kreski, przedzielone przerwą, od których opis rośnie ku końcom libeli; najczęściej stosowany jest podział jednostronny, zwany powszechnie bieżącym, gdy kreski są nacięte na całej górnej części i opis rośnie od jednego końca libeli ku drugiemu (rys. 295).

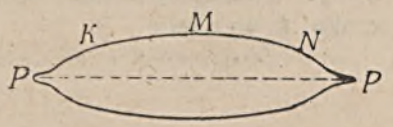


Rys. 295.

Bańka libeli zajmuje najwyższe miejsce wewnątrz rurki; zmiana nachylenia libeli przesuwa bańkę w kierunku podnoszonego końca. Stopień przesunięcia możemy ustalić z liczby podziałek, o którą bańka libeli odchyliła się od środka.

Wewnętrzna powierzchnia rurki libeli jest powierzchnią obrotową, powstałą (rys. 296) od obrotu łuku *KMN* dokoła cięciwy *PP*; łuk *KMN* mało różni się od łuku koła o bardzo znacznym promieniu.

Środek części łuku o najmniejszej krzywiźnie nazywamy środkiem krzywizny libeli. Kreski na libeli są wyznaczone w taki sposób, że środek podziału powinien znajdować się w środku krzywizny libeli.

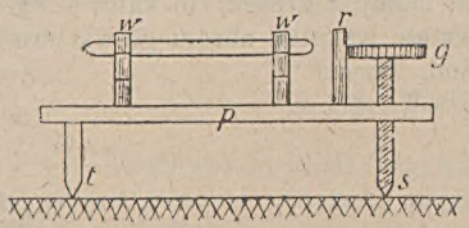


Rys. 296.

Libelę określają jej e l e m e n t y: 1) jednostka podziału na libeli, wynosząca dla libeli starej konstrukcji długość 1 paryskiej linji, t. j. 2.256 *mm.*, zaś w nowych libelach — 2 *mm.*, 2) promień krzywizny libeli i 3) stojąca w ścisłym związku z poprzedniemi elementami t. zw. wartość podziałki libeli, zwana przewagą libeli, wyznaczająca wielkość kąta pomiędzy dwoma promieniami krzywizny, poprowadzonemi przez dwie sąsiednie kreski.

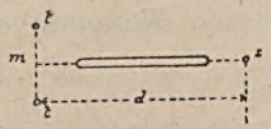
§ 115. Badanie libeli.

Jednostkę podziału libeli określamy zapomocą cyrkla i podziałki. Po określeniu przewagi libeli, ustalamy następnie promień krzywizny.



Rys. 297.

Do określenia wartości podziałki libeli używany jest specjalny przyrząd, zwany łożyskiem próbnem libeli, składający się (rys. 297) z podstawki *p* w formie cienkiego graniastosłupa, ustawionego na dwu słupkach *t*, i śruby *s* z główką *g* w postaci koła, podzielonego na pewną ilość równych części. Na podstawce *p* ustawiony jest ostry klin *r*, zwrócony ostrzem ku obwodowi kółka *g*, oraz dwie pary widełek *w*, na rozwidleniu których układa się libela. Prosta *sm*, łącząca (rys. 298) śrubę *s* ze środkiem odcinka, łączącego słupki *tt*, jest prostopadła do *tt*; libela układa się w linji *sm*.



Rys. 298.

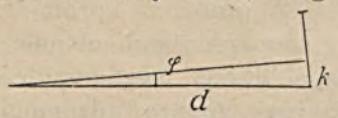
Ostrze klina jest indeksem, zapomocą którego odczytujemy na kółku tę działkę, która poprzedza ostrze klina, jeżeli kierunek podziału jest prawym; części działki obliczamy na oko.

Obracając śrubę *s*, sprowadzamy bańkę libeli do środka, t. j. do położenia, w którem końce banki są symetryczne w stosunku do środkowej kreski; notujemy przy tem położeniu odczyt *n* z kółka *g*. Odchylamy przez obrót śruby *s* bańkę libeli o jedną podziałkę i notujemy odczyt n_1 z kółka *g*. Następnie znów w ten sposób przesuwamy bańkę o jedną podziałkę i notujemy odczyt n_2. Przesuwamy tak bańkę do końca podziału na libeli, potem w przeciwnym kierunku do drugiego końca podziału i znów zpowrotem do środka, notując z kółka *g* odczyty przy każdem przesunięciu

bańki o jedną podziałkę libeli. Następnie wykręcamy śrubę s i odciskamy ją na papierze, otrzymując szereg kresek, o odstępach, zwanych krokami śruby. Mierzymy ściśle długość l kilku (m) takich kroków, stąd długość kroku k wyniesie

$$k = \frac{l}{m};$$

Oczywiście, długość l określamy w tej części śruby, która przechodziła przy jej obrotach przez podstawkę p.



Rys. 299.

Jeżeli (rys 299) zmierzona długość prostej sm wynosi d, wówczas podniesienie podstawki p o krok śruby powoduje kątowe odchylenie φ od poprzedniego położenia podstawki, określane z wzoru:

$$tg\,\varphi = \frac{k}{d};\quad \varphi'' = \frac{k}{d\sin 1''} = \frac{k}{d}\,\rho''$$

Podniesienie podstawki o krok śruby odpowiada jednemu obrotowi główki g śruby; jeżeli na obwodzie główki mamy z kresek, to kątowe wychylenie podstawki p, a więc i libeli, powstałe wskutek obrotu główki śruby o przedział między sąsiedniemi kreskami, wynosi

$$\beta = \frac{\gamma}{z}$$

Przypuśćmy, że przesunięcia libeli były notowane z dokładnością do 0,1 podziałki na libeli, jako n_1 n_2 n_3..., odpowiadające obrotom główki śruby o $a_1 = n_1 - n_0$, $a_2 = n_2 - n_1$, $a_3 = n_3 - n_2$... podziałek.

Wówczas, oznaczając przewagę libeli przez τ, otrzymamy:

$$\begin{aligned}
\tau\, n_1 &= a_1\, \beta \\
\tau\, n_2 &= a_2\, \beta \\
\tau\, n_3 &= a_3\, \beta \\
&\text{— — — —} \\
&\text{— — — —} \quad (+) \\
\tau\, n_N &= a_N\, \beta \\
\hline
\tau[n]_1^N &= \beta[a]_1^N
\end{aligned}$$

stąd

$$\tau = \beta\,\frac{[a]}{[n]}$$

Libele w przyrządach, służących do pomiaru kątów poziomych, mają przewagę od 20″ do 30″ i więcej; w przyrządach, służących do określania różnic wysokości, od 4″ do 30″.

Znając długość l jednej podziałki libeli i jej przewagę τ, możemy określić długość krzywizny libeli z proporcji:

$$l : 2\pi R = \tau : 360^0$$

stąd

$$R = \frac{l}{\tau} \cdot \frac{180^0}{\pi} = l \frac{\rho''}{\tau''}$$

tak np. dla $l = 2\ mm$ i $\tau_1 = 10''$
„ „ „ $l = 2\ mm$ i $\tau_2 = 30''$
„ „ „ $l = 2\ mm$ i $\tau_3 = 5''$

mamy odpowiednio:

$R_1 = (20626{,}5 \times 2)\ mm = 41{,}2\ m$
$R_2 = 13{,}7\ m$
$R_3 = 82{,}4\ m$

§ 116. Wrażliwość (czułość) libeli.

Wrażliwością libeli nazywamy zdolność reagowania na odchylenia jej osi od poziomu Stopień, w jakim libela reaguje przez przesunięcie bańki na wychylenia w płaszczyźnie pionowej, zależy od wartości podziałki libeli oraz od wielkości bańki, dokładności oszlifowania wewnętrznej powierzchni libeli i własności cieczy.

Jeżeli przewagą libeli jest, np., 20″, wówczas wychylenie bańki o $\frac{1}{10}$ podziałki nie będzie przez nas spostrzeżone; a więc odchylenia o 2″ od poziomu dana libela nie „odczuje“; natomiast zupełnie wyraźnie dałoby się ono uchwycić przy libeli, np., o 6″-owej przewadze. Mówimy tedy, że wrażliwszą jest ta libela, której przewaga jest mniejsza.

Bańka libeli przesuwa się wówczas, gdy różnica ciśnień na jej końce jest większa od wpływu sił molekularnych przy t. zw. włoskowatości, ponieważ zaś przy jednym i tym samym kącie pochylenia różnica ciśnień jest większa na końce dłuższych baniek, przeto dłuższe bańki szybciej reagują na wychylenia libeli.

Na wrażliwość libeli ma wpływ lepkość cieczy; z tego względu eter siarczany o lepkości mniejszej od spirytusu byłby więcej odpowiednim dla libeli; ta zaleta eteru traci nieco na wartości, jeżeli zważyć, że spółczynnik rozszerzalności eteru jest większy, niż spirytusu.

Co się tyczy szlifowania, to zrozumiałem jest, że przy niedość starannem wykonaniu pozostawia ono chropowatość, utrudniającą równomierne przesuwanie bańki, która w takich wypadkach porusza się skokami przy zupełnie równomiernem odchylaniu libeli od poziomu.

Im większy jest łuk odchylenia bańki libeli przy tym samym kącie wychylenia, tem wrażliwsza jest libela. Długość więc łuku przesunięcia bańki cechuje wrażliwość libeli. Jeżeli długości łuku odpowiada kąt środkowy α przy promieniu R krzywizny libeli, wówczas z proporcji

$$d : 2\pi R = \alpha : 360^0$$

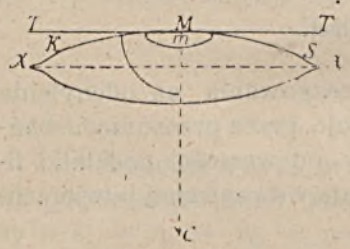
otrzymujemy:

$$d = \frac{R\,\alpha}{\frac{180^0}{\pi}} = \frac{\alpha}{\rho} R;$$

stąd wniosek, że wrażliwość libeli, wyrażona przez długość łuku, o który przy pewnym kącie nachylenia przesuwa się bańka, jest proporcjonalna do promienia krzywizny. Maximum wrażliwości libeli jest przy $R = \infty$; libele, mające bardzo wielkie promienie krzywizny, dla potrzeb praktyki są zbyt czułe i z tego względu rzadko są stosowane.

§ 117. Główne linje i punkty libeli.

Przypuśćmy (rys. 300), że punkt M jest środkiem podziału na łuku najmniejszej krzywizny o promieniu MC. Punkt M nazywa się środkiem krzywizny lub punktem głównym libeli; styczna MT do punktu M w płaszczyźnie łuku najmniejszej krzywizny zowie się główną styczną, zaś promień MC — głównym promieniem krzywizny. Jeżeli środek bańki m znajduje się w punkcie M, wówczas prosta MC jest pionowa, zaś główna styczna TMT — pozioma. Aby więc sprowadzić główną styczną do poziomu, należy libelę wychylić w taki sposób, aby środek m bańki przesunął się do punktu M.

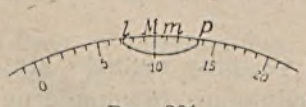


Rys. 300.

Jeżeli prostopadle do TMT poprowadzimy szereg płaszczyzn, to w przecięciu się ich z wewnętrzną powierzchnią libeli otrzymamy łuki kół, gdyż wewnętrzna powierchnia libeli wpobliżu głównej stycznej jest powierzchnią obrotową. Oś XX obrotu jest prostopadła do promienia głównego, a tem samem jest $\parallel$-a do głównej stycznej. Sprowadzić więc do poziomu główną styczną znaczy sprowadzić do poziomu i oś libeli XX; stąd często nazywamy główną styczną osią libeli.

W punkcie M wyznacza się kreska zerowa lub środek podziału bieżącego libeli.

§ 118. Odchylenie środka bańki libeli od punktu głównego.



Rys. 301.

Przypuśćmy, że rozpatrujemy podział bieżący na libeli. Prawy koniec bańki (rys. 301) co do swego położenia jest określony przez odczyt p z podziałki, lewy przez odczyt l. Długość bańki wynosi więc $p - l$, zaś odczyt, odpowiadający środkowi bańki, wyniesie:

$$m = l + \frac{p - l}{2} = \frac{l + p}{2};$$

Odchylenie środka bańki od punktu głównego, znajdującego się na podziałce M, wynosi:

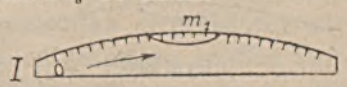
$$w = m - M$$

Przy $w = o$ wychylenia niema; przy $w > o$ środek bańki znajduje się w prawo od M; przy $w < o$ zachodzi odchylenie w lewo od M.

§ 119. Pomiar małych kątów wychylenia libeli o podziale bieżącym.

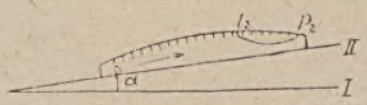
Określmy zapomocą odczytów z podziału libeli wielkość kąta, o jaki z danego położenia wychylimy w płaszczyźnie pionowej oś libeli.

Przypuśćmy, że (rys. 302) odczyty, wzięte z końców bańki w I-em jej położeniu, są odpowiednio równe l_1 i p_1; odczytem, odpowiadającym środkowi bańki, będzie m_1



Rys. 302.

$$m_1 = \frac{p_1 + l_1}{2}$$



Rys. 303.

Jeżeli teraz wychylimy podstawę libeli' a więc i oś libeli, o pewien kąt α w pionowej płaszczyźnie, wówczas (rys. 303) bańka libeli zajmie inne położenie, określane przez odczyty końców l_2 i p_2; środek bańki odpowie odczytowi

$$m_2 = \frac{p_2 + l_2}{2}$$

Przesunięcie środka bańki k odpowiada $m_2 - m_1$ podziałek, t. j.

$$k = m_2 - m_1 = \frac{p_2 + l_2}{2} - \frac{p_1 + l_1}{2};$$

Jeżeli wartością podziałki libeli (przewaga) jest τ, wówczas

$$\alpha = k\tau = \tau \left(\frac{p_2 + l_2}{2} - \frac{p_1 + l_1}{2} \right)$$

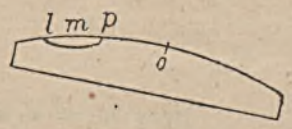
gdyż wychyleniu o kąt α odpowiada przesuniecie środka bańki o k podziałek na libeli.

§ 120. Pomiar kąta pochylenia libeli o podziale dwustronnym.

Libela ma podział od zera w lewo i w prawo.

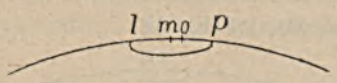
a) Gdy bańka znajduje się z jednej strony zera (rys. 304), wówczas odczyt, odpowiadający środkowi bańki równa się

$$mo = ol - lm = ol - \frac{ol - op}{2} = \frac{ol + op}{2}$$



Rys. 304.

Gdy bańka znajdzie się z obydwu stron zera, (rys. 305) odczyt, odpowiadający środkowi bańki, będzie równym



Rys. 305.

$$mo = ol - lm = ol - \frac{ol + op}{2} = \frac{ol - op}{2};$$

Jeżeli ustalimy, że odczyty z lewej strony środka libeli są dodatnie, zaś z prawej ujemne, wówczas dla a) będzie, oznaczając: $o\,l = l$ i $op = p$

$$mo = \frac{l + p}{2}$$

zaś dla b) będzie

$$mo = \frac{l - (-p)}{2} = \frac{l + p}{2}$$

i ogólnym wzorem na odczyt m środka bańki będzie

$$m = \frac{l + p}{2}$$

o ile przy odczytach l i p postawi się znak + z lewej strony i — z prawej strony zera.

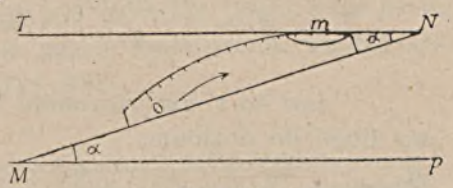
Jeżeli oznaczymy przez m_1 odczyt, odpowiadający środkowi bańki w I-em położeniu libeli, przez m_2 odczyt środka bańki w II-em położeniu libeli, wówczas przesunięciu bańki o $m_2 - m_1$ podziałek odpowiada kąt wychylenia libeli z I-ego do II położenia, równy

$$\alpha = (m_2 - m_1)\,\tau$$

Oczywiście, gdy I położenie libeli odpowiada poziomemu położeniu podstawki libeli, wówczas kąt α, obliczony w powyższy sposób, wyznacza kąt pochylenia podstawy libeli do poziomu.

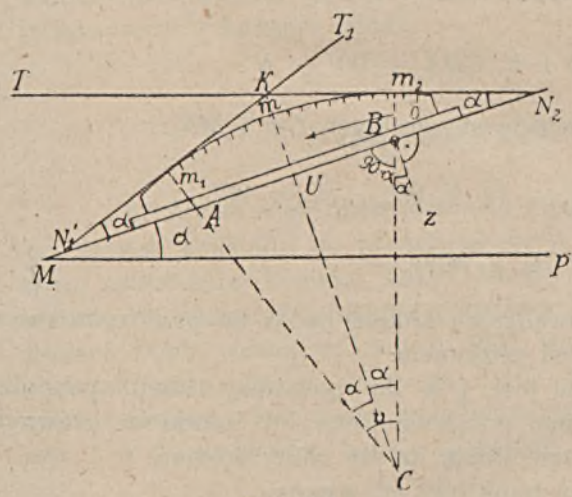
§ 121. Równanie libeli.

Przypuśćmy, że libela jest ustawiona (rys. 306) na płaszczyźnie MN, pochylonej do poziomu pod kątem α; środek bańki odpowiada punktowi m; ponieważ górna powierzchnia cieczy (dolna powierzchnia bańki) jest płaszczyzną poziomą (o ile nie brać pod uwagę zjawiska włoskowatości), zaś punkt m leży w środku czaszy kulistej, której podstawą jest górna powierzchnia cieczy, przeto styczna NT, przechodząca przez m, jest $\parallel$-a do poziomu cieczy, a więc jest również, jak MP, pozioma. Przypuśćmy następnie, że po określeniu odczytu m (bieżący podział na libeli) przestawiamy libelę ściśle o 180^0 na płaszczyźnie MN.



Rys. 306.

Wówczas (rys. 307) środek bańki przesunie się do m_2, zaś podziałka m przesunie się ku m_1 styczna do środka bańki zajmie położenie $N_2 T$, zaś styczna $N m T$ zajmie położenie $N'_1 m_1 T_1$.



Rys. 307.

Kąty: $\sphericalangle T N_2 M = \sphericalangle T_1 N'_1 N_2 = \alpha$.

Łącząc środek krzywizny C z m_1 i m_2, otrzymamy kąt $m_1 C m_2 = v$. A ponieważ $Cm_1 \perp N'_1 T_1$ i $Cm_2 \perp N_2 T$, więc $v = \sphericalangle T_1 K N_2 = 2\alpha$, gdyż $\sphericalangle T_1 K N_2$, jako zewnętrzny dla $\triangle$-a $K N_1 N_2$, jest równy sumie wewnętrznych nieprzyległych kątów.

Lecz $v = (\smile m_1 m_2)\,\tau$, przeto, przyjmując $m_1 m_2$ za liczbę podziałek w tym łuku, zaś τ za przewagę libeli, otrzymamy:

$$\alpha = \frac{v''}{2} = \frac{m_1 m_2}{2}\,\tau$$

Ponieważ na zasadzie odczytów z końców bańki mamy:

$$m_1 = \frac{p_1 + l_1}{2} \qquad m_2 = \frac{p_2 + l_2}{2}$$

więc absolutna ilość podziałek w łuku $m_1 m_2$, wobec $m_1 > m_2$, wyniesie

$$\smile m_1 m_2 = m_1 - m_2 = \frac{p_1 + l_1}{2} - \frac{p_2 + l_2}{2} = \frac{p_1 - p_2}{2} + \frac{l_1 - l_2}{2};$$

skąd

$$\alpha = \frac{\smile m_1 m_2}{2} \tau = \frac{1}{4} \left\{ \left(p_1 - p_2 \right) + \left(l_1 - l_2 \right) \right\} \tau''$$

Jest to t. zw. równanie libeli, wyznaczające kąt α pochylenia podstawy libeli do poziomu.

§ 122. Styczna do libeli, równoległa do podstawy.

Przypuśćmy, że, pochylając podstawę libeli, sprowadziliśmy (rys. 307) środek bańki libeli do środka m łuku $m_1 m_2$; wówczas $m C$ będzie pionowem.

W $\triangle$-cie $A B C$

$$CB \perp MP \text{ i } BZ \perp MN_2,$$

przeto

$$\sphericalangle ZBC = \alpha \text{ i } \sphericalangle CBA = 90^0 - \alpha$$

Oznaczamy przez U przecięcie się prostych Cm i MN_2:

$$\sphericalangle CUB = 180^0 - \left\{ \alpha + 90^0 - \alpha \right\} = 90^0,$$

a więc

$$CU \perp MN_2$$

Ponieważ Cm przez sprowadzenie środka bańki do punktu m ustawiło się pionowo, przeto MN_2 jest poziomem.

Punkt m, którego styczna jest $\parallel$-a do podstawy libeli, powinien odpowiadać średniej kresce, zwanej miejscem zera lub punktem głównym podziału libeli; w przeciwnym razie libelę należy rektyfikować.

Odczyt M, odpowiadający punktowi m, wynosi

$$M = \frac{m_1 + m_2}{2} = m_2 + \frac{m_1 m_2}{2} = m_1 - \frac{m_1 m_2}{2}$$

Wobec tego zaś, że

$$m_1 = \frac{p_1 + l_1}{2} \qquad m_2 = \frac{p_2 + l_2}{2}$$

więc

$$M = m_2 + \frac{m_1 - m_2}{2} = \frac{m_2 + m_1}{2}$$

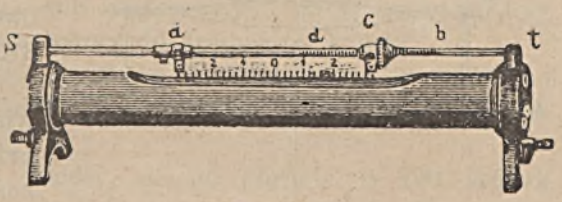
skąd

$$M = {}^1/_4 \left(p_1 + p_2 + l_1 + l_2 \right)$$

W libelach o podziale dwustronnym odczyty p_1, p_2, l_1, i l_2, należy zaopatrywać w znaki: + z jednej strony zera, — z drugiej, z tem jednakże, aby, po odwróceniu libeli o 180°, na tych samych połówkach podziału zmienić znaki na odwrotne.

§ 123. Libela Gouliera.

W libeli tej podział jest wyznaczony nie na szkle libeli, a na płytce szklanej (stycznej do libeli), zwisającej na pręcie metalowym, wzdłuż którego dana płytka może być przesuwana (rys 308).



Rys. 308.

Pręt jest przytwierdzony do sztyftów metalowych, wystających na końcach futerału libeli. Przesuwanie płytki uskutecznia się przez obrót naśrubka *C* na śrubie pręta. Po określeniu odczytu *M*, który powinien odpowiadać środkowej kresce, t. j. głównemu punktowi libeli, ustawiamy bańkę libeli symetrycznie do *M*, a następnie przesuwamy płytkę środkową kreską ku środkowi bańki, obliczając przesunięcie z końców bańki.

§ 124. Rektyfikacja libeli rurkowej.

Zrektyfikować libelę oznacza doprowadzić styczną do punktu głównego (środek podziału) do równoległości z podstawą libeli; wówczas każdorazowe ustawienie końców bańki libeli symetrycznie do punktu głównego wskaże na poziome położenie podstawy libeli. Przypuśćmy, że w dwu położeniach libeli, różniących się o 180°, odczytami, odpowiadającemi środkowym punktom bańki, były m_1 i m_2, skąd odczyt z podziału na libeli, odpowiadający właściwemu położeniu punktu głównego *m*, którego styczna jest ‖-a do podstawy, będzie równym:

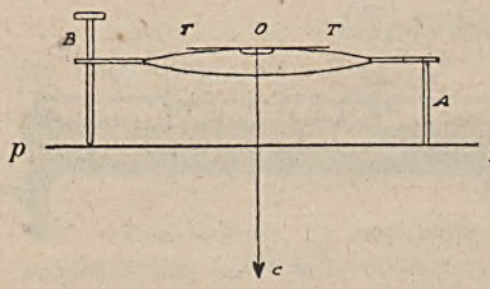
$$M = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)$$

Jeżeli odczyt *M* jest równy zeru przy podziale dwustronnym (względnie przy dwu zerach—odpowiada środkowi łuku, łączącego obydwa zera), lub odpowiada środkowej kresce, przy podziale bieżącym, wówczas, ustawiając końce bańki libeli symetrycznie do środkowej kreski podziału libeli, tem samem sprowadzimy podstawę libeli do poziomu.

Jeżeli jednak odczyt *M* nie odpowiada środkowej kresce podziału libeli, to ponieważ ustawianie końców bańki symetrycznie do odczytu *M* nie jest dogodne, należy libelę zrektyfikować, t. j. wychylić ją w pionowej płaszczyźnie, (nie zmieniając położenia podstawy libeli, do takiego położenia, przy którem styczna do łuku krzywizny, przechodząca przez środkową kreskę podziału, stanie się ‖-ą do podstawy libeli.

Przypuśćmy, że przez odpowiednie pochylenie podstawy libeli sprowadziliśmy środek *O* bańki do głównego punktu libeli. Gdyby (rys. 309) styczna do punktu *O* była ‖-a do podstawy *pp*, to podstawa byłaby pozioma. Po przestawieniu podstawy o 180° w tej samej płaszczyźnie (do

kierunku odwrotnego), wobec tego, że podstawa libeli pp_1 i nadal zajmowałaby poziome położenie, bańka libeli nie odchyliłaby się od punktu O.

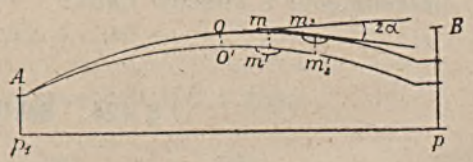


Rys. 309.

Ale przypuśćmy, że TT nie jest ‖-e do pp; wówczas, po odwróceniu libeli o 180°, środek bańki libeli wychyli się do punktu m_2 (rys. 310).

Jak wiemy, styczna do powierzchni libeli, ‖-a do podstawy pp_1, przechodzi przez środek m łuku om_2, zaś powinna przechodzić przez punkt O. Aby styczną punktu O sprowadzić do równoległości do pp_1, należy rurkę libeli, nie zmieniając położenia jej podstawy, pochylić o kąt, pod którym ze środka C łuku om_2 widzimy łuk om.

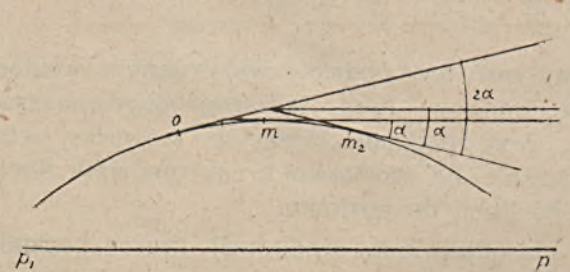
Kąt ten równy jest $\alpha = \frac{om}{R}$ (R promień krzywizny).



Rys. 310.

Takie pochylenie rurki libeli umożliwia śrubka rektyfikacyjna B. Przy pochyleniu o kąt α, odpowiadający łukom $om = mm_2$, środek bańki libeli o i punkty m i m_2 przesuną się po łukach, zatoczonych promieniami Ao, Am i Am_2, i na wychylonej powierzchni rurki zajmą położenia o', m' i m'_2. Zachowa się równość $o'm' = m'm'_2$, gdyż $o'm' = om$, $mm_2 = m'm'_2$.

Środek bańki libeli zajmie położenie, odchylone od poprzedniego o łuk $m_2 m$, t. j. znajdzie się w punkcie m', a więc styczna punktu m', która była poprzednio ‖-a do pp_1, obecnie będzie pozioma. Zaś (rys. 311) styczna oO, pochylona o kąt α, zajmie położenie, równoległe do poprzedniego położenia stycznej punktu m, a więc będzie ‖-ą do podstawy pp.



Rys. 311.

Jak stąd widzimy przesunięcie środka bańki o $^1/_2$ wychylenia om_2 sprowadza styczną punktu głównego do równoległości z podstawą libeli.

W praktyce rektyfikacja libeli jest bardzo prosta:

1) ustawiamy libelę w kierunku dwu śrub nastawowych i przez obrót tych śrub sprowadzamy środek bańki libeli do środkowej kreski podziału na libeli;

2) obracamy libelę przez obrót alhidady, o 180°; jeżeli środek bańki nie zmienił przytem swego położenia, oznacza to, że libela jest dobra;

jeżeli środek bańki odchylił się o pewną ilość k podziałek od poprzedniego położenia, wówczas przez obrót śrubki korekcyjnej przesuwamy środek bańki o $\frac{k}{2}$ podziałek ku środkowej kresce. W zasadzie—rektyfikacja jest skończona, jednak, wskutek niedokładności naszych czynności, powtarzamy postępowanie:

1) ustawioną w linji dwu śrub nastawowych libelę sprowadzamy do poziomu., t. j. środek bańki przesuwamy do środkowej kreski;

2) odwracamy libelę o 180° i połowę odchylenia środka bańki od środkowej kreski usuwamy przez obrót śrubki rektyfikacyjnej, drugą zaś połowę przez obrót śrub nastawowych.

Czynność tę powtarzamy dopóty, aż po obrocie o 180° środek bańki wychyli się nie więcej, niż o $\frac{1}{6}$ podziałki od środkowej kreski.

Wskazówki praktyczne.

A. Przestawienie libeli o 180° różni sią w wykonaniu dla libeli różnych typów, a więc:

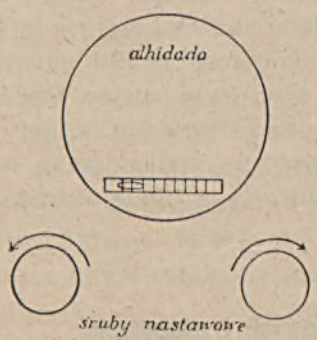
1) libela na podstawce, będąca przyrządem samodzielnym, obrócona zostanie na pewnej płaszczyźnie o 180°, gdy wzdłuż krawędzi podstawy wykreślimy prostą i przyłożymy tę samą krawędź podstawy do wykreślonego odcinka w ten sposób, że libela znajdzie się po drugiej stronie wykreślonego odcinka;

2) libela, osadzona na stałe na płaszczyźnie, np., alhidady kątomierza, ustawia się w linji dwu śrub nastawowych; w tem położeniu alhidady odnotujemy odczyt z limbusu i, po sprowadzeniu bańki do środkowego odczytu, ustawiamy drugi nonjusz na ten sam odczyt przez obrót alhidady o 180°;

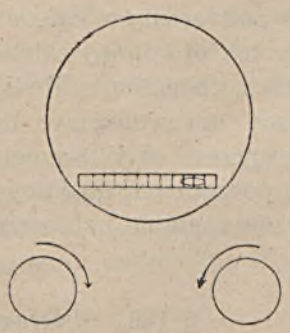
3) libelę nasadkową, ustawianą na osi obrotu lunety, obracamy o 180°, przestawiając nóżki libeli; instrument nie powinien być poruszony;

4) libela wisząca obraca się o 180° przez zmianę punktów zawieszenia ramion, lecz przy nieporuszonym przyrządzie.

B. Sprowadzanie środka bańki do środkowej kreski zapomocą obrotu śrub nastawowych.



Rys. 312.



Rys. 313.

Obrót śruby w kierunku prawym (odpowiadającym ruchowi wskazówki zegara, ułożonego na śrubie) podnosi przyległy koniec libeli wraz z alhidadą ku gorze, obrót w lewo—koniec ten opuszcza.

Na rys. 312 bańkę libeli należy ustawić w środku przez przesunięcie jej w prawym kierunku, a więc przez podniesienie prawego końca libeli, lub opuszczenie lewego. Podniesienie prawego końca uskuteczniamy przez obrót w prawo prawej śruby nastawowej, opuszczenie lewego końca libeli przez obrót w lewo lewej śruby nastawowej; jeżeli w ten sposób obracać będziemy jednocześnie obydwie śruby, bańka libeli przesunie się prędzej, niż pod wpływem obrotu jednej tylko śruby. Ruchy obydwu śrub są więc wykonywane w odwrotnych kierunkach.

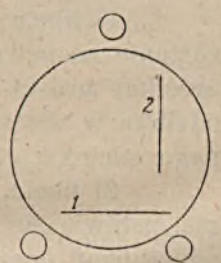
Przesunięcie bańki libeli w lewym kierunku uskutecznia się przez obrót śrub, jak wskazane na rys. 313.

§ 125. Ustawienie płaszczyzny do poziomu.

Płaszczyzna wyznaczona jest przez dwie proste na niej leżące.

Jeżeli więc dwie proste, leżące na danej płaszczyźnie, sprowadzimy przy pomocy libeli do poziomu, wówczas dana płaszczyzna będzie spoziomowana.

W tym celu (rys. 314) ustawiamy libelę w kierunku dwu śrub nastawowych (położenie I-e) i zapomocą odpowiedniego obrotu temi śrubami sprowadzamy środek bańki libeli do środkowej kreski: następnie przez ustawienie danej libeli w kierunku (położenie 2-e) mniej więcej prostopadłym do poprzedniego położenia, zapomocą obrotu trzecią śrubą nastawową znów sprowadzamy środek bańki do środka podziału.



Rys 314

Dla sprawdzenia dokładności spoziomowania płaszczyzny ustawiamy znów libelę w 1-em położeniu i jeżeli bańka odsunęła się od środka, sprowadzamy ją do środkowej kreski. To samo uskuteczniamy przy 2-em położeniu libeli.

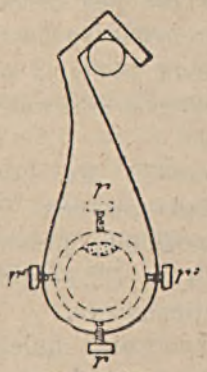
Oczywiście przed użyciem libeli należy ją sprawdzić i w razie potrzeby zrektyfikować.

Zwykle na alhidadzie kątomierzy mamy dwie libele, ustawione do siebie pod prostym kątem (i wtedy zwane libelami krzyżowemi), każdą z nich rektyfikujemy oddzielnie; co się tyczy poziomowania alhidady w tym wypadku, to jedną z libeli ustawiamy w linji dwu śrub i przez obrót temi śrubami sprowadzamy bańkę libeli do środka; nie poruszając alhidady, przez obrót trzeciej śruby sprowadzamy do środka bańkę drugiej libeli, poczem poprawiamy pierwszą, a następnie drugą libelę, dopóki alhidada nie zostanie ostatecznie spoziomowana.

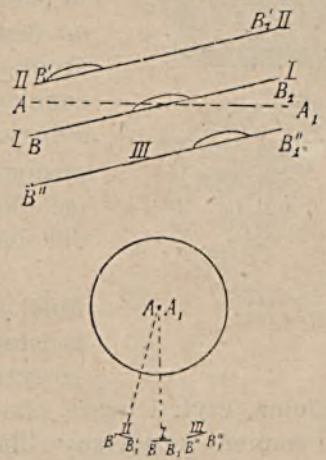
§ 126. Wichrowatość osi libeli nasadkowych i wiszących.

Nasadkowe i wiszące libele mają 4 śrubki rektyfikacyjne: górną i dolną, oraz dwie boczne. Górna i dolna służą do ustawiania osi libeli we właściwem położeniu w pionowej płaszczyźnie, boczne — do sprowadzenia do jednej płaszczyzny osi libeli i osi obrotu lunety (na której to

osi ustawia się lub zawiesza libelę). Przypuśćmy, że w danej libeli płaszczyzna styczna do punktu głównego jest równoległa do podstawy libeli (osi obrotu lunety) i bańka libeli zajmuje właściwe położenie. Osią obrotu lunety $A\ A_1$ jest prosta, z którą oś libeli krzyżuje się (rys. 316 położenie I-e); jeżeli całą libelę przesuniemy nieco na os wprzód w kierunku prostopadłym do osi obrotu, to, ponieważ oś obrotu jest walcem, koniec B_1 libeli opuści się do B'_1 i znajdzie się niżej niż koniec B, przesunięty ku B'; oczywiście, bańka libeli wychyli się ku B'; jeżeli na osi obrotu przesuniemy libelę w kierunku prostopadłym do osi obrotu, a odwrotnym do 1-ego przesunięcia, t. j. wstecz, wówczas koniec B libeli opuści się do B'', a więc znajdzie się niżej od B''_1 wskutek czego bańka przesunie się ku przeciwległemu końcowi B''_1 libeli.



Rys. 315.



Rys. 316.

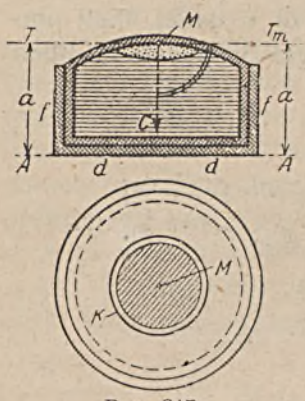
Górny rysunek 316-y jest rzutem poziomym, dolny — rzutem pionowym na płaszczyznę ⊥-ą do osi obrotu. Przy skrzyżowaniu obydwu osi wahanie libeli na osi wprzód i wstecz pociąga za sobą przesuwanie się bańki od jednego końca libeli do drugiego, coby nie mogło mieć miejsca, gdyby oś obrotu i oś libeli były równoległe.

Ażeby usunąć wichrowatość osi, należy zapomocą bocznych śrubek rektyfikacyjnych rr' przesunąć oś libeli l w kierunku poprzecznym, np., w danym wypadku należy przesunąć koniec B_1 w kierunku do A_1, lub B w odwrotnym w zależności od tego, przy którym końcu znajdują się poziome śrubki rektyfikacyjne.

Po tem sprawdzeniu, sprowadzamy przez obrót śrub nastawowych bańkę libeli do środka, i obracając ją o 180^0, usuwamy połowę ewentualnego wychylenia bańki zapomocą pionowych śrubek rektyfikacyjnych. Powtarzając kilkakrotnie to postępowanie, zrektyfikujemy całkowicie libelę.

§ 127. Libela pudełkowa.

Jest to walec, zakończony u góry szklaną czaszą kulistą; na wewnętrznej powierzchni czaszy dokoła jej środkowego punktu jest wyznaczone jedno, lub kilka spółśrodkowych kół. Wewnątrz libela napełniona



Rys. 317.

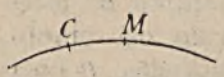
jest spirytusem w takiej ilości, że średnica bańk libeli wynosi około 1.5 *mm*. Libela jest osadzona w metalowym walcu, którego dolna powierzchnia *dd* jest równoległa do płaszczyzny *TT*, stycznej do środkowego punktu *M* czaszy kulistej. Jeżeli warunek równoległości *TT* do *dd* jest zachowany, wówczas, ażeby pewną płaszczyznę sprowadzić do poziomu, należy na niej ustawić libelę i, pochylając odpowiednio daną płaszczyznę, sprowadzić środek bańki libeli do punktu *M*.

Ponieważ wtedy promień *MC* krzywizny libeli będzie pionowym, zaś płaszczyzna *TT*, jako prostopadła do *MC*, będzie poziomą, przeto i płaszczyzna *dd*, jako równoległa do *TT*, będzie również poziomą, czyli i nasza płaszczyzna zostanie spoziomowana.

Promień krzywizny libeli pudełkowej jest znacznie mniejszy od promienia krzywizny libeli rurkowych i przeważnie nie sięga 1 *m*.

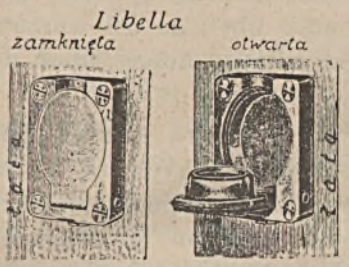
Osią libeli pudełkowej nazywamy promień *MC*.

Sprawdzenie libeli pudełkowych polega na sprowadzeniu środka bańki libeli do punktu *M* i odwróceniu libeli spoziomowanej w ten sposób na płaszczyźnie o 180°. Jeżeli środek bańki (rys. 318) wychyli się do punktu *C*, to środek łuku *CM* będzie miejscem punktu głównego. Jeżeli libela posiada śrubki korekcyjne, które zwykle znajdują się w denku *dd* libeli, to, obracając je odpowiednio, sprowadzimy po szeregu prób środek *M* koła, wykreślonego na wewnętrznej powierzchni libeli, do właściwego położenia.



Rys. 318.

Libele pudełkowe spotykamy tylko przy bardzo mało dokładnych kątomierzach; poza tem używane są one zamiast pionu przy łatach ustawionych pionowo (np. niwelacyjne lub tachymetryczne łaty); wtedy do łaty przyśrubowany jest kawałek grubej, zgiętej pod prostym kątem, blachy, w ten sposób, że jedna jej ścianka jest ⊥-a do łaty. Do ścianki tej przytwierdzona jest libela pudełkowa. Gdy bańka libeli zajmie właściwe położenie, łata będzie sprowadzona do pionu.



Rys. 319.

Nowsze libele pudełkowe są napełniane cieczą i zaklejane. Cała libela jest szklana, ułożona w futerale metalowym i w nim zagipsowana, oraz odrazu zrektyfikowana w fabryce przy osadzaniu w futerale. Rys. 319 przedstawia libelę pudełkową składaną, umieszczoną na łacie.

§ 128. Układ osiowy teodolitu.

W teodolicie zwykłym układ osiowy tworzą —

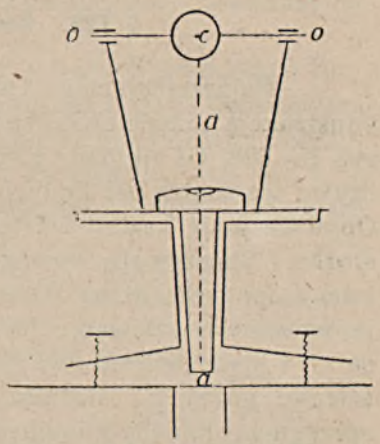
1) pionowa oś teodolitu *aa*, przechodząca przez środek limbusu i prostopadła do płaszczyzny limbusu,

2) oś alhidady *aa*, która powinna przechodzić przez oś pionową teodolitu,

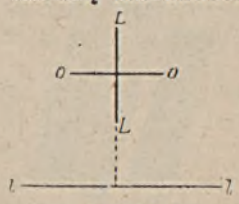
3) oś *o o* obrotu lunety, która powinna być prostopadła do pionowej osi teodolitu, a więc ∥-a do płaszczyzny limbusu,

4) oś celowa lunety, która powinna być ⊥-a do osi obrotu *oo*. Osie pionowa, obrotu lunety i celowa powinny się przecinać (luneta centryczna); w teodolicie zwykłym identyfikujemy oś pionową przyrządu z osią alhidady.

Jeżeli płaszczyznę limbusu oznaczymy (rys. 321) przez *ll*, oś obrotu lunety przez *oo*, zaś oś celową lunety przez *LL*, wówczas zachodzą zależności:



Rys. 320.



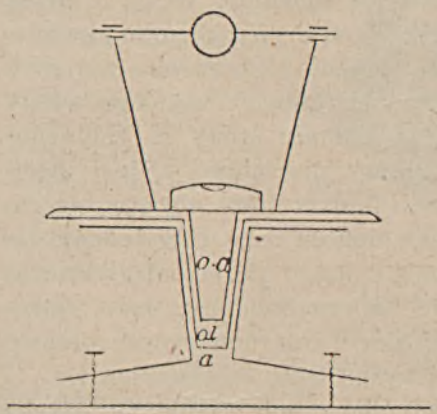
Rys. 321.

$$o\,o \parallel l\,l$$

$$L\,L \perp o\,o$$

Przy zachowaniu tych warunków płaszczyzna kolimacyjna zawsze będzie prostopadłą do płaszczyzny limbusu.

W nowoczesnych teodolitach limbus posiada niezależny od spodarki ruch, co zawdzięcza się takiej konstrukcji teodolitu, przy której koło limbusu, będąc niezależnem od spodarki, posiada, jak i alhidada, własną stożkowo ściętą, wydrążoną wewnątrz, oś obrotu, układaną w wydrążeniu stożkowem spodarki; oś alhidady umieszcza się w wydrążeniu stożkowem osi limbusu (rys. 322).



Rys. 322.

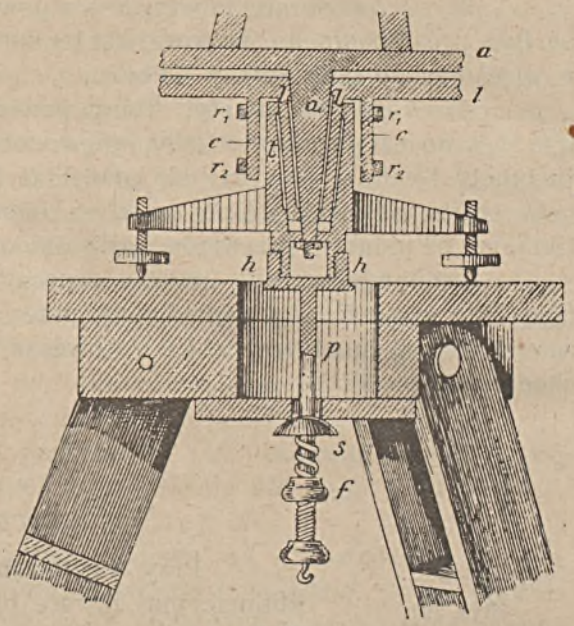
Tak limbus, jak alhidada, posiadają wówczas niezależne od siebie zaciski i śruby mikrometryczne.

Teodolit takiej konstrukcji nazywamy repetycyjnym (powtarzającym), a to z tego względu, że po dokonanym pomiarze kąta przy danem położeniu limbusu, możemy limbus obrócić o dowolny kąt, unieruchomić za pośrednictwem odpowiedniego zacisku i dokonać nowego pomiaru kąta, przyczem odczyty z nonjuszu, odpowiadające celom do już zaobserwowanych punktów, wypadną na zupełnie innych miejscach limbusu, niż to zachodziło przy pierwszym pomiarze.

W teodolicie repetycyjnym za pionową oś przyrządu przyjmujemy oś limbusu; a ponieważ alhidada winna być centrycznie osadzona, przeto powstaje nowy warunek, mianowicie: oś alhidady powinna kryć oś limbusu, lub, w najgorszym razie, przy ekscentryczności alhidady, obydwie osie powinny być równoległe.

§ 129. Konstrukcja repetycyjnego teodolitu.

Najprzejrzyściej taką konstrukcję przedstawia typ na rys. Nr. 323. Oś alhidady *a* spoczywa wewnątrz osi limbusu *l*. Obydwie mają kształt ściętego stożka. Spoczywają wewnątrz tulei *t* spodarki, którą obejmuje walcowe odgałęzienie limbusu *C*, i ujęte są przez dwa pierścienie: górny r_1, służący do sprzęgania alhidady z limbusem, i dolny r_2, służący do sprzęgania limbusu ze spodarką.



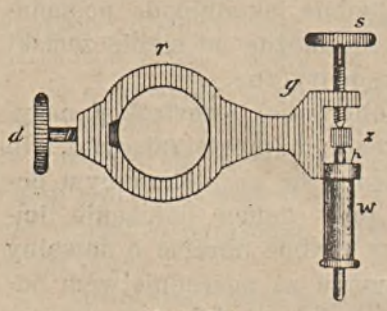
Rys. 323.

Połączenie teodolitu ze statywem umożliwia śruba dolna *ph* z nakrętką *f* i sprężyną *s*.

Pierścienie r_1 i r_2 mogą być sprzęgane z walcem *C* zapomocą zacisków *d* (rys. 324).

Widełki *g* pierścieni są ustawione w ten sposób, że między niemi znajduje się sztyft *z* o płaskich ściankach, przytwierdzony w górnym pierścieniu r_1 do alhidady, w pierścieniu r_2 — do jednego z ramion spodarki.

Przez ramiona widełek przechodzi z jednej strony śrubka, zwana leniwką lub śrubą mikrometryczną, działająca na sztyft, z drugiej — pręcik *p* z płytką, naciskaną wewnątrz walca *w* przez sprężynę. Zakręcenie śruby *d* w górnym pierścieniu r, sprzęga alhidadę z limbusem, zaś ruch mikrometryczny na limbusie uzyskuje wtedy alhidada dzięki działaniu śruby *s*. Gdy wtedy zacisk *d* dolnego pierścienia r_2 jest zwolniony, wówczas limbus może obracać się razem z alhidadą dokoła osi. Gdy jednak zaciśniemy śrubę *d* dolnego pierścienia, wówczas limbus zostaje unieruchomiony, jako sprzęgnięty ze spodarką, i mikrometryczne przesunięcie limbusu będzie dokonane za pośrednictwem śruby *s* pierścienia.



Rys. 324.

Jeżeli wtedy zwolnimy zacisk górnego pierścienia, alhidada uzyska możność obrotu dokoła swej osi na nieruchomym limbusie. Jak stąd widzimy:

1) dolny zacisk służy do unieruchomienia limbusu,

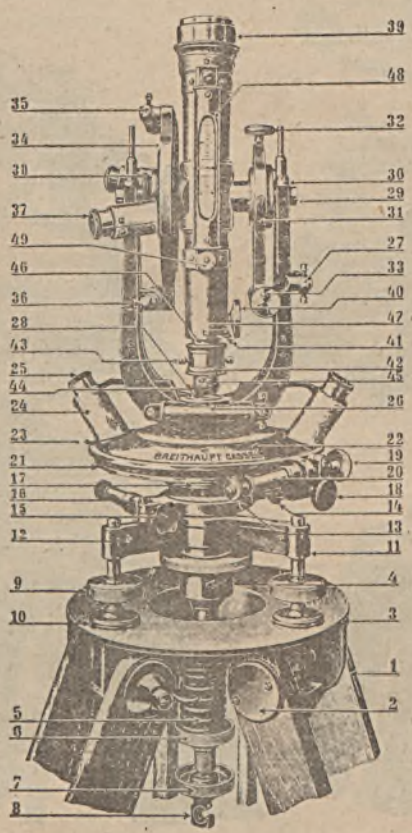
2) górny zacisk — sprzęga limbus z alhidadą.

Tak więc: a) Zakręcenie obydwu zacisków unieruchomi tak limbus, jak i alhidadę; b) zakręcenie tylko górnego zacisku, przy zwolnieniu dolnego, sprzęga alhidadę z limbusem, umożliwiając im wspólny obrót dokoła osi; c) zakręcenie tylko dolnego zacisku — umożliwia obrót alhidady dookoła osi przy nieruchomym limbusie.

Rzadziej używane są teodolity z lunetą ekscentryczną, osadzoną na jednym z końców osi obrotu lunety.

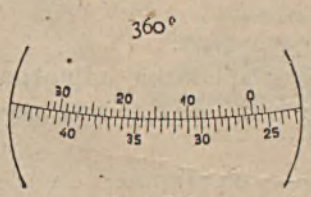
Obecnie wyrabiane są zagranicą teodolity o małych średnicach limbusów. Lunety teodolitów są lunetami astronomicznemi, t. j. dają obrazy odwrócone. Limbus jest podzielony na części stopnia lub grady. Tak np. rys. 325 c podaje nonjusz przy podziale limbusu na stopnie, rys. 325 d — przy podziale gradowym (u nas prawie nie stosowanym). Rys. 325 podaje nazwy składowych części repetycyjnego teodolitu.

35. Libela koła pionowego
34. Koło pionowe.
38. Nakrętka sprzęgająca koło pion.
37. Lupa nonjuszu.
49. Śrubka rektyfikacyjna libelki.
46. Wyciąg siatkowy.
36. Śrubka rekt. alhidady koła pion.
28. Libela pudełkowa.
43. Śrubki rektyf. nitek
25. Lupa nonjuszu.
44. Ortoskopowy okular.
24. Celuloid. pochwa lupy
23. Okienko nonjuszu.
21. Limbus.
17. Sprzęg alhidady.
16. Pochwa sprężyny leniwki limbusu.
15. Leniwka limbusu.
12. Śrubka zacisk. śrubę nastawową.
9. Krążek śruby nast.
10. Podkładany pod śr. nastaw. krąż. metal
5. Sprężyna spiralna.
6. Nakrętka; przyciska spręż. do statywu.
7. Krążek dolny śruby; wkręcamy nim śrubę w pochwę 4.
8. Haczyk do pionu; wykręcany.



Rys. 325.

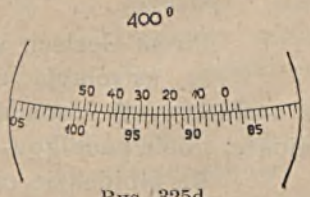
39. Objektyw.
48. Libela na lunecie.
32. Śruba zacisk. lunety.
30. Nakr. łoż. z pręc. dla nóżek busoli lub nasadkowej libeli.
29. Oś obrotu lunety.
31. Sprzęg lunety.
27. Libela na podstawce lunety.
33. Leniwka lunety.
40. Kółko kremoljery.
47. Djopter dla przybliż. celowania.
41. Przykr. trybu kremolj.
42. Oprawa krzyża nitek.
45. Śrubka wyc. okular.
26. Libela na alhidadzie.
22. Pokrywa alhidady i limbusu.
19. Leniwka alhidady.
20. Pochwa, wewnątrz sprężyna.
18. Zacisk alhidady.
14. Zacisk limbusu.
13. Sprzęg limbusu.
11. Trójnożna spodarka.
4. Pochwa gwintowana dla sprzęgu statywu z teodolitem.
3. Głowica statywu.
1. Nóżka statywu.
2. Trzpień śruby zaciskowej nóżki statywu.



Rys. 325c.

Ustalmy wartość podziałki i odczyt na nonjuszach rys. 325c i d (§ 87). Limbus jest podzielony co 30', nonjusz na 30 części (rys. 325c), więc wartość podziałki wynosi:

$$t = \frac{l}{m+1} = \frac{30'}{30} = 1'$$



Rys. 325d.

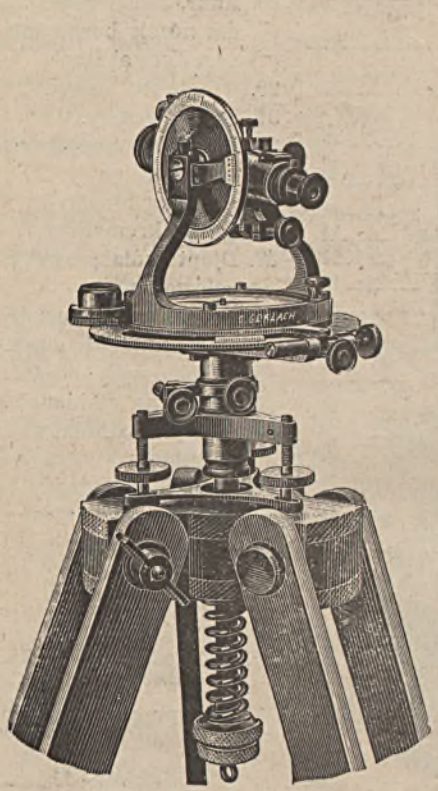
Trzynasta kreska nonjuszu jest przedłużeniem kreski limbusu; odczyt wynosi więc 26°13'. Podobnie dla podziału gradowego mamy:

$t = \frac{l}{m+1}$; $l = 50'$, $m = 25$; $t = 2'$. Odczyt wyniesie: 87° 24'

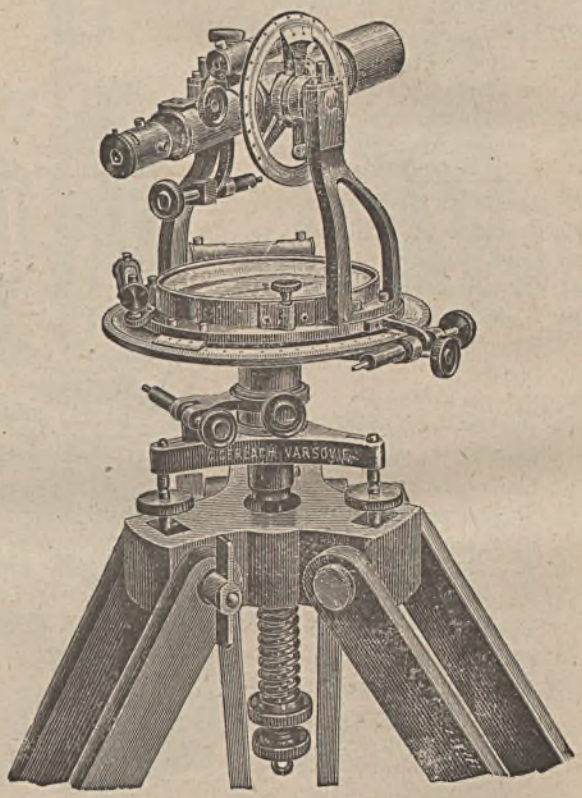
§ 130. Typy teodolitów.

Z pośród całego szeregu fabryk narzędzi geodezyjnych, wyróżnia się zaletami wyrobów i dostosowaniem do potrzeb miernictwa w naszych warunkach firma Gerlach. Teodolity tej firmy są nie mniej dokładne, niż teodolity, wyrabiane przez firmy niemieckie, jak Breithaupt, Reiss, lub austrjackie, jak Fromme, Starke — Kamerer, jeżeli pominąć teodolity mikroskopowe, które dotychczas w Polsce nie są wyrabiane.

Rys. 325 przedstawia teodolit repetycyjny firmy Breithaupt.



Rys. 325 a.



Rys. 325 b.

Firma Gerlach w Warszawie wyrabia następujące typy:

1) astrolabja repetycyjna z lunetą (rys. 325 a); spodarka trójnożna z nastawowemi śrubami; koło poziome o średnicy 13 *cm.*, dwa 2′-owe nonjusze; libela pudełkowa.

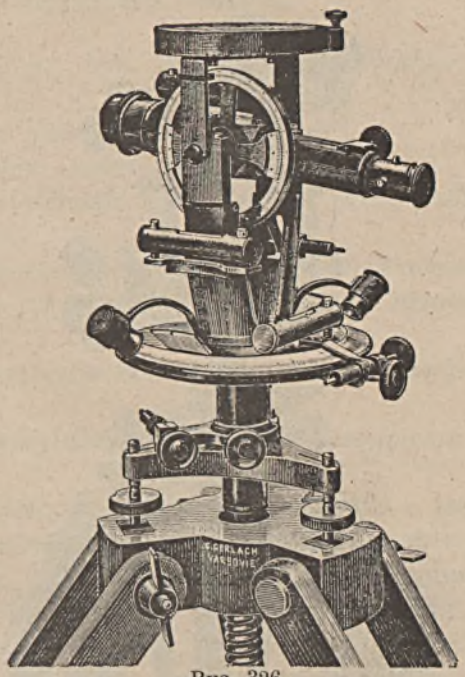
Na alhidadzie osadzona jest busola, z podziałem na stopnie. Astrolabja z libelami rurkowemi przedstawiona jest na rys. 325 b. Obydwie astrolabje posiadają koła pionowe bez lup przy nonjuszach.

Długość igły magnesowej wynosi 8 *cm.* Powiększenie lunety w przybliżeniu 12-krotne. Luneta jest osadzona centrycznie, t. j. oś limbusu przecina oś lunety. Na osi obrotu lunety osadzone jest koło pionowe o średnicy 7 *cm.* z 5′-owym nonjuszem, obracające się razem z lunetą.

Luneta przerzuca się przez oś, t. j. może obrócić się o 360° dokoła osi obrotu. Do lunety przymocowana jest libela. Przyrząd jest repetycyjnym teodolitem. Ma zastosowanie w pomiarach mniej dokładnych. Luneta posiada dalekomierz o stałych nitkach.

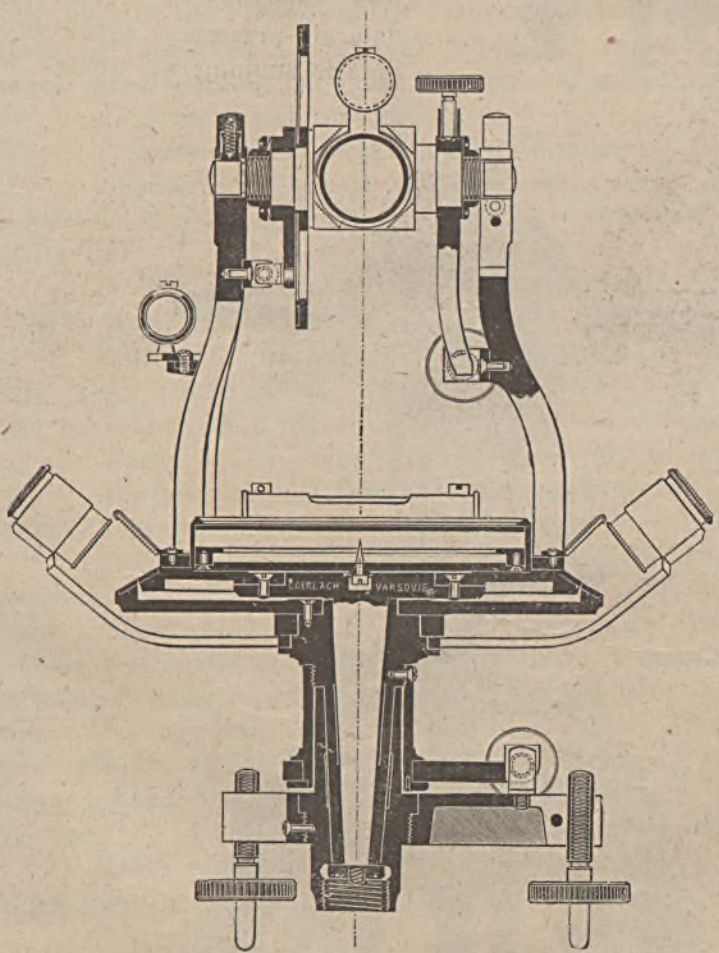
Limbus jest płaskiem kołem.

2) Mały zwykły teodolit, który posiada na alhidadzie i podstawce lunety dwie rurkowe libele (rys. 326). Koło poziome o średnicy 13 *cm.* jest ścięte stożkowo na obwodzie, i na tę stożkową powierzchnię naniesiony jest podział; podobnie jest zbudowana alhidada z dwoma nonjuszami. Dokoła środka alhidady obracają się na wspólnej osi dwie lupy dla odczytywania nonjuszów. Powiększenie lunety jest 17-krotne, długość — 19 *cm.*

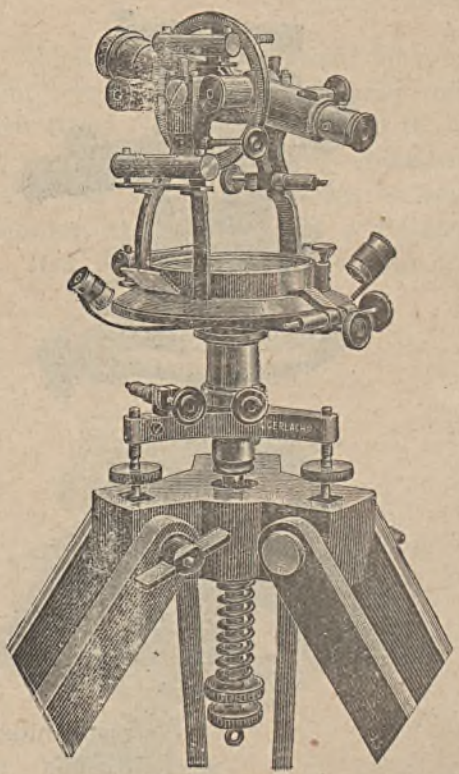


Rys. 326.

Luneta jest osadzona centrycznie; może być przerzucana przez oś obrotu. Busola nasadkowa ustawia się na osi obrotu lunety. Koło pionowe nie posiada lup przy nonjuszach. Rys. 326a jest przekrojem



Rys. 326a.



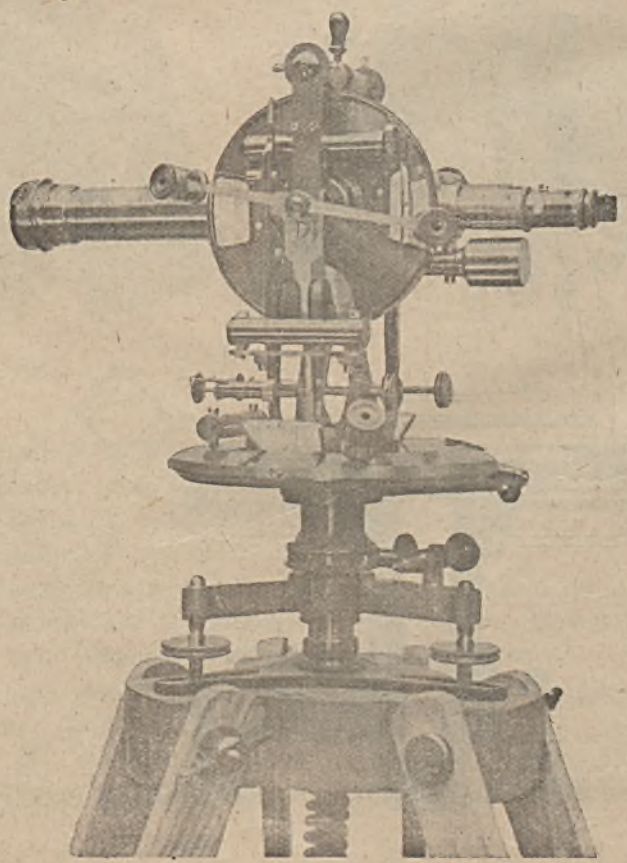
Rys. 327.

wzdłuż osi pionowej teodolitu z libelą na lunecie.

3) Mały repetycyjny teodolit z busolą (rys. 327); 2 jednominutowe nonjusze z lupami— na kole poziomem i pionowem. Powiększenie lunety=17. Na alhidadzie i podstawce lunety znajdują się krzyżowe libele. Luneta centryczna, przerzucana przez oś. Koło busolowe, podzielone na stopnie.

4) Teodolity 10″ (rys. 338) i 30″-owe z kołami pionowemi 30″ i 60″-wemi.

Luneta I-ego teodolitu powiększa 25, drugiego 17 razy. Libela nasadkowa; druga libela złączona jest z podstawką lunety prostopadle do nasadkowej. Luneta osadzona jest centrycznie; daje się przerzucać przez oś. Na lunecie znajduje się libela.



Rys. 328.

§ 131. Sprawdzenie i rektyfikacja teodolitu.

W konstrukcji teodolitu powinny być zachowane następujące warunki:

1) podział limbusu i nonjuszu powinien być dokładny;

2) alhidada winna być osadzona centrycznie;

3) osie libeli rurkowych na alhidadzie powinny być prostopadłe do osi pionowej teodolitu;

4) płaszczyzna kolimacyjna powinna być prostopadła do limbusu;

5) w teodolicie repetycyjnym oś alhidady powinna być identyczną lub ∥-ą do osi limbusu;

6) w teodolicie z busolą płaszczyzna kolimacyjna winna przechodzić przez średnicę 0^0 — 180^0 busoli.

Pierwsze dwa warunki rozpatrzyliśmy dostatecznie szczegółowo przy gonjometrze.

Warunek 3-ci został szczegółowo rozpatrzony w dziale o rektyfikacji libeli rurkowej; dla teodolitu warunek ten brzmi nieco inaczej: mianowicie, w dziale o libelach mówiliśmy, że oś libeli rurkowej powinna być ∥-ą do podstawy libeli, którą w teodolicie jest alhidada, względnie (gdy libela jest umieszczona na podstawkach lunety) prosta ∥-a do alhidady; ponieważ płaszczyzna alhidady jest ⊥-a do osi alhidady, a więc tem samem do pionowej osi teodolitu, przeto określenie „równoległość osi libeli do płaszczyzny alhidady“ zupełnie da się zastąpić przez zwrot „prostopadłość osi libeli do pionowej osi przyrządu“.

Rektyfikacja sprowadza się do:

1) sprowadzenia bańki libeli do środka;

2) odwrócenia libeli o 180^0 przez obrót alhidady do położenia, w którem odczyt z nonjuszu zmieni się w stosunku do 1-go położenia libeli o 180^0;

3) usunięcia połowy odchylenia bańki od środka zapomocą śrubek rektyfikacyjnych libeli.

Kilkakrotne powtórzenie (tem większą ilość razy, im czulszą jest libela) tego postępowania sprowadzi oś libeli do prostopadłości z pionową osią teodolitu. Sprężyny spiralnej statywu nie należy zbyt zaciskać.

Warunek 4-ty szczegółowo rozpatrzymy w następnym paragrafie.

Równoległość osi limbusu i alhidady sprawdzamy w teodolicie repetycyjnym (warunek 5-ty) w następujący sposób:

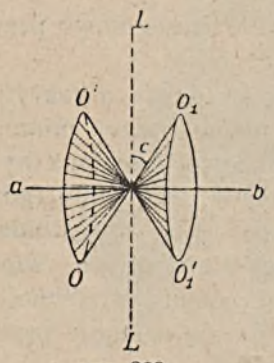
Po zrektyfikowaniu libeli i sprowadzeniu płaszczyzny alhidady do poziomu przez sprowadzenie bańki libeli za pośrednictwem śrub nastawowych spodarki do środka przy dwu położeniach libeli, mniej więcej wzajemnie prostopadłych — sprzęgamy alhidadę z limbusem przez dokręcenie zacisku alhidady i zwalniamy sprzęg limbusu przez odkręcenie zacisku limbusu. Gdy obrócimy limbus dokoła osi i przy kilku położeniach limbusu spostrzeżemy, iż bańka libeli ustawia się właściwie — warunek jest zachowany; większe wychylenia libeli wskażą, że teodolit jest wadliwie wykonany. Tę wadę może usunąć fabryka przyrządów geodezyjnych.

Ażeby sprawdzić w teodolicie Gerlacha, czy płaszczyzna kolimacyjna lunety przechodzi przez średnicę 0^0—180^0 busoli, należy nasadzić na objek-

tyw przykrywkę, w środku której znajduje się mały otworek i, patrząc przez ten otworek, pochylać okular do czasu, gdy w polu widzenia ujrzymy podział busoli. Jeżeli 0^0 i 180^0 znajdują się w środku pola widzenia, dowodzi to, że warunek jest zachowany. Przed rektyfikacją teodolitu należy nóżki statywu mocno wcisnąć w ziemię.

§ 132. Błąd kolimacyjny lunety.

Powierzchnia, opisywana przez oś celową lunety przy obrocie lunety dokoła jej osi obrotu, wówczas tylko jest płaszczyzną, gdy oś celowa lunety jej prostopadła do osi obrotu.



rys. 329.

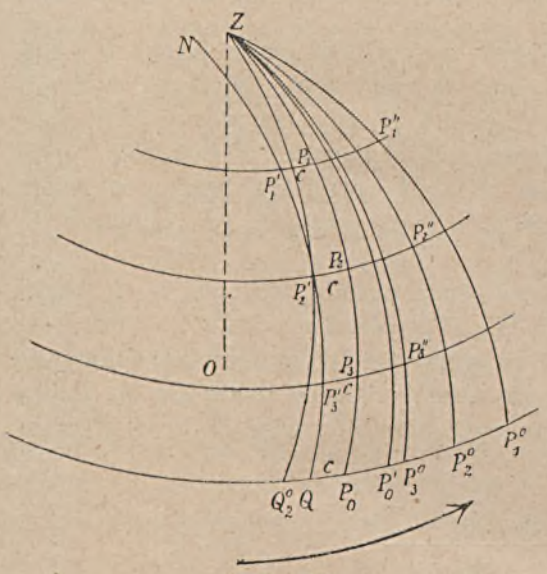
Gdy oś celowa lunety OO_1 nie jest $\perp$-a do osi obrotu lunety *ab*, wówczas oś celowa, przy obrocie lunety dokoła *ab*, opisze powierzchnię podwójnego stożka (rys 329). Oczywistem jest, że przy każdem położeniu osi celowej kąt, zawarty między osią obrotu *ab* i osią celową, nie ulega zmianie, tak jak i kąt między osią celową a płaszczyzną LL $\perp$-ą do *ab*, przechodzącą przez punkt przecięcia się obydwu osi. Błędem kolimacji nazywamy kąt *c*, zawarty między osią celową a $\perp$-ą LL do osi obrotu.

Przypuśćmy, że dokoła środka limbusu opisano kulę tak wielkim promieniem, że odległośc osi obrotu od limbusu może być przyjęta za wielkość nieskończenie małą (rys. 330). Przedłużmy płaszczyznę limbusu do przecięcia się z kulą na kole wielkiem kuli, które będziemy traktować jako limbus. Ponieważ luneta jest osadzona na osi obrotu bardzo dokładnie, przeto prostą LL z poprzedniego rysunku możemy uważać za oś geometryczną lunety. Oś geometryczna lunety przy jej obrocie opisuje płaszczyznę prostopadłą do limbusu, gdyż zakładamy, że oś obrotu lunety jest równoległa do limbusu. Płaszczyzna ta w przecięciu się z opisaną kulą, jako przechodząca przez środek limbusu, daje koło wielkie kuli, przechodzące przez biegun *Z*, t. j. punkt, leżący na kuli w przecięciu jej przez prostopadłą do limbusu, poprowadzoną przez jego środek.

Gdy alhidada pozostaje nieruchomą, oś geometryczna lunety przesuwa się po tem samem kole wierzchołkowem $ZP_1\ P_2\ P_3$, zaś oś celowa w przecięciu się z kulą przy obrocie lunety opisuje łuk koła małego, równoległy do $ZP_1\ P_2\ P_3$, a mianowicie *NQ*, stale odległy od koła wierzchołkowego o łuk *c*, równy błędowi kolimacyjnemu.

Poprowadzimy przez trzy punkty P_1 P_2 i P_3 koła wierzchołkowego płaszczyzny $\parallel$-e do limbusu, przecinające naszą kulę wzdłuż łuków równoleżników $P_1'\ P_1$; $P_2'\ P_2$, $P_3'\ P_3$. Przypuśćmy, że oś geometryczna skierowana jest na pewien obserwowany punkt, leżący na promieniu $O\,P_1$; wówczas oś celowa lunety obrócona jest w kierunku $O\,P_1'$; jeżeli oś celową skierujemy na ten sam obserwowany punkt, t. j. przesuniemy ją do położenia $O\,P_1$, to oś geometryczna przesunie się do kierunku OP_1'' o łuk $P_1\ P_1'' = c$. Łuki $P_1\ P_1''$, $P_2\ P_2''$, $P_3\ P_3''$ są na rysunku znacznie powiększone. Załóżmy, że zero nonjuszu znajduje się w płaszczyźnie wierz-

chołkowej osi geometrycznej lunety, a więc przy osi celowej, skierowanej do P_1, odczytem z limbusu będzie $P_1{}^0$.



Rys. 330.

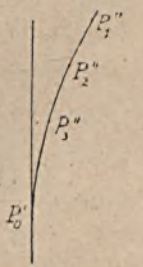
Rozpatrzmy inny punkt, leżący w tej samej płaszczyźnie wierzchołkowej co i P_1, np., punkt P_2. Skierowanie nań osi celowej przesunie oś geometryczną lunety w ten sposób, że jej przecięcie się z kulą wypadnie w punkcie P''_2 równoleżnika punktu P_2, w odległości $P_2\ P_2'' = c$, zaś odczytem z limbusu, odpowiadającym temu położeniu lunety, będzie P^0_2, jako odczyt położony w płaszczyźnie wierzchołkowej punktu P''_2. Dla niższego punktu P_3 oś geometryczna zajmie kierunek OP''_3, odczytem będzie P^0_3, zaś dla kierunku do P_0 w poziomie, leżącego w płaszczyźnie wierzchołkowej punktów $P_1\ P_2\ P_3$ oś geometryczna zajmie położenie OP'_0 i odczytem będzie P'_0.

Stąd widzimy, że dla punktów, leżących coraz to wyżej nad poziomem limbusu (a to samo dotyczy i punktów pod poziomem) w tej samej płaszczyźnie wierzchołkowej, jedynie dzięki błędowi kolimacyjnemu lunety mieć będziemy coraz to większe różnice w odczytach w porównaniu z kierunkiem poziomym OP_0 dla którego odczytem jest P'_0; różnica ta od $P'^0\ P^0_3$ dla punktu P_3 wzrasta do $P'_0\ P_1{}^0$ dla punktu P_1. Stąd wnioskujemy, że błąd kolimacyjny zniekształca wszystkie odczyty z limbusu i przytem nierównomiernie, mianowicie, większe zniekształcenia odpowiadają odczytom kierunków, bardziej odchylonych od poziomu.

Jak widzieliśmy przy celach do punktów $P'_0\ P''_3\ P''_1$ oś geometryczna lunety przesuwa się po kole wierzchołkowem $P_0\ P_3\ P_2\ P_1$, a więc alhidada nie zmienia swego położenia.

Gdybyśmy tedy skierowali lunetę w poziomie na punkt na pionie i przykręcili zacisk alhidady, to w miarę podnoszenia lunety ku górze oś celowa (krzyż nitek) odchylałaby się coraz bardziej od pionu.

Na poprzednim rysunku pion punktu P'_0 leży w płaszczyźnie wierzchołkowej ZP'_0; przy podnoszeniu lunety krzyż nitek nie przesuwa się po łuku płaszczyzny wierzchołkowej ZP'_0 a odsuwa się od niej do punktów $P''_3\ P''_2$ i P'_1 o kąty mierzone łukami $P'_0\ P^0_3$, $P'_0\ P^0_2$, $P'_0\ P^0_1$.

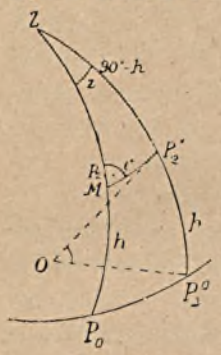


Rys. 331.

Odnosi się wówczas wrażenie, że krzyż nitek przesuwa się po krzywej, stycznej do pionu w punkcie P'_0, leżącym w poziomie teodolitu (rys. 331).

§ 133. Błąd kolimacji a odczyt z limbusu.

Ustalmy wielkość wpływu błędu kolimacyjnego na odczyt z limbusu.



Rys. 332.

Poprowadzimy w tym celu przez punkt P''_2 łuk koła wielkiego, ⊥-ego do koła $Z P_2$; wielkość wpływu błędu kolimacji ustala łuk $P_0 P^0_2$, na płaszczyźnie limbusu mierzony kątem z przy biegunie Z. Łuk koła ⊥-ego do $Z P_2$ t. j. łuk $P''_2 M$ różni się bardzo niewiele od łuku $P''_2 P_2 = c$, z tego względu przyjmujemy że $\smile P''_2 M = c$.

Jeżeli wysokością punktu P''_2 jest $\sphericalangle h$, odpowiadający łukowi $P''_2 P^0_2$, wówczas $\smile ZP''_2 = 90^0 - h$.

Ponieważ ze sferycznej trygonometrji wiemy, że w △-ach kulistych sinusy boków mają się do siebie, jak sinusy przeciwległych kątów, więc dla △-a sferycznego $Z P''_2 M$ napiszemy:

$$\frac{\sin M}{\sin z} = \frac{\sin (90^0 - h)}{\sin c},$$

wobec tego zaś, że

$$M = 90^0,$$

przeto

$$\sin c = \sin z \cos h,$$

a ponieważ i c i z są małemi kątami, więc

$$c \sin 1'' = z \sin 1'' \cos h,$$

skąd

$$c = z \cos h$$

i wpływ błędu kolimacji wyrazi się przez wzór:

$$z = \frac{c}{\cos h}$$

Stąd:

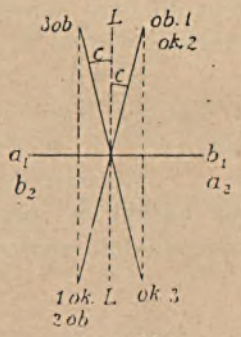
1) przy $h = o$ $\quad z = c$,

2) przy wzrastaniu h, cos h_1 się zmniejsza, więc z wzrasta.

§ 134. Pomiar kierunków i kątów wobec błędu kolimacyjnego lunety.

Przypuśćmy, że luneta skierowana jest na pewien punkt, zajmując położenie Okular — Objektyw (rys. 333). Obróćmy alhidadę ściśle o 180°; wówczas oś obrotu lunety odwróci się od położenia $a_1 b_1$ do położenia $a_2 b_2$, zaś luneta zostanie skierowana do położenia Ok_2 — 2 Ob w rzucie

na poziom. Jeżeli następnie przerzucimy lunetę przez zenit, t. j. obrócimy lunetę dokoła jej osi obrotu, wówczas oś celowa opisze część powierzchni podwójnego stożka i objektyw zajmie położenie 3 *Ob*, skierowane w lewo od osi geometrycznej *hh* o ten sam kąt *c*. Jeżeli tedy przy pierwszem położeniu lunety błąd *c* był dodatnim, to w położeniu Ok_3 — 3 *Ob* lunety, po obróceniu jej dokoła osi, błąd *c* będzie ujemnym, gdyż oddziaływa w kierunku odwrotnym.



Rys. 333.

Skoro więc przy celu do punktu, np. P_2 (patrz rysunek 330) wpływ błędu kolimacji na odczyt wyniesie

$$\smile P_0\ P^0_2 = \frac{c}{\cos h_2}$$

to po przełożeniu lunety przez zenit, gdy oś geometryczna skierowana będzie do P_2,— celowa skieruje się ku P''_2, zaś przesunięcie jej do P_2 przesunie oś geometryczną w kierunku $P_2\ P'_2$, wskutek czego odczytem będzie

$$P_0\ P^0_2$$

lecz ze znakiem odwrotnym, t. j.

$$r - \frac{c}{\cos h_2}$$

Ponieważ zaś na miejsce nonjuszu przy P_0, po odwróceniu alhidady o 180°, przyszedł nonjusz drugi, przeto odczyt *r* rożnić się będzie od odczytu P^0_2 o łuk $2\ r \pm 180^0$.

Oznaczając więc właściwy odczyt przez *m*, odczyt P^0_2 przez m_1, odczyt *r* przez m_2, mamy:

$$m_1 = m + \frac{c}{\cos h}$$

$$m_2 = m - \frac{c}{\cos h} \pm 180^0$$

Stąd $m_1 + m_2 = 2m \pm 180^0$ i $m_1 - m_2 = \frac{2c}{\cos h} \pm 180^0$.

A utrzymując stopnie, wzięte przy 1-em położeniu lunety, gdyż błąd kolimacji wpływa w minutach, t. j. nie biorąc pod uwagę zmiany pierwszego odczytu o 180°, otrzymamy wzór na poprawiony kierunek w 1-em położeniu lunety: $m = \frac{m_1 + m_2}{2}$ oraz na wielkość wpływu błędu kolimacji:

$$\frac{c}{\cos h} = \frac{m_1 - m_2}{2}$$

Jak stąd widzimy, średnia odczytów w minutach, wziętych przy

celu do tego samego punktu przy obydwu położeniach lunety, usuwa całkowicie wpływ błędu kolimacji.

Stąd wniosek: ażeby wyniki pomiaru kierunków, a więc i kątów, były wolne od wpływu błędu kolimacji, należy je mierzyć w dwu położeniach lunety.

Rozpatrzmy pomiar kąta; przy celu w jednym kierunku otrzymujemy odczyt m_1, przy celu w drugim — m_2; kąty pochylenia kierunków są odpowiednio równe h_1 i h_2; odczytami właściwemi są

$$M_1 = m_1 + \frac{c}{\cos h_1}$$

$$M_2 = m_2 + \frac{c}{\cos h_2}$$

Istotną wielkością kąta jest

$$x = M_2 - M_1 = (m_2 - m_1) + c\left(\frac{1}{\cos h_2} - \frac{1}{\cos h_1}\right)$$

Stąd wnioskujemy, że, mierząc kąt przy jednem położeniu lunety, usuwamy wpływ błędu kolimacji jedynie wtedy, gdy obydwa kierunki są jednakowo pochylone do poziomu, gdyż przy $h_1 = h_2$ wyraz

$$c\left(\frac{1}{\cos h_2} - \frac{1}{\cos h_1}\right) = 0$$

więc

$$x = m_2 - m_1$$

Natomiast przy różnych kątach pochylenia obydwu kierunków, kąt, pomierzony przy jednem położeniu lunety, będzie obarczony wpływem błędu kolimacji.

§ 135. Usunięcie błędu kolimacyjnego.

Z ostatniego rysunku wynika, że po odwróceniu alhidady o 180° i przerzuceniu lunety przez zenit, oś celowa od poprzedniego położenia odchyla się o kąt równy $2c$, o ile pochylenie osi celowej w obydwu położeniach lunety jest niezmiennem. Ażeby więc usunąć błąd kolimacji, należy:

1) skierować oś celową na wyraźny punkt,

2) obrócić alhidadę ściśle o 180° (odczytując nonjusz) i przerzucić lunetę przez zenit,

3) skierować lunetę na taką wysokość, aby nić pozioma siatki nitek przechodziła przez zaobserwowany punkt: jeżeli istnieje błąd kolimacji, wówczas krzyż nitek nie będzie kryć zaobserwowanego poprzednio punktu,

4) określimy na oko środek odcinka, łączącego krzyż nitek z obserwowanym punktem Z i przez obrót bocznych śrubek rektyfikacyjnych krzyża nitek przesuniemy krzyż nitek do określonego środka odcinka. Całe postępo-

wanie należy powtórzyć, dopóki po przerzuceniu lunety przez zenit krzyż nitek nie przejdzie wreszcie przez obserwowany punkt.

Usunąć możemy błąd kolimacji również nieco inaczej, pamiętając, że średnia odczytów przy celu do tego samego punktu usuwa wpływ błędu kolimacji, a mianowicie:

1) kierujemy oś celową lunety na wyraźny punkt i notujemy odczyt z obydwu nonjuszów (średnią m_1);

2) przerzucamy lunetę przez zenit i celujemy na ten sam punkt, notując średnią m_2 obydwu nonjuszów w minutach,

3) przy pomocy leniwki alhidady obracamy alhidadę do odczytu

$$\frac{m_1 + m_2}{2},$$

nie zmieniając odczytu w stopniach,

4) ponieważ przy tym odczycie cel do punktu jest wolny od wpływu kolimacji, pozostaje krzyż nitek przesunąć do obrazu obserwowanego punktu.

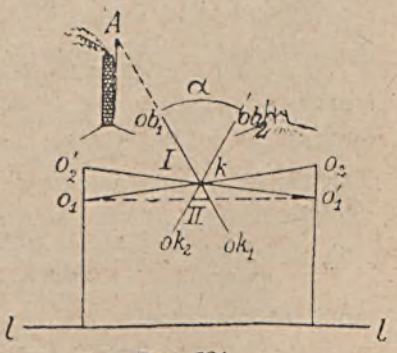
Postępowanie całe należy powtórzyć aż do usunięcia błędu.

UWAGA. Za obserwowany punkt obierać należy taki, do którego kierunek jest znacznie pochylony do poziomu.

§ 136. Błąd położenia osi obrotu lunety.

Oś obrotu lunety powinna być ∥-ą do limbusu, a więc ⊥-ą do osi pionowej teodolitu. Gdy błąd kolimacyjny lunety jest usunięty, odchylenie osi obrotu od właściwego położenia powoduje pochylenie płaszczyzny kolimacyjnej do limbusu, co nie powinno mieć miejsca, ponieważ płaszczyzna kolimacyjna w zasadzie jest ⊥-ą do limbusu.

Łatwo wykryć istnienie tej wady w przyrządzie: należy skierować oś celową lunety na uspokojony pion lub narożnik ściany i pochylać lunetę w dół i ku górze; jeżeli oś celowa przecina pion i w miarę podnoszenia lub opuszczania lunety oddala się od pionu, dowodzi to, że oś obrotu lunety nie jest ∥-ą do limbusu.



Rys. 334.

Nierównoległość osi obrotu lunety do limbusu jest wynikiem niejednakowej wysokości podstawek lunety. Przypuśćmy, że *ll* jest spoziomowanym limbusem (rys. 334), oś obrotu lunety zaś zajmie położenie $O_1\ O_2$, pochylone do poziomu, i oś celowa lunety zajmuje położenie $ok_1 - ob_1$ (okular—objektyw). Po obróceniu alhidady ściśle o 180° i przerzuceniu lunety przez zenit, oś obrotu lunety zajmie położenie $O'_1\ O'_2$, zaś oś celowa będzie znów do niej prostopadła w dowolnem pochyleniu, np., $ok_2 - ob_2$. Rysunek daje osiowy przekrój pionowy przyrządu; $ok_1 - ob_1$ i $ok_2 - ob_2$ są śladami (przecięciem) płaszczyzn kolimacyjnych przy obydwu położeniach osi obrotu.

Przecięcie się obydwu płaszczyzn kolimacyjnych daje prostą, przechodzącą przez punkt k przecięcia się osi celowych w obydwu położeniach lunety (przed i po przesunięciu alhidady o 180°); ponieważ obydwie płaszczyzny kolimacyjne są $\perp$-e do płaszczyzny przekroju pionowego (rysunku), przeto i prosta przecięcia się płaszczyzn kolimacyjnych będzie również prostopadła do powierzchni przekroju, wobec tego zaś, że ta ostatnia jest pionowa, więc prosta przecięcia się jest pozioma.

Przy celu do punktu w poziomie, odczyty z limbusu będą się tedy różnić ściśle o 180° przed i po przerzuceniu lunety przez oś obrotu, co też powinno właśnie mieć miejsce.

Ale teraz przypuśćmy, że oś celowa jest pochylona do poziomu i skierowana na pewien punkt A. Odwróćmy alhidadę ściśle o 180° i przerzućmy lunetę przez zenit: płaszczyzna kolimacyjna zajmie położenie II, t. j $ok_2 - ob_2$, tworzące z I-em położeniem kąt dwuścienny α. Ażeby oś celową skierować na punkt A należy alhidadę obrócić o pewien kąt. Jaka jest wielkość tego kąta? Jeżeli punkt leży na prostopadłej (do płaszczyzny rysunku), przechodzącej przez punkt k (a więc leży gdziekolwiek w poziomie punktu k, gdyż alhidada wówczas odpowiednio się przesunie, zaś rysunek pozostanie bez zmiany), to, jak poprzednio stwierdziliśmy, pomimo odchylenia się płaszczyzny kolimacyjnej w II położeniu od I-ego o ten sam kąt α, — alhidady, po przesunięciu od I-ego do II-ego położenia o 180°, więcej nie należało przesuwać.

Skierowanie zaś lunety do punktu A nad poziomem wymaga już pewnego przesunięcia, które stoi w związku z kątem pochylenia osi celowej do poziomu. Ustalmy tę zależność.

§ 137. Nierównoległość osi obrotu lunety do limbusu a jej wpływ na odczyt.

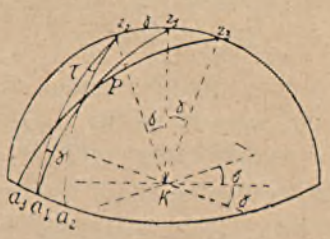
Przypuśćmy, że oś obrotu lunety leży w płaszczyźnie rysunku; rozpatrzmy trzy położenia osi obrotu lunety: 1) $\parallel$-e do limbusu, 2) pochylone do limbusu pod kątem γ i 3) położenie, utworzone z 2-ego przez obrót alhidady o 180°. Zatoczmy dokoła środka limbusu kulę promieniem takiej wielkości, by w skali rysunku można było uważać, że oś obrotu leży w płaszczyźnie limbusu. Płaszczyzny kolimacyjne w każdem położeniu osi obrotu lunety są $\perp$-e do tej osi, a więc przechodzą przez 1) punkt k przecięcia się osi obrotu z osią celową i 2) przez idącą przez punkt k prostopadle do osi obrotu lunety prostą kz przecięcia się płaszczyzny kolimacyjnej z płaszczyzną pionową P, przecinającą oś obrotu.

Załóżmy, że zero nonjuszu leży w przecięciu się płaszczyzn limbusu i kolimacyjnej.

Jeżeli w I i II położeniu osi obrotu lunety skierujemy oś celową do punktu P, wówczas płaszczyzny kolimacyjne przetną się z kulą wzdłuż łuków $z_1 P a_1$ i $z_2 P a_2$, a więc w zależności od zmiany w położeniu osi obrotu lunety zmieniać się będzie i odczyt na limbusie z a_1 na a_2.

Określmy wpływ pochylenia γ osi obrotu lunety do poziomu na odczyt z limbusu.

Poprowadźmy przez z_2 i a_1 łuk koła wielkiego kuli, a utworzy się △ sferyczny $z_2 Pa_1$, w którym kąt $a_1 = \gamma$; kąt $z_2 = \smile a_2 a_1 = \tau$ wyznacza wpływ błędu kolimacji na odczyt z limbusu. Mamy proporcję (sinusów kątów do sinusów przeciwległych boków △-a sferycznego $z_2 Pa_1$)



Rys. 335.

$$\frac{\sin \tau}{\sin \gamma} = \frac{\sin Pa_1}{\sin Pz_2}$$

lecz łuk Pa_1 mierzy pochylenie celu do P; oznaczmy $\smile Pa_1 = h$ (w radjanach); zaś Pz_2 może być przyjęte za $90^0 - h$.

Stąd

$$\frac{\sin \tau}{\sin \gamma} = \frac{\sin h}{\sin(90^0 - h)} = \frac{\sin h}{\cos h} = tgh;$$

dla małych kątów, któremi są τ i γ, zamieńmy ostatnie równanie na

$$\tau = \gamma \, tg \, h$$

Jak stąd widzimy, wpływ pochylenia osi obrotu lunety na odczyt wzrasta dla celów, coraz to bardziej pochylonych do poziomu, i przy $h = 45^0$

$$\underline{\underline{\tau = \gamma}}$$

W położeniu II lunety (przełożenie lunety przez zenit i skierowanie na punkt P) znak γ ulega zmianie i wobec tego $\tau_1 = \gamma \, tg \, h = -\tau$, t. j. odczyt a_3 przypadnie z innej strony a_1 niż a_2, lecz wielkości absolutne $a_1 a_2$ i $a_1 a_3$ są równe.

Stąd wynika, że właściwy odczyt a_1 jest równym:

$$1) \quad a_1 = a_2 + \gamma \, tg \, h$$
$$2) \quad a_1 = a_3 - \gamma \, tg \, h$$

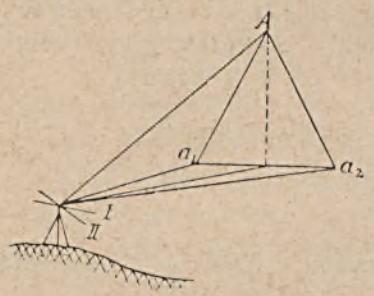
przeto

$$\underline{\underline{a_1 = \frac{a_2 + a_3}{2}}}$$

co dowodzi, iż pomiar kierunku przy dwu położeniach lunety daje średnią arytmetyczną odczytów, wolną od wpływu pochylenia osi obrotu lunety.

§ 138. Rektyfikacja.

Ażeby usunąć źródło błędu, ustawiamy teodolit, kierujemy na bliski, ale wysoki punkt A (rys. 336) na ścianie, opuszczamy lunetę do poziomu i wyznaczamy punkt a_1 przecięcia się przedłużenia osi celowej (krzyż nitek) ze ścianą. Następnie oś obrotu lunety odwracamy do położenia II kierując przerzuconą przez zenit lunetę znów na punkt A. Opuszczając następnie lunetę do poziomu wyznaczamy na ścianie, jak poprzednio, punkt a_2. Jeżeli a_2 leży w prawo od a_1, to prawa podstawka osi obrotu lunety jest wyższą, jeżeli a_2 leży w lewo od a_1, to lewa podstawka jest wyższą.



Rys. 336.

Zapomocą odpowiedniego obrotu śrubek rektyfikacyjnych w jednej z podstawek opuszczamy lub podnosimy oś obrotu (patrz § 94 rys. 259), mianowicie gdy a_2 leży w prawo od a_1, opuszczamy styk osi obrotu z prawą. lub podnosimy styk z lewą podstawką, i odwrotnie w wypadku, gdy a_2 leży w lewo od a_1.

Tak postępujemy do czasu, gdy, opuszczając w dół oś celową lunety od punktu A, ujrzymy krzyż nitek ściśle na wyznaczonym środku a odcinka $a_1\ a_2$.

Często korzystamy z łaty, podzielonej na centymetry, położonej pod A prostopadle do kierunku na teodolit. Punkty a_1 i a_2, oraz a odnotujemy jako odczyty na łacie.

Gdy luneta teodolitu nie przerzuca się przez zenit, kierujemy lunetę na róg ściany lub zawieszony pion i stwierdzamy, czy przy podnoszeniu lub opuszczaniu lunety oś celowa przecina pion, czy nie. Jeżeli przecina, odsuwając się od pionu w kierunku lewym przy opuszczaniu lunety, wówczas lewą podstawkę lunety należy skrócić, lub prawą zwiększyć i odwrotnie — przy odchylaniu się osi celowej w prawo od pionu przy opuszczaniu lunety.

§ 139. Pomiar kątów poziomych.

Dla otrzymania dobrych wyników przy pomiarze kątów należy zachować wszystkie warunki, którym ten pomiar powinien odpowiadać, a więc:

1) teodolit winien być ustawiony centrycznie nad wierzchołkiem mierzonego kąta,

2) limbus winien być spoziomowany,

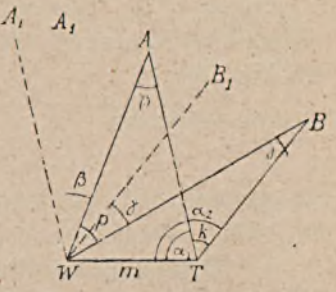
3) płaszczyzna kolimacyjna powinna przechodzić przez obserwowany punkt,

4) stosowana metoda pomiaru powinna likwidować lub unieszkodliwiać w miarę możności wpływ błędów instrumentalnych.

Rozpatrzmy szczegółowo powyższe wymagania dla stwierdzenia, w jakim stopniu wolno odchylać się od nich w praktyce pomiarowej.

§ 140. Ekscentryczny pomiar kąta.

Przypuśćmy, że teodolit ustawiliśmy (rys. 337) nie nad wierzchołkiem W mierzonego kąta, a w pewnym punkcie T wskutek czego, zamiast kąta $p = AWB$, pomierzyliśmy kąt $ATB = k$.
Poprowadźmy przez W proste $A_1 W \parallel A T$ i $B_1 W \parallel B T$,



Rys. 337.

wówczas

$$\sphericalangle A_1 W B_1 = \sphericalangle A T B = k.$$

Ażeby otrzymać kąt właściwy $p = A W B$, należy kierunek $W A_1$ przechylić do $W A$ o kąt $\beta = A_1 W A$, zaś kierunek $W B_1$ przechylić do $W B$ o kąt $\gamma = B_1 W B$. Jako naprzemianległe, są równe

$$\sphericalangle A_1 W A = \sphericalangle W A T = \beta$$

$$\sphericalangle B_1 W B = \sphericalangle W B T = \gamma$$

W $\triangle$-ach $A W T$ i $B W T$, w których $W T = m$ i $\sphericalangle A T W = \alpha_1$ oraz $\sphericalangle B T W = \alpha_2$,

mamy

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha_1} = \frac{m}{A W} \qquad \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha_2} = \frac{m}{B W}$$

a, oznaczając $A W = d_A$ i $B W = d_B$,

otrzymamy

$$\sin \beta = \frac{m \sin \alpha_1}{d_A} \quad \text{i} \quad \sin \gamma = \frac{m \sin \alpha_2}{d_B}$$

ponieważ zaś odcinek m wobec AW i BW jest wielkością małą, przeto β i γ są małemi kątami, dla których poprzednie równania przyjmą postać:

$$\beta' = \frac{m \sin \alpha_1}{d_A \sin 1'} \qquad \gamma' = \frac{m \sin \alpha_2}{d_B \sin 1'}$$

lecz

$$\sphericalangle A_1 W B_1 + \gamma - \beta = \sphericalangle A W B$$

więc

$$k + \gamma - \beta = p$$

stąd

$$p = k + \frac{m}{\sin 1'} \left\{ \frac{\sin \alpha_2}{d_B} - \frac{\sin \alpha_1}{d_A} \right\}$$

Załóżmy $d_A = d_B = d$, co nie odbiega od wymagań praktyki, gdzie boki poligonów staramy się mieć o zbliżonej długości, wówczas

$$p = k + \frac{m}{d \sin'_1} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$$

Największą wartość wyraz ten osiągnie przy $\sin \alpha_2 = -\sin \alpha_1 = 1$, t. j. przy $\alpha_2 = 90^0$ i $\alpha_1 = 270^0$, a zatem przy $k = 180^0$, co też odpowiada najczęściej spotykanemu w praktyce wypadkowi, gdyż kąty poligonów są bliskie 180^0.

Będzie wówczas

$$r = p - k = \frac{2\,m}{d \sin_1'}$$

Określmy wielkość m, przy której wpływ ekscentrycznego ustawienia teodolitu na pomiar kąta, t. j. wyraz $p - k = r$, nie przekroczy 0,5′ przy bokach $d = 100$ m.

$$m = \frac{rd \sin 1'}{2} = \frac{0{,}5 \,.\, 100}{2.3438} = 0{,}007\, m$$

A więc odsunięcie osi pionowej teodolitu o 7 *mm* spowoduje błąd 0,5′ w pomiarze kąta, zaś dla boków 50 metrowych ten sam błąd 0′,5 w kącie popełnimy już przy 3,5 milimetrze odsunięcia osi teodolitu od wierzchołka mierzonego kąta.

Stąd wniosek: teodolit należy bardzo starannie centrować nad punktem; ponieważ zaś odcinek m zawsze będzie, gdyż idealnie ściśle teodolitu nie ustawimy, przeto należy obierać w terenie możliwie dłuższe boki poligonów.

Często zachodzi potrzeba ekscentrycznego pomiaru kąta, jak, np., w wypadku, gdy wierzchołek kąta znajduje się na grząskim gruncie, gdzie trudno o należyte ustawienie teodolitu, zaś o kilka metrów mamy grunt twardy. Wówczas należy pomierzyć możliwie dokładnie odcinek m i kąty α_1 i α_2, celując na szpilkę, wbitą w wierzchołek kąta. Kąty α_1 i α_2 mierzymy od kierunku na wierzchołek W w prawo.

Jak wiemy, wielkością właściwą kąta będzie

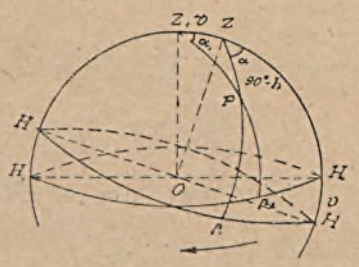
$$p = k + \frac{m}{\sin 1'} \left(\frac{\sin \alpha_2}{d_B} - \frac{\sin \alpha_1}{d_A} \right)$$

§ 141. Niedokładność poziomowania teodolitu.

Przypuśćmy, że po spoziomowaniu limbusu oś pionowa teodolitu tworzy z pionem kąt v, pod którym limbus jest pochylony do poziomu. Określimy powstający stąd błąd odczytu.

Załóżmy, że płaszczyzna limbusu $H_1 H'$ tworzy z poziomem $H H$ kąt υ. Oś teodolitu jest skierowana wzdłuż $O Z_1$ odchylając się od pionu $O Z$ o kąt υ; $O Z_1 \perp H_1 H'$ i $O Z \perp H H$.

Wyobraźmy sobie dla uproszczenia, że odczyty liczymy od H'. Gdyby limbus leżał w poziomie, płaszczyzna kolimacyjna byłaby zarazem wierzchołkową i przecinałaby kulę, opisaną dokoła środka teodolitu bardzo wielkim promieniem, wzdłuż łuku $Z P$.



Rys. 338.

Wskutek zaś tego, że limbus nie jest poziomy, płaszczyzna kolimacyjna przetnie kulę przy celu do tego samego punktu P wzdłuż łuku $Z_1 P$.

Przypuśćmy dla uproszczenia, że zero nonjuszu leży w płaszczyźnie kolimacyjnej. Tak więc przy limbusie $H H$ poziomym, odczytem byłby łuk $H p_1$, odpowiadający i równy kątowi sferycznemu α przy wierchołku Z; zaś przy pochylonym do poziomu limbusie $H' H_1$, odczytem byłby łuk $H p_1$, równy kątowi α_1 przy wierzchołku Z_1. Różnica $\alpha - \alpha_1$ jest wpływem pochylenia limbusu do poziomu na odczyt. Jeżeli kąt pochylenia celu do P jest, h to łuk $ZP = 90^0 - h$. Nazwijmy $Z_1 P = m$, wówczas z Δ-a sferycznego $Z Z_1 P$ wynika na podstawie twierdzenia sinusów boków i kątów:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin (180^0 - \alpha)} = \frac{\sin (90^0 - h)}{\sin m}$$

skąd

$$\sin \alpha_1 \sin m = \sin \alpha \cos h \quad (1)$$

Na zasadzie twierdzenia trygonometrji sferycznej: sinus boku, mnożony przez cos kąta przyległego, równa się sinusowi drugiego obejmującego ten kąt boku przez cos III-ego boku mniej cos boku II-ego przez sin III-ego boku i przez cos przeciwległego I-emu bokowi kąta — napiszemy:

$$\sin m \cos \alpha_1 = \sin \upsilon \cos (90^0 - h) - \cos \upsilon \sin (90^0 - h) \cos (180^0 - \alpha)$$

stąd

$$\sin m \cos \alpha_1 = \sin \upsilon \sin h + \cos \upsilon \cos h \cos \alpha$$

lecz, ponieważ υ jest małym kątem, przeto w radjanach:

$$\sin \upsilon = \upsilon$$

$$\cos \upsilon = 1$$

więc

$$\sin m \cos \alpha_1 = \upsilon \sin h + \cos h \cos \alpha$$

lecz, podstawiając z (1)

$$\sin m = \frac{\sin \alpha \cos h}{\sin \alpha_1}$$

w powyższe równanie, otrzymamy:

$$\sin \alpha \cos h \cos \alpha_1 = \upsilon \sin \alpha_1 \sin h + \sin \alpha_1 \cos h \cos \alpha;$$

i, dzieląc przez cos h, mamy:

$$\sin \alpha \cos \alpha_1 = \upsilon \sin \alpha_1 \, tg \, h + \sin \alpha_1 \cos \alpha$$

lub

$$\sin \alpha \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha = \upsilon \sin \alpha_1 \, tg \, h$$

skąd

$$\underline{\sin (\alpha - \alpha_1) = \upsilon \sin \alpha_1 \, tg \, h}$$

Większe różnice $\alpha - \alpha_1$ powstają przy znacznych h, tak, np., dla $h = 45^0$

$$\sin (\alpha - \alpha_1) = \upsilon \sin \alpha_1$$

więc dla $\alpha_1 = 90^0$ będzie $\alpha - \alpha_1 = \upsilon$

Różnica $\alpha - \alpha_1$, t. j. błąd odczytu $\Delta \alpha$, jest równa w radjanach

$$\Delta \alpha = \upsilon \sin \alpha_1 \, tg \, h$$

Zatem dla kąta, jako różnicy dwu kierunków, błąd odczytu wyniesie

$$\Delta k = \Delta \alpha_1 - \Delta \alpha_2 = \upsilon \, (tg \, h_1 \sin \alpha_1 - tg \, h_2 \sin \alpha_2)$$

gdyż υ jest stałem, zmieniają się zaś dla poszczególnych kierunków wielkości h i α.

Maximum błędu będzie dla kątów bliskich 180°, t. j. dla $\alpha_1 = \alpha_2 \pm 180^0$

$$\text{wtedy } \sin \alpha_1 = - \sin \alpha_2$$

$$\text{i } \Delta k = \upsilon \sin \alpha_1 \, (tg \, h + tg \, h_1)$$

$$\text{zaś przy } h = h_1$$

$$\Delta k = 2 \upsilon \sin \alpha \, tg \, h$$

i największa wartość błędu jest dla $\alpha = 90^0$,

wtedy

$$\Delta k = 2 \upsilon \, tg \, h$$

co np., przy $h = 45^0$ daje

$$\Delta k = 2 \upsilon.$$

A więc, przy najniedogodniejszym zbiegu okoliczności, dla kierunków, pochylonych do poziomu nie więcej, niż o 45°, wpływ odchylenia limbusu od poziomu może stanowić wielkość, dwukrotnie większą niż kąt, pod którym limbus jest odchylony od poziomu.

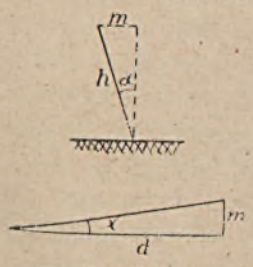
Stąd wniosek: przy pomiarach krótkich kierunków należy stosować teodolity, zaopatrzone w libele, o wartości podziałki mniejszej od dokładności, z którą określamy kąty.

Pochylenie limbusu wpływa ujemnie na wynik pomiaru kątów głównie z tego względu, że pochylenie limbusu zawsze w ten sam sposób zniekształca odczyty, niezależnie od metody pomiaru. Ani pomiar kątów w dwu położeniach lunety, ani kilkakrotny pomiar kątów, wpływu błędu pochylenia nie usuwają.

§ 142. Błąd celu.

Przy celu do poszczególnych punktów, oś celową należy kierować ściśle na punkt. Trzeba to mieć na uwadze specjalnie w wypadku obserwowania tyk, żalonów i t. p. sygnałów.

Często bowiem punkty w terenie są obrane tak wadliwie, że z któregokolwiek z nich nie widać sąsiedniego i dopiero przez ustawienie na nim tyczki, której zaledwie wierzchołek jest widoczny, można dokonać obserwacji w danym kierunku. Gdy tyczka stoi pionowo — kierunek pomierzymy prawidłowo; to samo zajdzie, gdy tyczka odchyli się od pionu ściśle w kierunku obserwowanego boku. Natomiast odchylenie poprzeczne jest niebezpiecznem.



Rys. 339.

Przypuśćmy, że (rys. 339) przez lunetę widzimy punkt tyki, odległy od właściwego punktu o wysokość h odcinka tyki; gdy tyczka odchyla się od pionu pod kątem α w kierunku ściśle poprzecznym do danej prostej, wówczas odchylenie m obserwowanego punktu tyki od jej spodu wyniesie

$$m = h \sin \alpha$$

i błąd x, wynikający wskutek tego w pomiarze kierunku, obliczymy z równania $tg\, x = \frac{m}{d}$; ponieważ zaś x jest małe więc

$$x = \frac{m}{d \sin 1'} = \frac{h \sin \alpha}{d \sin 1'}$$

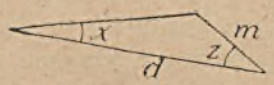
co, przy

$$h = 3\ m;\quad d = 50\ m;\quad \alpha = 3^{\circ},$$

wyniesie około 10′,

zaś przy

$$d = 200\ m,$$



Rys. 340.

około 2,5′.

Przy poprzecznych odchyleniach tyki od kierunku prostej, mniejszych od 90°, wpływ odchylenia na pomiar kierunku oczywiście będzie mniejszy. Gdy m jest odchylone o kąt z, wówczas

$$\sin x = \frac{m \sin (x + z)}{d}$$

wobec tego zaś, że x jest nieznaczne, więc, zakładając

$$\sin (x + z) = \sin z,$$

otrzymamy

$$x = \rho \frac{m \sin z}{d} = \rho \frac{h \sin \alpha \sin z}{d}$$

Powyższe obliczenia wskazują, że punkty poligonowe należy tak obierać, by z każdego widać było zupełnie wyraźnie sąsiednie; lepiej skrócić bok, niż używać wysokich tyk dla uwidocznienia punktu, a w tym ostatnim wypadku tyki należy ustawiać zupełnie ściśle, t. j. zapomocą pionu.

§ 143. Metody pomiarów kątów.

Pomiary kątowe winny być wykonywane w taki sposób, aby błędy instrumentalne, jeżeli nie całkowicie, to w większej części, były przez samą metodę pomiaru usuwane.

Do błędów instrumentalnych, wpływających na wyniki pomiaru kątów poziomych, zaliczamy:

1) błędy podziału limbusu,
2) błędy podziału nonjuszu,
3) ekscentryczność alhidady,
4) błąd kolimacyjny lunety,
5) pochylenie osi obrotu lunety do poziomu.

Jak wiemy, pomiar kąta w dwu położeniach lunety usuwa błąd kolimacji lunety i wpływ pochylenia osi obrotu lunety do limbusu; odczyty z obydwu nonjuszów usuwają wpływ błędu ekscentryczności alhidady; z tego względu każda metoda pomiaru kątów uwzględnia dwa położenia lunety i odczyty z obydwu nonjuszów.

Co się tyczy błędów podziału limbusu i nonjuszu, to wobec wysokiego stopnia dokładności, który gwarantują współczesne maszyny podzia-

łowe dla pomiarów poligonowych obojętnem jest, w jakiej mierze dana metoda usuwa błędy podziału z wyników; przyjmujemy za pewnik, że średnia arytmetyczna szeregu wyników daje dokładniejsze dane, niż poszczególne wyniki.

Następnie, ponieważ ilość pomiarów tego samego kąta podnosi jego dokładność, przeto każdy pomiar, wykonany repetycyjnym (z reguły) teodolitem, powinien być dokonany na innem miejscu limbusu, aby wynik pomiaru otrzymany został z odczytów, obarczonych innemi błędami podziału limbusu. Z tego względu stosujemy przesuwanie limbusu między poszczególnemi pomiarami tego samego kąta.

Ilość pomiarów kąta podnosi jego dokładność w najlepszym razie proporcjonalnie do pierwiastku drugiego z ogólnej liczby spostrzeżeń; wobec tego przywiązywać zbyt wielkiej wagi do wielokrotności spostrzeżeń nie należy, jeżeli chodzi o większą niż podwójna dokładność ostatecznego wyniku.

§ 144. Jednokrotny pomiar kąta.

Kąt, pomierzony w dwu położeniach, lunety, wolny jest od wpływu błędów kolimacji i pochylenia osi obrotu; ponieważ zatem kąt z powyższych względów należy mierzyć w dwu położeniach lunety, a więc faktycznie dwukrotnie, przeto lepiej jest, jak zaznaczyliśmy powyżej, każdy z tych dwu pomiarów wykonać na innem miejscu limbusu. Każdy kierunek będzie wymierzony dwukrotnie, a więc przy dwu nonjuszach na wynik pomiaru kierunku złożą się cztery odczyty; błędy podziału zmieniają się perjodycznie i przypadkowo. Perjodyczne błędy podziału usuwają się przez odczyty, symetrycznie rozrzucone po całym limbusie; błędy przypadkowe podziału są mniej dotkliwe, niż perjodyczne, a kilkakrotne odczyty w różnych i nawet dowolnych miejscach limbusu powodują zmniejszenie się wpływu błędów przypadkowych.

Z tych względów cztery odczyty dla każdego kierunku rozkładamy na cały obwód, a więc co 90^0.

Kierunek w jednem położeniu lunety dają odczyty z dwu nonjuszów, odległe o 180^0. Należy przeto przy drugiem położeniu lunety odczyty brać ze średnicy, prostopadłej do poprzedniej, czyli w drugiem położeniu lunety limbus należy przesunąć o mniej więcej 90^0.

Wówczas kąt w drugiem położeniu lunety otrzymamy z różnicy zupełnie nowych odczytów, odpowiadających obydwu kierunkom; ma to bardzo ważną zaletę, mianowicie usuwa możliwość popełnienia w pomiarze kąta grubego błędu (np., 1^0, 5^0, 10^0), który, raz popełniony w jednem położeniu lunety, powtarza się automatycznie i w drugiem, gdy odczyty są brane na tych samych kreskach. Wchodzi tu w grę skłonność do powtarzania raz już popełnionego błędu.

Częste w praktyce powtórzenie tego samego błędu odczytu przy nieporuszonym limbusie wprowadzi do pomierzonego kąta gruby błąd, który nie odrazu da się odnaleźć. Dwukrotny zaś pomiar kąta w dwu położeniach

limbusu da dwa wyniki różne, co wskaże odrazu na wadliwość jednego z nich, i trzeci pomiar usunie wątpliwości.

Jednokrotnego pomiaru kąta dokonywamy w następującej kolejności:

1) ustawimy nad punktem teodolit,
2) spoziomujemy limbus,
3) przez obrót alhidady skierujemy lunetę w kierunku na pierwszy punkt tak, aby znalazł się w polu widzenia lunety. Zaciśniemy alhidadę oraz oś obrotu lunety i, działając ich leniwkami, wprowadzimy krzyż nitek na obraz punktu,
4) dokonamy odczytu w stopniach i minutach z I-go nonjuszu, w minutach z II-go,
5) powtórzymy 3-ci i 4-ty punkt dla drugiego celu,
6) przerzucimy lunetę przez oś obrotu,
7) zwolnimy limbus i razem z alhidadą obrócimy go o 90° (na oko).
8) zakręcimy zacisk limbusu i zwolnimy alhidadę,
9) powtórzymy 3-i, 4-y i 5-y punkt.

Wynik pomiaru notujemy w dzienniku pomiaru kątów.

DZIENNIK POMIARU KĄTÓW

Data
Miejscowość
Teodolit Gerlacha Nr.
Dokładność odczytu 30"

1	2	3	4	5	6	7	8
Stanowisko	Cel do	NONJUSZE		ŚREDNIA	KĄT	Średni kąt	UWAGI
		I ° ′	II ′				
		P. K.					
	4	135° 46′.5	47.0	135° 46′.75			
					124° 36′.5		
	6	11° 10′.0	10.5	11° 10′.25			
5		L. K.					
	4	220° 17′.0	16.5	220° 16′.75			
					125° 6′.5		
	6	95° 10′.0	10.5	95° 10′.25			
		P. K.				125° 6′.25	
	4	118° 29′.5	29.5	118° 29′.5			
					125° 6′.0		5-6 $\frac{Nw\ 30°30'}{125.40}$
	6	353° 23′.0	24.0	353° 23′.5			

Kolumny 3 i 4-ą notujemy; 5-ą i 6-ą obliczamy odrazu w polu; gdy dwa wyniki pomiaru kąta w 6 kolumnie różnią się znacznie, jak w danym wypadku o 30', powtarzamy pomiar kąta w 1-em położeniu lunety. Błąd był

w 1-ym pomiarze, t. j. przy kole prawem (*P. K.*). Gdyby błąd był w pomiarze przy lewem kole, należałoby jeszcze raz przerobić lewe koło.

Przy obliczaniu kąta z różnicy średnich odczytów odjemną, mniejszą od odjemnika, zwiększamy o 360°.

Przy opisie prawym podziału limbusu od prawego kierunku odejmujemy lewy dla otrzymania kąta; kierunek prawy i lewy określamy, zwracając się od wierzchołka wewnątrz kąta. Przy opisie lewym od lewego kierunku odejmujemy prawy.

W poligonach drugorzędnych, nawiązywanych do poligonów I-go rzędu, stosuje się niekiedy następujący system pomiaru kąta:

1) sprzęgamy zero I-ego nonjuszu z zerem limbusu przez przesunięcie odręczne alhidady, zakończone przesunięciem śrubą mikrometryczną,

2) zwalniamy limbus i przez obrót limbusu, zakończony ruchem leniwki, kierujemy oś celową na lewy przedmiot (przy prawym podziale limbusu),

3) zwalniamy alhidadę i kierujemy oś celową na prawy przedmiot; odczyt z I-ego nonjuszu daje wielkość kąta,

4) przerzucamy lunetę przez oś obrotu, sprzęgamy zero II-ego nonjuszu z zerem alhidady,

5) zwalniamy limbus i kierujemy oś celową lunety na prawy przedmiot, kończąc ruchem leniwki limbusu,

6) zwalniamy alhidadę i kierujemy oś celową na lewy przedmiot, sprowadzając krzyż nitek na obraz punktu ruchem leniwki alhidady; dokonany z drugiego nonjuszu odczyt daje wielkość kąta, dopełniającego do 360° dany kąt.

Kontrolą prawidłowości pomiaru jest suma odczytów w obydwu położeniach lunety, która nie powinna się zbytnio różnić od 360°.

Metoda ta daje niewiele oszczędnosci na czasie, a przytem jest od zwykłej mniej dokładna.

W teodolicie zwykłym w drugiem położeniu lunety odczyty z nonjuszów przypadają na końcach tych samych średnic limbusu, a więc o tyle tylko można brać odczyty dla tych samych kierunków w różnych miejscach limbusu, o ile zdecydujemy się na przestawienie teodolitu na statywie, co jest zbyt kłopotliwe. Z tego względu obecnie teodolity zwykłe prawie zupełnie wyszły z użycia.

§ 145. Pomiar repetycyjny kąta.

Pomiar ten wymaga również teodolitu repetycyjnego.

Przebieg pomiaru jest następujący:

1) sprzęgamy przy prawem kole zero I-ego nonjuszu z zerem limbusu i po zwolnieniu limbusu kierujemy oś celową na lewy przedmiot, działając wkońcu leniwką limbusu,

2) odczytujemy i notujemy obydwa nonjusze; średnia da odczyt A bliski $O^0\ O'$; po zwolnieniu alhidady kierujemy oś celową lunety na przedmiot prawy, odczytując pierwszy nonjusz, co da wielkość, a dla przybliżonej wartości kąta,

3) zwalniamy limbus i przez obrót limbusu w lewo znów kierujemy oś celową na lewy przedmiot, działając leniwką limbusu; odczytem więc przy celowaniu na lewy przedmiot będzie ten sam odczyt a,

4) zwalniamy alhidadę i przez jej obrót kierujemy oś celową na prawy przedmiot; w ten sposób już po raz drugi na limbusie przesunęliśmy alhidadę o kąt, równy mierzonemu,

5) powtarzamy punkt 3 i 4 dopóty dopóki, alhidada na limbusie nie przesunie się o n łuków, odpowiadających wielkości mierzonego kąta.

Wówczas przy n-ym celu do prawego przedmiotu odczytujemy i notujemy obydwa nonjusze, co da odczyt B.

Wielkość mierzonego kąta wyniesie $X = \frac{B - A}{n}$, gdzie A jest bliskie $O^0\ O'$.

Wielkość tę porównywamy z odczytem a, różnica nie powinna przekraczać 1'. Jeżeli nonjusz I-y przy przesuwaniu alhidady na limbusie przesunął się o 360°, wówczas przy m przesunięciach 360° wzór zmieni się na:

$$X_1 = \frac{360^0\ m + B - A}{n};$$

Do otrzymanego w ten sposób wyniku weszły wpływy kolimacji i wychylenia osi obrotu lunety.

Dla usunięcia tych wpływów przerzucamy lunetę przez zenit i powtarzamy cały pomiar z tą różnicą, że rozpoczynamy od celu na prawy przedmiot i przesuwamy alhidadę na limbusie w lewo do lewego przedmiotu, zaś limbus ze sprzęgniętą alhidadą przesuwać będziemy w prawo do prawego przedmiotu. O ile więc tarcie alhidady o limbus mogło go w 1-ej połowie pomiaru porywać o bardzo niewielkie łuki w prawo, o tyle w II-ej połowie pomiaru to samo tarcie działać będzie w odwrotnym kierunku i wpływ tego zjawiska na wynik pomiaru kąta zostanie usunięty przez średnią arytmetyczną.

Przypuśćmy, że pierwszym odczytem przy celowaniu na prawy przedmiot był A_1; zaś po n repetycjach ostatni odczyt celu na lewy przedmiot jest B, przytem zero nonjuszu m razy przeszło przez 0°, licząc i 1-e ustawienie, gdy $A_1 > 0^0 0'$.

Wówczas

$$X_2 = \frac{A_1 + 360^0\ m - B}{n}$$

i ostateczną wartością kąta jest

$$X = \frac{X_1 + X_2}{2};$$

Metoda ta zmniejsza wpływ błędu podziału limbusu, gdyż różnica dwu odczytów, obarczona błędami podziału dwu miejsc na limbusie, dzieli się na n, wobec czego i błąd podziału zmniejszy się n-krotnie.

Natomiast wadą tej metody jest ciągłe sprzęganie i zwalnianie alhidady i limbusu. Stąd powstaje nowe źródło błędów.

Dziennik pomiaru kątów.

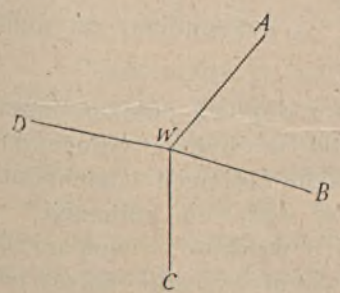
Kąt	Cel do	Koło	Ilość repetycyj	Nonjusze I	Nonjusze II	Średnia	Kąt	UWAGI
	4	*P*	1	0° 0′	1′	0° 0′,5		$\frac{152°41'+360°-0',5}{6}=85°26',8$
	6			85° 27′				
			6*	152° 41′	41′	152°41′,0		
5							85°27′,5	
	6	*L*	1	0° 0′	0′	0° 0′		
				274° 33′				$\frac{0°0'+720°-207°17',5}{6}=85°27',1$
	4		6*	207° 17′	18′	207°17′,5		

Gwiazdki oznaczają ilość przejść pierwszego nonjuszu przez zero w toku pomiaru.

Często stosuje się pomiar, w którym ostatni odczyt celu na prawy punkt przy prawem kole zostaje jako pierwszy odczyt celu na prawy punkt przy kole lewem ze zmianą nonjuszów.

§ 146. Metoda kierunkowa.

Metoda ta stosowana jest najczęściej przy pomiarze kilku kątów o wspólnym wierzchołku, co zachodzi w poligonach przy skrzyżowaniu się kilku poligonów w punkcie węzłowym *W*; rys. 341, przedstawia, np., dwa poligony *AWC* i t d., oraz *DWB* i t. d. Poza tem, metoda ta stosuje się przy triangulacjach. Metoda kierunkowa polega na tem, że kilkakrotnie (w kilku serjach), t. j. w różnych miejscach limbusu, mierzymy w obydwu położeniach lunety wszystkie kierunki, notując dla każdego obydwa nonjusze, przyczem pomiar przy prawem kole posuwa się w prawym kierunku, przy kole lewem — w lewym kierunku.



Rys. 341.

Przy *n* nonjuszach i *m* serjach, stopień każdorazowego przesunięcia limbusu wynosi:

$$k = \frac{360^0}{nm}$$

co przy dwu nonjuszach daje:

$$k = \frac{180^0}{m}$$

Ponieważ pomiaru dokonywamy w kilku położeniach limbusu, przeto zmniejszamy wpływ błędów podziału limbusu na wyniki pomiaru.

Przy kilku kierunkach zaleca się w każdem położeniu lunety kończyć pomiar na tym samym kierunku, od którego rozpoczynaliśmy, — a to w celu sprawdzenia, czy limbus w czasie pomiaru nie odsunął się od pierwotnego położenia. Za początkowy kierunek przy triangulacjach obieramy kierunek na przedmiot, najgorzej widoczny z pomiędzy przedmiotów, podlegających obserwacji; w ten sposób mniej wyraźny punkt obserwuje się podwójną ilość razy w porównaniu do innych, wskutek czego dokładność określenia takiego kierunku nieco wzrasta.

Kolejność pomiaru jest następująca:

1) po ustawieniu teodolitu centrycznie nad wierzchołkiem mierzonego kąta, sprzęgamy przy kole prawem zero I nonjuszu z zerem limbusu i, po zwolnieniu zacisku limbusu, kierujemy oś celową na pierwszy punkt A, kończąc na sprowadzeniu krzyża nitek na obraz punktu zapomocą leniwki limbusu; notujemy odczyty z obydwu nonjuszów;

2) Zwalniamy alhidadę i przez jej obrót kierujemy oś celową na punkt drugi (B), działając wkońcu leniwką alhidady; notujemy odczyty z obydwu nonjuszów;

3) punkt poprzedni powtarzamy dla wszystkich pozostałych kierunków w prawo (C i D) i kończymy pomiar na kierunku do A;

4) Przerzucamy lunetę i powtarzamy cały pomiar od punktu A kolejno w lewo (D, C, B) i kończymy znów na kierunku do A.

Serja I-a jest skończona.

Przerzucamy lunetę przez oś, sprzęgamy zero nonjuszu I-ego z podziałem $\frac{180^0}{m}$ (m liczba serji) limbusu, kierujemy przez obrót limbusu oś celową znów na punkt A i identycznie, jak w I-ej serji, mierzymy II-ą serję, poczem znów przestawiamy limbus o dalsze $\frac{180^0}{m}$ i postępujemy w analogiczny sposób, aż do ostatniej serji.

Połowa sumy odczytów każdego kierunku z obydwu położeń lunety daje średnie kierunków w serji; różnica kierunków w obydwu położeniach lunety daje po odrzuceniu 180^0 podwójny wpływ błędu kolimacji i pochylenia osi obrotu. Obydwa te wpływy będziemy nazywać wpływem kolimacji.

Podwójny wpływ kolimacji może się wahać o wielkość, równą potrójnej dokładności odczytów z nonjuszów; w przeciwnym wypadku należy teodolit odpowiednio zrektyfikować; jeżeli zaś dla jakiegokolwiek kierunku błąd kolimacji znacznie się odchyli od swej przeciętnej wielkości serji, będzie to dowodem, że dany kierunek jest źle zaobserwowany, co należy sprawdzić.

Rozpatrzmy przykład:

25/IV.—20 r. obserwator Z. Pohoski.

wieś Popławy, pow. Bielski. teodolit Gerlacha 10″

I. serja. Piramida centralna.

NAZWY PUNKTÓW	Odczyty *K. P.*			Odczyty *K. L.*			*K.P.+K.L.*	*K.P.-K.L.*
	I *n*	II *n*	Sr.	I *n*	II *n*	Sr.	2	
Krzyżak	0° 10′ 20″	10″	15″	180° 10′ 30″	20″	25″	0° 10′ 20″	—10
Oleksin	20 15 30	20	25	200 15 40	30	35	20 15 30	—10
Dołobowo	65 40 10	10	10	245 40 10	20	15	65 40 12.5	— 5
Brzeźnica	192 11 40	30	35	12 11 50	40	45	192 11 40	—10
Brańsk	275 14 30	30	30	95 14 20	40	30	275 14 30	— 0
Krzyżak	0 10 10	0	5	180 10 10	20	15	0 10 10	—10
							0 10 15	

II. serja.

NAZWY PUNKTÓW	Odczyty *K. P.*			Odczyty *K. L.*			*K.P.+K.L.*	*K.P.-K.L.*
	I *n.*	II *n.*	Sr.	I *n.*	II *n.*	Sr.	2	
Krzyżak	60° 40′ 20″	20″	20″	240° 40′ 10″	10″	10″	60° 40′ 15″	+10
Oleksin	80 45 30	20	25	260 45 20	40	30	80 45 27,5	— 5
Dołobowo	126 10 10	20	15	306 10 20	30	25	126 10 20	—10
Brzeźnica	252 41 50	40	45	72 41 30	40	35	252 41 40	+10
Brańsk	335 44 40	30	35	155 44 40	50	45	335 44 40	—10
Krzyżak	60 40 20	10	15	240 40 20	20	20	60 40 17,5	— 5
							60 40 16,2	

Opracujmy te serje jako całość, t. j. przypuśćmy, że dokonaliśmy pomiaru tylko w dwu serjach; a mianowicie, dla I-go i ostatniego kierunku, jako tego samego punktu w każdej serji, wyprowadzamy średnie; u dołu wypisujemy ostateczną średnią obydwu tych wyników (60° 40′ 16,2 z w II serji, 0° 10′ 15″ w I-ej); średnią ostateczną odejmujemy w każdej serji od pozostałych kierunków, traktując pierwszy jako średnią ostateczną; w ten sposób dojdziemy do wszystkich zredukowanych o pierwszy kierunków seryj; średnie zredukowanych kierunków we wszystkich serjach są wynikami ostatecznemi obserwacji kierunków.

Pruska instrukcja katastralna traktuje drugi cel do I-go punktu jedynie, jako sprawdzenie, a nie materjał do użytku.

Nazwy punktów	I-sza serja ° ′ ″	II-ga serja ° ′ ″	Dalsze serje	Średnia ostat. ° ′ ″
Krzyżak	0° 0′ 0″	0° 0′ 0″	.....	0° 0′ 0″,0
Oleksin	20 5 15	20 5 12,5	.....	20 5 13,75
Dołobowo . . .	65 29 57,5	65 30 3,8	.....	65 30 0,65
Brzeźnica . . .	192 1 25	192 1 23,8	.....	192 1 24,40
Brańsk	275 4 15	275 4 23,8	.....	275 4 19,4

UWAGI. Często się zdarza na triangulacji przy dużej ilości obserwowauych kierunków, że w niektórych serjach poszczególne punkty są bardzo źle widoczne (dymy, mgły nadrzeczne, punkt rzutuje się na słońce, albo nie jest oświetlony należycie i t. p.).

Z konieczności trzeba kończyć obserwacje kierunków w danej serji, pozostawiając źle widoczne punkty na później. Po ukończeniu pomiaru wyraźnie widocznych punktów, należy zaczekać, aż nastąpią takie warunki, przy których opuszczone punkty dadzą się zaobserwować.

Wówczas tworzymy z tych punktów, łącznie z jednym lub dwoma wcześniej obserwowanemi, grupę cząstkową, obserwowaną w takiej ilości seryj, do jakiej poprzednio opuszczone kierunki nie weszły. Często zgóry tworzymy takie grupy przy dużej ilości kierunków i rano obserwujemy punkty zachodnie, nad wieczorem wschodnie.

Prócz dogodności w warunkach oświetlenia poszczególnych punktów, przy rozbiciu na takie grupy zwalczamy niedokładności, powstające wskutek tarcia alhidady o limbus, oraz częstego sprzęgania i rozprzęgania alhidady; już ten jeden wzgląd nieraz zniewala do tworzenia grup po 5 lub 4 kierunków.

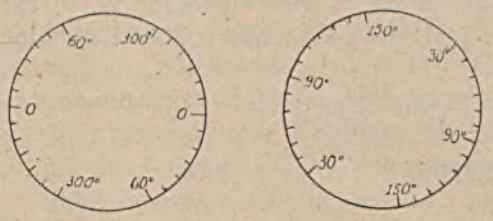
Jako wspólne dla tych grup punkty, najlepiej się nadają leżące w kierunku południka znaki trygonometryczne; często wskazanem jest wykorzystać jako punkt łącznikowy jakiś wyraźny punkt stały, mogący nawet nie mieć nic wspólnego z siecią, ale wyraźny i stały, np. piorunochron, krzyż na kapliczce i t. p.

Ilość seryj zależy od stopnia dokładności pomiaru; w poligonach wynosi 1 do 3, przy triangulacjach 3 do 12.

§ 147. Koło wierzchołkowe.

W teodolitach uniwersalnych, zwanych też tachymetrami, na osi obrotu lunety znajduje się koło wierzchołkowe z alhidadą w postaci centrycznie osadzonego linjału z nonjuszami na końcach.

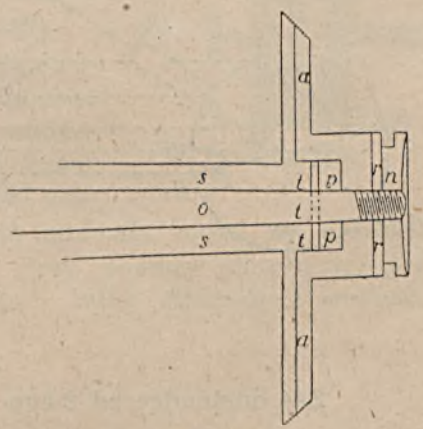
Koło wierzchołkowe jest albo podzielone na 360°, albo też podział idzie w przeciwnych kierunkach od końców jednej średnicy — w prawym



Rys. 342.

końcu średnicy od 0° do 60° wdół i ku górze od 0° do 300° i w lewym końcu średnicy od 0° do 60° ku górze i od 0° do 360° — wdół. W innych kołach wierzchołkowych firmy Gerlach podział idzie na obydwu częściach koła od 30° do 150°, tak że jednakowe opisy są średnicowo przeciwległe, jak i w poprzednim opisie.

Koło wierzchołkowe osadza się ściętym stożkiem *s* na osi obrotu lunety *o*; trzpień *t*, przechodzący przez pieścień *p* koła wierzchołkowego, i oś obrotu lunety, uniemożliwia samodzielny obrót koła bez jednoczesnego obrotu *o*. Na osi obrotu *o* osadza się alhidada *a*, podkładka *r* i na gwintowany koniec osi nakręca się nakrętkę *n*, utrzymującą alhidadę na osi. Od alhidady wdół zwisa połączone z nią trwale ramię, grające rolę dźwigni, ściskane u dołu z jednej strony przez pręcik metalowy, przechodzący przez walec z umieszczoną wewnątrz sprężyną (patrz walec *r* pierścieniowej konstrukcji śruby mikrometrycznej), z drugiej przez śrubę mikrometryczną. Na alhidadzie koła wierzchołkowego osadzona jest libela, której oś jest równoległa do płaszczyzny kolimacyjnej lunety i której bańka przy pomocy śruby mikrometrycznej sprowadza się do środka; ponieważ zaś obrót śrubą mikrometryczną działa na ramię, a więc i na alhidadę, przeto linja zer nonjuszów alhidady zajmuje niezmienne w stosunku do poziomu położenie, gdy bańka libeli znajduje się w środku (patrz rys. 344 a).



Rys. 343.

Rozpatrzmy teorję koła wierzchołkowego dla podziału 300°—0°—60°.

Kąt pochylenia osi celowej do poziomu równa się różnicy odczytów 1) przy pochyleniu osi celowej lunety i 2) przy poziomem położeniu osi celowej.

Należy więc znać odczyt, odpowiadający poziomemu położeniu osi celowej. Nazwijmy ten odczyt miejscem zera.

Skierujm lunetę, przy kole wierzchołkowem z prawej strony osi celowej (koło prawe), na punkt *A*; przypuśćmy, że prosta $N_1 N_2$, łącząca zera nonjuszów alhidady, jest pochylona do poziomu *HH* pod kątem *x* (położenie I).

Kąt pochylenia α osi celowej do poziomu równa się odczytowi *p* mniej *x*

$$(1) \quad \alpha = p_1 - x$$

Odwróćmy alhidadę koła poziomego o 180°; otrzymamy II położenie

lunety. Gdy zaś skierujemy przez obrót lunety jej oś celową do A, otrzymamy III położenie, w którem odczyt p jest zawarty między 300° i 0°, więc

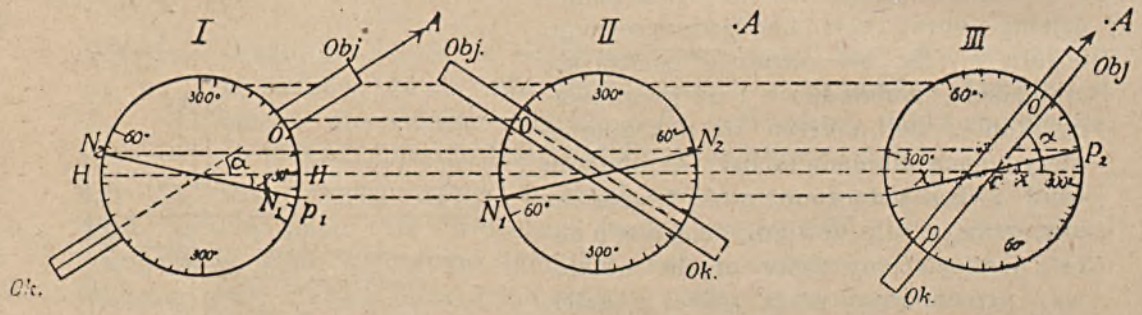
$$(2) \quad \alpha = AC\ p_2 + x = 360^0 - p_2 + x$$

Dodając obydwa równania, otrzymamy:

$$2\alpha = 360^0 + p_1 - p_2$$

skąd

$$\alpha = \frac{p_1 - p_2}{2} \pm 180^0$$



Rys. 344.

Zaś odejmując od 2-ego I-e równanie, otrzymamy:

$$360^0 - p_2 + x - (p_1 - x) = o$$

$$2\ x = p_1 + p_2 - 360^0,$$

skąd miejsce zera równa się:

$$x = \frac{p_1 + p_2}{2} \pm 180^0$$

Dla otrzymania kąta pochylenia i miejsca zera należy celować przy kole prawem i lewem na ten sam punkt; zmieniona o 180° średnia arytmetyczna odczytów da miejsce zera, zaś zmieniona o 180° połowa różnicy odczytów przy kole prawem i lewem da kąt pochylenia.

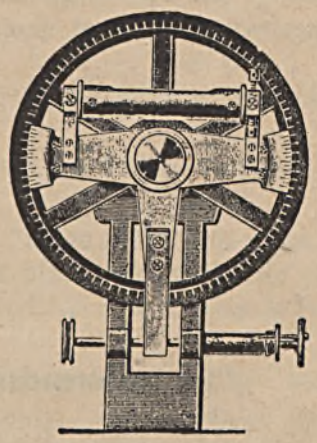
Przypuśćmy, że przy celu do A, przy prawem kole (*p. k.*), $p_1 = 359^0 25'$, zaś przy *l. k.* (kole lewe) $p_2 = 0^0 31'$ stąd miejsce zera

$$x = \frac{359^0\,25' + 0^0\,31'}{2} \pm 180^0 = 359^0\,58',$$

zaś kąt pochylenia

$$\alpha = \frac{p_1 - p_2}{2} \pm 180^0 = \frac{359^0 25' - 360^0 - 0^0\,31'}{2} = -0^0\,33'$$

Ażeby zrektyfikować koło wierzchołkowe, celujemy przy obydwu położeniach lunety do punktu A, określamy kąt pochylenia α i miejsce zera x; gdy luneta jest skierowana na A przy kole lewem, z nonjuszu powinniśmy odczytać $360^0 - \alpha$; przy pomocy śruby mikrometrycznej alhidady przesuwamy nonjusze na ten odczyt; ponieważ jednak dzięki temu przesunięciu bańka libeli odsunęła się od środka, przeto należy ją sprowadzić do środka zapomocą śrub rektyfikacyjnych libeli.



Rys. 344a.

Po zrektyfikowaniu, oś celowa lunety będzie wówczas w poziomie, gdy odczytamy 0^0 na kole wierzchołkowem.

Prócz kół wierzchołkowych o ruchomych limbusach, istnieją przyrządy o stałych kołach wierzchołkowych i ruchomych alhidadach.

Rys. 344a jest rysunkiem koła pionowego, obracanego razem z lunetą. Alhidada tego koła posiada dwa nonjusze bez lup. Do alhidady przymocowaną jest trwale libela rurkowa. Libela ta w prawym końcu posiada śrubki rektyfikacyjne: górną i dolną. Dolne ramię alhidady może się nieznacznie poruszać przy obrocie śrubki leniwki. Przy pomocy obrotu tej śrubki możemy pochylać ramię alhidady, a więc i samą alhidadę z noniuszami dla zrektyfikowania koła pionowego.

ROZDZIAŁ V.

WYRÓWNANIE SPOSTRZEŻEŃ BEZPOŚREDNICH.

§ 148. Klasyfikacja błędów.

Każdy pomiar jest obarczony pewnym błędem. Nigdy więc nie uzyskamy z pomiaru prawdziwej określanej wielkości, możemy co najwyżej otrzymać wynik, zbliżony do niej.

Im większa jest różnica między wartością, otrzymaną ze spostrzeżeń, a wartością prawdziwą — tym większy jest błąd prawdziwy spostrzeżenia. Błąd ten prawie nigdy nie jest znany, jeżeli chodzi o poszczególne spostrzeżenia; natomiast może być określony dla pewnych związków, zachodzących między spostrzeganemi wielkościami. Tak np., nigdy nie znamy prawdziwego błędu każdego pomierzonego w △-cie kąta; natomiast zawsze możemy określić prawdziwy błąd sumy trzech pomierzonych kątów △-a.

Każdy błąd spostrzeżenia jest sumą algebraiczną całego zespołu błędów elementarnych o różnych znakach i wielkości. Tak np., wynik pomiaru długości taśmą zawiera błąd, na wielkość którego składają się błędy, spowodowane przez 1) niedokładne układanie taśmy w danym kierunku i z danem pochyleniem, 2) wadliwe osadzenie szpilek, 3) nieuwzględnione wpływy temperatury, 4) niedokładność odczytu, 5) niewłaściwe naciąganie taśmy, 6) wadliwe ustalenie długości samej taśmy i t. p.

Stąd wynika, że na powstawanie błędów mają wpływ trzy czynniki: 1) środowisko, 2) przyrząd, 3) osoba obserwatora — a niekiedy nawet metoda spostrzeżeń.

Środowisko wpływa na przyrząd, zmieniając jego długość (temperatura), przesuwając go przy naciąganiu końca taśmy w kierunku pomiaru (grunt piaszczysty lub bagnisty), wychylając przyrząd z kierunku (niedostateczne oświetlenie, deszcz, wiatr—wszystko, co zaciemnia cel w linji pomiaru); również i przyrządy są źródłem błędów: taśma ma inną długość niż nominalna, spółczynnik rozszerzalności taśmy jest źle określony, początek i koniec taśmy są nieodpowiednio oznaczone, podział na taśmie może być wadliwy i t. p.;

wreszcie sam obserwator jest źródłem błędów: błędy odczytu, niestaranność wykonania, słaby wzrok i t. p.

Co do wielkości, odróżniamy *błędy grube*, jak, np., pominięcie jednej szpilki, całej zmiany lub duży błąd odczytu, przekraczający przepisaną dokładność odczytywania, i t. p. Błędy takie wykrywane są przy powtórzeniu pomiaru i uzyskaniu nowego wyniku; usuwamy je przez sprawdzenie z drugim, względnie trzecim wynikiem pomiaru.

Po usunięciu ze spostrzeżeń błędów grubych, pozostają w wynikach tylko błędy dopuszczalne, t. j. dostatecznie małe.

Wszystkie te błędy dzielimy na systematyczne (regularne, stałe) i przypadkowe.

Do systematycznych zaliczamy te błędy, które dokładnie znamy, a więc które mogą być z wyników usunięte bądź przez wprowadzenie poprawek, bądź to już przez stosowanie takiej metody pomiaru, przy której te błędy automatycznie są usuwane.

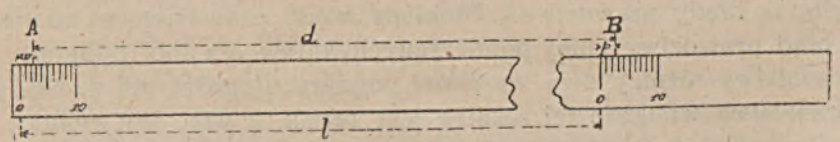
Do pierwszej kategorji błędów systematycznych zaliczamy, np.: błąd ustalenia długości taśmy, błąd ekscentryczności lunety; znając różnicę między nominalną a sprawdzoną długością taśmy, możemy wprowadzić do wyniku odpowiednią poprawkę; znając odległość osi celowej od osi pionowej teodolitu, możemy obliczyć poprawkę dla pomierzonego w jednem położeniu lunety kąta, czy kierunku.

Do drugiej kategorji błędów systematycznych zaliczamy, np., błąd kolimacji, ekscentryczność alhidady czy lunety i t. p.; bowiem metoda pomiaru kąta przy dwu położeniach lunety usuwa wpływ kolimacji i ekscentryczności lunety; metoda pomiaru kątomierzem o dwu nonjuszach usuwa wpływ błędu ekscentryczności alhidady i t. p.

Te pozostałości błędów systematycznych, które uchylają się od ujęcia przez rachunek, jak, np., wpływ nieznacznych wahań temperatury, wpływ zmian kolimacji w toku pomiaru i t. p., z konieczności odnosimy do grupy błędów przypadkowych.

Wreszcie do systematycznych błędów zaliczamy te t. zw. błędy indywidualne, wynikające z właściwości obserwatora, które przez zastosowanie określonej metody spostrzeżeń dają się usunąć.

Przypuśćmy, np., że układamy metr podzielony na milimetry przy obydwu końcach, jak na załączonym rysunku. Zapomocą tego metra nale-



ży możliwie dokładnie pomierzyć długość, podzieloną na odcinki typu $A\,B$, bliskie 1 m.; oznaczmy przez d odległość $A\,B$, przez l długość metra, przez w odczyt oA, przez p — odczyt oB, wówczas

$$d = l + p - w.$$

Przypuśćmy, że przy szacowaniu na oko części milimetrów obserwator przy A popełnia błąd indywidualny, polegający na stałem zaokrąglaniu nieparzystych części milimetra do najbliższej większej parzystej części. W ten sposób, obserwator ten stale powiększa odczyty w (przypuśćmy na razie, że drugi obserwator przy końcu metra takich błędów nie robi), przeto w konsekwencji wpływa na zmniejszenie d, zatem mierzonej długości. Jeżeli teraz przy drugim pomiarze, wykonywanym w tym samym kierunku, zmienimy miejsca obserwatorów, wówczas powiększane będą odczyty p, a więc wynik pomiaru długości będzie większy. Średnia artmetyczna obydwu wyników w znacznej mierze usuwa wpływ takich błędów, nawet jeżeli zachodzą u obydwu obserwatorów.

Błędy systematyczne są przedmiotem badań geodezji; w zakres teorji błędów i rachunku wyrównawczego wchodzą natomiast błędy przypadkowe.

Gdzie leży granica między grupą błędów przypadkowych a niedopuszczalnych (grubych), wskazują normy dokładności, przyjęte przy stosowaniu pewnych przyrządów i metod postępowania.

Tak np., przy pomiarze stumetrowej długości błąd 5 cm jest najzupełniej dopuszczalnym przy użyciu taśmy — natomiast błąd ten będzie już grubym błędem w wypadku użycia łat, zakończonych ostrzami.

Te właśnie normy dokładności wyników spostrzeżeń są również przedmiotem badań geodezyjnych, opartych tak o dane doświadczalne, jak również o teorję błędów.

§ 149. Własności błędów przypadkowych.

Błędem prawdziwym ε nazywamy różnicę między wynikiem a pomiaru pewnej wielkości, a jej rzeczywistą wartością X

$$\varepsilon = a - X$$

Błąd ten jest oczywiście wielkością nieznaną, gdyż nie znamy, prawdziwej wartości X. Jeżeli mówimy o badaniu własności błędów przypadkowych, zdajemy sobie sprawę, że badać błędy przypadkowe można jedynie, bądź to rozpatrując własności t. zw. błędów pozornych, czyli różnic między wynikami pomiaru a najprawdopodobniejszą wartością, wypośrodkowaną z danego szeregu pomiarów, bądź też przyjmując wynik pewnego pomiaru, zasługującego na wyjątkowe zaufanie, za wartość rzeczywistą, zaś różnice pomiędzy wynikami pozostałych, mniej dokładnych pomiarów, a tą wartością, za błędy prawdziwe. Niekiedy błędy prawdziwe są znane, t. np., znamy błąd prawdziwy sumy pomierzanych kątów Δ-a lub poligonu, znamy błąd prawdziwy różnicy dwu wyników pomiaru długości tej samej prostej, gdyż prawdziwa wielkość tej różnicy jest zerem, a więc jest znana.

Rozpatrując szeregi błędów przypadkowych, zwłaszcza w większej ilości, zauważymy pewien związek pomiędzy wielkością błędu a częstością jego występowania w danym szeregu. Błędy o większej wartości bezwzględnej spotykają się rzadziej; w każdym szeregu istnieje pewna granica, której, błędy przypadkowe nie przekraczają. Stwierdzamy również, że błędy o różnych znakach, lecz równej wartości bezwzględnej, spotykają się równie często. Wreszcie częstość występowania

pewnego błędu o oznaczonej wielkości zależy od stopnia dokładności, z jaką dokonany został dany szereg pomiarów.

Uwagi powyższe, przetłumaczone na język teorji prawdopodobieństwa, wyrażą się, jak następuje:

1. Prawdopodobieństwo popełnienia błędu jest funkcją jego wielkości, — błąd o mniejszej wartości bezwzględnej jest prawdopodobniejszy od błędu o większej wartości bezwzględnej.

2. Błędy o równej wartości bezwzględnej, lecz różnych znakach, są równie prawdopododne, — i

3. Najprawdopodobniejszemi są błędy bliskie zera.

Opierając się na powyższych prawdach, stanowiących rezultat badań doświadczalnych, teorja prawdopodobieństwa drogą rozważań analitycznych wyprowadza prawa, które określają, jak wypośrodkować z szeregu pomiarów wielkość najprawdopodobniejszą i ocenić dokładność otrzymanego rezultatu. Zauważymy jeszcze, że zastanowienie się nad nieznanemi nam bliżej przyczynami powstawania błędów przypadkowych doprowadza nas do przekonania, iż każdy błąd przypadkowy traktować można jako sumę bardzo wielu nieskończenie małych, a bliskich co do bezwzględnej wartości, t. zw. błędów elementarnych. Tak np., na błąd pomiaru długości taśmą mierniczą składa się cały szereg przyczyn, powodujących zmiany wyniku pomiaru pod wpływem wahań temperatury, zbaczania z linji prostej, zarówno w kierunku poziomym, jak i pionowym, nierównomierne naciąganie taśmy, niewłaściwe osadzanie szpilek i t. p. Drobne te odchylenia, sumując się w najprzeróżniejszym stopniu, powodują powstanie przypadkowego błędu pomiaru.

§ 150. Charakteryst ka dokładności pomiaru.

Średni błąd pojedyńczego spostrzeżenia.

Wyobraźmy sobie, że w celu określenia pewnej wielkości X dokonaliśmy szeregu pomiarów w ogólnej liczbie n. Jeżeli każdy pomiar dokonany był tem samem narzędziem, w tych samych warunkach i przez tego samego obserwatora, określimy oczywiście dany szereg, jako szereg pomiarów jednakowo dokładnych, jakkolwiek różnice pomiędzy wynikami poszczególnych pomiarów $a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n$, a wartością rzeczywistą X, czyli rzeczywiste błędy tych pomiarów,

$$\varepsilon_1 = a_1 - X$$
$$\varepsilon_2 = a_2 - X$$
$$- - - -$$
$$- - - -$$
$$\varepsilon_n = a_n - X$$

będą się wzajemnie różnić. Za czynnik, charakteryzujący dokładność każdego rezultatu pomiaru, przyjmujemy t. zw. średni błąd pojedyńczego spostrzeżenia (średni błąd Gaussa) M, równy pierwiastkowi kwadratowemu ze średniej arytmetycznej kwadratów błędów prawdziwych.

$$M = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2_1 + \varepsilon^2_2 + \ldots \varepsilon^2_n}{n}} = \pm = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \quad *) \qquad (1)$$

i z dwu pomiarów ten przyjmiemy za dokładniejszy, dla którego średni błąd pojedyńczego spostrzeżenia będzie mniejszy.

Przykład: dwa szeregi pomiarów dały następujące błędy rzeczywiste:

szereg I + 5, — 4, + 3, + 1, + 1, 0, + 2, — 3, + 4

szereg II + 10, + 2, + 12, 0, — 1, + 1, 0, — 14. — 11

Określić, który szereg jest dokładniejszy:

Obliczmy średni błąd pojedyńczego spostrzeżenia dla każdego szeregu

Szereg I

ε	$\varepsilon\varepsilon$
+ 5	+ 25
— 4	+ 16
+ 3	+ 9
+ 1	+ 1
+ 1	+ 1
0	0
+ 2	+ 4
— 3	+ 9
+ 4	+ 16
$[\varepsilon] = +9$	$[\varepsilon\varepsilon] = +81$

Szereg II

ε	$\varepsilon\varepsilon$
+ 10	+ 100
+ 2	+ 4
+ 12	+ 144
0	0
— 1	+ 1
+ 1	+ 1
0	0
— 14	+ 196
— 11	+ 121
$[\varepsilon] = -1$	$[\varepsilon\varepsilon] = 567$

$$m_1 = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{81}{9}} = \pm 3.0 \qquad m_2 = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{567}{9}} = \pm 7{,}9.$$

Gdybyśmy za czynnik, charakteryzujący dokładność każdego szeregu, przyjęli algebraiczną sumę, wówczas szereg II-gi należałoby traktować jako bardziej dokładny, co byłoby niesłusznem, gdyż w drugim szeregu spotykamy stosunkowo wielkie, w porównaniu z I-szym, wartości błędów. Natomiast średni błąd pojedyńczego spostrzeżenia $m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$ wskaże, że I-szy szereg jest dokładniejszy, gdyż w nim średni błąd pojedyńczego spostrzeżenia jest mniejszy.

Przykład: Pomiar pewnego kąta, wykonany sekundowym teodolitem, dał wynik 64°31'15",4. Ten sam kąt zmierzono ośmiokrotnie instrumentem półminutowym, otrzymując następujące rezultaty:

1/. 64° 31' 30" 2/. 64° 31' 0" 3/. 64° 31' 15" 4/. 64° 31' 23,3"
5/. 64° 30' 45,8" 6/. 64° 31' 0" 7/. 64° 31' 15" 8/. 64° 31'45,8"

*) Nawias kwadratowy „[ ]" symbolizuje sumę.

Przyjmując wskutek znacznie większej dokładności instrumentu sekundowego wynik 65° 31' 15",4 za prawdziwą wartość kąta, określić średni błąd pojedyńczego spostrzeżenia dla instrumentu półminutowego.

a	$a - X = \varepsilon$	$\varepsilon\,\varepsilon$
64° 31' 30"	+ 14.6	+ 213.16
31' 0"	— 15.4	+ 237.16
31' 15"	— 0.4	+ 0.16
31' 23,3"	+ 7.9	+ 62.41
30' 45,8"	+ 30.4	+ 924.16
31' 0"	— 15.4	+ 237.16
31' 15"	— 0.4	+ 0.16
31' 45,8"	+ 30.4	+ 924.16
		$[\varepsilon\,\varepsilon] = + 2598.53$

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \pm \sqrt{\frac{2598.53}{8}} = \pm 18".1.$$

Błąd przeciętny.

W celu scharakteryzowania dokładności pojedyńczego spostrzeżenia możnaby wziąć średnią bezwzględnych wartości błędów prawdziwych, czyli t. zw. błąd przeciętny

$$t = \frac{[\,|\,\varepsilon\,|\,]}{n}$$

Błąd średni ma jednak tę wyższość w porównaniu z przeciętnym, że bardziej uwydatnia wpływ błędów o większej bezwzględnej wartości przez podnoszenie ich do kwadratu.

§ 151. Zadania nauki o wyrównaniu błędów pomiaru, oraz jej podział.

Zadaniem rachunku wyrównawczego (nauki o wyrównaniu błędów pomiaru) jest określenie najprawdopodobniejszych wielkości, stanowiących cel pomiaru, oraz ocena dokładności otrzymanych rezultatów.

Zależnie od tego, czy wielkość, stanowiącą cel pomiaru, określamy 1) drogą pomiaru bezpośredniego, czy też 2) mierząc inne wielkości, pozostające z poszukiwaną w pewnym związku matematycznym, możemy mieć do czynienia

1) ze spostrzeżeniami bezpośredniemi
2) spostrzeżeniami pośredniemi,

O ile zaś wyniki spostrzeżeń mają zadość czynić pewnym warunkom matematycznym, a więc są wzajemnie uzależnione, wówczas mieć będziemy:

3) spostrzeżenia warunkowe.

§ 152. Spostrzeżenia bezpośrednie.

Spostrzeżenia bezpośrednie, jednakowo dokładne.

Średnia arytmetyczna (postulat Gaussa). Jeżeli w celu określenia pewnej wielkości X dokonaliśmy w jednakowych warunkach szeregu jednakowo dokładnych bezpośrednich pomiarów w liczbie n i otrzymaliśmy

$$a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_n$$

wówczas, nie mając podstaw do dania pierwszeństwa któremukolwiek z wyników, za najprawdopodobniejszą wielkość x przyjmujemy średnią arytmetyczną wszystkich wyników pomiaru

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{[a]}{n} \quad (2)$$

Błędy pozorne. Różnice pomiędzy wynikami poszczególnych spostrzeżeń a średnią arytmetyczną nazywać będziemy błędami pozornemi i oznaczać przez v, t. j. przyjmiemy

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 - x \\ v_2 &= a_2 - x \\ &- - - - \\ &- - - - \\ v_n &= a_n - x \end{aligned}$$

Własności średniej arytmetycznej i błędów pozornych.

1) Średnia arytmetyczna x jest tem bliższa rzeczywistej wartości X im większa ilość jednakowo dokładnych spostrzeżeń posłużyła do jej wyznaczenia.

Określając poszczególne błędy rzeczywiste

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a_1 - X \\ \varepsilon_2 &= a_2 - X \\ &- - - - \\ &- - - - \\ \varepsilon_n &= a_n - X \end{aligned}$$

i sumując je, znajdziemy

$$[\varepsilon] = [a] - nX$$

a dzieląc obydwie strony tej równości przez n, otrzymamy:

$$\frac{[\varepsilon]}{n} = \frac{[a]}{n} - X$$

ponieważ zaś (2)

$$\frac{[a]}{n} = x$$

$$\frac{[\varepsilon]}{n} = x - X \quad (3)$$

t. j. różnica między średnią arytmetyczną a wartością rzeczywistą jest średnią arytmetyczną błędów prawdziwych poszczególnych spostrzeżeń.

Ze wzrostem ilości spostrzeżeń ułamek $\frac{[\varepsilon]}{n}$ powinien się zmniejszać, gdyż mianownik jego rośnie, zaś bezwzględna wartość licznika raczej zmniejsza się, gdyż im większa ilość spostrzeżeń została dokonana, tem większe zachodzi prawdopodobieństwo, że każdemu błędowi $+\varepsilon$ odpowie równy mu co do bezwzględnej wartości, lecz różny co do znaku, błąd $-\varepsilon$.

Przy n, rosnącem nieograniczenie,

$$\frac{[\varepsilon]}{n} = o \quad \text{i} \quad x = X$$

2) Błędy pozorne „v" tem są bliższe błędów prawdziwych „ε", im większa ilość spostrzeżeń jednakowo dokładnych posłużyła do wyznaczenia średniej arytmetycznej.

3). Suma błędów pozornych $= o$. Określając poszczególne błędy pozorne

$$v_1 = a_1 - x$$
$$v_2 = a_2 - x$$
$$- \quad - \quad - \quad -$$
$$. - \quad - \quad - \quad -$$
$$v_n = a_n - x$$

i sumując je, znajdziemy $[v] = [a] - nx$

lecz z określenia średniej arytmetycznej

$$x = \frac{[a]}{n}$$

wynika:

$$nx = [a]$$

skąd

$$[v] = O \quad (4)$$

Zależność powyższa służy jako kontrola rachunku.

4). Suma kwadratów błędów pozornych jest minimum. Wykażemy teraz charakterystyczną własność średniej arytmetycznej, polegającą na tem, że suma kwadratów błędów pozornych, t. j. różnic pomiędzy wynikami po-

szczególnych spostrzeżeń, a średnią arytmetyczną jest mniejsza od sumy kwadratów różnic pomiędzy temi samemi wynikami a jakąkolwiek inną dowolną wielkością, różną od średniej arytmetycznej.

Przypuśćmy, że x jest średnią arytmetyczną szeregu n spostrzeżeń

$$x_1 \; x_2 \; . \; . \; . \; x_n$$

to jest

$$x = \frac{[x]}{n}$$

oraz, że mamy jakąkolwiek inną wielkość y, różną od x, to jest

$$y \neq x$$

Różnice pomiędzy wynikami poszczególnych spostrzeżeń a średnią arytmetyczną (czyli błędy pozorne) będą odpowiednio równe:

$$\begin{array}{l} x_1 - x \\ x_2 - x \\ - - - \\ - - - \\ x_n - x \end{array}$$

zaś różnice pomiędzy wynikami poszczególnych spostrzeżeń, a wielkością y wyrażą się jako

$$\begin{array}{l} x_1 - y \\ x_2 - y \\ - - - \\ - - - \\ x_n - y \end{array}$$

Kwadraty skolumnowanych różnic będą —

$$\begin{array}{l} x_1^2 - 2\,xx_1 + x^2 \\ x^2_2 - 2\,xx_2 + x^2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ x_n^2 - 2\,xx_n + x^2 \end{array}$$

oraz

$$\begin{array}{l} x_1^2 - 2\,x_1\,y + y^2 \\ x_2^2 - 2\,x_2\,y + y^2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ x_n^2 - 2\,x_n\,y + y^2 \end{array}$$

Chcąc wykazać, iż suma kwadratów pierwszego szeregu „Σ_1“ jest mniejszą od sumy kwadratów szeregu drugiego "Σ_2“, dowieść należy, że

$$\sum 1 - \sum 2 < 0$$

Obliczmy tę różnicę:

$$\sum_1 = [xx] - 2x\,[x] + nx^2$$

$$\sum_2 = [xx] - 2y\,[x] + ny^2$$

$$\sum_1 - \sum_2 = \qquad - 2\,[x]\,(x-y) + n\,(x^2 - y^2)$$

z założenia

$$x = \frac{[x]}{n}$$

wynika

$$[x] = nx$$

Po podstawieniu tej wartości znajdziemy

$$\sum_1 - \sum_2 = n\,(x^2 - y^2) - 2nx\,(x-y)$$

$$= nx^2 - ny^2 - 2nx^2 + 2nxy$$

$$= -\,n\,(x^2 + y^2 - 2xy)$$

$$= -\,n\,(x-y)^2$$

Ponieważ n jest liczbą dodatnią, zaś $(x-y)^2$ jest również, przy założeniu $x \neq y$, liczbą dodatnią,
więc różnica

$$\sum_1 - \sum_2 = -\,n\,(x-y)^2$$

jest zawsze ujemną, skąd wynika, że

$$[vv] = \text{Minimum} \qquad (5)$$

Na powyższej własności (minimum sumy kwadratów), stanowiącej istotę średniej arytmetycznej, opiera się cała nauka, traktująca o wyrównaniu błędów pomiaru, i od niej też nosi nazwę metody najmniejszych kwadratów (dosłownie: metoda najmniejszych sum kwadratów).

Rachunek prawdopodobieństwa, opierając się na prawie błędów, wyrażającem prawdopodobieństwo popełnienia błędu, wyprowadza dla jednakowo dokładnych spostrzeżeń zależność $[vv]$ = minimum jako warunek, przy spełnieniu którego otrzymamy najprawdopodobniejszą wartość niewiadomej. Obraliśmy narazie drogę odwrotną, przyjmując za najprawdopodobniejszą wartość średnią arytmetyczną (postulat Gaussa) i udowodniając następnie, że suma kwadratów odchyleń wyników spostrzeżeń od średniej arytmetycznej jest minimum.

Zależności pomiędzy błędami prawdziwemi a pozornemi.

Mamy szereg n spostrzeżeń jednej wielkości

$$x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n$$

o błędach prawdziwych

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= x_1 - X \\ \varepsilon_2 &= x_2 - X \\ &\text{— — —} \\ &\text{— — —} \\ \varepsilon_n &= x_n - X \end{aligned}$$

Oznaczając średnią arytmetyczną tego szeregu przez x, t. j.

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

określimy poszczególne błędy pozorne

$$\begin{aligned} v_1 &= x_1 - x \\ v_2 &= x_2 - x \\ &\text{— — — — —} \\ &\text{— — — — —} \\ v_n &= x_n - x \end{aligned}$$

Oznaczymy różnicę pomiędzy średnią arytmetyczną a wartością prawdziwą, czyli prawdziwy błąd średniej arytmetycznej przez R, t. j. założymy

$$x - X = R$$

i wyznaczymy związki, zachodzące pomiędzy błędami prawdziwemi, a pozornemi.

1) Błąd prawdziwy dowolnego spostrzeżenia = błędowi pozornemu tego spostrzeżenia, zwiększonemu o błąd prawdziwy średniej arytmetycznej. Dla K-ego spostrzeżenia będzie:

$$\varepsilon_k = x_k - X,$$

$$v_k = x_k - x$$

skąd

$$x_k = \varepsilon_k + X$$

$$x_k = v_k + x$$

czyli

$$\varepsilon_k + X = v_k + x$$

$$\varepsilon_k = v_k + x - X$$

$$= v_k + R \qquad (6)$$

2) Różnica pomiędzy błędami prawdziwemi dwu spostrzeżeń równa jest różnicy pomiędzy błędami pozornemi tych spostrzeżeń. Określmy błędy prawdziwe w zależności od pozornych dla dwu dowolnych spostrzeżeń:

$$\varepsilon_k = v_k + R$$

$$\varepsilon_{k+m} = v_{k+m} + R$$

skąd $$\varepsilon_k - \varepsilon_{k+m} = v_k - v_{k+m} \qquad (7)$$

3) Suma kwadratów błędów prawdziwych = sumie kwadratów błędów pozornych, zwiększonej o iloczyn kwadratu prawdziwego błędu średniej arytmetycznej przez ilość spostrzeżeń.

Określmy błędy prawdziwe w zależności od pozornych i ich kwadraty:

$$\varepsilon_1 = v_1 + R$$

$$\varepsilon_2 = v_2 + R$$

— — — —

— — — —

$$\varepsilon_n = v_n + R$$

$$\varepsilon_1^2 = v_1^2 + 2vR + R^2$$

$$\varepsilon_2^2 = v_2^2 + 2v_2R + R^2$$

— — — — — —

— — — — — —

$$\varepsilon^2_n = v^2_n + 2v_nR + R^2$$ dodając,

otrzymamy: $$[\varepsilon\varepsilon] = [vv] + 2R[v] + nR^2$$

lub, ponieważ suma błędów pozornych = o

więc $$[\varepsilon\varepsilon] = [vv] + nR^2 \qquad (8)$$

§ 153. Średni błąd średniej arytmetycznej.

Mówiąc o własnościach średniej arytmetycznej, wykazaliśmy, że jej błąd jest średnią arytmetyczną prawdziwych błędów poszczególnych spostrzeżeń. Błąd ten, t. zw. błąd prawdziwy średniej arytmetycznej

$$R = \frac{[\varepsilon]}{n} \qquad (9)$$

jest zwykle wielkością nieznaną. Postaramy się określić błąd średniej arytmetycznej w sposób przybliżony w zależności do błędu średniego poszczególnego spostrzeżenia i ilości spostrzeżeń.

Z równości (9) wynika $[\varepsilon] = nR$

lub $$[\varepsilon]^2 = n^2 R^2 \qquad (10)$$

Rozwijając symbol $[\varepsilon]^2$, otrzymamy:

$$[\varepsilon]^2 = [\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots . \varepsilon_n]^2 = \varepsilon_1^2 + \ldots . \varepsilon_n^2 + 2\ (\varepsilon_1\ \varepsilon_2) + 2\ (\varepsilon_1\ \varepsilon_3) \ldots .$$
$$= [\varepsilon\varepsilon] + 2\ [\varepsilon_k\ .\ \varepsilon_{k+1}]$$

Przy bardzo wielkiej ilości spostrzeżeń zachodzi znaczne prawdopodobieństwo, że każdemu błędowi dodatniemu „+ E“ odpowiada równy mu co do wartości bezwzględnej, lecz odwrotny co do znaku, błąd „— E“. Wskutek tego suma podwójnych iloczynów $E_k\ .\ E_{k+1}$ będzie dążyć do zera

a stąd: $$[\varepsilon]^2 = [\varepsilon\varepsilon] \qquad (11)$$

Przy skończonej liczbie spostrzeżeń podwojona suma iloczynów $\varepsilon_k\ .\ \varepsilon_{k+1}$ będzie wielkością rzędu niższego w porównaniu do $[\varepsilon\varepsilon]$, tak więc odrzucenie sumy iloczynów mieć będzie do pewnego stopnia znaczenie zaokrąglenia.

Równanie $[\varepsilon]^2 = [\varepsilon\varepsilon]$ traktować tedy możemy dla mniejszej liczby spostrzeżeń, jako bliskie przybliżenie.

Gdybyśmy podstawili tę wielkość do równania (10), otrzymalibyśmy

$$[\varepsilon\varepsilon] = n^2\ R^2$$

Przy danej ilości spostrzeżeń średni błąd średniej arytmetycznej określimy z jej błędu prawdziwego na zasadzie wzoru dla średniego błędu dowolnego spostrzeżenia:

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$$

gdzie ε oznaczają prawdziwe błędy; ponieważ mamy tylko jedno wyznaczenie średniej arytmetycznej o prawdziwym błędzie R, przeto będziemy mieć na wyznaczenie średniego błędu M średniej arytmetycznej z powyższego wzoru wielkość:

$$M = \pm \sqrt{\frac{R^2}{1}} = \pm R \qquad (12)$$

wobec tego wzór 11-ty otrzymamy, jako:

$$[\varepsilon\varepsilon] = n^2\ M^2$$

skąd

$$M = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n^2}}$$

lub, ponieważ wzór

$$\pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = m$$

wyznacza średni błąd pojedyńczego spostrzeżenia w danym szeregu, więc będzie:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \qquad (13)$$

Czyli: średni błąd średniej arytmetycznej = średniemu błędowi poszczególnego spostrzeżenia, podzielonemu przez pierwiastek kwadratowy z ilości pomiarów. Podobnie jak średni błąd poszczególnego spostrzeżenia m charakteryzował nam dokładność dowolnego spostrzeżenia, średni błąd M charakteryzuje dokładność średniej arytmetycznej.

§ 154. Wyrażenie średnich błędów: pojedyńczego spostrzeżenia m i średniej arytmetycznej M w zależności od błędów pozornych.

Ścisłe stosowanie wzorów

$$m = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \qquad \text{oraz } M = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n^2}}$$

jest w praktyce rzeczą nieziszczalną, gdyż nie znamy wartości błędów prawdziwych ε.

Należy więc uzależnić wielkości m i M od błędów pozornych, możliwych do określenia. Badając zależności między błędami prawdziwemi a pozornemi, znaleźliśmy wzór (8)

$$[\varepsilon\varepsilon] = [vv] + n R^2$$

Podstawiając w tem równaniu $R^2 = M^2$ (12),

otrzymamy:

$$[\varepsilon\varepsilon] = [vv] + n M^2$$

ponieważ zaś na mocy wzoru (13)

będzie:

$$nM^2 = m^2$$

znajdziemy

$$[\varepsilon\varepsilon] = [vv] + m^2$$

Zważmy zaś, że z określenia błędu średniego poszczególnego spostrzeżenia (wz. 1) wynika

$$[\varepsilon\varepsilon] = nm^2$$

a więc

$$nm^2 = [vv] + m^2$$

$$m^2 (n - 1) = [vv],$$

skąd

$$\underline{\underline{m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)}}}} \qquad (14)$$

zaś średni błąd średniej arytmetycznej:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{[v\,v]}{n(n-1)}} \qquad (15)$$

§ 155. Średnia arytmetyczna i suma kwadratów błędów pozornych w zależności od odchyleń liczby przybliżonej od wyników spostrzeżeń.

Jeżeli wyniki pomiarów a_1 a_2 a_n są liczbami wielocyfrowemi, zwłaszcza zaś gdy nie są wyrażone w dziesiętnym układzie (pomiar kątów), bezpośrednie stosowanie wzoru

$$x = \frac{[a]}{n}$$

jest niedogodne ze względu na konieczność sumowania wielkich liczb. W takich wypadkach należy przyjąć przybliżoną wielkość N, wspólną dla wszystkich wyników spostrzeżeń (np. najmniejszy z wyników spostrzeżeń) i określić odchylenia t wyników poszczególnych spostrzeżeń od wartości przybliżonej

$$\left\{\begin{array}{l} t_1 = a_1 - N \\ t_2 = a_2 - N \\ - - - - \\ - - - - \\ t_n = a_n - N \end{array}\right. \qquad (16)$$

następnie obliczyć średnią arytmetyczną w zależności od wartości przybliżonej i jej odchyleń. Otrzymamy:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 = N + t_1 \\ a_2 = N + t_2 \\ - - - - \\ - - - - \\ a_n = N + t_n \end{array}\right. \qquad (17)$$

skąd

$$x = \frac{[a]}{n} = N + \frac{[t]}{n} \qquad (18)$$

Również sumę kwadratów błędów pozornych [vv], potrzebną do obliczania średnich błędów, dogodnie jest niekiedy wyrażać w zależności od tych odchyleń, lub samych wyników spostrzeżeń, zwłaszcza o ile nie obliczone są poszczególne błędy pozorne.

Wyprowadzimy te zależności:

$$v_1 = a_1 - x = a_1 - N - \frac{[t]}{n} = t_1 - \frac{[t]}{n}$$

$$v_2 = a_2 - x = a_2 - N - \frac{[t]}{n} = t_2 - \frac{[t]}{n}$$

— — — — — — — — — —

$$v_n = a_n - x = a_n - N - \frac{[t]}{n} = t_n - \frac{[t]}{n}$$

podniesiemy te wyrazy do potęgi drugiej:

$$+\left\{\begin{array}{l} v_1^2 = a_1^2 - 2a_1x + x^2 = t_1^2 - 2t_1\frac{[t]}{n} + \frac{[t]^2}{n^2} \\ v_2^2 = a_2^2 - 2a_2x + x^2 = t_2^2 - 2t_2\frac{[t]}{n} + \frac{[t]^2}{n^2} \\ \text{— — — — — — — — — — — —} \\ v_n^2 = a_n^2 - 2a_nx + x^2 = t_n^2 - 2t_n\frac{[t]}{n} + \frac{[t]^2}{n^2} \end{array}\right.$$

$$[vv] = [aa] - 2x[a] + nx^2 = [tt] - 2\frac{[t]}{n}[t] + n\frac{[t]^2}{n^2}$$

lecz

$$x = \frac{[a]}{n}$$

więc

$$[vv] = [aa] - 2\frac{[a]^2}{n^2} + n\frac{[a]^2}{n^2} = [tt] - 2\frac{[t]\,[t]}{n} + \frac{[t]\,[t]}{n}$$

skąd

$$[vv] = [aa] - \frac{[a][a]}{n} = [tt] - \frac{[t]\,[t]}{n}$$

Uwaga: W stosowaniu dogodnieszy jest wzór

$$[vv] = [tt] - \frac{[t]\,[t]}{n} \qquad (19)$$

gdyż wzór

$$[vv] = [aa] - \frac{[a]\,[a]}{n} \qquad (20)$$

jako wymagający obliczeń kwadratów $a_1\ a_2\ \ldots\ a_n$, oraz kwadratu $[a]$, a więc obliczeń z liczbami kilkocyfrowemi, jest niedogodny.

Przykład: Pięciokrotny pomiar kąta dał następujące rezultaty:

1. 35° 26′ 10″
2. 35° 26′ 20″
3. 35° 26′ 18″
4. 35° 26′ 25″
5. 35° 26′ 15″

Znaleźć wartość najprawdopodobniejszą tego kąta i określić błąd średni pojedyńczego spostrzeżenia, oraz błąd średni średniej arytmetycznej.

Wzory: $x = \frac{[a]}{n} = N + \frac{[t]}{n}$; $m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$ i $M = \sqrt{\frac{[vv]}{n\,(n-1)}}$

Rozwiązanie:

a	$+ t''$	t^2	v''	v^2
35° 26' 16"	+ 1	+ 1	+ 2,8	+ 7.84
„ „ 20"	+ 5	+ 25	— 1,2	+ 1.44
„ „ 18"	+ 3	+ 9	+ 0,8	+ 0.64
„ „ 25"	+ 10	+ 100	— 6,2	+ 38.44
„ „ 15"	0	0	+ 3,8	+ 14.44
N = 35° 26' 15"	+ 19	+ 135	0,0	+ 62.80

$$x = 35_{,}\ 26'\ 15'' + \frac{19''}{5} = 35^{\circ}\ 26'\ 18'',8$$

Kontrola: $[v] = 0$; $[vv] = [tt] - \frac{[t]\,[t]}{n} = 135 - \frac{19 \times 19}{5} = 62.8$

jest to wynik kontroli obliczenia bezpośredniego $[v^2]$.

$$m = \pm\sqrt{\frac{62.8}{4}} = \pm\,3''.96;\quad M = \pm\sqrt{\frac{62.8}{20}} = \pm\,1''77$$

§ 156. Średnie błędy funkcyj wyników spostrzeżeń bezpośrednich.

W praktyce mierniczej poszukujemy często najprawdopodobniejsze wielkości U, która nie może być zmierzona bezpośrednio, lecz jest funkcją pewnych wielkości X, Y, Z..., których najprawdopodobniejsze wartości otrzymać możemy z bezpośrednich spostrzeżeń; tak np., przy określaniu powierzchni mierzymy pewne elementy linjowe i kątowe i na zasadzie związku matematycznego pomiędzy temi elementami a powierzchnią, obliczamy jej wielkość.

Oczywiście, że najprawdopodobniejszą wartość funkcji

$$U = f\,(X,\ Y,\ Z...)$$

otrzymamy, gdy w miejsce nieznanych, rzeczywistych wartości X. Y. Z... podstawimy ich wartości najprawdopodobniejsze x, y, z.., otrzymane ze spostrzeżeń. Tak określona wartość funkcji

$$u = f\,(x,\ y,\ z...)$$

jest obarczona pewnym błędem, którego prawdziwej wartości nie znamy. Możemy jednak zapytać, jaką będzie dokładność tak określonej funkcji, o czem możemy sądzić z błędu średniego m_u; jeżeli znamy czynniki, charakteryzujące dokładność, czyli błędy średnie m_x m_y m_z... wartości x, y, z..., (które posłużyły nam do obliczenia wartości najprawdopodobniejszej funkcji), możemy ustalić wielkość m_u.

Zanim przystąpimy do określenia błędu średniego funkcji dowolnego kształtu

$$u = f(x, y, z...)$$

zajmiemy się kilku poszczególnemi wypadkami.

§ 157. Średni błąd iloczynu wielkości o znanym średnim błędzie przez stały czynnik.

Przypuśćmy że należy określić średni błąd funkcji

$$u = ax \qquad (21)$$

przyczem: x jest wielkością o znanym średnim błędzie m_x, a—jest wielkością stałą; określmy średni błąd m_u.

Wielkość x możemy określić, jako jedno ze spostrzeżeń szeregu I: x_1 x_2 .... x_n o średnim błędzie pojedyńczego spostrzeżenia m_x.

Podobnie też wielkość ax możemy określić, jako jedno ze spostrzeżeń szeregu II:

$$ax_1,\ ax_2,\ ....\ ax_n.$$

Jeżeli za błędy prawdziwe pierwszego szeregu przyjmiemy

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ ....\ \varepsilon_n$$

wówczas błędami prawdziwemi wielkości drugiego szeregu będą:

$$a\varepsilon_1,\ a\varepsilon_2,\ ...\ a\varepsilon_n$$

Więc błędem poszczególnego spostrzeżenia $ax = u$ będzie

$$m_u = \pm\sqrt{\frac{[a\varepsilon a\varepsilon]}{n}} = \pm\sqrt{\frac{a^2[\varepsilon\varepsilon]}{n}} = \pm a\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$$

Ponieważ zaś dla I-ego szeregu

$$m_x = +\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}};$$

przeto

$$\underline{m_u = am_x} \qquad (22).$$

A więc: średni błąd iloczynu stałej a przez wielkość x o znanym średnim błędzie m_x równa się iloczynowi stałej a przez średni błąd m_x.

§ 158. Średni błąd sumy lub różnicy.

Przypuśćmy, że z równania

$$u = x + y \qquad (23)$$

w którem dane są x i y, oraz m_x i m_y, należy określić m_u, t. j. średni błąd sumy.

Przypuśćmy dalej, że x jest jednem z k spostrzeżeń

I: $$x_1\ x_2\ \ldots\ x_k$$

o średnim błędzie poszczególnego spostrzeżenia $= m_x$, zaś y — jednem z n spostrzeżeń

II: $$y_1\ y_2\ \ldots\ y_n$$

o średnim błędzie poszczególnego spostrzeżenia równym m_y,

Określmy średni błąd poszczególnego wyrazu $x + y$.

W tym celu utwórzmy wszelkie możliwe wyrazy typu $x + y$.

Przy k wyrazach x, i n wyrazach y wszelkich możliwych sum $x + y$ będzie kn.

$$\begin{array}{lll} x_1 + y_1 & x_2 + y_1 & x_k + y_1 \\ x_1 + y_2 & x_2 + y_2 \quad \ldots & x_k + y_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ x_1 + y_n & x_2 + y_n & x_k + y_n \end{array}$$

Mamy więc k kolumn po n wierszy, t. j. kn sum typu $x + y$.

Jeżeli prawdziwe błędy wyrazów x oznaczymy przez ε, zaś prawdziwe błędy y-ów przez τ, wówczas prawdziwemi błędami powyżej napisanych sum będą

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_1 + \tau_1 & \varepsilon_2 + \tau_1 & \varepsilon_k + \tau_1 \\ \varepsilon_1 + \tau_2 & \varepsilon_2 + \tau_2 & \varepsilon_k + \tau_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \varepsilon_1 + \tau_n & \varepsilon_2 + \tau_n & \varepsilon_k + \tau_n. \end{array}$$

Dla utworzenia średniego błędu pojedyńczego spostrzeżenia tworzymy sumę kwadratów wszystkich prawdziwych błędów. Sumę tą pod pierwiastkiem kwadratowym podzielimy przez liczbę kn wyrazów.

Każdy wyraz $\varepsilon + \tau$ w drugiej potędze wyniesie:

$$\varepsilon^2 + 2\varepsilon\tau + \tau^2$$

suma wyrazów ε^2 wyniesie:

$$n\varepsilon_1^2 + n\varepsilon_2^2 + \ldots\ n\varepsilon_k^2 = n\ [\varepsilon\varepsilon]$$

Suma wyrazów τ^2 wyniesie:

$$k\ \tau_1^2 + k\ \tau_2^2 + \ldots + k\ \tau_n^2 = k\ [\tau\tau]$$

suma zaś podwojonych iloczynów będzie równa,

$$2\,[\varepsilon\tau].$$

Rozpatrzmy ten wyraz.

Ponieważ prawdopodobieństwo zajścia błędów ujemnych i dodatnich jest jednakowe, przeto wszystkie iloczyny $\varepsilon\tau$ co do swych znaków podzielą się na 4 kategorje:

$$\begin{array}{cc} + & + \\ + & - \\ - & + \\ - & - \end{array}$$

a więc iloczyny rozbiją się na dwie grupy: dodatnią i ujemną. Suma tych iloczynów w granicy dąży do zera, a w każdym razie jest wobec sum

$$n\,[\varepsilon\varepsilon] \text{ i } k\,[\tau\tau]$$

wyrazem niższego rzędu.

Wobec tego za sumę kwadratów błędów prawdziwych wszystkich nk sum możemy przyjąć

$$n\,[\varepsilon\varepsilon] + k\,[\tau\tau]$$

za średni zaś błąd poszczególnej sumy:

$$m_u = \pm\sqrt{\frac{n\,[\varepsilon\varepsilon] + k\,[\tau\tau]}{nk}} = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{k} + \frac{[\tau\tau]}{n}}$$

że zaś

$$m_x = \pm\sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{k}}$$

$$m_y = \pm\sqrt{\frac{[\tau\tau]}{n}}$$

przeto

$$\underline{m_u^{\,2} = m_x^{\,2} + m_y^{\,2}}$$

lub

$$\underline{m_u = \pm\sqrt{m_x^{\,2} + m_y^{\,2}}.} \quad (24)$$

Rozważając analogicznie w wypadku różnicy

$$u = x - y \quad (25),$$

określimy

$$\underline{m_u = \pm\sqrt{m_x^{\,2} + m_y^{\,2}}} \quad (26)$$

A więc:

Średni błąd sumy czy różnicy dwu wyników spostrzeżeń równa się pierwiastkowi kwadratowemu z sumy kwadratów ich średnich błędów.

Rozpatrzmy sumę trzech wyników spostrzeżeń:

$$u = x + y + z$$

o danych średnich błędach m_x, m_y, m_z.

Oznaczmy $x + y = r$ więc na zasadzie poprzedniego:

$$m_r^2 = m_x^2 = m_y^2$$

zaś dla

$$u = r + z$$

będzie $$m_u^2 = m_r^2 + m_z^2 = m_x^2 + m_y^2 + m_z^2.$$

Analogicznie postępując, dla

$$u = x + y + z + t + \ldots \qquad (27)$$

otrzymamy: $$\underline{m_u = \pm \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 + m_t^2 + \ldots}} \qquad (28)$$

niezależnie od znaków $x, y, z, \ldots$

Przy $m_x = m_y = m_z \ldots = m$ w liczbie n będzie:

$$m_u^2 = n\, m^2 \text{ i } \underline{m_u = m\sqrt{n}} \qquad (29)$$

Podobnie dla funkcji:

$$\underline{u = ax + by + cz + \ldots} \qquad (30)$$

w której $a, b, c \ldots$ są stałemi, zaś $x, y, z \ldots$ wielkościami o znanych średnich błędach m_x, m_y, m_z, dla określenia średniego błędu m_u

$$a\,x = r \qquad m_r = a\,m_x$$

oznaczmy: $$by = w \quad \text{a otrzymamy:} \quad m_w = b\,m_y$$

$$c\,z = s \qquad m_s = c\,m_z$$

że zaś dla

$$u = r + w + s$$

$$m_u^2 = m_r^2 + m_w^2 + m_s^2 + \ldots$$

więc

$$m_y^2 = a^2 m_x^2 + b^2\, m_y^2 + c^2\, m_z + \ldots.$$

lub

$$m_u = \pm \sqrt{a^2 m_x^2 + b^2 m_y^2 + c^2 m_z^2 + \ldots} \qquad (31)$$

Jest to t. zw. średni błąd funkcji linjowej.

Przykład: W jaki sposób najdokładniej, korzystając z cyrkla i krótkiej podziałki, odciąć na planie długi odcinek s?

Przypuśćmy, że dogodnym krokiem cyrkla jest odcinek. $l = \frac{s}{n}$.

Gdy ten odcinek weźmiemy w cyrkiel z błędem m_l i odłożymy go n razy, wówczas, pomijając błędy innych naszych czynności

ze wzoru

$$s = n\,l$$

otrzymamy

$$\underline{m_s = n\,m_l}$$

Gdy jednak za każdym odcięciem l na planie, zmienimy krok cyrkla i znów odbierzemy l z podziałki, odetniemy w dalszym ciągu na planie i powtarzać to będziemy dla każdego nowego odcinka l, wówczas

$$s = l + l + \ldots + l \ (n \text{ razy})$$

a stąd

$$m_s^2 = m_l^2 + m_l^2 + \ldots + m_l^2 = n\,m_l^2$$

i

$$\underline{m_s = m_l \sqrt{n}} \qquad (33)$$

Jak stąd wnioskujemy, ponieważ

$$m_l \sqrt{n} < n\,m_l$$

więc druga metoda odcinania prostej jest dokładniejsza.

§ 159. Sredni błąd jednomianu.

Przypuśćmy, że wyrazy, wchodzące w skład jednomianu

$$u = \frac{l_1\,l_2}{l_3\,l_4} \qquad (34)$$

otrzymane zostały ze spostrzeżeń i że ich średnie błędy m_1, m_2, m_3 i m_4 są znane. Określmy średni błąd m_u funkcji u.

Nazwijmy przez L_1, L_2, L_3 i L_4 wartości prawdziwe wielkości l_1, l_2, l_3 i l_4, przez ε_1, ε_2, ε_3 i ε_4 — ich prawdziwe błędy, zaś przez U i ε_u prawdziwą wielkość i średni błąd funkcji U.

Ponieważ:

$$\varepsilon_1 = l_1 - L_1$$
$$\varepsilon_2 = l_2 - L_2$$
$$- \quad - \quad - \quad -$$
$$\varepsilon_4 = l_4 - L_4$$
$$\varepsilon_u = u - U$$

wartość prawdziwa funkcji $U = u - \varepsilon_u$ może być przedstawiona w formie

$$U = \frac{L_1 L_2}{L_3 L_4}$$

lub też w formie:

$$u - \varepsilon_u = \frac{(l_1 - \varepsilon_1)(l_2 - \varepsilon_2)}{(l_3 - \varepsilon_3)(l_4 - \varepsilon_4)}$$

Jeżeli ε_u jest wielkością małą w stosunku do u, wówczas, oznaczając przez r_u zmianę logarytmu u przy zmianie u o jednostkę, możemy napisać:

$$\log (u - \varepsilon_u) = \log u - r_u \varepsilon_u$$

stosujemy ostatnie równanie do wzoru na $u - \varepsilon_u$ i odejmujemy następnie log u, wyrażony przez l_1, l_2, l_3 i l_4:

$$\log u - r_u \varepsilon_u = \log l_1 - r_1 \varepsilon_1 + \log l_2 - r_2 \varepsilon_2 - \log l_3 + r_3 \varepsilon_3 - \log l_4 + r_4 \varepsilon_4$$
$$\log u \qquad = \log l_1 \qquad + \log l_2 \qquad - \log l_3 \qquad - \log l_4$$

stąd: $r_u \varepsilon_u = + r_1 \varepsilon_1 + r_2 \varepsilon_2 - r_3 \varepsilon_3 - r_4 \varepsilon_4$

oraz

$$\varepsilon_u = \frac{r_1}{r_u} \varepsilon_1 + \frac{r_2}{r_u} \varepsilon_2 - \frac{r_3}{r_u} \varepsilon_3 - \frac{r_4}{r_u} \varepsilon_4 \qquad (35)$$

Dowiedziemy teraz, że skoro mamy związek (35) linjowy, zachodzący pomiędzy błędami prawdziwemi, to do związku między błędami średniemi przejdziemy bezpośrednio od równania (35), skoro w niem zamiast błędów prawdziwych $\varepsilon_u, \ldots \varepsilon_4$, podstawimy dowolne wielkości, takie jednakże, których błędy średnie są równe odpowiednio m_u, $m_1 \ldots m_4$.

Równanie (35) wyraża bowiem związek między błędami prawdziwemi pewnej funkcji

$$K = \frac{r_1}{r_u} k_1 + \frac{r_2}{r_u} k_2 - \frac{r_3}{r_u} k_3 - \frac{r_4}{r_u} k_4 \qquad (36)$$

gdzie K, $k_1 \ldots k_4$ są to wielkości, otrzymane z pomiaru; jeżeli przez $\varepsilon, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_4$ oznaczymy prawdziwe błędy tych wielkości, wówczas równanie:

$$(K - \varepsilon) = \frac{r_1}{r_u}(k_1 - \varepsilon_1) + \frac{r_2}{r_u}(k_2 - \varepsilon_2) - \frac{r_3}{r_u}(k_3 - \varepsilon_3) - \frac{r_4}{r_u}(k_4 - \varepsilon_4)$$

odtworzy zależność między prawdziwemi wielkościami K, k_1, k_2, k_3 i k_4. Odejmując ostatnie od przedostatniego równania, otrzymujemy równanie:

$$\varepsilon = \frac{r_1}{r_u}\varepsilon_1 + \frac{r_2}{r_u}\varepsilon_2 - \frac{r_3}{r_u}\varepsilon_3 - \frac{r_4}{r_u}\varepsilon_4$$

identyczne z równaniem (35).

Ponieważ równanie (35) otrzymujemy tak z równania (34), jak z równania (36), więc skoro prawdziwe błędy wiążą się jednakowo w obydwu wypadkach, to i do średnich błędów w tych wypadkach przejdziemy w jednakowy sposób. Inaczej mówiąc, w stosunku do średnich błędów równanie

$$u = \frac{l_1\ l_2}{l_3\ l_4}$$ oraz równanie (36)

są *równoważne*. Przechodząc więc do m_u za pośrednictwem równania (36), otrzymamy:

$$m_u^2 = \left(\frac{r_1}{r_u}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{r_2}{r_u}\right)^2 m_2^2 + \left(\frac{r_3}{r_u}\right)^2 m_3^2 + \left(\frac{r_4}{r_u}\right)^2 m_4^2$$

lub, usuwając za nawias $\frac{1}{r_u^2}$, oraz wprowadzając symbol sumy, mamy:

$$m_u = \pm \frac{1}{r_u}\sqrt{[r^2\ m^2]} \qquad (37)$$

Do tego samego wzoru dojdziemy, rozumując inaczej:

dla

$$u = \frac{l_1\ l_2}{l_3}$$

o danych średnich błędach m_1, m_2 i m_3 odnajdziemy m_u z równania

$$\log u = \log l_1 + \log l_2 - \log l_3$$

skąd

$$m^2_{\log u} = m^2_{\log l_1} + m^2_{\log l_2} + m^2_{\log l_3} \qquad (38)$$

Jeżeli dane są m_1, m_2, m_3, wówczas $m_{\log l_1}$ określimy, jako błąd *log* l_1, wynikający z błędu wielkości l_1, wiemy zaś, że wszelka zmiana liczby l o wielkość m jednostek pociąga za sobą zmianę log l o rm, gdzie r oznacza zmianę log l przy zmianie l o jednostkę.

Stąd

$$m_{\log u} = r_u \, m_u$$
$$m_{\log l_1} = r_1 \, m_1$$
$$m_{\log l_2} = r_2 \, m_2$$
$$— — — — —$$

więc równanie (38) przekształci się w następujące:

$$r_u^2 \, m_u^2 = r_1^2 \, m_1^2 + r_2^2 \, m_2^2 + r_3^2 \, m_3^2 \ldots$$

a stąd

$$m_u = \pm \frac{1}{r_u} \sqrt{[r^2 \, m^2]}$$

§ 160. Błąd średni dowolnej funkcji.

Mamy pewną funkcję

$$U = f\,(X, Y, Z\ldots)$$

odniesioną do pewnych nieznanych prawdziwych wielkości $U, X\ldots$

Przypuśćmy, że ze spostrzeżeń otrzymaliśmy wielkości $x, y, z\ldots$ o średnich błędach $m_x, m_y, m_z \ldots$

Należy określić średni błąd m_u funkcji

$$u = f\,(x, y, z\ldots)$$

Oznaczmy przez $\varepsilon_u, \varepsilon_x, \varepsilon_y \ldots$. błędy prawdziwe wielkości $u, x, y\ldots$, wówczas

$$U = u + \varepsilon_u = f\,(x + \varepsilon_x, y + \varepsilon_y, z + \varepsilon_z, \ldots)$$

ponieważ zaś błędy prawdziwe są nieznaczne wobec pomierzonych wielkości, więc, stosując szereg Taylora, otrzymamy:

$$u + \varepsilon_u = f\,(x, y, z,\ldots) + \frac{df}{dx}\,\varepsilon_x + \frac{df}{dy}\,\varepsilon_y + \frac{df}{dz}\,\varepsilon_z + ,\ldots$$

lecz:

$$u = f\,(x, y, z,\ldots)$$

przeto:

$$\varepsilon_u = \frac{df}{dx}\,\varepsilon_x + \frac{df}{dy}\,\varepsilon_y + \frac{df}{dz}\,\varepsilon_z + \ldots.$$

stąd średni błąd wielkości u będzie równy na zasadzie twierdzenia o funkcjach równoważnych w stosunku do błędów prawdziwych i średnich (patrz poprzedni §)

zatem:

$$m_u^2 = \pm \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2 m_z^2 + \ldots}$$

Obliczenie średniego błędu u sprowadza się więc do obliczenia cząstkowych pochodnych.

W geodezji wzór ten ma olbrzymie zastosowanie, przytem tylko w bardzo rzadkich wypadkach należy liczyć się z wpływem odrzucanych wyrazów, zawierających pochodne drugie.

Przykłady:

1) Pomierzono pewną prostą przez ułożenie 160 razy łaty, której długość przy komparacji z miarą normalną została określona z błędem $\pm$ 0.0015 *dcm*.

Określić wpływ tego błędu na długość prostej:

$$d = n\,l = 160\,l$$

$$m_d = 160\,m = \pm\,0{,}24\ dcm$$

2) W trójkącie pomierzono każdy kąt ze średnim błędem $\pm\,k$.

Obliczyć średni błąd sumy kątów:

$$m_s = \pm\sqrt{k^2 + k^2 + k^2} = \pm\,k\sqrt{3}$$

3) W trójkącie pomierzono kąt $A = 60^0\ 40'\ 20''$ ze średnim błędem $\pm$ 8" i kąt $B = 30^0\ 30'\ 40''$ ze średnim błędem $\pm$ 6".

Obliczyć trzeci kąt C łącznie z jego średnim błędem:

$$C = 180^0 - (A + B)$$

$$C = 180^0 - (60^0\ 40'\ 20'' + 30^0\ 30'\ 40'') = 88^0\ 49'\ 0''$$

$$m_c = \pm\sqrt{m_A^2 + m_B^2} = \pm\sqrt{64 + 36} = \pm\,10''$$

4) Obliczyć błąd kąta Z, obliczonego jako suma dwu innych x i y, jeżeli x jest średnią z 16-tu pomiarów, zaś y średnią z 25 pomiarów, a jednorazowy pomiar daje błąd średni $\pm$ 4":

$$m_x = \pm\,\frac{4}{\sqrt{16}} = \pm 1'';$$

$$m_y = \pm\,\frac{4}{\sqrt{25}} = \pm\,0.''8$$

$$m_z = \pm\sqrt{1^2 + 0.8^2} = \pm\sqrt{1 + 0{,}64} = \pm\sqrt{1.64} = \pm\,1''.3$$

5) Ilu trzeba dokonać spostrzeżeń teodolitem, dla którego średni błąd pojedyńczego spostrzeżenia = 30", by średni błąd wyniku był równy 10", jeżeli pominąć wpływ nieścisłości w centrowaniu i w celowaniu?

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \qquad M = 10''; \qquad m = 30''$$

$$n = \frac{m^2}{M^2} = \frac{900}{100} = 9.$$

6) Znaleźć średni błąd przyrostów Δx i Δy odcinka l, pomierzonego ze średnim błędem $= \pm m_l$, oraz o azymucie α, wyznaczonym ze średnim błędem $\pm m_\alpha$.

$$\Delta x = l \cos \alpha$$

$$\Delta y = l \sin \alpha$$

korzystamy ze wzoru dla

$$m_{f(x\ y\ z\ \ldots)} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \ldots}$$

$$m_{\Delta x} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta x}{\partial l}\right)^2 m_l^2 + \left(\frac{\partial \Delta x}{\partial \alpha}\right)^2 m^2{}_\alpha}$$

$$\frac{\partial \Delta x}{\partial l} = \cos \alpha$$

$$\frac{\partial \Delta x}{\partial \alpha} = -l \sin \alpha$$

$$m_{\Delta x} = \sqrt{m_l^2 \cos^2 \alpha + l^2 \sin^2 \alpha\ m^2{}_\alpha}$$

Analogicznie obliczymy:

$$m_{\Delta y} = \pm \sqrt{m_l^2 \sin^2 \alpha + l^2 \cos^2 \alpha\ m^2{}_\alpha}$$

7) W trójkącie płaskim $A\ B\ C$ zmierzono

$\sphericalangle A = 30^0\ 40'\ 30''$ ze średnim błędem $m_A = \pm 20''$

$\sphericalangle B\ 100^0\ 20'\ 0$ „ „ „ $m_B = \pm 30''$

bok $c = 200.00$ mtr. „ „ „ $m_c = \pm 0.05$ mtr.

Obliczyć najprawdopodobniejszą wartość boku b i jej średni błąd m_b;

Wzory:

$$b : c = \sin B : \sin C$$

$$b = \frac{c}{\sin C} \cdot \sin B \quad \text{(I)}$$

$$m_b = \sqrt{\left(\frac{c \cos B}{\sin C} m_B\right)^2 + \left(\frac{c \cos C \sin B}{\sin^2 C} m_C\right)^2 + \left(\frac{\sin B}{\sin C} m_C\right)^2} \quad \text{(II)}$$

lub po uwzględnieniu z (I)

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

otrzymamy

$$m_b = \sqrt{cotg^2 B m_B^2 + cotg^2 C m_C^2 + \frac{m_c^2}{C^2}} \quad \text{(III)}$$

Ażeby zastosować powyższe wzory, obliczmy kąt C i jego średni błąd m_c

$$C = 180^0 - A - B = 48^0 59' 30'' \quad m_c = \sqrt{m_A^2 + m_C^2} = \pm 36''$$

Obecnie dla wyrównania pomiaru mamy następujące dane:

$c = 200.00$	$m_c = \pm 0.05$	
$B = 100^0 20' 00''$	$m_B = \pm 30''$	w radjanach: $\frac{30''}{\rho''}$
$C = 48^0 59' 30''$	$m_C = \pm 36''$	w radjanach: $\frac{36''}{\rho''}$

Ułóżmy tabelkę logarytmów dla tych wielkości:

N	lg N	lg sin N	lg cotg N	Wyliczenia potoczne
$c = 200.00$	2.30103	—	—	lg 30'' = 1.47712
$m_c = 0.05$	$\bar{2}.69897$	—	—	lg ρ'' = 5.31443
$B = 100^0 20'$	—	$\bar{1}.99290$	$\bar{1}.26086$	lg m_b = $\bar{4}.16269$
$m_B = \frac{30''}{206265''}$	$\bar{4}.16269$	—	—	lg 36'' = 1.55630
$C = 48^0 59' 30''$	—	$\bar{1}.87772$	$\bar{1}.93939$	lg ρ'' = 5.31443
$m_c = \frac{36''}{206265}$	$\bar{4}.24187$	—	—	lg m_c = $\bar{4}.24187$

Zapomocą tej tabelki rozwiążemy równania (I) i (III)

I. Obliczenie najprawdopodobniejszej wartości b:

$$\begin{aligned} \lg c &= 2.30103 \\ \lg \sin B &= 1.99290 \\ \text{Colg. } \sin C &= 0.12228 \\ \hline \lg b &= 2.41621 \\ b &= 260.74 \end{aligned}$$

II. Obliczenie średniego błędu wartości najprawdopodobniejszej:

$$\begin{aligned} 2 \lg \operatorname{cotg} B &= \bar{2}.52172 \\ 2 \lg m_B &= \bar{8}.32538 \\ \hline \lg ctg^2 B m^2_B &= \bar{10}.84710 \\ ctg^2 B m^2_B &= 10^{-8}0{,}07 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2 \lg ctg C &= \bar{1}.87858 \\ 2 \lg m_c &= \bar{8}.48374 \\ \hline \lg ctg^2 C m^2_c &= \bar{8}.36232 \\ ctg^2 C m^2_c &= 10^{-8}2{,}3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \lg m_c &= \bar{3}.39794 \\ 2 \lg ctg\, c &= \bar{5}.39794 \\ \hline \lg \frac{m^2_c}{c^2} &= \bar{8}.79588 \\ \frac{m^2_c}{c^2} &= {}^{-8}10.6{,}3 \end{aligned}$$

$$m_b = 260.74 \sqrt{{}^{-8}10(0.07 + 23 + 63)} = \frac{260.74}{10^4} \sqrt{8.67} = \pm 0.08$$

8. Obliczamy błąd średni najprawdopodobniejszej wartości boku b:

$$b = \frac{c}{\sin C} \sin B,$$

obliczony poprzednio (zad. 7) zapomocą wzoru ogólnego.

Rozwiązanie przeprowadzimy według schematu:

N wynik pomiaru	K	lg K	r	m	$r\ m$	$r^2\ m^2$
$c = 200.00\ m$	c	2.30103	220	0.05	11	121.00
$B = 100^\circ 20'$	sin B	$\bar{1}$.99290	0.04	30"	1.2	1.44
$C = 48^\circ 59' 30"$	sin C	$\bar{1}$.87772	0.18	36"	5.48	30.03
	lg b	2.41621			$[r^2\ m^2]$	= 152.47.

$$b = 260{,}74$$
$$r_b = 170.$$

$$m_b = \frac{1}{r_b}\sqrt{[r^2\ m^2]} = \frac{1}{170}\sqrt{152.47} = \underline{\pm\ 0.08}$$

9. Średni błąd jednokrotnego pomiaru prostej o długości 100 metrów $= m$. Ile razy należy pomierzyć prostą o długości 400 m., aby średni błąd wyniku był również m?

Określmy najpierw średni błąd jednorazowego pomiaru prostej o długości 400 metrów:

$$400 = 100 + 100 + 100 + 100$$

$$m_{400} = \pm\sqrt{m^2 + m^2 + m^2 + m^2} = \pm\ 2\ m.$$

Oznaczamy poszukiwaną ilość pomiarów przez n, wtedy

$$M_{400} = \pm\frac{m_{400}}{\sqrt{n}} = \frac{2\ m}{\sqrt{n}}$$

ponieważ ma być:

$$M_{400} = m,$$

otrzymamy

$$m = \frac{2\ m}{\sqrt{n}}$$

skąd

$$n = 4.$$

10. Zbadać na wykresie zależność między średnim błędem średniej arytmetycznej a ilością spostrzeżeń.

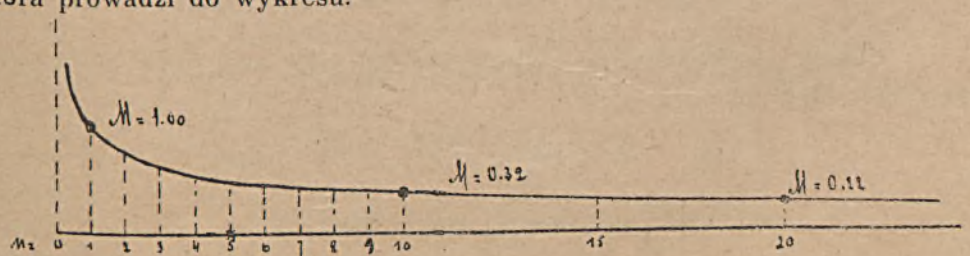
Ze wzoru

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

dla średniego błędu pojedyńczego spostrzeżenia $m = 1$, ułóżmy następującą tabelkę:

Zmienna n	1	2	3	4	5	6	8	10	20	50	100
funkcja $M=\frac{1}{\sqrt{n}}$	1.00	0.71	0.58	0.50	0.45	0.41	0.35	0.32	0.22	0.14	0.10

która prowadzi do wykresu:



Z wykresu wynika, że ze wzrostem ilości spostrzeżeń krzywa dąży asymptotycznie do osi odciętych, czyli średni błąd maleje nieograniczenie. O ile jednak pierwsze 2 — 6 pomiarów powodują raptowne zmniejszanie się błędu średniego, a więc wzrost dokładności wyniku, o tyle wpływ dalszego zwiększania ilości pomiarów na błąd średni jest nieznaczny. Chcąc np, zwiększyć dokładność, a więc zmniejszyć średni błąd 10-krotnie, musielibyśmy wykonać aż 100 pomiarów.

W praktyce zwraca się przeto większą uwagę na dokładne wykonanie mniejszej ilości pomiarów, t. j. zmniejszenie błędu średniego pojedyńczego pomiaru, gdyż nadmierne zwiększanie ilości pomiarów związane jest zazwyczaj ze znacznemi kosztami i stratą czasu.

11) Błąd niwelacji.

Różnica wysokości dwu reperów równa się sumie odczytów wprzód mniej suma odczytów wstecz.

Jeżeli M jest błędem odczytu przy normalnej odległości niwelatora od łaty, wtedy

$$m = \pm \sqrt{M^2 + M^2} = \pm M \sqrt{2}$$

jest błędem różnicy odczytów z obydwu łat, zaś przy n stanowiskach, t. j. przy ciągu niwelacyjnym $L = n\,d$,

$$m_L = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \ldots} = M \sqrt{2n} = M \sqrt{2} \sqrt{\frac{L}{d}}$$

Niwelacja zaś innego ciągu L_1 daje:

$$m_{L_1} = M \sqrt{2} \sqrt{\frac{L_1}{d}}$$

skąd

$$\frac{m_L}{m_{L_1}} = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{L_1}},$$

a więc średnie błędy niwelacji są proporcjonalne do pierwiastków kwadratowych z długości ciągów.

12) Zmierzono dwa boki prostokąta:

$a = 12\,3$ ze średnim błędem $m_a = \pm 0.2$

$b = 156.5$ „ „ „ $m_b = \pm 0.3$

Określić najprawdopodobniejszą wartość pola tego prostokąta, oraz jego średni błąd:

$$S = ab = 12{,}3 \cdot 156.5 = 1924{,}95$$

$$m_s^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial a}\right)^2 m_a^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial b}\right)^2 m_b^2 = b^2 m_a^2 + a^2 m_b^2$$

$$m^2_s = 156{,}5^2 \cdot 0{,}2^2 + 12{,}3^2 \cdot 0.3^2 = 993{,}27$$

$$m_s = \pm \sqrt{993.27} = \pm 31{,}5$$

13 Określić najprawdopodobniejszą wartość kąta

$$x = A + B + C$$

oraz jej błąd średni z następujących danych:

$A = 60^0\ 25'\ 15''$ jest średnią arytm. 4 pomiarów
$B = 49^0\ 39'\ 12''.5$ „ „ „ 9 „
$C = 49^0\ 55'\ 35''$ „ „ „ 6 „

Błąd średni pojedyńczego pomiaru kąta = 30"

$x = A + B + C = 160^0\ 0'\ 2''.5$ $\qquad M_x = \pm \sqrt{M^2_A + M^2_B + M^2_C}$

$$M_A = \frac{30''}{\sqrt{4}} = \pm 15''$$

$$M_B = \frac{30}{\sqrt{9}} = \pm 10''$$

$$M_C = \frac{30}{\sqrt{6}} = \pm 12''.3$$

$$M_x = \pm \sqrt{225 + 100 + 151} = \pm \sqrt{276} = \pm 21''$$

14. Określić najprawdopodobniejszą wartość różnicy poziomów h między punktami A i B i jej średni błąd z następujących danych:

Odległość $d = 95.10$ ze śr. bł. $m_d = \pm 0.06$.

kąt pionowy $\alpha = 12^0 14'$ „ „ „ $m_\alpha = \pm 1'$.

$$h = d\ tg\,\alpha \qquad m_h = \frac{1}{r_h}\sqrt{[r^2 m^2]}$$

K	$lg\ K$	r	m	$r\,m$	$r^2 m^2$
d	1.97818	500	0.06	30	900
$tg\,\alpha$	1.33609	61.20	1'	61.20	3745
h	1.31427	$2100 = r_h$			4645

$h = 20{,}62$

$$m_h = \pm \frac{1}{2100}\sqrt{4645} = \pm 0{,}03.$$

15. Określić wartość najprawdopodobniejszą boku a

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B},$$

oraz jej średni błąd z następujących danych:

$$b \begin{cases} 203.25 \\ 203.17 \\ 203.18 \end{cases} \qquad A \begin{cases} 50^0\ 52' \\ 50^0\ 50' \\ 50^0\ 51' \end{cases} \qquad C \begin{cases} 50^0\ 30' \\ 50^0\ 30' \\ 50^0\ 30' \\ 50^0\ 32' \end{cases}$$

Określmy przedewszystkiem najprawdopodobniejsze wartości wielkości b, A, B, potrzebnych do wyliczenia boku a, oraz średnie błędy tych wielkości:

$$b = \frac{[b]}{3} = 203.20$$

v_b	v_b^2
+ 0,05	+ 0.0025
— 0.03	0.0009
— 0.02	0.0004
0	0.0038

$$M_b = \pm \sqrt{\frac{[v\,v]}{(n\,n\text{-}1)}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{0.0038}{6}} = \pm\ 0'.03$$

$$A = \frac{[A]}{3} = 50^0 51'$$

v_A	v_A^2
+ 1'	1
— 1'	1
0	0
0	2

$$M_A = \pm \sqrt{\frac{[v\,v]}{n\,(n\text{-}1)}} =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{2}{6}} = \pm\ 0',58$$

$$C = \frac{[C]}{4} = 50^0 30'.5$$

v_c	v_c^2
— 0'.5	0.25
— 0.5	0.25
— 0.5	0.25
+ 1',5	2.25
0	3.00

$$M_C = \pm \sqrt{\frac{[v\,v]}{n\,(n\text{-}1)}} =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{3}{12}} = \pm\ 0',5$$

$B = 180^0 - A - C = 78^0 38',5$ $\qquad M_B = \pm \sqrt{M^2_A + M^2_C} = 0',77.$

N wynik pomiaru	K	lg K	v	m	$r\ m$	$r^2\ m^2$
$b = 203.20$	b	+ 2.30792	220	0,03	6,6	43,56
$A = 50^051$	sin A	+ 1.88958	10,2	0,58	5,916	35,05
$B = 78^038.5$	sin B	— 1.99141	2;4	0,77	1,848	3,42
	lg a	= 2.20609	270			82,03

$a = 160,73$

$$m_a = \pm \frac{1}{\sqrt{r_a}} \sqrt{[r^2\ m^2]} = \pm \frac{1}{270} \sqrt{82.03} = \pm 0.03$$

Spostrzeżenia bezpośrednie niejednakowo dokładne.

§ 161. Przejście od spostrzeżeń niejednakowo do jednakowo dokładnych.

Wyobraźmy sobie, że do wyznaczenia najprawdopodobniejszej wielkości X mamy następujące szeregi spostrzeżeń bezpośrednich o jednakowej dokładności:

I szereg	$a_1\ a_2 \ldots a_{p_1}$	ilość spostrzeżeń	$= p_1$
II szereg	$b_1\ b_2 \ldots b_{p_2}$	„ „	$= p_2$
	— — — — — — — — —		
n-ty szer.	$k_1\ k_2 \ldots kp_n$	„ „	$= p_n$

... (38)

Za wartość najprawdopodobniejszą x przyjmujemy średnią arytmetyczną spostrzeżeń o jednakowej dokładności:

$$x = \frac{a_1 + a_2 \ldots a_{p_1} + b_1 + b_2 \ldots, b_{p_2} + \ldots k_1 + k_2 + \ldots k_p}{p_1 + p_2 + \ldots p_n} =$$

$$= \frac{[a] + [b] + \ldots [k]}{[p]} \qquad (39)$$

Może się zdarzyć, że przed przystąpieniem do wyliczenia X, określono już średnie arytmetyczne posczególnych szeregów spostrzeżeń,

$$\text{a więc} \begin{cases} \text{z I szeregu } l_1 = \dfrac{[a]}{p_1} \\ \text{„ II „ } l_2 = \dfrac{[b]}{p_2} \\ - - - - - - \\ \text{n-go szer. } l_n = \dfrac{[k]}{p_n} \end{cases} \qquad (40)$$

Dla obliczenia wartości najprawdopodobniej x nie mamy już teraz potrzeby sumować poszczególnych spostrzeżeń

$$a_1 + a_2 + \ldots b_1 + b_2 + \ldots + k_1 + \ldots$$

możemy bowiem podstawić do równania (39), sumy szeregów określone z (40)

$$\begin{cases} [a] = p_1 l_1 \\ [b] = p_2 l_2 \\ - - - - \\ [k] = p_n l_n \end{cases}$$

otrzymamy

$$x = \frac{[a] + [b] + \ldots . [k]}{[p]} = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \ldots p_n l_n}{[p]} = \frac{[p\,l]}{[p]}; \qquad (41).$$

Wyobraźmy sobie, że wartości poszczególnych $a, b, \ldots k$ są nam wogóle nieznane. Wiemy tylko, że wartość l_1 jest średnią arytmetyczną szeregu jednakowo dokładnych spostrzeżeń w liczbie p_1, wartość l_3 jest średnią arytmetyczną szeregu spostrzeżeń w liczbie p_3 i t. d. Oczywiście wzór (41) pozostanie słusznym, gdyż zawsze będzie $[a] = p_1 l_1$; $[b] = p_2 l_2$ ... i. t. d. Dany jest szereg spostrzeżeń o różnej dokładności

$$l_1\ l_2 \ldots l_k \qquad (42),$$

dokonanych nad pewną wielkością X; średnie błędy odpowiednich spostrzeżeń są znane:

$$m_1\ m_2 \ldots, m_n \qquad (43).$$

Określić wartość najprawdopodobniejszą x i jej błąd średni. Możemy założyć, że każde ze spostrzeżeń powstało z szeregu wyników jednakowo dokładnych elementarnych spostrzeżeń o pewnym średnim błędzie m_o jako średnia arytmetyczna,

czyli

$$\left\{\begin{array}{l} l_1 = \dfrac{[l_1]}{p_1} \\ l_2 = \dfrac{[l_2]}{p_2} \\ \quad - \quad - \quad - \\ l_n = \dfrac{[l_n]}{p_n} \end{array}\right. \qquad (44).$$

gdzie liczby $p_1\ p_2 \ldots p_n$ wskazują, z ilu elementarnych spostrzeżeń o średnim błędzie m_0 powstały poszczególne wielkości

$$l_1\ l_2 \ldots l_n$$

Ponieważ l_1 jest średnią arytmetyczną p_1 spostrzeżeń o średnim błędzie pojedyńczego spostrzeżenia $=m_0$, średni błąd l_1 określimy jako średni błąd średniej arytmetycznej.

Wielkość m_0 tak dobrze może być dana, jak również przez nas dowolnie założona.

Podobnie

$$\left\{\begin{array}{llll} m_1 = \dfrac{m_0}{\sqrt{p_1}} & \text{skąd} & p_1 = \dfrac{m_0^2}{m_1^2} \\ m_2 = \dfrac{m_0}{\sqrt{p_2}} & \text{skąd} & p_2 = \dfrac{m_0^2}{m_2^2} \\ \quad - \quad - \quad - & \quad - \quad - \quad - & \quad - \quad - \quad - \\ m_u = \dfrac{m_0}{\sqrt{p_u}} & \text{skąd} & p_u = \dfrac{m_0^2}{m_u^2} \end{array}\right. \qquad (45)$$

Zamiast szeregu n spostrzeżeń różnej dokładności, mamy

$$p_1 + p_2 + \ldots p_u = [p]$$

elementarnych spostrzeżeń o jednakowej dokładności. Poszczególne spostrzeżenia każdego z szeregów $p_1\ p_3 \ldots$ są nam nieznane i nie są potrzebne, gdyż wzór

$$x = \frac{[pl]}{[p]}$$

na najprawdopodobniejszą z niejednakowo dokładnych spostrzeżeń wymaga jedynie znajomości wielkości $l_1\ l_2 \ldots l_n$, oraz $p_1\ p_2 \ldots p_n$.

§ 162. Wagi.

Liczby p, wskazujące ile elementarnych spostrzeżeń o średnim błędzie pojedyńczego spostrzeżenia m_0 składa się na spostrzeżenie o danym

średnim błędzie m, noszą nazwę w a g. Waga wartości najprawdopodobniejszej x jest tedy oczywiście równa sumie wag pojedyńczych spostrzeżeń, t. j.

$$p_x = [p] \qquad (46)$$

Wartość najprawdopodobniejszą określoną według wzoru (41), nazywają ogólną średnią arytmetyczną lub średnią wag.

Związek, zachodzący pomiędzy wagami spostrzeżeń a ich średniemi błędami, wynika z równań 45, mianowicie:

$$p_1 : p_2 : p_3 \ldots : p_n = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} : \frac{1}{m_3^2} : \ldots \frac{1}{m_n^2} \qquad (47)$$

Wagi więc są wprost proporcjonalne do odwrotności kwadratów średnich błędów.

Następnie mamy z równania (45):

$$m_0 = m_1 \sqrt{p_1} = m_2 \sqrt{p_2} = \ldots m_n \sqrt{p_n} \qquad (47\,a)$$

Co znaczy, że jeżeli błąd średni dowolnego spostrzeżenia pomnożymy przez pierwiastek kwadratowy z jego wagi, wówczas błąd ten zredukowany zostanie do średniego błędu spostrzeżenia o jednostce wagi (t. j. spostrzeżenia elementarnego).

Wzór (47 a) na średni błąd spostrzeżenia o jednostce wagi wskazuje, że przy zwiększeniu wszystkich wag n razy, średni błąd spostrzeżenia o jednostce wagi m_o zamieni się w $m_o \sqrt{n}$

Wagi są wielkościami względnemi: jeżeli chcemy zamienić pewne spostrzeżenie na szereg innych, elementarnych, ilość ich będzie oczywiście zależała od tego, co chcemy przyjąć za spostrzeżenie elementarne, t. zw. spostrzeżenie o jednostkowej wadze. Przy pomiarze kątów przyjmujemy za takowe zazwyczaj wynik pomiaru kąta przy dwuch położeniach lunety. Przy pomiarze linji—wynik pomiaru prostej o długości 100 metrów. Przy niwelacji wynik jednorazowej niwelacji ciągu o długości 1 kilometra i t. d. O tem, że wagi są wielkościami względnemi, przekonać się można ze wzoru:

$$x = \frac{[pl]}{p} = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \ldots p_n l_n}{p_1 + p_2 + \ldots p_n}$$

Jeżeli mianowicie pomnożymy przez pewną wielkość k każdą wagę, określona stąd wartość najprawdopodobniejsza x nie ulegnie zmianie, otrzymamy bowiem

$$x = \frac{p_1 k l_1 + p_2 k l_2 + \ldots p_n k l_n}{p_1 k + p_2 k + \ldots p_n k} = \frac{[pl]}{[p]}$$

Sposoby określania wag.

Aby stosować wzór $x = \frac{[pl]}{[p]}$, należy oczywiście określić poszczególne wagi. Mogą tu zachodzić następujące wypadki:

1) Wartości l są średniemi arytmetycznemi różnych ilości jednakowo dokładnych spostrzeżeń. W tym wypadku wagami będą oczywiście ilości spostrzeżeń, ewentualnie liczby do nich proporcjonalne.

Przykład: Dla wyrównania kąta dane są następujące wielkości:

$L_1 = 65^0\,30'\,20''$ jako średnia arytm. 2-ch spostrzeżeń

$L_2 = 65^0\,30'\,25''$ „ „ „ 4-ch „

poszczególne spostrzeżenia są nieznane, wiadomo jednak, że pomiary dokonane zostały tym samym instrumentem, przez tego samego obserwatora i w takich samych warunkach.

Za wagi przyjmujemy tu oczywiście $p_1 = 2$; $p_2 = 4$,

albo też liczby proporcjonalne $p_1 = 1$; $p_2 = 2$.

2) Wartości l są wynikami spostrzeżeń o znanych błędach średnich. Wagi tu obliczymy z warunku

$$p_1 : p_2 \ldots = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} \ldots$$

Przykład: Dla wyrównania kąta dane są następujące wielkości:

$l_1 = 30^0\,15'\,45''$ o średnim błędzie $m_1 = 10''$

$l_2 = 30^0\,15'\,28''$ „ „ $m_2 = 5''$

$l_3 = 30^0\,15'\,30''$ „ „ $m_3 = 20''$

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{100} : \frac{1}{25} : \frac{1}{400} = \frac{1}{4} : 1 : \frac{1}{16} = 4 : 16 : 1$$

3) Wartości l są średniemi arytmetycznemi szeregów o różnej dokładności. Znane są średnie błędy pojedyńczego spostrzeżenia dla każdego szeregu.

Określamy błąd średni średniej arytmetycznej dla każdego szeregu i w ten sposób sprowadzamy określenie wag do wypadku 2-go.

Przykład.

Dla wyrównania kąta dane są następujące wielkości:

$l_1 = 74^0\ 30'\ 12''$ śr. arytm. 4 spostrz. o średn. bł. pojed. spostrz. $m_1 = 10''$

$l_2 = 74^0\ 30'\ 30''$ „ „ 9 „ „ „ „ „ „ $m_2 = 30''$

Określamy średnie błędy średnich arytmetycznych:

$$M_1 = \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} = \frac{10''}{\sqrt{4}} = \pm 5''$$

$$M_2 = \frac{m_2}{\sqrt{n_2}} = \frac{30}{\sqrt{9}} = \pm 10''$$

i dalej:

$$p_1 : p_2 = \frac{1}{M^2_1} : \frac{1}{M^2_2} = \frac{1}{25} : \frac{1}{100} = 4 : 1 = 8 : 2 \text{ i t. d.}$$

stąd

$$p_1 = 4$$

$$p_2 = 1$$

4) Gdyby w powyższym przykładzie powiedziane było: określić wagi, przyjmując za jednostkę wagi jeden pomiar pierwszym teodolitem, mielibyśmy:

$$m_0 = m_1 = \pm 10''$$

$$p_1 = \frac{m_0^2}{M_1^2} = \frac{100}{25} = 4$$

$$p_2 = \frac{m_0^2}{M_2^2} = \frac{100}{100} = 1$$

5) Wagi nie są zupełnie scharakteryzowane liczbowo. Wiadomo tylko, że jedne spostrzeżenia dokonane zostały w warunkach bardziej, inne— mniej pomyślnych. W takich razach oznaczamy wagi co najwyżej przybliżone, kierując się doświadczeniem, unikając wszakże zbytnich przewidywań, w czem może być pomocą chociażby przybliżone określenie średnich błędów wyników spostrzeżeń.

§ 163. Błędy średnie.

Z porównania wartości najprawdopodobniejszej $x = \frac{[lp]}{[p]}$ z poszczególnemi spostrzeżeniami $l_1\ l_2\ \ldots\ l_n$ otrzymamy błędy pozorne:

$$v_1 = l_1 - x$$

$$v_2 = l_2 - x$$

$$— \quad — \quad — \quad —$$

$$v_n = l_n - x \qquad (48)$$

Określmy wielkości średnich błędów:

1) wartości wyrównanej,

2) dowolnego spostrzeżenia i

3) spostrzeżenia o jednostce wagi, w zależności od błędów pozornych i wag.

Do ogólnej średniej arytmetycznej dochodziliśmy przez zamianę szeregu n spostrzeżeń

$$l_1\ l_2\ \ldots\ l_n$$

o błędach średnich $m_1\ m_2\ \ldots\ m_n$ na szereg $p_1 + p_2 + \ldots\ p_n = [p]$ spostrzeżeń jednakowo dokładnych o średnim błędzie m_0.

Średni błąd wartości wyrównanej x będzie przeto równać się średnie-

mu błędowi pojedyńczego spostrzeżenia m_o, podzielonemu przez pierwiastek z ilości pomiarów $[p]$

$$M_x = \frac{m_o}{\sqrt{[p]}} \qquad (49).$$

Podobnie jak średnia ogólna jest średnią zwykłą dla szeregu $[p]$ spostrzeżeń, każdy dowolny wynik pomiaru, np. L_1, jest zwykłą średnią dla szeregu p_1 pomiarów. Będzie więc

$$m_1 = \frac{m_o}{\sqrt{p_1}}$$

$$m_2 = \frac{m_o}{\sqrt{p_2}}$$

— — —

$$m_n = \frac{m_o}{\sqrt{p_n}} \qquad (50).$$

Do obliczenia wartości $m_k = \frac{m_o}{\sqrt{p_k}}$ i $M_k = \frac{m_o}{\sqrt{[p]}}$ niezbędne jest określenie średniego błędu m_o spostrzeżenia o jednostce wagi.

W celu określenia wielkości tego błędu użyjemy następującego rozumowania. Wyobraźmy sobie, że wartość najprawdopodobniejsza

$$x = \frac{[pl]}{[p]}$$

jest zwykłą średnią arytmetyczną dla szeregu n spostrzeżeń

$$L_1 \; L_2 \; \ldots \; L_n \qquad (51),$$

dokonanych z dokładnością, odpowiadającą dokładności pomiaru o jednostkowej wadze, a więc scharakteryzowaną średnim błędem pojedyńczego spostrzeżenia m_o,

będzie przeto

$$x = \frac{[L]}{n}; \text{ oraz } m_o = \sqrt{\frac{[w\,w]}{n-1}} \qquad (52),$$

gdzie

$$\left\{\begin{array}{l} w_1 = L_1 - x \\ w_2 = L_2 - x \\ - \quad - \quad - \quad - \\ w_n = L_n - x \end{array}\right. \qquad (53).$$

Chodzi teraz o określenie błędów pozornych w, których nie znamy, gdyż pomiar szeregu (51) nie został wykonany.

Błędy te nie będą oczywiście równe odpowiednim v. Wiemy jednak, że dokładność spostrzeżenia, które dało w wyniku błąd w, charakteryzuje się średnim błędem m_o, zaś dokładność spostrzeżenia, które dało błąd v, charakteryzuje się średnim błędem m.

Możemy więc założyć:

$$\begin{cases} \frac{w_1}{v_1} = \frac{m_o}{m_1} \\ \frac{w_2}{v_2} = \frac{m_o}{m_2} \\ \quad - \quad - \quad - \\ \frac{w_n}{v_n} = \frac{m_o}{m_n} \end{cases} \qquad (54)$$

Lecz stosunki

$$\frac{m_o}{m_1}, \quad \frac{m_o}{m_2}, \quad \frac{m_o}{m_n}$$

obliczyć możemy z warunku: (50)

$$m_1 = \frac{m_o}{\sqrt{p_1}}; \; m_2 = \frac{m_o}{\sqrt{p_2}} \; \ldots \; m_n = \frac{m_o}{\sqrt{p_n}}$$

otrzymamy:

$$\frac{m_o}{m_1} = \sqrt{p_1} \quad \frac{m_o}{m_2} = \sqrt{p_2} \quad \ldots \quad \frac{m_o}{m_n} = \sqrt{p_n} \qquad (55),$$

skąd ostatecznie po podstawieniu do (54)

$$\begin{aligned} &\frac{w_1}{v_1} = \sqrt{p_1}, \text{ a stąd } w_1 = v_1\sqrt{p_1} \\ &\frac{w_2}{v_2} = \sqrt{p_2}, \text{ a stąd } w_2 = v_2\sqrt{p_2} \qquad (56) \\ &- \quad - \quad - \qquad\qquad - \quad - \quad - \quad - \\ &\frac{w_n}{v_n} = \sqrt{p_n}, \text{ a stąd } w_n = v_n\sqrt{p_n} \end{aligned}$$

W ten sposób, mnożąc błędy pozorne v przez pierwiastki z odpowiadających im wag, redukujemy je do błędów pozornych w, odpowiadających spostrzeżeniom o jednakowej wadze.

Z (56) mamy:

stąd: $$[w\,w] = [p\,v\,v]$$

1) średni błąd spostrzeżenia o jednostce wagi m_0:

$$m_0 = \sqrt{\frac{[w\,w]}{n-1}} = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} \qquad (57),$$

2) średni błąd dowolnego k-ego spostrzeżenia o wadze p_k:

$$m_k = \frac{m_0}{\sqrt{p_k}} = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{p_k(n-1)}} \qquad (58),$$

3) średni błąd wartości wyrównanej M_x o wadze $[p]$:

$$M_x = \frac{m_0}{\sqrt{[p]}} = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{[p]\,(n-1)}} \quad (59)$$

§ 164. Warunek minimum dla spostrzeżeń o różnej dokładności.

Wartość najprawdopodobniejsza

$$x = \frac{[pl]}{[p]}$$

może być traktowana jako zwykła średnia arytmetyczna szeregu n jednakowo dokładnych spostrzeżeń

$$L_1\ L_2\ \ldots\ L_n$$

o błędach pozornych

$$w_1 = v_1 \sqrt{p_1}$$
$$w_2 = v_2 \sqrt{p_2}$$
$$— \quad — \quad — \quad —$$
$$w_n = v_n \sqrt{p_n}$$

ponieważ dla takiego szeregu suma kwadratów błędów pozornych winna być najmniejszością, otrzymamy

$$\underline{[ww] = [pvv] = \text{minimum}} \quad (60)$$

jako warunek na najprawdopodobniejszą wartość niewiadomej, oznaczone z szeregu niejednakowo dokładnych spostrzeżeń.

§ 165. Wartość najprawdopodobniejsza x i suma [p v v] w zależności od odchyleń.

Podobnie jak przy określaniu wartości najprawdopodobniejszej z szeregu jednakowo dokładnych spostrzeżeń, dogodnie jest i przy określaniu „średniej z wag“

$$x = \frac{[pl]}{[p]}$$

korzystać z liczby przybliżonej N i odchyleń t:

$$t_1 = l_1 - N$$
$$t_2 = l_2 - N$$
$$— \quad — \quad — \quad —$$
$$t_n = l_n - N$$

aby następnie wyrazić wartość x w zależności od odchyleń i wartości przybliżonej,

Otrzymamy:

$$\begin{array}{ll} l_1 = N + t_1 & l_1 p_1 = N p_1 + p_1 t_1 \\ l_2 = N + t_2 & l_2 p_2 = N p_2 + p_2 t_2 \\ - \; - \; - \; - & - \; - \; - \; - \; - \\ l_n = N + t_n & l_n p_n = N p_n + p_n t_n \\ & \hline & [p\,l] = N[p] + [p\,t] \end{array}$$

skąd

$$x = \frac{[pl]}{[p]} = N + \frac{[pt]}{[p]} \qquad (61).$$

Również sumę $[pvv]$ dogodnie bywa niekiedy wyrażać w zależności od odchyleń. Będzie —

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = l_1 - x = l_1 - N - \dfrac{[pt]}{[p]} = t_1 - \dfrac{[pt]}{[p]} \\ v_2 = l_2 - x = l_2 - N - \dfrac{[pt]}{[p]} = t_2 - \dfrac{[pt]}{[p]} \\ - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \\ v_n = l_n - x = l_n - N - \dfrac{[pt]}{[p]} = t_n - \dfrac{[pt]}{[p]} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1^2 = t_1^2 - 2\,\dfrac{[pt]}{[p]}\,t_1 + \dfrac{[pt]^2}{[p]^2} \\ - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \\ v_n^2 = t_n^2 - 2\,\dfrac{[pt]}{[p]}\,t_n + \dfrac{[pt]^2}{[p]^2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 v_1^2 = p_1 t_1^2 - 2\,\dfrac{[pt]}{[p]}\,t_1 p_1 + \dfrac{[pt]^2}{[p]^2}\,p_1 \\ - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \\ p_n v_n^2 = p_n t_n^2 - 2\,\dfrac{[pt]}{[p]}\,t_n p_n + \dfrac{[pt]^2}{[p]^2}\,p_n \end{array} \right.$$

$$[pvv] = [ptt] - 2\,\frac{[pt]\,[pt]}{[p]} + \frac{[pt]\,[pt]\,[p]}{[p]^2}$$

i ostatecznie

$$[pvv] = [ptt] - \frac{[pt]^2}{[p]} \qquad (62).$$

Uwaga Sumę $[vvv]$ wyrażają też niekiedy w zależności od wyników spostrzeżeń, będzie wtedy—

$$v_1 = l_1 - \frac{[pl]}{[p]}$$

postępując dalej, jak wyżej, otrzymamy:

$$(pvv) = [pll] - \frac{[pl^2]}{[p]} \qquad (63).$$

Wzór (62) jest dogodniejszy od 63-ego, gdy liczby l_1 l_2 ... są kilkocyfrowe.

Kontrola $[p\ v] = 0.$

Określając poszczególne błędy pozorne i iloczyny ich przez odpowiednie wagi, znajdziemy:

$v_1 = l_1 - x$	$p_1 v_1 = p_1 l_1 - p_1 x$
$v_2 = l_2 - x$	$p_2 v_2 = p_2 l_2 - p_2 x$
— — — —	— — — — — —
$v_n = l_n - x$	$p_n v_n = p_n l_n - p_n x$
	$[p\ v] = [p\ l] - [p]\ x$

lecz z określenia wartości najprawdopodobniejszej X

$$x = \frac{[p\ l]}{[p]}$$

wynika

$$[p]\ x = [p\ l]$$

skąd

$$[p\ v] = O. \qquad (64)$$

Wżór ten (analogiczny do wzoru $[v] = O$ przy spostrzeżeniach jednakowo dokładnych) służy jako kontrola rachunku.

Przykłady:

1) Pewien kąt został pomierzony sześć razy metodą repetycyjną; kolumna 2-ga daje ostateczne wyniki; ilość repetycyj w każdym pomiarze przyjmujemy za wagę pomiaru p.

Obliczyć najprawdopodobniejszą wartość kąta, średni błąd pojedyńczego spostrzeżenia o jednostce wagi i średni błąd wartości najprawdopodobniejszej.

№	l	p	t	pt	pt^2	v	pv
1	58° 50′ 44″	4	0	0	0	— 4,3	— 17,2
2	„ „ 47″	4	3	12	36	— 1,3	— 5,2
3	„ „ 52″	5	8	40	320	+ 3,7	+ 18,5
4	„ „ 46″	3	2	6	12	— 2,3	— 6,9
5	„ „ 50″	5	6	30	180	+ 1,7	+ 8,5
6	„ „ 49″	4	5	20	100	+ 0,7	+ 2,8
N	58° 50′ 44″	$[p] = 25$		$[t\ p] = 108$	648		— 29,3
							+ 29,8
						(błąd zaokrąglenia)	+ 0,5

1. Wartość najprawdopodobniejsza

$$X = N + \frac{[p\ t]}{[p]} = 58^0\ 50'\ 44'' + \frac{108}{25} = 58^0\ 50'\ 48'',3$$

2. Średni błąd pojedyńczego spostrzeżenia o jednostce wagi:

$$[p\ v\ v] = [ptt] - \frac{[p\ t]^2}{[p]} = 648 - \frac{108^2}{25} = 181,4$$

$$m_0 = \sqrt{\frac{[p\ v\ v]}{n-1}} = \sqrt{\frac{181.4}{5}} = \pm\ 6'',0$$

3. Średni błąd wartości wyrównanej

$$M_x = \frac{m_0}{\sqrt{[p]}} = \frac{6''}{\sqrt{25}} = 1'',2$$

2. Dwunastokrotny pomiar kąta A dał wynik $A = 44^0\,58'\,10''24$ przy średnim błędzie pojedyńczego spostrzeżenia $m = \pm\ 5''.2$, sześciokrotny zaś pomiar tegoż kąta dał wartość $A_2 = 44^0\,58'\,16''\,21$ o średnim błędzie pojedyńczego spostrzeżenia $m_2 = \pm\ 6''.5$.

Wyznaczyć najprawdopodobniejszą wartość kąta i jej błąd średni. Średni błąd I pomiaru

$$M_1 = \pm\ \frac{5'',2}{\sqrt{12}}$$

stąd

$$p_1 = \frac{1}{M_1^2} = \frac{12}{27,04} = \frac{4}{9}$$

Średni błąd II pomiaru

$$M_2 = \pm \frac{6{,}5}{\sqrt{6}}$$

stąd

$$p_2 = \frac{1}{M_2^2} = \frac{6}{42{,}85} = \frac{1}{7}$$

stąd

$$A = 48^0\,58' \frac{\frac{4}{9}\cdot 10'',24 + \frac{1}{7}\cdot 16'',21}{\frac{4}{9} + \frac{1}{7}} = 44^0\,58'\,12'',38$$

Średni błąd ogólnej średniej arytmetycznej

$$M_A = \pm \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{[p]\,(n-1)}}$$

$$v_1 = A - A_1 = +\,2'',14 \quad p_1 = \frac{4}{9} \quad p_1 v_1^2 = 2{,}04 \quad n = 2$$

$$v_2 = A - A_2 = -\,3'',83 \quad p_2 = \frac{1}{7} \quad p_2 v_2^2 = 2{,}10 \quad n - 1 = 1$$

$$[p] = \frac{37}{63}; \quad [p\,v\,v] = 4{,}14$$

$$M_A = \pm \sqrt{\frac{4{,}14 \cdot 63}{37}} = \pm 2'',7$$

§ 166. Waga funkcji.

W praktyce zachodzi często potrzeba wyznaczenia wagi pewnej funkcji

$$u = f\,(x,\ y,\ z...),$$

określonej zapomocą wyników spostrzeżeń $x, y, z...$ o znanych wagach p_x, p_y, p_z

Rozpatrzmy poszczególne wypadki:

1) *Waga iloczynu wielkości stałej przez wartość o danej wadze.*

Mamy:

$$u = ax \qquad (65),$$

gdzie x wyznaczono z pomiaru pewnej wielkości, a zaś jest stałym spółczynnikiem. Ustalmy związek między wagą tego iloczynu p_u a wagą p_x.

Średni błąd danej funkcji

$$m_u = am_x \qquad (66).$$

Gdy przez m_0 oznaczamy średni błąd spostrzeżenia o jednostce wagi, wówczas

$$m_x = \frac{m_0}{\sqrt{p_x}} \qquad m_u = \frac{m_0}{\sqrt{p_u}}$$

Po podstawieniu tych wartości w (66), znajdziemy

$$\frac{m_0}{\sqrt{p_u}} = a \frac{m_0}{\sqrt{p_x}} \text{ lub } \frac{1}{p_u} = a^2 \frac{1}{p_x} \qquad (67).$$

2. *Waga sumy (algebraicznej).*

Mamy:

$$u = x \pm y \pm z \qquad (68),$$

gdzie x, y i z... są wielkościami wyznaczonemi z pomiarów o wagach p_x, p_y, p_z... Rozumując jak poprzednio, znajdziemy:

$$m^2_u = m^2_x + m^2_y + m^2_z$$

$$m_u = \frac{m_o}{\sqrt{p_u}}, \; m_x = \frac{m_o}{\sqrt{p_x}}, \; m_y = \frac{m_o}{\sqrt{p_y}}, \; m_z = \frac{m_o}{\sqrt{p_z}}$$

skąd

$$\frac{m^2_z}{p_u} = \frac{m^2_o}{p_x} + \frac{m^2_o}{p_y} + \frac{m^2_o}{p_z}$$

i ostatecznie

$$\frac{1}{p_u} = \frac{1}{p_x} + \frac{1}{p_y} + \frac{1}{p_z} \qquad (69).$$

3. *Waga funkcji linjowej kilku zmiennych.*

Mamy:

$$u = ax \pm by \pm cz... \qquad (70),$$

gdzie x, y, z... są rezultatami pomiarów o wagach p_x, p_y, p_z, zaś a, b, c stałemi spółczynnikami. Poszukiwanie związku między poszczególnemi wagami p_x p_y p_z a wagą funkcji p_u sprowadza się do wzorów poprzednich; otrzymamy:

$$m^2_u = a^2 m^2_x + b^2 m^2_y + c^2 m^2_z$$

$$\frac{m_0^2}{p_u} = a^2 \frac{m_0^2}{p_x} + b^2 \frac{m_0^2}{p_y} + c^2 \frac{m_0^2}{p_z}$$

a stąd:

$$\frac{1}{p_u} = a^2 \frac{1}{p_x} + b^2 \frac{1}{p_y} + c^2 \frac{1}{p_z} \ldots \quad (71)$$

4. *Waga dowolnej funkcji.*

Mamy

$$u = f(x, y, z) \quad (72)$$

gdzie x, y, z... są rezultatami pomiarów o wagach p_x, p_y, p_z Zależność między temi wagami, a wagą funkcji p_u otrzymamy, podobnie jak poprzednio ze wzoru na średni błąd funkcji, jest mianowicie

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 m_z^2 \ldots$$

zamieniając m_x^2 przez $\frac{m_0^2}{p_x}$ i t. d.

znajdziemy

$$\frac{m_0^2}{p_u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{m_0^2}{p_x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{m_0^2}{p_y} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \frac{m_0^2}{p_z}$$

a stąd:

$$\frac{1}{p_u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{p_x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{1}{p_y} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \frac{1}{p_z} \quad (73)$$

P r z y k ł a d y:

1. W $\triangle$-kącie zmierzono kąty α i β z wagami $p_\alpha = p_\beta = 1$. Znaleźć wagę trzeciego kąta.

$$x = 180^0 - \alpha - \beta$$

$$\frac{1}{p_x} = \frac{1}{p_\alpha} + \frac{1}{p_\beta} = 1 + 1 = 2$$

skąd

$$p_x = \frac{1}{2}$$

2. Waga pomiaru kąta $p_\alpha = 1$.
Znaleźć wagę pomiaru kierunku.

Kąt określamy jako różnicę kierunków

$$\alpha = k_1 - k_2$$

$$\frac{1}{p\alpha} = \frac{1}{p_{k1}} + \frac{1}{p_{k2}}$$

Przyjmując $p_{k1} = p_{k2} = p_k$ otrzymamy:

$$\frac{1}{p_\alpha} = \frac{2}{p_k}$$

$$1 = \frac{2}{p_k}$$

a stąd:

$$p_k = 2.$$

3. Waga kierunku $p_k = 1$. Znaleźć wagę kąta α;

$$\alpha = k_1 - k_2$$

Ponieważ

$$p_{k1} = p_{k2} = p_k = 1$$

$$\frac{1}{p_\alpha} = \frac{1}{p_{k1}} + \frac{1}{p_{k2}} = \frac{2}{p_k}$$

$$\frac{1}{p_\alpha} = \frac{2}{1}$$

$$p_\alpha = \frac{1}{2}$$

4. Ile razy należy pomierzyć prostą o długości 400 metr., aby waga pomiaru $p_{400} = \frac{1}{2}$, jeżeli wagę jednego pomiaru prostej o długości 100 metr. przyjmiemy za jednostkę $p_{100} = 1$. Określmy najpierw wagę jednorazowego pomiaru prostej o długości 400 metr.

$$400 = 100 + 100 + 100 + 100$$

$$\frac{1}{p_{400}} = \frac{1}{p_{100}} + \frac{1}{p_{100}} + \frac{1}{p_{100}} + \frac{1}{p_{100}} = 4$$

$p_{400} = \frac{1}{4}$ (czyli waga przy pomiarze długości jest odwrotnie proporcjonalne do długości).

Waga średniej arytm. z n pomiarów o różnych wagach $p_x = np$

W naszym wypadku będzie $\frac{1}{2} = n\frac{1}{4}$, skąd $n = 2$.

§ 167. Błędy różnic.

Pewną wielkość A zmierzono dwukrotnie z jednakową dokładnością i jako rezultaty pomiarów otrzymano wielkości x_1 i x_2 różniące się o d.

$$\text{t. j. } x_1 - x_2 = d$$

Wyrazić średni błąd tego pomiaru, średni błąd wartości wyrównanej i średni błąd różnicy d, w zależności od różnicy pomiędzy wynikami pomiarów

$$m_x = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{(n-1)}} = +\sqrt{\frac{[vv]}{1}}$$

$$M_x = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{2}}$$

$$m_d = \pm\sqrt{m^2_x + m^2_x} = +\, m_x\sqrt{2}$$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \cdot \quad v_1 = x_1 - x = \frac{x_1 - x_2}{2};$$

$$v_2 = x_2 - x = \frac{x_2 - x_1}{2};$$

$$\begin{cases} v_1 = +\dfrac{d}{2} \\ v_2 = -\dfrac{d}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1^2 = \dfrac{d^2}{4} \\ v_2^2 = \dfrac{d^2}{4} \end{cases}$$

$$[vv] = \frac{d^2}{2}$$

i ostatecznie

$$m_x = \pm\sqrt{\frac{d^2}{2}} = \frac{\pm d}{\sqrt{2}}$$

$$M_x = \pm\sqrt{\frac{d^2}{2.2}} = \pm\frac{d}{2}$$

$$m_d = \pm\, m_x\sqrt{2} = \pm\, d$$

Czyli średni błąd różnicy równy jest jej samej.

3. Pewną wielkość X zmierzono dwukrotnie z różną dokładnością i jako rezultaty pomiarów otrzymano wielkości x_1 i x_2 o wagach p_1 i p_2. Różnica pomiędzy wynikami pomiarów $= d$, t. j.:

$$x_1 - x_2 = d$$

Wyrazić średni błąd tego pomiaru, średni błąd wartości wyrównanej i średni błąd różnicy d w zależności od różnicy pomiędzy wynikami pomiarów i wag

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{1}} \qquad m_{x_1} = \frac{m_0}{\sqrt{p_1}}$$

$$M_x = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{[p](n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{[p]}} \qquad m_{x_2} = \frac{m_0}{\sqrt{p_2}}$$

$$m_d = \pm \sqrt{m^2_{x1} + m^2_{x2}} = \pm m_0 \sqrt{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}}$$

Określmy wartość najprawdopodobniejszą x.

$$x = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1 + p_2} = \frac{p_1 x_1 + p_2 (x_1 - d)}{p_1 + p_2}$$

$$= \frac{p_1 x_1 + p_2 x_1 - p_2 d}{p_1 + p_2} = \frac{x_1 (p_1 + p_2)}{p_1 + p_2} - \frac{p_2}{p_1 + p_2} d$$

i ostatecznie:

$$x = x_1 - \frac{p_2}{p_1 + p_2} d$$

Obecnie możemy znaleźć błędy pozorne

$$v_1 = x_1 - x = x_1 - x_1 + \frac{p_2}{p_1 + p_2} d = \frac{p_2}{p_1 + p_2} d \qquad p_1 v_1 = \frac{p_1 p_2}{p_1 + p_2} d$$

$$v_2 = x_2 - x = (x_1 - d) - x_1 + \frac{p_2}{p_1 + p_2} d =$$

$$= -d + \frac{p_2 d}{p_1 + p_2} = \frac{-dp_1 - dp_2 + p_2 d}{p_1 + p_2} = -\frac{p_1}{p_1 + p_2} d \qquad p_2 v_2 = \frac{-p_1 p_2}{p_1 + p_2} d$$

Kontrola ... $[pv] = 0$

i ich kwadraty:

$$v_1^2 = \frac{p_2^2 d^2}{(p_1 + p_2)^2} \qquad p_1 v_1^2 = \frac{p_1 p_2^2 d^2}{(p_1 + p_2)^2}$$

$$v_2^2 = \frac{p_1^2\, d^2}{(p_1 + p_2)^2} \qquad p_2\, v_2^2 = \frac{p_2\, p_1^2\, d^2}{(p_1 + p_2)^2}$$

$$[pvv] = \frac{p_1\, p_2\, (p_1 + p_2)}{(p_1 + p_2)^2}\, d^2 = \frac{p_1\, p_2}{p_1 + p_2}\, d^2$$

skąd

$$m_o = + \sqrt{\frac{[pvv]}{1}} = \pm\, d \sqrt{\frac{p_1\, p_2}{p_1 + p_2}}$$

$$M = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{[p]}} = \pm\, d \sqrt{\frac{p_1\, p_2}{(p_1 + p_2)^2}} = \frac{d}{p_1 + p_2} \sqrt{p_1\, p_2}$$

$$m_d = + m_o \sqrt{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}} = \pm\, d \sqrt{\frac{p_1\, p_2}{p_1 + p_2}\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right)} =$$

$$= + d \sqrt{\frac{p_1\, p_2}{(p_1 + p_2)\, p_1} + \frac{p_1\, p_2}{(p_1 + p_2)\, p_2}} = \pm\, d$$

Fakt, że średni błąd różnicy równy jest zawsze jej samej, łatwo zrozumieć, jeżeli uświadomimy sobie, że różnica dwu spostrzeżeń jest jej błędem prawdziwym, gdyż przy zupełnie dokładnym pomiarze różnica powinna być = 0. Ponieważ mamy jedno spostrzeżenie różnicy o błędzie prawdziwym d, przeto:

$$m_d = \pm \sqrt{\frac{d^2}{1}} = \pm\, d$$

3. *Pomiary podwójne (parami).*

Przypuśćmy, że mamy szereg par spostrzeżeń o różnicach $d_1\ d_2 \ldots d_n$ z wagami $p_1\ p_2 \ldots p_n$. Ponieważ przez parę spostrzeżeń rozumiemy podwójne spostrzeżenie jednej wielkości, więc różnice

$$d_1\ d_2 \ldots d_n$$

winny być zerami, a skoro takowemi nie są, więc noszą charakter błędów prawdziwych; stąd średnia różnica wyznaczy się przez analogję do średniego błędu spostrzeżeń, wyprowadzonego z błędów prawdziwych o różnych wagach, mianowicie

$$d = \sqrt{\frac{[p\,d\,d]}{n}}$$

ponieważ

$$d_k = x_k - x'_k,$$

więc:

$$m_x = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[p\,d\,d]}{2n}}$$

wyznacza średni błąd spostrzeżenia o jednostce wagi. Dodać należy, że wagi różnic zawsze możemy określić, skoro wiemy jakie wagi przyswojono tym wynikom spostrzeżeń, z których nasze różnice stworzone zostały.

Zadanie № 1.

Pomierzono trzema parami spostrzeżeń długości odcinków. Wyznaczyć średni błąd jednorazowego pomiaru i średni błąd najprawdopodobniejszej z różnic wyników.

I	II	d	$M = \frac{d}{2}$	x	$m = \frac{d}{\sqrt{2}}$	d^2
9,745	9,740	+ 0.005	+ 0.0025	9,7425	0.0035	0.000025
6,540	6,536	+ 0.004	+ 0.002	6,538	0.0029	0.000016
8,249	8,255	− 0.006	± 0.003	8,252	0.0046	0.000036
					$[dd]$	= 0.000077

Średni błąd dowolnego pomiaru:

$$m_x = \pm \sqrt{\frac{[d\,d]}{2\,n}} = \pm\ 0{,}0035$$

zaś średni błąd wyniku z poszczególnych par

$$M = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[d\,d]}{n}} = \pm\ 0{,}0025$$

Zadanie № 2.

Pomierzono prostą dwoma przyrządami o średnich błędach ± 5 *cm* i ± 10 *cm*. Określić średni błąd spostrzeżenia o jednostce wagi i średni błąd wartosci najprawdopodobniejszej.

	N	m	p	$\tau = x - N$	$p\tau$
1	110,20	10 *cm*	1	+ 0.10	0.10
2	110,10	5 *cm*	4	0.0	0.0
	N=110.10		$[p]$ = 5		$[p\tau]$ 0.10

z proporcji:

$$p_1 : p_2 = m_2^2 : m_1^2$$

mamy:

$$p_1 : p_2 = 25 : 100 = 1 : 4$$

skąd przyjmiemy

$$p_1 = 1; \quad p_2 = 4.$$

$$x = N + \frac{[p\tau]}{[p]} = 110{,}10 + \frac{0{,}10}{5} = 110{,}12$$

Średni błąd spostrzeżeń o jednostce wagi

$$m_0 = \pm\, d \sqrt{\frac{p\,p_1}{p_1 + p_2}} = 0{,}10 \sqrt{\frac{4}{5}} = \pm 0.09$$

Średni błąd wartości najprawdopodobniejszej

$$M = \frac{d}{p_1 + p_2} \sqrt{p_1 p_2} = \frac{0{,}10}{5} \sqrt{4} = \pm 0.04.$$

Zadanie № 3.

Mamy dwa ciągi niwelacyjne jednakowej dokładności, długość których 50 i 80 *klm.*; waga pierwszego jest 10. Określić wagę drugiego i długość ciągu o jednostce wagi.

$$p_2 = \frac{p_1\, L_1}{L_2} = \frac{10 \,.\, 50}{80} = 6.25$$

Oznaczmy długość ciągu jednostkowej wagi l, wówczas

$$p_l\, l = p_1\, L_1$$

stąd

$$l = p_1\, L_1,$$

gdyż

$$p_l = 1.$$

$$l = 10 \times 50 = 500\ klm.$$

Zadanie № 4.

Wyznaczyć średni błąd pomiaru kąta:

a) przy jednem położeniu lunety,

b) przy dwu położeniach lunety,

c) przy n serjach, jeżeli średni błąd celu wynosi m_c, zaś średni błąd odczytu z każdego nonjuszu m_0.

Średni błąd odczytu kierunku, jako średnia arytmetyczna z odczytów na 2 nonjuszach wynosi

$$m_k = \frac{m_0}{\sqrt{2}}$$

Na błąd pomiaru kąta przy jednym położeniu lunety składają się: 2 błędy celu i 2 błędy odczytu kierunku, stąd średni błąd pomiaru kąta przy jednym położeniu lunety będzie

$$m_1 = \pm \sqrt{2\,m_c^2 + 2\,m_k^2} = \pm \sqrt{2\,m_c^2 + m_0^2} =$$

$$= \pm \sqrt{2\left(m_c^2 + \frac{m_0^2}{2}\right)}$$

Średni błąd M_0 pomiaru kąta przy dwu położeniach lunety jest średnim błędem średniej arytmetycznej z dwu wyników o średnich błędach m_1, więc

$$M_0 = \frac{m_1}{\sqrt{2}} = \sqrt{m_c^2 + \frac{m_0^2}{2}}$$

zaś średni błąd pomiaru kąta przy n serjach będzie

$$Mn = \frac{M_0}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m_c^2}{n} + \frac{m_0^2}{2n}}$$

Zadanie № 5.

Wyznaczyć średni błąd n-krotnej repetycji, jeżeli błąd celu jest m_c, błąd odczytu z każdego nonjusza m_0.

Błąd odczytu kierunku jako średn arytmetyczna z 2 nonjuszów jest

$$m_k = \frac{m_0}{\sqrt{2}}$$

Przy n-krotnej repetycji popełniamy $2n$ celowań i 2 odczyty kierunków, średni repetycyjny błąd przeto wyniesie

$$M = \sqrt{2n \cdot m_c^2 + 2m_k^2} = \sqrt{2\,n\,m_c^2 + m_0^2}$$

Wartość kąta otrzymujemy w drodze dzielenia różnicy odczytów przez n, więc

$$m_{rep.} = \frac{M}{n} = \sqrt{\frac{2}{n}\left(m_c^2 + \frac{m_0^2}{2n}\right)}$$

Zadanie № 6.

Zmierzono kąty α, β : γ

α jest średnią arytmetyczną z 6 pomiar. o średn. błędz. poj. spostrz. $\pm$ 3
β „ „ „ 10 „ „ „ „ „ $\pm$ 4
γ „ „ „ 18 „ „ „ „ „ $\pm$ 5

Określić wagi tych kątów, przyjąwszy za spostrzeżenie o jednostce wagi spostrzeżenie o średnim błędzie $m_0 = \pm 1''$

$$\begin{cases} p\alpha = \dfrac{m^2_0}{M^2_\alpha} \\ p\beta = \dfrac{m^2_0}{M^2_\beta} \\ p\gamma = \dfrac{m^2_0}{M^2_\gamma} \end{cases} \quad \begin{cases} M_\alpha = \dfrac{\pm 3}{\sqrt{6}} \quad M^2_\alpha = \dfrac{9}{6} = \dfrac{3}{2} \\ M_\beta = \dfrac{\pm 4}{\sqrt{10}} \quad M^2_\beta = \dfrac{16}{10} = \dfrac{8}{5} \\ M_\gamma = \dfrac{\pm 5}{\sqrt{18}} \quad M^2_\gamma = \dfrac{25}{18} \end{cases}$$

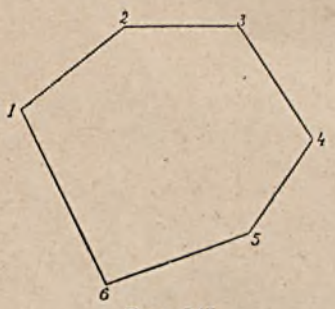
$$\begin{cases} p\alpha = \dfrac{1}{M^2_\alpha} = \dfrac{2}{3} \\ p\beta = \dfrac{1}{M^2_\beta} = \dfrac{5}{8} \\ p\gamma = \dfrac{1}{M^2_\gamma} = \dfrac{18}{25} \end{cases}$$

ROZDZIAŁ VI.

POLIGONY ZAMKNIĘTE.

§ 148. Odchyłka kątowa.

Przypuśćmy, że pomierzono wszystkie kąty i boki poligonu zamkniętego, oraz azymut jednego z boków, np. (1, 2).



Rys. 345.

Kąty zostały pomierzone zapomocą teodolitu w dwu położeniach lunety, boki dwukrotnie taśmą; średnie arytmetyczne dają wyniki, z któremi należy przystąpić do obliczenia spółrzędnych prostokątnych płaskich.

Przed przystąpieniem do obliczenia spółrzędnych określamy sumę pomierzonych kątów $\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_6$. Wskutek istnienia przypadkowych błędów w pomiarze kątów, suma kątów $[\alpha]$ nie będzie równa teoretycznej sumie, która, jak wiemy, równa jest $S = 180^0\ (n-2)$, gdzie n oznacza ilość kątów poligonu.

Różnica pomiędzy sumą praktyczną, t. j. sumą pomierzonych kątów, a sumą teoretyczną, daje wielkość odchyłki kątowej f_k, równej

$$f_k = [\alpha] - S$$

Określmy, w jakim wypadku f_k jest dopuszczalne, t. j. przy jakiej wielkości odchyłki możemy uważać pomiar za dokonany prawidłowo, a w jakim wypadku będziemy uważać, że w pomiarze tkwi gruby błąd.

Zakładamy, że każdy kierunek, pomierzony przy dwu położeniach lunety, wyznacza się ze średnim błędem t, utożsamianym z dokładnością nonjuszu. Wówczas, ponieważ kąt jest różnicą dwu kierunków, przeto średni błąd kąta

$$m = \pm \sqrt{t^2 + t^2} = \pm t\sqrt{2}$$

Zaś średni błąd M sumy kątów $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ jest równy

$$M = \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2}$$

zakładając równość średnich błędów pomierzonych kątów, t. j.

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$$

otrzymamy przy n kątach

$$M = \pm \sqrt{nm^2}$$

ponieważ zaś

$$m^2 = 2\,t^2,$$

więc

$$M = \pm \sqrt{2\,n\,t^2}$$

a zaokrąglając, otrzymamy, przyrównywując średni błąd sumy do odchyłki kątowej f_k, wzór, stosowany przy obliczeniu wielkości dopuszczalnej odchyłki, mianowicie

$$f_k = \pm 1.5\ t \sqrt{n}$$

w którym t jest dokładnością nonjuszu, n — liczbą kątów poligonu. Tak np., dla półminutowego teodolitu przy $n = 25$ będzie

$$f_k = \pm 1{,}5 \cdot \frac{1'}{2} \sqrt{25} = 3'\,45''$$

Większe, niż dopuszczalna, odchyłki wskazują na dokonanie grubego błędu w jednym, lub kilku kątach.

Odszukiwanie tych błędów połączone jest z powtórzeniem prawie całego pomiaru, jeżeli nie notowano przy pomiarze azymutów magnetycznych szeregu boków; gdy pomierzono, np., azymuty co piątego boku, wówczas odrazu możemy odnaleźć tę część poligonu, w której tkwi błąd. Mianowicie: obliczamy z azymutu I-ego boku i pomierzonych kątów azymuty pozostałych boków na zasadzie wzoru dla azymutu $\gamma_{n,\,n+1}$ boku:

$$\gamma_{n,\,n+1} = \gamma_{n-1,\,n} \pm 180^0 - \beta$$

gdzie $\gamma_{n-1,\,n}$ oznacza azymut boku poprzedniego, zaś β kąt prawy poligonu.

Obliczone w ten sposób (patrz § 92) azymuty magnetyczne boków, porównywamy z azymutami, pomierzonemi w polu, np.:

boki	azymuty pomierzone	azymuty obliczone
1 — 2	127° 30′	127° 30′
2 — 3	152° 15′	152° 41′
3 — 4	— — —	— — —
— — —	— — —	— — —
— — —		
14 — 15	60°	60° 39′
15 — 16	— — —	— — —
16 — 17	355° 30′	350° 28′
— — —	— — —	— — —
— — —	— — —	— — —
— — —	— — —	— — —
23 — 24	290° 30′	285° 4′

Jak widzimy, do boku 14 — 15 azymuty, obliczone z kątów i azymutu I-ego boku, różnią się od azymutów pomierzonych o wielkości, wahające się w granicach do 40′, co możemy złożyć na karb niedokładności pomiaru azymutów. Natomiast azymut pomierzony 17 — 18 i wszystkie dalsze są większe od azymutów obliczonych tych samych boków prawie o 5°. Oczywiście błąd tkwi albo w 15-ym albo w 16-ym kącie i bezwzględnie na gruncie w tych kąta h; po ich pomierzeniu błąd będzie wykryty, zaś przyczyną się okaże albo błąd gruby odczytów, dokonanych przy pierwszym pomiarze, albo też pomiar jednego z kierunków nie na właściwy punkt.

Możność wykorzystania odczytów z busoli dla odnajdywania grubych błędów pomiaru kątów sprawia, że używane są prawie wyłącznie teodolity, zaopatrzone w busole.

Rozrzucenie odchyłki kątowej i obliczenie z wyrównanych kątów azymutów magnetycznych, lub geograficznych, gdy dany jest jeden azymut geograficzny, wykonywa się w sposób, podany w dziale o gonjometrze.

§ 149. Obliczenie spółrzędnych punktów poligonowych.

Obliczenie to opiera się o wzory dla przyrostów spółrzędnych:

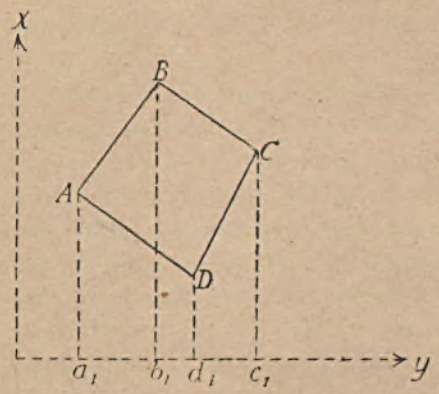
$$\Delta x = d \cos \gamma$$
$$\Delta y = d \sin \gamma$$

przytem, jeżeli przez γ rozumiemy azymuty, wówczas znaki Δx i Δy otrzymamy ze znaków funkcji cos γ i sin γ, jeżeli zaś azymuty boków są zamienione na czwartaki, wówczas znaki Δx i Δy określamy z nazwy czwartaków zgodnie z tabelką:

	Δx	Δy
NO	+	+
SO	—	+
SW	—	—
NW	+	—

Przeliczenie azymutów na czwartaki omawiają §§ 23 i 73.

Określmy sumę teoretyczną przyrostów w poligonie zamkniętym, dając przyrostom znaki, zgodne z kierunkiem dodatnim i ujemnym osi spółrzędnych.



Rys. 346.

$$\Delta y_{AB} = + a_1 b_1$$
$$\Delta y_{BC} = + b_1 c_1$$
$$\Delta y_{CD} = - c_1 d_1$$
$$\Delta y_{DA} = - d_1 a_1$$
$$[\Delta y] = (a_1 b_1 + b_1 c_1) - (c_1 d_1 + d_1 a_1) =$$
$$= a_1 c_1 - c_1 a_1 = 0$$

Mamy tedy dla sum przyrostów poligonu zamkniętego

$$\underline{[\Delta y] = 0}$$

i analogicznie

$$\underline{[\Delta x] = 0.}$$

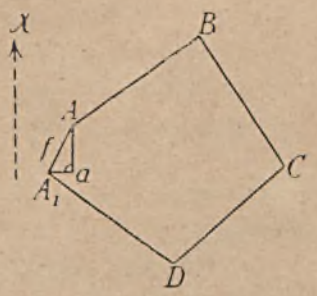
Ze względu jednak na błędy prawdziwe wyrównanych już kątów, a zatem i obliczonych azymutów i błędy boków, suma obliczonych przyrostów zawsze różni się od teoretycznej, a więc od zera w zamkniętym poligonie.

Gdybyśmy do spółrzędnych pierwszego punktu poligonu dodali odpowiednie sumy przyrostów, to otrzymalibyśmy spółrzędne tego samego pierwszego punktu, nie równe spółrzędnym danym. Danym spółrzędnym odpowiada punkt A rysunku, obliczonym punkt A_1. Odcinek $f = A A_1$ nazywamy odchyłką

$$[\Delta x] = Aa$$
$$[\Delta y] = A_1 a$$

oznaczamy

$$[\Delta x] = f_x$$
$$[\Delta y] = f_y$$



Rys. 347.

i, nazywając je odchyłkami przyrostów, określmy długość odchyłki linjowej AA_1, równej

$$f = \pm \sqrt{f^2_x + f^2_y}$$

Wielkość f, obliczona w ten sposób nie powinna przekraczać wielkości dopuszczalnej odchyłki dla poligonu o tym samym obwodzie; wielkości dopuszczalnych odchyłek dla poligonów różnej długości, biegnących w różnych terenach, są podane w tablicy III na końcu książki.

Jeżeli obliczona odchyłka przekracza wielkość, podaną dla poligonu o danym obwodzie, wówczas błąd tkwi albo w obliczeniach, albo w pomierzonych długościach boków. Gdy po sprawdzeniu obliczeń odchyłka będzie zbyt wielka, należy powtórzyć pomiar długości boków poligonu.

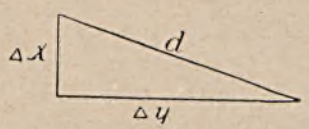
§ 150. Błędy w obliczeniach przyrostów. Tablice Gaussa.

Przy obliczaniu przyrostów popełniamy następujące błędy:

1) w znakach lub wielkościach przyrostów.

2) przez przestawienie, gdy obliczone $\triangle x$ wpisujemy do kolumny $\triangle y$, i odwrotnie.

Prawidłowość znaków sprawdzamy według kolumn: w kolumnie $\triangle y$ dodatnie przyrosty odpowiadają czwartakom *NO* i *SO* (druga litera *O*), ujemne *NW* i *SW* (druga litera *W*), lub gdy obliczenia dokonaliśmy z azymutów, mieć będziemy (+) dla azymutów od 0° do 180° dla $\triangle y$ i (—) dla azymutów od 180° do 360°. Dla przyrostów $\triangle x$ znak (+) odpowiada czwartakom *NO* i *NW* (I litera *N*) i azymutom od 270°, przez 360° do 90°, znak zaś (—) odpowiada czwartakom *SO* i *SW* (I litera *S*), lub azymutom od 90°, przez 180° do 270°.



Rys. 348.

Co się tyczy grubych błędów w wielkościach obliczonych przyrostów, to najczęściej te błędy są wynikiem błędu cechy logarytmów, a więc przecinek jest umieszczony w niewłaściwem miejscu. Istnienie bardzo grubego błędu da się wykryć przez sprawdzenie następujących zależności:

$$\triangle x < d > \triangle y$$

$$d < \triangle x + \triangle y$$

$$d > \triangle x - \triangle y$$

Przykład:

d	$\triangle x$	$\triangle y$
275.45	172.30	14.50

Błąd tkwi w $\triangle x$ lub $\triangle y$, gdyż $172.30 + 14.50 < 275.45$, co jest niemożliwe.

Również szybko wykryjemy błąd przestawienia, pamiętając, że w czwartakach mniejszych od 45° zawsze $\triangle x > \triangle y$, w większych zaś od 45° wielkość $\triangle y > \triangle x$ (nie uwzględniając znaków).

Przykład:

czwartak	d	$\triangle x$	$\triangle y$
NW 15°3	57.60	+ 14.96	— 55.62

ponieważ 15° 3' < 45°, zatem powinno być $\triangle x > \triangle y$, lecz 14 96 < 55.62, więc prawdopodobnie zachodzi błąd przestawienia.

Wreszcie wypadek:

150.34	+ 172.64	— 115.35
d	$\triangle x$	$\triangle y$

wskazuje na błąd przyrostu $\triangle x$, gdyż $d > \triangle x$, w danym zaś przykładzie wielkość przyrostu jest większa od długości prostej, co jest niemożliwe.

Jeżeli po odnalezieniu grubych błędów odchyłka przekraczać będzie dozwoloną wielkość, wówczas cały rachunek powtórzyć należy na innym arkuszu, przytem gdy pierwszego obliczenia dokonaliśmy zapomocą tablic logarytmicznych, drugie wykonać należy według tablic przyrostów Gaussa, ułożonych dla sin i cos co minutę od 0^0 do 90^0 dla dziesiątków długości, wypisanych nad kolumnami przyrostów u góry.

Tak np., dla długości 325.45 każdy przyrost obliczymy w sposób następujący (np., dla 15^011); stronica, oznaczona u góry przez sin, daje $\triangle y$; dla 300 wypiszemy z kolumny 30 dziesięciokrotnie powiększoną wielkość, dla 20 niezmienioną, dla 5 przecinek przesuniemy w rubryce 50 o jedno miejsce w lewo, dla 0,45 bierzemy wielkość przyrostu z tabelki w kolumnie środkowej, przyczem liczba, odpisana z tabelki, wydrukowana jest w przecięciu się wiersza 4 z kolumną 5

	dla	$\triangle y$	$\triangle x$
	300	78.57	289.53
	20	5.24	19.30
$15^011'$			
	5	1.31	4.83
	0.45	12	43
	325.45	85.24	314.09

Zestawienie w ten sposób obliczonych przyrostów z przyrostami, obliczonemi ze wzorów $\triangle x = d \cos \gamma$ i $\triangle y = d \sin \gamma$ z tablic logarytmicznych, da możność odnalezienia popełnionych błędów i ich usunięcia.

Jeżeli jednak po uzgodnieniu wyników odchyłka będzie niedopuszczalna, zaś błędu w obliczeniu poszczególnych azymutów i przeliczeniu ich na czwartaki niema, wówczas przypuszczać należy istnienie niedokładności w pomiarze boków, co też trzeba sprawdzić przez powtórzenie pomiaru boków w terenie.

§ 151. Rozrzucenie odchyłki linjowej.

Zestawienie sum obliczonych przyrostów z sumą teoretyczną da wielkość odchyłki. Obliczone przyrosty należy wyrównać w taki sposób, aby ich suma równa była teoretycznej, t. j. należy odchyłkę rozrzucić na poszczególne przyrosty. Powstaje kwestja metody rozrzucania odchyłki.

Rozpatrzymy w tym celu średnie błędy przyrostów

$$\triangle x = d \cos \gamma$$

$$\triangle y = d \sin \gamma$$

Odchyłkę kątową rozrzuciliśmy na poszczególne kąty, nie zwracając uwagi na fakt, że błędy kątów wpływają na tworzenie się odchyłki linjowej, która mogłaby wszakże być brana za jedną z podstaw dla odnalezienia takich poprawek dla kątów i boków, któreby usunęły tak odchyłkę kątową, jak linjową.

Skoro zaś w najprostszych pracach pomiarowych odchyłkę kątową rozrzucamy niezależnie od linjowej, to tem samem rezygnujemy z możności odnalezienia najprawdopodobniejszych dla danego poligonu poprawek, ograniczając się do takiego ich dowolnego doboru, przy którym warunki geometryczne (suma kątów równa teoretycznej, suma przyrostów — równa zeru w poligonie zamkniętym) będą zachowane.

Wtedy wolno już powiedzieć, że kąty zostały ostatecznie wyrównane po rozrzuceniu odchyłki kątowej, a zatem, że obliczone azymuty są też wyrównane, czyli już poprawek nie wymagają.

Źródła błędów, składających się na odchyłkę linjową, należy wtedy szukać w bokach.

Ponieważ azymuty uważamy za ostatecznie ustalone, przeto sin γ i cos γ należy uważać za wielkości stałe i wobec tego, na mocy wzorów na przyrosty, określimy ich średnie błędy:

$$m_{\Delta x} = m_d \cos \gamma$$
$$m_{\Delta y} = m_d \sin \gamma$$

oznaczając m_d średni błąd boku.

Wskutek tego że w zamkniętym poligonie błędy systematyczne pomiaru boków wpływają w niezmiernie małym stopniu wobec błędów przypadkowych na tworzenie się odchyłki linjowej, przeto brać należy pod uwagę tylko wpływ błędów przypadkowych.

Ponieważ błąd prawdziwy ε długości boku składa się z sumy algebraicznej błędów przypadkowych $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ każdego ułożenia miary, t. j.

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$$

więc błąd średni M pomiaru boku, otrzyma się ze średnich błędów $m_1, m_2 \ldots m_n$ każdego ułożenia miary zgodnie ze wzorem:

$$M^2 = m_2^2 + m_2^2 + \ldots + m^2_n$$

Wprowadźmy średnią kwadratów tych błędów:

$$m^2 = \frac{m_1^2 + \ldots + m^2_n}{n}$$

stąd

$$M^2 = nm^2$$

Wobec tego zaś, że przy długości boku L i długości miary l

$$n = \frac{L}{l}$$

zatem

$$M = m \sqrt{n} = \frac{m}{\sqrt{l}} \sqrt{L}$$

oznaczmy:

$$\eta = \frac{m}{\sqrt{l}}$$

stąd

$$M = \eta \sqrt{L}$$

co znaczy, że przypadkowy błąd pomiaru długości rośnie proporcjonalnie do długości mierzonej prostej.

Dzięki temu napiszemy:

$$m_{\Delta_x} = \eta \cos \gamma \sqrt{d}$$
$$m_{\Delta_y} = \eta \sin \gamma \sqrt{d}$$

więc stosunek wag przyrostów Δx_1, Δx_2, ... Δx_n będzie równy:

$$p_1 : p_2 : \ldots : p_n = \frac{1}{m^2_{\Delta x,1}} : \frac{1}{m^2_{\Delta x,2}} : \ldots : \frac{1}{m^2_{\Delta x,n}}$$

$$p_1 : p_2 : \ldots : p_n = \frac{1}{d_1 \eta^2 \cos^2 \gamma_1} : \frac{1}{d_2 \eta^2 \cos^2 \gamma_2} : \ldots : \frac{1}{d_n \eta^2 \cos^2 \gamma_n}$$

lub

$$p_1 : p_2 : \ldots : p_n = \frac{1}{d_1 \cos^2 \gamma_1} : \frac{1}{d_2 \cos^2 \gamma^2} : \ldots : \frac{1}{d_n \cos^2 \gamma_n} \qquad \text{(a)}$$

Jak stąd wynika, tylko w wypadku jednakowych azymutów: $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_n$ wagi przyrostów (tak Δx, jak Δy) są proporcjonalne do odwrotności długości boków, t. j.

$$p_1 : p_2 : \ldots : p_n = \frac{1}{d_1} : \frac{1}{d_2} : \ldots : \frac{1}{d_n}$$

We wszystkich zaś innych wypadkach liczby proporcjonalne do wag należałoby brać z proporcji (a) dla Δx-ów, dla Δy-ów zaś z analogicznej proporcji:

$$p_1 : p_2 : \ldots : p_n = \frac{1}{d_2 \sin^2 \gamma_2} : \frac{1}{d_1 \sin^2 \gamma_2} : \ldots : \frac{1}{d_n \sin^2 \gamma_n}$$

Stworzyłoby to konieczność dokonywania dodatkowych obliczeń dla każdego boku poligonu, względnie użycia tabeli, podanej w „Wyrównaniu przyrostów spółrzędnych“ inż. W. Kolanowskiego*), ułożonej dla odwrotności wag przyrostów.

---

*) Patrz № 5 „Przeglądu Mierniczego“, rok 1924.

Możnaby wówczas rozrzucać odchyłki w przyrostach na poszczególne przyrosty proporcjonalnie do odwrotności wag (im większa waga, tem mniejsza poprawka).

W tych jednak pomiarach, gdzie nieznaczne podniesienie dokładności wyników nie gra roli, postępujemy tak, jak gdyby wszystkie azymuty były jednakowe, t. j. za wagi przyrostów obieramy odwrotności długości boków, a więc ponieważ poprawki są proporcjonalne do odwrotności wag, więc:

odchyłkę w przyrostach rozrzucamy na poszczególne przyrosty proporcjonalnie do długości boków.

Jest to przybliżone rozwiązanie sprawy, ale w większości wypadków dostatecznie dokładne dla potrzeb codziennej praktyki polowej.

Niekiedy rozrzucana jest odchyłka w przyrostach proporcjonalnie do wielkości przyrostów. Ta jednak metoda może dać zbyt mało dokładne wyniki, jak np.:

Wyobraźmy sobie poligon, taki jednak że podobny jest do bardzo wyciągniętego w kierunku osi x-ów prostokąta; przypuśćmy więc, że pod azymutem, bliskim zera, biegnie 10 boków, następny bok zawraca pod azymutem 90°, dalsze 9 — 10 biegną pod azymutem 180°, ostatni — pod azymutem około 270°.

Cała odchyłka w $[\triangle y]$ rozrzucona zostanie w lwiej części na te dwa boki, których azymuty wynoszą 90° i 270°. Otrzymane dla tych boków poprawki mogą znacznie przekroczyć wielkość dopuszczalnych błędów pomiaru długości tych boków — innemi słowy, poprawki takie dać mogą poprawione przyrosty, większe niż długości samych boków o wielkości, przekraczające dopuszczalne błędy pomiaru. Ponieważ zaś wyrównanie nie może dać gorszych wyników, niż polowe, przeto metoda rozrzucania odchyłki proporcjonalnie do przyrostów nie zawsze może być uważana za dostatecznie dokładną.

Jeżeli długość całego poligonu wynosi L, długości poszczególnych boków $d_1\ d_2 \ldots d_n$, i jeżeli odchyłki sum przyrostów oznaczymy dla zamkniętego poligonu przez

$$f_x = [\Delta x]$$
$$f_y = [\Delta y]$$

wówczas poprawki $v_1, v_2 \ldots v_n$ przyrostów Δx oraz poprawki $w_1, w_2 \ldots w_n$ przyrostów Δy będą odpowiednio równe:

$$v_1 = -\frac{f_x}{L} d_1; \qquad w_1 = -\frac{f_y}{L} d_1$$

$$v_2 = -\frac{f_x}{L} d_2; \qquad w_2 = -\frac{f_y}{L} d_2$$

$$\text{— — — — —} \qquad \text{— — — — —}$$

$$v_n = -\frac{f_x}{L} d_n; \qquad w_n = -\frac{f_y}{L} d_n$$

Wielkości

$$-\frac{f_x}{L} \text{ oraz } -\frac{f_y}{L}$$

liczymy dla L, wyrażonego w setkach metrach; podobnie zaokrąglamy wielkości d do $^1/_4$ setki.

Sumy $[v]$ i $[w]$, w ten sposób obliczone, będą się różnić o kilka cm od odchyłek w przyrostach. Te kilka centymetrów rozrzucimy na odpowiednie przyrosty po jednemu, przytem tak, by te drugie poprawki nosiły charakter poprawek zaokrągleń poszczególnych v i w.

Wówczas, mając wszystkie v i w ostatecznie ustalone, obliczymy poprawione przyrosty

$$\Delta x'_1 = \Delta x_1 + v_1 \qquad \Delta y'_1 = \Delta y_1 + w_1$$

$$\Delta x'_n = \Delta x_n + v_n \qquad \Delta y'_n = \Delta y_n + w_n$$

Suma poprawionych przyrostów powinna dać zero tak dla $[\Delta x]$, jak dla $[\Delta y]$.

Spółrzędne wierzchołków poligonu obliczymy, gdy za spółrzędne pierwszego punktu przyjmiemy

$$x_1 = o$$

$$y_1 = o$$

lub jakiekolwiek dowolne wielkości.

Wówczas

$$x_2 = x_1 + \Delta x_1' \qquad y_2 = y_1 + \Delta y_1'$$

$$x_3 = x_2 + \Delta x_2' \qquad y_3 = y_2 + \Delta y_2'$$

$$x_n = x_{n-1} + \Delta x'_{n-1} \qquad y_n = y_{n-1} + \Delta y'_{n-1}$$

Rachunek kończymy, licząc spółrzędne pierwszego punktu, jako ostatniego, a więc

$$x_1 = x_n + \Delta x_n' \qquad y_1 = y_n + \Delta y_n'$$

Spółrzędne te powinny być identycznie ze spółrzędnemi pierwszego punktu, od których rozpoczęliśmy rachunek. Jest to ostatnie sprawdzenie obliczenia.

OBLICZENIE SPÓŁRZĘDNYCH

1	2	3			4			5			6		7		
№ № punktów	Obliczony na stronicy	KĄTY			Kąty wyrównane i azymuty			Czwartaki r			Rzuty poziome boków d		Log sin r log d log cos r		
		°	'	"	°	'	"		°	'					
1		133	57		133	56							9	97	759
					288	15		*N W*	71	45	119	70	2	07	809
													9	49	577
2		161	37		161	37							9	90	443
					306	38		*N W*	53	22	136	45	2	13	497
													9	77	575
3		122	02		122	01							8	90	574
					364	37		*N O*	4	37	110	45	2	04	316
													9	99	859
4		204	09		204	09							9	52	421
					340	28		*N W*	19	32	295	15	2	47	004
													9	97	426
5		189	40		189	40							9	68	829
					330	48		*N W*	29	12	221	50	2	34	537
													9	94	098
6		38	31		38	31							9	96	629
					112	17		*S O*	67	43	444	95	2	64	831
													9	57	885
7		151	26		151	26							9	80	027
					140	51		*S O*	39	09	244	00	2	38	739
													9	88	958
8		177	12		177	12							9	77	285
					143	39		*S O*	36	21	194	95	2	28	992
													9	90	602
9		82	18		82	18							9	94	328
					241	21		*S W*	61	21	194	20	2	28	825
													9	68	075
10		223	30		223	29							9	48	686
					197	52		*S W*	17	52	56	15	1	74	935
													9	97	853
11		135	42		135	41							9	94	667
					242	11		*S W*	62	11	82	15	1	91	461
													9	66	899
1	S_p	1620	4		1620	0				[*d*]	2198	75			

PUNKTÓW POLIGONOWYCH.

8			9			10			11			12			№ punktów
Log d sin r log d cos r			PRZYROSTY						SPÓŁRZĘDNE						
			±	△ *Y*		±	△ *X*		±	*Y*		±	*X*		
										0	0		0	0	1
								− 4							
2	05	568													
			−	113	68	+	37	50							
1	57	386							−	113	68	+	37	46	2
								− 5							
2	03	940													
			−	109	50	+	81	42							
1	91	072							−	223	18	+	118	83	3
								− 3							
0	94	890													
			+	8	89	+	110	09							
2	04	175							−	214	29	+	228	89	4
					+ 1			−10							
1	99	425													
			−	98	68	+	278	16							
2	44	430							−	312	96	+	506	95	5
					+ 1			− 7							
2	03	366													
			−	108	06	+	193	35							
2	28	635							−	421	01	+	700	23	6
								−14							
2	61	460													
			+	411	72	−	168	72							
2	22	716							−	9	29	+	531	37	7
								− 8							
2	18	766													
			+	154	05	−	189	22							
2	27	697							+	144	76	+	342	07	8
								− 6							
2	06	277													
			+	115	55	−	157	01							
2	19	594							+	260	31	+	185	00	9
								− 7							
2	23	153													
			−	170	42	−	93	11							
1	96	900							+	89	89	+	91	82	10
								− 2							
1	23	621													
			−	17	23	−	53	44							
1	72	788							+	72	66	+	38	36	11
								− 3							
1	86	128	−	72	66	−	38	33							
1	58	360	−	690	23	−	699	83		0	0		0	0	1
			−	690	21	+	700	52							
			−	0	02	+	0	69							

$$f_l = \sqrt{0{,}02^2 + 0{,}69^2} = 0{,}69 < 1{,}30 \text{ II}$$

§ 152. Przykład.

Dane z pomiaru wypisujemy w kolumnach 3 i 6-ej schematu (str. 332), przyczem w kolumnie 6-ej — długości, zredukowane do poziomu. Suma kątów teoretyczna $s = 180^0\ (11—2) = 1620^0$. Suma praktyczna $1620^0 4'$. Odchyłkę kątową $4'$ rozrzucamy (patrz § 92) na 4 kąty między krótszemi bokami po $1'$, mianowicie na kąty 1, 3, 10 i 11. W większych poligonach należy uwzględniać części minut. Kolumna 2-a odsyła do dziennika pomiarów.

Kolumna 4-a zawiera kąty wyrównane i azymuty obliczone; te ostatnie są wypisane w jednym wierszu z bokami kolumny 6-ej; podobnie wypisane w kolumnie 5-ej czwartaki.

Logarytmy sin i cos, oraz log d wypisujemy dla każdego punktu w kolumnie 8-ej w odpowiednich wierszach po trzy. Log d w środku między log sin u góry i log cos u dołu. Ósmą kolumnę tworzymy z sum logarytmów górnego i średniego, średniego i dolnego kolumny 7-ej dla każdego punktu. Zgodnie z literami czwartaków wypisujemy znaki przyrostów w kolumnach 9-ej i 10-ej, wielkości zaś przyrostów wypisujemy z dokładnością do 0,01 m z tablic logarytmicznych na podstawie logarytmów kolumy 8-ej. Sumy $[\Delta y] = -0{,}02$ i $[\Delta x] = +0.69$ tworzą odchyłki w przyrostach zamkniętego poligonu.

Obliczamy odchyłkę linjową

$$f_l = \sqrt{[\Delta x]^2 + [\Delta y]^2}$$

i porównywamy ją z wielkością dopuszczalnej (dla poligonu o długości 2200 m) odchyłki.

Tak np. według Ministerstwa Refolm rolnych dopuszczalna odchyłka wynosi 0,30 m dla terenu II klasy.

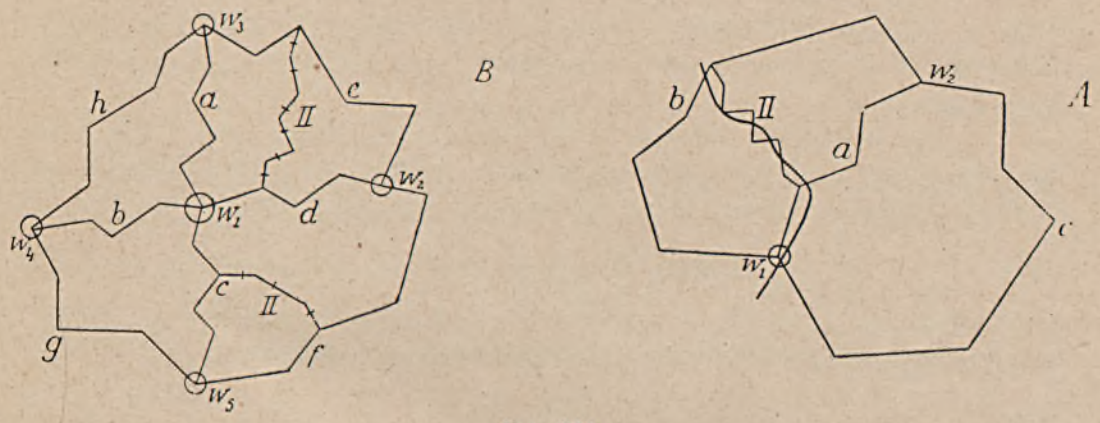
A więc nasz poligon zamyka się dostatecznie dokładnie. Rozrzucamy zatem odchyłkę w przyrostach na poszczególne przyrosty proporcjonalnie do długości boków i uzyskane poprawki wypisujemy nad przyrostami ze znakami, odwrotnemi do znaków odchyłki przyrostów.

Przyjmując spółrzędne I-go punktu za zero, liczymy spółrzędne kolejnych punktów, zapomocą przyrostów i ich poprawek aż do 1-ego punktu, którego spółrzędne powinny wypaść równe zeru.

§ 153. Wyrównanie większych zamkniętych poligonów.

W praktyce mierniczej przy zdjęciu obszarów do 2000 *ha* poza poligonem obwodowym zakładane są w terenie t. zw. poligony związkowe i cały szereg poligonów drugorzędnych, służących do pomiaru szczegółów, a więc idących wzdłuż dróg, granic użytków, rzeczek, i t. p. Poligony związkowe tworzą z poligonem obwodowym układ poligonów I rzędu w danym pomiarze; układ ten podlega pomiarowi o względnie wyższym stopniu dokładności, niż to zachodzi w poligonach II rzędu; tak samo dokładniejsze jest wyrównanie układu poligonów I rzędu, niż II-go.

Figura *A* daje obraz poligonu obwodowego *bc*, którego dwa punkty w_1 i w_2, zwane węzłowemi, są połączone poligonem związkowym *a*. Rysunek *B* przedstawia poligon obwodowy *e f g h*, usztywniony przez poligony związkowe *ac* i *bd*, przecinające się wzajemnie w punkcie węzłowym w_1, a z po-



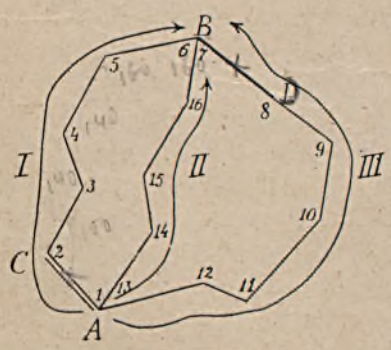
Rys. 349.

ligonem obwodowym w punktach węzłowych w_2, w_3, w_4, w_5. Punkty węzłowe są punktami poligonów, krzyżujących się w danym punkcie węzłowym. Pomiędzy punktami poligonów I rzędu biegną poligony drugorzędne, oznaczone na rysunkach *A* i *B* cyfrą II.

Przy pomiarach gospodarczych, jak np. zdjęcia koszar, fortów, małych poligonów wojskowych, wsi, majątków, lasów i t. p., pomiary kątów poligonów I rzędu lepiej wykonywać zapomocą teodolitu 30″-ego, niż 1′-ego, ze względu na fakt, że wielkość odchyłki kątowej i linjowej zmniejsza się przy użyciu teodolitu 30″-ego. Pomiar boków uskutecznia się taśmą, a w wypadku znacznych nieregularnych spadów na pewnych odcinkach - łatami. Stosunek między bokami poligonów nie powinien być większy od 1 : 4, a długości ich winny zbliżać się do przeciętnej długości 200 *m*.

Rozpatrzmy dwa wypadki wyrównywania siatki poligonów.

§ 154. Wyrównywanie siatki o jednym poligonie związkowym.



Rys. 350.

Wyrównywania dokonywamy oddzielnie dla kątów, oddzielnie dla przyrostów. Mając pomierzony w polu azymut *A C*, obliczamy trzykrotnie azymut *B D* z poligonów I, II i III-go. Azymut γ prostej *B D* obliczy się z ciągu I-ego w sposób następujący:

$$\gamma_1 = (A\ C) + n_1\ 180^0 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 - (\alpha_6 + \alpha_7)$$

przyczem n_1 oznacza ilość kątów poligonu I-go, w którym $\alpha_6 + \alpha_7$ traktujemy jako jeden kąt.

Podobnie obliczymy azymut γ_2 tej samej prostej $B\,D$ z poligonu II-ego

$$\gamma_2 = (AC) + \alpha_1 + n_2\ 180^0 - \alpha_{14} - \alpha_{15} - \alpha_{16} - \alpha_7$$

gdzie n_2 oznacza ilość kątów α, w danym razie 4 (14, 15, 16 i 7), gdyż azymut boku A — 14 otrzymujemy z azymutu boku $A\,C$ wprost przez dodanie kąta I-ego, t. j. α_1.

Przy obliczaniu azymutu ($B\,D$), względnie różnego odeń o całe 180^0 azymutu ($D\,B$), z poligonu III-ego, pamiętać należy, że przesuwając się od A ku D wzdłuż poligonu III-ego, przechodzić będziemy przez kąty

$$\alpha_{1+13},\ \alpha_{12},\ \alpha_{11}\ \ldots\ \alpha_8$$

a więc kąty lewe, które należy nie odejmować, a dodawać.

Stąd

$$\gamma_{DB} = (C\,A) \pm n_3\ 180^0 + \alpha_{1+13} + \alpha_{12} + \alpha_{11} + \ldots + \alpha_9 + \alpha_8$$

przytem $(C\,A) = (A\,C) \pm 180^0$, n_3 zaś oznacza ilość kątów poligonu III, uwzględnionych w rachunku, jako kąty poligonu; tak więc kąt $1 + 2$, t. j. α_{1+2}, liczony będzie za jeden. Ponieważ zaś

$$\gamma_{BD} = \gamma_{DB} \pm 180^0,$$

więc

$$\gamma_3 = \gamma_{BD} = (CA) \pm (n_3 + 1)\ 180^0 + \alpha_{1+13} + \alpha_{12} + \alpha_{11} + \ldots + \alpha_9 + \alpha_8$$

Otrzymujemy trzy wielkości γ_1, γ_2 i γ_3, wyznaczające tę samą wielkość BD. Wielkości te różnią się wzajemnie nieznacznie; należy wyznaczyć z nich najprawdopodobniejszą. Określmy w tym celu średnie błędy M_1, M_2 i M_3 wielkości γ_1, γ_2 i γ_3. Każda z nich otrzymana została przez algebraiczne sumowanie kątów α ze stałemi wielkościami typu $(AC) \pm n\ 180^0$; średnie więc błędy M_1, M_2 i M_3 otrzymamy, jako średnie błędy sumy wyrazów α, z których każdy uzyskany został przy pomocy jednakowo dokładnego pomiaru, a zatem z jednakowym średnim błędem $m_\alpha = m$.

Stąd

$$M_1^2 = m_3^2 + m_2^2 + \ldots + m_5^2 + m^2_{6+7}$$

ponieważ zaś dla każdego kąta $m\alpha = m$, więc

$$M_1^2 = n_1\ m^2$$

$$M_2^2 = n_2\ m^2$$

$$M_3^2 = n_3\ m^2$$

Wagi azymutów γ_1, γ_2, γ_3, t. j. p_1, p_2 i p_3, są proporcjonalne do odwrotności kwadratów ich średnich błędów,

stąd

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{M_1^2} : \frac{1}{M_2^2} : \frac{1}{M_3^2} = \frac{1}{n_1 m^2} : \frac{1}{n_2 m^2} : \frac{1}{n_3 m^2}$$

więc

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{n_1} : \frac{1}{n_2} : \frac{1}{n_3}$$

a zatem za wagi azymutów γ_1, γ_2 i γ_3 przyjmujemy odwrotności liczb n_1, n_2 i n_3 kątów, za pośrednictwem których obliczono γ_1, γ_2 i γ_3. Oczywiście, za wagi te również dobrze możemy przyjąć wielkości $\frac{10}{n_1}$, $\frac{10}{n_2}$ i $\frac{10}{n_3}$ i inne ułamki o tych samych mianownikach i wspólnym liczniku, jako stałej wag.

Najprawdopodobniejszą wielkością azymutu BD będzie

$$\gamma_{BD} = \frac{p_1 \gamma_1 + p_2 \gamma_2 + p_3 \gamma_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

Odchyłkami azymutów z poszczególnych ciągów są wielkości

$$v_1 = \gamma_1 - \gamma_{BC}$$
$$v_2 = \gamma_2 - \gamma_{BC}$$
$$v_3 = \gamma_3 - \gamma_{BC}$$

które nie powinny przekraczać $1{,}5\, t \sqrt{n}$, gdzie t oznacza dokładność nonjuszu użytego do pomiaru teodolitu, n odpowiada ilości kątów, za pośrednictwem których otrzymano azymut węzłowy γ_1, γ_2, γ_3 w danym poligonie.

Otrzymaną odchyłkę rozrzucamy na prawe kąty ze znakiem odchyłki, na lewe zaś, jak np. 12, 11, 10—ze znakiem odwrotnym.

Obliczamy następnie na zasadzie poprawionych kątów azymuty boków we wszystkich trzech poligonach, kończąc obliczenie na azymucie boku BC.

Przechodzimy do obliczenia przyrostów w poligonach I-ym, II-im i III-im, prowadząc obliczenie w każdym poligonie w kierunku strzałki.

Oznaczmy sumy obliczonych przyrostów literami Σx_1 Σy_1 w poligonie A I B, literami Σx_2 Σy_2 w poligonie A II B i literami Σx_3 Σy_3 w poligonie A III B.

Ponieważ w dłuższych poligonach zachodzi większe prawdopodobieństwo popełnienia większej ilości błędów, przeto z dostateczną pewnością możemy stwierdzić, że dokładniejsze wyniki otrzymamy z krótkich ciągów. Następnie, po wyrównaniu kątów możemy założyć, że głównem źródłem błędów, wpływającem na rozbieżność sum przyrostów, są błędy pomiaru długości boków, przytem głównie błędy przypadkowe, dzięki którym średni błąd pomiaru długości rośnie proporcjonalnie do drugiego pierwiastka z długości. Tak więc średnie błędy długości m_1, m_2 i m_3 trzech poligonów będą odpowiednio równe wielkościom

$$m_1 = \pm m \sqrt{l_1}$$
$$m_2 = \pm m \sqrt{l_2}$$
$$m_3 = \pm m \sqrt{l_3}$$

w których przez m oznaczamy czynnik proporcjonalności, przez l długości odpowiednich poligonów.

Ponieważ zaś wagi p są powiązane ze średniemi błędami relacją:

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} : \frac{1}{m_3^2}$$

skąd

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{m^2 l_1} : \frac{1}{m^2 l_2} : \frac{1}{m^2 l_3} = \frac{1}{l_1} : \frac{1}{l_2} : \frac{1}{l_3}$$

przeto za wagi sum przyrostów przyjmujemy odwrotności długości ciągów.

A wówczas najprawdopodobniejszemi sumami przyrostów będą

$$[\Delta x] = \frac{[p\,\Delta x]}{[p]}$$
$$[\Delta y] = \frac{[p\,\Delta y]}{[p]}$$

skąd otrzymamy spółrzędne punktu B ze spółrzędnych danych, lub dowolnie przyjętych punktu A, mianowicie

$$x_B = x_A + [\Delta x]$$
$$y_B = y_A + [\Delta y].$$

§ 155. Kontrola rachunku.

Oznaczmy dla uproszczenia znakowania przez $x_1\ y_1$, $x_2\ y_2$, $x_3\ y_3$ sumy obliczonych przyrostów w każdym ciągu, przez x_0 najmniejszą z liczb x_1, x_2, x_3 (po odrzuceniu cyfr po przecinku: dziesiątych i setnych metra), przez y_0 najmniejszą z y_1, y_2, y_3 liczbę całkowitą.

Jeżeli przyjąć za wagi sum przyrostów dla udogodnienia $p_1 = \frac{1000}{l_1}$; $p_2 = \frac{1000}{l_2}$; $p_3 = \frac{1000}{l_3}$ i utworzyć wyrazy

$$\varepsilon_1 = x_1 - x_0 \qquad \tau_1 = y_1 - y_0$$
$$\varepsilon_2 = x_2 - x_0 \quad \text{oraz} \quad \tau_2 = y_2 - y_0$$
$$\varepsilon_3 = x_3 - x_0 \qquad \tau_3 = y_3 - y_0$$

wówczas

$$x_B = (x_A + x_0) + \frac{[p\varepsilon]}{[p]}$$

gdzie

$$x_0 + \frac{[p\varepsilon]}{[p]} = \frac{[p\,x]}{[p]}$$

oraz

$$y_B = (y_A + y_0) + \frac{[p\tau]}{[p]}$$

gdzie

$$y_0 + \frac{[p\tau]}{[p]} = \frac{[p\,y]}{[p]}$$

Dla skontrolowania rachunku tworzymy wyrazy:

$$f_1^x = x_1 + (x_A - x_B)$$
$$f_2^x = x_2 + (x_A - x_B)$$
$$f_3^x = x_3 + (x_A - x_B)$$

oraz

$$f_1^y = y_1 + (y_A - y_B)$$
$$f_2^y = y_2 + (y_A - y_B)$$
$$f_3^y = y_3 + (y_A - y_B)$$

w których, np., f_1^x oznacza różnicę pomiędzy spółrzędną x, obliczoną z I-go poligonu $(x_1 + x_A)$, a spółrzędną x wyrównaną punktu B. Następnie obliczamy iloczyny $p_1 f_1$, $p_2 f_2$, $p_3 f_3$ oddzielnie dla f^x i f^y.

Jeżeli błędów obliczeniowych niema, wówczas, pomijając błędy zaokrąglenia, powinniśmy otrzymać

$$\underline{[p\,f] = o}$$

tak dla f^y, jak f^x, a to z następujących przyczyn:

$$p_1 f_1^x + p_2 f_2^x + p_3 f_3^x = p_1 (x_1 + x_A - x_B) + p_2 (x_2 + x_A - x_B) +$$
$$+ p_3 (x_3 + x_A - x_B) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + (x_A - x_B)(p_1 + p_2 + p_3) =$$
$$= [p\,x] + (x_A - x_B)\,[p]$$

ponieważ zaś

$$x_B - x_A = \frac{[px]}{[p]}$$

więc

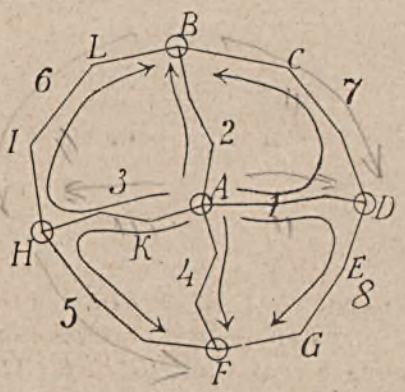
$$[p\,f^x] = [p\,x] - [p\,x] = o$$

skąd analogicznie możemy dowieść, że:

$$\underline{[p f^y] = 0}$$

§ 156. Wyrównanie sieci poligonów z wewnętrznym punktem węzłowym.

Poligon obwodowy 5678 jest usztywniony przez poligony związkowe BAF (2 — 4) i HAD (3 — 1).



Rys. 351.

Na rysunku każdy poligon, łączący dwa punkty węzłowe, jest oznaczony cyfrą arabską. Poligony związkowe przecinają się w wewnętrznym punkcie węzłowym A, wspólnym punkcie poligonowym obydwu poligonów wewnętrznych BAF i HAD. Punktów węzłowych w danej sieci mamy pięć: A, H, B, D i F.

Wyrównania dokonamy oddzielnie dla kątów, oddzielnie dla przyrostów.

Wyrównanie kątów opieramy na określonym azymucie prostej AK i azymutach prostych BC, FG, DE i HI, przechodzących przez pozostałe punkty węzłowe. Metodą, podaną w poprzednim paragrafie, określimy z poligonów AHB, AB i ADB najprawdopodobniejszy azymut (BC). Tak samo z poligonów AHF, AF i ADF określimy najprawdopodobniejszy azymut prostej FG. Wagami tych azymutów będą sumy wag poszczególnych wyników, z których określiliśmy azymut najprawdopodobniejszy. Tak więc, jeżeli najprawdopodobniejszym azymutem prostej BC jest

$$\gamma_{BC} = \frac{p_1 \gamma_1 + p_2 \gamma_2 + p_3 \gamma_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

w którym to wzorze γ_1 oznacza (BC), obliczony z poligonu AHB, γ_2 — z poligonu AB i γ_3 z poligonu ADB, p_1 zaś p_2 i p_3 są wagami tych azymutów, wówczas wagą najprawdopodobniejszego azymutu γ_{BC} jest

$$p_{\gamma BC} = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{n} \text{ gdzie } n = \frac{1}{p_{\gamma BC}}$$

Mając określone azymuty prostych BC i FG, obliczymy azymuty prostych DE i HI.

Azymut (DE) obliczymy 1) z azymutu (AK) i kątów poligonu AD, 2) z azymutu (BC) i kątów poligonu BD i 3) z azymutu (FG) i kątów poligonu FD. Otrzymamy znów wyniki γ'_1 γ'_2 γ'_3, przyczem wagą γ'_1, obliczonego z poligonu AD, będzie $p_1 = \frac{1}{n_1}$ gdzie n_1 oznacza ilość kątów ciągu I; wagę $(DE) = \gamma'_2$, obliczonego z poligonu BD, otrzymamy ze wzoru dla azymutu DE:

$$(DE) = (BC) \pm n_2\, 180^0 - \alpha_1 - \alpha_2 \ldots . - \alpha_k$$

w którym wagą (BC) jest $p_{\gamma BC}$, powyżej określone.

Stosując wzór na wagę sumy, otrzymamy, przyjmując wagi $p_1, p_2 \ldots p_k$ kątów 1, 2 ... k poligonu CD za jedność:

$$\frac{1}{p_{DE}} = \frac{1}{p_{\gamma BC}} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p_{\gamma BC}} + k$$

gdzie k oznacza k kątów o jednostce wagi.

Stąd

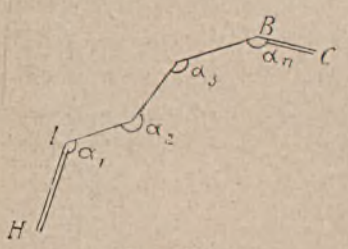
$$p_{DE} = \frac{kp\gamma_{BC} + 1}{p_{\gamma BC}}$$

Podobnie określimy wagę azymutu *DE*, określonego z poligonu *FD*. Stąd

$$\gamma_{DE} = \frac{[p\gamma]}{[p]}$$

Analogicznie obliczymy azymut *HI* z poligonów: 1) *AH*, 2) *BH* i 3) *FH*.

Po wyrównaniu azymutów węzłowych, przystępujemy do rozrzucania odchyłek kątowych w poszczególnych poligonach, jak np. *BH*, *AB*, *AH* i t. d.; rozpatrzmy poligon *HI BC*.



Rys. 352.

$$(BC) = (HI) \pm n\,180^0 - \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n$$

skąd

$$[\alpha] = (HI) \pm n\,180^0 - (BC) = T$$

lecz ponieważ (BC) było już poprzednio wyrównane, przeto wielkość $[\alpha]$ nie będzie równa T. Jeżeli $[\alpha] > T$, wówczas odchyłkę $\tau = [\alpha] - T$ należy podzielić przez liczbę kątów poligonu *HIBC*, otrzymany wynik y zmniejszyć każdy kąt, zaokrąglając wynik do 0',5 w ten jednakże sposób, by suma zaokrągleń była równa zeru.

Mając wyrównane kąty i obliczone na ich podstawie azymuty wszystkich boków, obliczamy przyrosty spółrzędnych i ich sumy w poligonach:

1) *H B*, rozpoczynając obliczenie od przyrostu *H I* i kończąc na *L B* 2) *A H*, 3) *A B*, 4) *B D*, 5) *A D*, 6) *A F*, 7) *D F* i 8) *H F*.

Zestawiając sumy przyrostów w poligonach: 1) *A HB*, 2) *A B* i 3) *A D B*, obliczymy najprawdopodobniejszą sumę przyrostów:

$$[\Delta x] = \frac{[p\Delta x]}{[p]}$$

$$[\Delta y] = \frac{[p\Delta y]}{[p]}$$

przyjmując za p wielkości $\frac{1000}{l}$, gdzie l oznacza długość poszczególnego ciągu. Wreszcie, przyjmując za X_A, Y_A dowolne wielkości, obliczymy

$$x_B = x_A + [\Delta x]$$

$$y_B = y_A + [\Delta y]$$

Analogicznie z poligonów AHF, AF i ADF oblicz my x_F i y_F. Obliczenie spółrzędnych punktów H i D oprzemy na spółrzędnych punktów A, B i F i obliczonych sumach przyrostów poszczególnych poligonów.

Oznaczmy przez $X_1\ X_2\ \ldots\ X_8$ sumy przyrostów X w poszczególnych poligonach, przez $Y_1\ Y_2\ \ldots\ Y_8$ sumy Δy w tych samych poligonach.

Spółrzędne punktu H otrzymamy trzema drogami:

$$x_3{}^H = x_A + X_3$$
$$x_6{}^H = x_B + X_6$$
$$x_5{}^H = x_F + X_5$$

podobnie określimy trzykrotnie y^H.

Określmy wagi x^H i y^H. Wagi $X_3\ X_6\ X_5$, $Y_3\ Y_6\ Y_5$, jako sum przyrostów, są odwrotnie proporcjonalne do długości tych ciągów, dla których obliczyliśmy $X_3\ X_6$....., a więc są znane.

Wagi wielkości $X_A\ Y_A$, $X_B\ Y_B$, $X_F\ Y_F$, t. j. p_A, p_B i p_F, są odpowiednio równe:

$p_A = \infty$
$p_B = [p]$ z obliczenia spółrzędnych punktu B
$p_F = [p]$ . . . . . F

więc

$$\frac{1}{p^H{}_{x3}} = \frac{1}{p_A} + \frac{1}{p_3} = \frac{1}{p_3} \qquad \text{stąd} \quad p^H{}_{x3} = p_3$$

$$\frac{1}{p^H{}_{x6}} = \frac{1}{p_B} + \frac{1}{p_6} \qquad \text{stąd} \quad p^H{}_{x6} = \frac{p_6\ p_B}{p_6 + p_B}$$

$$\frac{1}{p^H{}_{x5}} = \frac{1}{p_F} + \frac{1}{p_5} \qquad \text{stąd} \quad p^H{}_{x5} = \frac{p_5\ p_F}{p_5 + p_F}$$

a stąd

$$X_H = \frac{[px_H]}{[p]}$$

$$Y_H = \frac{[py_H]}{[p]}$$

Analogicznie obliczymy X_D i Y_D na zasadzie spółrzędnych punktów A, B i F. Różnice $X_D - X_A$, $Y_D - Y_A$, $X_D - X_B$, $Y_D - Y_B$ i t. d. dadzą wielkości poprawionych sum przyrostów w poligonach AD, BD i t. d. Pozostaje w każdym poligonie wyrównać poszczególne przyrosty do wyrównanych sum przyrostów i obliczyć spółrzędne wszystkich punktów.

PRZYKŁAD

na obliczenie spółrzędnych poligonów, przecinających się w punktach węzłowych.

Dany jest układ poligonów o punktach węzłowych 17, 4, 11, 15 oraz 19, zwanym głównym.

Całe obliczenie wykonamy w trzech wykazach: I — obliczenie spółrzędnych, II — obliczenie węzłowych azymutow i III — obliczenie spółrzędnych punktów węzłowych (patrz str. 344 i t. d.).

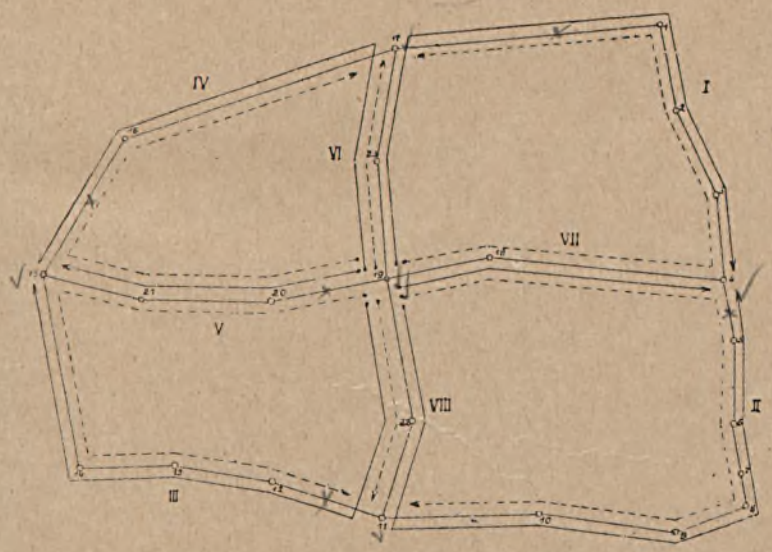
Spółrzędne punktu 19-go założone zostały na $x = o$ oraz $y = +200{,}00$. Liczba dwieście ustaloną została po obliczeniu sumy przyrostów w poligonach, łączących punkty węzłowe, a to w celu umieszczenia wszystkich punktów poligonu na arkuszu o określonych wymiarach.

Rozpatrzmy kolejność obliczeń.

Do wykazu I wpisujemy oddzielnie wszystkie poligony, łączące punkty węzłowe podając ich numery I, II ... VIII w kolumnie I-ej.

Przy każdym punkcie węzłowym obieramy prostą, dla której ustalamy azymut na podstawie danych z poligonów, krzyżujących się w danym punkcie węzłowzm. Za takie podstawowe proste obieramy: ⊙ 19 ⊙ 20, ⊙ 15 ⊙ 16, ⊙ 17 ⊙ 1, ⊙ 4 ⊙ 5, ⊙ 11 ⊙ 12-y (rys. 352a).

W kolumnie 2-ej wypisujemy kolejno numery punktów każdego poligonu, rozpoczynając i kończąc każdy poligon od wymienionych prostych.



Rys. 352a.

W kolumnie 3-ej wypisujemy te pomierzone kąty, które są niezbędne dla obliczenia azymutów wszystkich boków danego poligonu, zawartych między podstawowemi prostemi.

Obliczamy następnie sumy pomierzonych kątów w kolumnie 3-ej, jak np. w poligonie I-szym 633° 17', w II-gim 1133° 22,5 i t. d.

WYKAZ I. OBLICZENIE

1	2	3			4			5			6		7	
№ № Ciągów	№ № Punktów	Kąty pomierzone			Kąty wyrównane i azymuty			Czwartaki r			Rzuty poziome boków d		Log cos r lg d lg sin r	
	17	0	′			0	′		0	′			9.994	83
					8	49	50	NO	8	49,5	1210	10	3.082	83
													9.185	88
	1	65	42		65	42							9.737	57
					123	07	50	SO	56	52,5	650	30	2.813	11
													9.922	98
	2	178	09		178	09							9.758	32
I					124	58	50	SO	55	01,5	263	55	2.420	87
													9.913	50
	3	190	00		190	00							9.625	55
					114	58	50	SO	65	01,5	289	70	2.461	95
													9.957	36
	4	199	26		199	26								
					95	32	50							
	5													
	Sp	633	17											
	Sp	633	17								2413	65		
	$f\alpha =$	±	0′	0										

max $f\alpha = \pm 1{,}5\sqrt{n} = \pm 3{,}0$

	4				95	32	50	SO	84	27,5	233	30	8 984	84
													2.367	91
			—	05									9.997	97
	5	172	59	5	172	59								
													9.337	32
					102	33	5	SO	77	26,5	291	65	2.464	87
													9.989	49
	6	172	46	5	172	46	5							
													9.529	51
					109	47		SO	70	13	415	35	2.618	42
													9.973	58
	7	172	8	5	172	8	5							
													9.666	46
					117	38	5	SO	62	21,5	290	05	2.462	48
													9.947	37
	8	72	53		72	53								
II													9.851	34
					224	45	5	SW	44	45,5	432	90	2.636	39
													9.817	65
	9	179	22		179	22								
													9.846	50
					225	23	5	SW	45	23,5	266	90	2.426	35
													9.852	43
	10	184	46		184	46								
													9.880	23
					220	37	5	SW	40	37,5	528	00	2.722	63
													9.813	65
	11	178	27		178	27								
					222	10	50							
	12													
	Sp	1133	22											
	Sp	1133	22	5							2458	15		

$f_\alpha = +0'{,}50$ max $f_\alpha = \pm 4'{,}0$, $f^L = \sqrt{0{,}85^2 + 0{,}14^2} = 0{,}88$

max $f_L = 1{,}12$ Odch. wzgl. $= \frac{1}{2700}$; $f_x = -0{,}85$; $-0{,}14 = f_y$

SPÓŁRZĘDNYCH.

8			9			10			11			12			№ № punktów
lg Δ X lg Δ Y			Przyrosty obliczone						Spółrzędne i przyrosty wyrównane						
			±	Δ X		±	Δ Y		±	X		±	Y		
					+18		—	15	+	297	74	—	766	82	17
3.077	66	+	1195	80		+	185	65	+	1195	98	+	185	50	
2.268	71														
					+10		—	08	+	1493	72	—	581	32	1
2.550	68	—	355	37		+	544	62	—	355	27	+	544	54	
2.736	09														
					+04		—	03	+	1138	45	—	36	78	2
2.179	19	—	151	08		+	215	96	—	151	04	+	215	93	
2.334	37														
					+04		—	04	+	987	41	+	179	15	3
2.087	50	—	122	32		+	262	61	—	122	28	+	262	57	
2.419	31								+	865	13	+	441	72	4
		+	1195	80		+	1208	84	+	567	39	+	1208	54	
		—	628	77											
		+	567	03											
	$f_x =$	—	0	36		+	0	30	=	fy,					

$f_L = \sqrt{0{,}36^2 + 0{,}30^2} = 0{,}47$; max $f_L = 1{,}12$ Odchyłka względna $\frac{1}{5100}$;

									+	865	13	+	441	72	4
1.352	75			+08			+01							
2.365	88	—	22	53	+	232	21		—	22	45	+	232	22	
									+	842	68	+	673	94	5
1.802	19			+11			+02								
2.454	36	-	63	41	+	284	68		—	63	30	+	284	70	
									+	779	38	+	958	64	6
2.147	93			+14			+02								
2.592	00	—	140	58	+	390	84		—	140	44	+	390	86	
									+	638	94	+	1349	50	7
2 128	94			+10			+02								
2.409	58	—	134	57	+	256	95		—	134	47	+	256	97	
									+	504	47	+	1606	47	8
2.487	70			+15			+02								
2.484	04	—	307	40	—	304	82		—	307	25	—	304	80	
									+	197	22	+	1301	67	9
2.272	85			+09			+02								
2.278	78	—	187	44	—	190	01		—	187	35	—	189	99	
									+	9	87	+	1111	68	10
2.602	86			+18			+03								
2.536	28	—	400	74	—	343	78		—	400	56	—	343	75	
									—	390	69	+	767	93	11
		—	1256	67	+	1164	68		—	1255	82	+	326	21	
					—	838	61								
					+	326	07								

$f_x = 0{,}85$ $f_y = -0.14$ $f_L = 0.88 < 1.12$

1	2	3	4	5	6	7
№ № Ciągów	№ № Punktów	Kąty pomierzone	Kąty wyrównane i azymuty	Czwartaki r	Rzuty poziome boków d	Log cos r lg d lg sin r
		° ′	° ′	° ′		
	11					9.86987
			222 10,50	*S W* 42 10,5	226,75	2.35554
		+ 0,5				9.82698
	12	192 12,5	192 13			
						9.93771
			209 57,5	*S W* 29 57,5	248,40	2.39515
		+ 0,5				9.69842
	13	190 17	190 17,5			
III						9.97390
			199 40	*S W* 19 40	339,30	2.53058
						9.52705
	14	102 39	102 39			
						9.08692
			277 01	*NW* 82 59	431,30	2.63478
						9.99674
	15	154 54	154 54			
			302 07			
	16					
	Sp	640 02,50				
	St	640 03,50			1245,75	
	$f_\alpha =$	— 1,'0				

$max\ f_\alpha = 3,'0$

	15					9.72562
			302 07	*NW* 57 53	546,10	2.74904
		+ 0,5				9.92787
	16	135 42,5	135 43			
						9.98765
IV			346 24	*NW* 13 36	1077,85	3.03256
		+ 0,5				9.37133
	17	157 34	157 34,5			
			8 49,50			
	1					
	Sp	293 16,5			1623,85	
	Sp	293 17,5				
	$f_\alpha =$	— 1,'00				

$max\ f_\alpha = 2,'1$

8	9		10		11		12		№ № punktów
lg Δ X lg Δ Y	Przyrosty obliczone				Spółrzędne i przyrosty wyrównane				
	±	Δ X	±	Δ Y	±	X	±	Y	
					—	390,69	+	767,93	11
2.22541		+ 02							
2.18252	—	168,04	—	152,24	—	168,02	—	152,24	
					—	558,71	+	615,69	12
2.33286		+ 02		— 0.1					
2.09357	—	215,21	—	124,04	—	215,19	—	124,05	
					—	773,90	+	491,64	13
2.50448		+ 03		— 0.1					
2.05763	—	319,51	—	114,19	—	319,48	—	114,20	
					—	1093,38	+	377,44	14
1.72170		+ 03		— 0.1					
2.63152	+	52,69	—	428,07	+	52,72	—	428,08	
					—	1040,66	—	50,64	15
	+	52,69	—	818,54	—	649,97	—	818,57	
	—	702,76							
	—	650,07							

$f_x = -0.10; +0.03 = f_y$ $\qquad f_L = \sqrt{0,10^2 + 0,03^2} = 0.10$

max $f_L = 0.67$

Odchyłka względna $\frac{1}{12400}$

					—	1040,66	—	50,64	15
2.47466		+ 15		— 07					
2.67691	+	290,33	—	462,53	+	290,48	—	462,60	
					—	750,18	—	513,24	16
3.02021		+ 29		— 13					
2.40389	+	1047,63	—	253,45	+	1047,92	—	253,58	
					+	297,74	—	766,82	17
	+	1337,96	—	715,98	+	1338,40	—	716,18	

$f_x = -0.44; +0.20 = f_y$ $\qquad f_L = \sqrt{0.44^2 + 0.20^2} = 0.48;$

max $f_L = 0.82$

Odchyłka względna $\frac{1}{3300}$

1	2	3	4	5	6	7	
№ № Ciągów	№ № Punktów	Kąty pomierzone	Kąty wyrównane i azymuty	Czwartaki r	Rzuty poziome boków d	Log cos r lg d lg sin r	
	19	° ′	° ′	° ′			
			191 00	*S W* 11 00	304,70		
	20	182 46	182 46				
		+ 0,5	188 14	*S W* 8 14	422,10		
	21	166 03,5	166 04				
			202 10	*S W* 22 10	349,80		
	15	80 03	80 03				
			302 07				
V	16						
		428 52,5			1076,60		
		428 53					
	f_L	— 0,5					
	20		11 00				
	19	266 46	266 46				
			284 14	*NW* 75 46	638,60		
	23	42 11	172 11				
		— 0,5	292 03	*NW* 67 57	375,25		
	17	103 14	103 13,5				
			8 49,50				
VI	1						
		542 11			1013,85		
		542 10,5					
	f_α	= + 0,5					

max f_L = 2,'6

max f_α = 2,'6

8		9		10		11		12		
lg Δ Y lg Δ Y		Przyrosty obliczone				Spółrzędne i przyrosty wyrównane				№ № punktów
		±	Δ X	±	Δ Y	±	X	±	Y	
			+ 04		— 02		0,00	+	200,00	19
		—	299,10	—	58,14	—	299,06	—	58,16	
			+ 06		— 04	—	299,06	+	141,84	20
		—	417,75	—	60,44	—	417,69	—	60,48	
			+ 04		— 02	—	716,75	+	81,36	21
		—	323,95	—	131,98	—	323,91	—	132,00	
						—	1040,66	—	50,64	15
		—	1040,80	—	250,56					
	f_x =	—	0,14	+	0,08	=	f_y			

$f_L = \sqrt{0{,}14^2 + 0{,}08^2} = 0{,}16;$

max f_L = 0,61

Odch. wzgl. = $\frac{1}{6700}$

			— 09		— 02		0,00	+	200,00	19
		+	157,01	—	618,99	+	156,92	—	619,01	
			— 06		— 01	+	156,92	—	419,01	23
		+	140,88	—	347,80	+	140,82	—	347,81	
						+	297,74	—	766,82	17
		+	297,89	—	966,79					
	f_x =	+	0,15	+	0,03	=	f_y			

$f_L = \sqrt{0{,}15^2 + 0{,}03^2} = 0{,}15;$

max f_L = 0,58;

Odch. wzgl. = $\frac{1}{6760}$

1	2	3			4			5			6		7	
№ № Ciągów	№ № Punktów	Kąty pomierzone			Kąty wyrównane i azymuty			Czwartaki r			Rzuty poziome boków d		Log cos r lg d lg sin r	
	20	°	'		°	'			°	'				
					11	00								
	19	197	29		197	29								
					353	31		NW	6	29	230	40		
	18	150	42		150	42								
					22	49		NO	22	49	690	05		
	4	107	16	5	107	16	5							
					95	32	50							
VII	5													
		455	27	5										
		455	27	5							920	45		
	f_α	$=\pm$	0'	00										

$max\ f_L = \pm\ 2',6$

$f_L = \sqrt{0.15^2 + 0.14^2} = 0{,}20;$

$max\ f_L = 0.54;$

Odch. wzgl. $= \frac{1}{4600};$

	20													
					11	00								
	19	78	57		78	57								
					112	03		SO	67	57	368	00		
	22	154	01	5	154	01	50							
					138	01	5	SO	41	58,5	339	40		
	11	95	51		95	51								
					222	10	50							
VIII	12													
		328	49	5										
		328	49	5							707	40		
	f_α	$=\pm$	0'	0										

$max\ f_\alpha = \pm\ 2',6$

$f_L = \sqrt{0.22^2 + 0.05^2} = 0.23;$

$max\ f_L = 0.45;$

Odch. wzgl. $= \frac{1}{3075};$

8			9			10			11			12			№ № punktów
lg ΔX lg ΔY			Przyrosty obliczone						Spółrzędne i przyrosty wyrównane						
			$\pm$	ΔX		$\pm$	ΔY		$\pm$	X		$\pm$	Y		
					+04			+03	$\pm$	0	00	+	200	00	19
			+	228	93	−	26	01	+	228	97	−	25	98	
					+11			+11	+	228	97	+	174	02	16
			+	636	05	+	267	59	+	636	16	+	267	70	
									+	865	13	+	441	72	4
			+	864	98	+	267	59							
						−	26	01							
						+	241	58							
		$f_x=$	−	0	15	−	0	14	=	fy					
					−11			−03	$\pm$	0	00	+	200	00	19
			−	138	15	+	341	08	−	138	26	+	341	05	
					−11			−02	−	138	26	+	541	05	22
			−	252	32	−	226	90	−	252	43	+	226	88	
									−	390	69	+	767	93	11
			−	390	47	+	567	98							
		$f_x=$	−	0	22	+	0	05	=	fy					

WYKAZ II. (OBLICZENIE WĘZŁOWYCH AZYMUTÓW).

Azymut Główny A_G ⊙ 19 ⊙ 20 : 191° 00′

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Punkt główny G	Punkt węzłowy W	№№ ciągów	Liczba kątów n	Wagi $p=\frac{10}{n}$	SUMA KĄTÓW CIĄGU Z prawej strony $[\alpha]$	SUMA KĄTÓW CIĄGU Z lewej strony $[\beta]$	Azymuty węzłowe γ_w	$\tau = \gamma_w - N$	$p\,\tau$	SPRAWDZENIE $f = \gamma_w - \gamma$	SPRAWDZENIE pf
19	4	VI—I	7	1,43	1175°28′		95°32′	—0′,5	— 0′,72	— 0′,46	—0.66
		VII	3	3,33	455°27′,5		95°32′,5	0′,0	0.00	+ 0′,04	+0.13
		VIII—II	10	1,00	328°49′,5	1133°22′,5	95°33′	+0′,5	+ 0′,50	+ 0′,54	+0.54
			$[p]=$	5,76		$N=$	95°32′,5	$[p\tau]$	— 0′,22		+0.67
							— 0′,04	$\frac{[p\tau]}{[p]}$	$=-0′,04$		—0.66
						$\gamma=$	95°32′,46				+0.01
							95°32′,5				
19	11	VII—II	10	1,00	1588°50′		222°10′	0.00	0.00	— 0′,29	—0′,29
		VIII	3	3,33	328°49′,5		222°10′,5	+0′,50	+ 1′,67	+ 0′,21	+0′,70
		V—III	7	1,43	428°52′,5	640°02′,5	222°10′	0.00	0.00	— 0′,29	—0′,41
			$[p]=$	5,76		$N=$	220°10′	$[p\tau]$	+ 1′,67		+0′,70
							+ 0′,29	$\frac{[p\tau]}{[p]}$	$=+0′,29$		—0′,70
						$\gamma=$	222°10′,29				0.00
							222°10′,5				
19	15	VIII-III	7	1,43	968°52′		302°08′	+0′,5	+ 0′,72	+ 0′,99	+1′,42
		V	3	3,33	428°52′,5		302°07′,5	0′,0	0′,00	+ 0′,49	+1′,63
		VI—IV	5	2,00	542°11′	293°16′,5	302°05′,5	—2′,0	— 4′,00	— 1′,51	—3′,02
			$[p]=$	6,76		$N=$	302°07′,5	$[p\tau]$	$=-3.28$		+3′,05
							— 00′,49	$\frac{[p\tau]}{[p]}$	$=-0′,49$		—3′,02
						$\gamma=$	302°07′,01				+0′,03
							302°07′				
19	17	V—IV	5	2,00	722°09′		8°51′	+1′,5	+ 3′,00	+ 1′,30	+2′,60
		VI	3	3,33	542°11′		8°49′	—0′,5	— 1′,67	— 0′,70	—2′,33
		VII—I	7	1,43	455°27′,5	633°17′	8°49′,5	0.0	0′,00	— 0′,20	—0′,29
			$[p]=$	6,76		$N=$	8°49′,5	$[p\tau]$	$=+1′,33$		+2′,60
							+ 0′,20	$\frac{[p\tau]}{[p]}$	$=+0′,20$		—2′,62
						$\gamma=$	8°49′,70				—0′,02
							8°49′,5				

Następnie przechodzimy do wykazu II-ego, t. j. do obliczenia t. zw. węzłowych azymutów, odpowiadającego rys. 352a.

Wypisujemy w kolumnie 1-ej numer punktu głównego i cały wykaz dzielimy na 4 części, odpowiadające obliczeniu azymutów prostych podstawowych. W każdej części wykazu w kolumnie 2-ej wypisujemy numer punktu węzłowego; w kolumnie 3-ej wypisujemy w każdym wierszu numery tych poligonów, za pośrednictwem których, idąc od punktu głównego obliczamy trzema drogami azymut węzłowy. W kolumnie 4-ej wypisujemy liczbę kątów wchodzącą do poligonów, wypisanych w kolumnie 3-ej w tym samym wierszu, w kolumnie 5-ej — wagi tych kątów oraz u dołu — sumę wag $[p]$. W załączonym przykładzie wszystkie azymuty są liczone jednakowe, wyłącznie na podstawie azymutu głównego.

W kolumnie 6-ej i 7-ej wypisujemy sumy tych kątów prawych czy lewych poligonu, które otrzymaliśmy w kolumnie 3-ego wykazu I-go; przyczem wypisujemy te sumy wówczas pod tytułem „z prawej strony“ (kolumna 6), gdy w stosunku do kierunku poligonu od punktu głównego do danego węzłowego kąty pomierzone położone były z prawej strony; gdy położone zaś były z lewej strony — wpisujemy odpowiednie sumy do kolumny 7-ej.

Na podstawie azymutu głównego (prostej 19 — 20) obliczamy w kolumnie 8-ej w trzech pierwszych wierszach azymut węzłowy trzykrotnie z wzorów

$$\gamma_w = \gamma_0 + n\ 180^0 - [\alpha] \text{ dla kątów prawych, lub}$$
$$\gamma_w = \gamma_0 - n\ 180^0 + [\alpha] \text{ dla kątów lewych.}$$

Otrzymujemy trzy wyniki γ_w; obieramy liczbę przybliżoną N, w kolumnie 9 wypisujemy od odchylenia τ obliczonych γ_w od liczby N, w kolumnie 10 wypisujemy trzy iloczyny $p\tau$ w każdym wierszu, odpowiadające danym kolumnom 5 i 9-ej, oraz u dołu $[p\tau]$ i wreszcie niżej $\frac{[p\tau]}{[p]}$.

Tą ostatnią wielkość podpisujemy pod liczbą N, i obliczamy najprawdopodobniejszy azymut

$$\gamma = N + \frac{[p\tau]}{[p]}$$

zaokrąglając go do 0',5.

W kolumnie 11 i 12 mamy podane liczby

$$f = \gamma_w - \gamma$$

oraz poszczególne pf i $[pf]$.

Ten ostatni wyraz powinien się różnić od zera o wielkość wynikającą z błędów zaokrągleń; przy większych różnicach należy rachunek sprawdzić. Z wykazu II-ego przepisujemy obliczone ostateczne azymuty węzłowe γ do wykazu I-ego do kolumny 4-ej, jako 1-ą i ostatnią pozycję.

Z wzorów:

$$[\alpha] = \gamma_0 + n\ 180^0 - \gamma \text{ dla kątów prawych i}$$
$$[\alpha] = \gamma - \gamma_0 + n\ 180^0 \text{ dla kątów lewych}$$

WYKAZ III. (OBLICZENIE SPÓŁRZĘDNYCH PUNKTÓW WĘZŁOWYCH).

$X_G = \pm 0.00$ $Y_G = + 200.00.$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Punkt główny G	Punkt węzłowy W	№ № ciągów	Długość ciągu $[l] = L$	Wagi $p = \frac{1000}{L}$	SUMA PRZYROSTÓW		SPÓŁRZĘDNE		$\tau = x_w - N$	$\tau = y_w - N$	$p\tau$		SPRAWDZENIE			
					$[\triangle X]$	$[\triangle Y]$	x_w	y_w			$p\tau_x$	$p\tau_y$	$f_x = x_w - X_w$	$f_y = y_w - Y_w$	pf_x	pf_y
		V—IV	2700	0,37	+ 297,16	— 966,54	+ 297,16	— 766,54	— 0,73	+ 0,25	— 0,27	+ 0,09	— 0,58	+ 0,28	— 0,21	+ 0,10
19	17	VI	1000	1,00	+ 297,89	— 966,79	+ 297,89	— 766,79	0,00	0,00	0,00	0,00	+ 0,15	+ 0,03	+ 0,15	+ 0,03
		VII—I	3350	0,30	+ 297,95	— 967,26	+ 297,95	— 767,26	+ 0,06	— 0,47	+ 0,02	— 0,14	+ 0,21	— 0,44	+ 0,06	— 0,13
			$[p] =$	1,67		$N =$	+ 297,89	— 766,79		$[p\tau]$	— 0,25	— 0,05			+ 0,21	+ 0,13
							— 0,15	— 0,03							— 0,21	— 0,13
			$l_w =$	1000:1,67 =	6,00					$\frac{[p\tau_x]}{[p]} =$	— 0,15	— 0,03	$= \frac{[p\tau_y]}{[p]}$		0,00	0,00
						⊙ 17	+ 297,74	— 766,82								
	11	VII—II	3400	0,30	— 391,69	+ 567,65	— 391,69	+ 767,65	— 1,22	— 0,33	— 0,37	— 0,10	— 1,00	— 0,28	— 0,30	— 0,08
19	11	VIII	700	1,43	— 390,47	+ 567,98	— 390,47	+ 767,98	0,00	0,00	0,00	0,00	+ 0,22	+ 0,05	+ 0,31	+ 0,07
		V—III	2300	0,44	— 390,73	+ 567,98	— 390,73	+ 767,98	— 0,26	0,00	— 0,11	0,00	— 0,04	+ 0,05	— 0,02	+ 0,02
			$[p] =$	2,17		$N =$	— 390,47	+ 767,98		$[p\tau]$	— 0,48	— 0,10			+ 0,31	+ 0,09
							— 0,22	— 0,05							— 0,32	— 0,08
			$l_w =$	1000:2,17 =	4,50					$\frac{[p\tau_x]}{[p]} =$	— 0,22	— 0,05	$= \frac{[p\tau_y]}{[p]}$		— 0,01	+ 0,01
						⊙ 11	— 390,69	+ 767,93								
		11+II	2900	0,34	+ 1256,67	— 326,07	+ 865,98	+ 441,86	+ 1,00	+ 0,28	+ 0,34	+ 0,10	+ 0,85	+ 0,14	+ 0,29	+ 0,05
19	4	VII	900	1,11	+ 864,98	+ 241,58	+ 864,98	+ 441,58	0,00	0,00	0,00	0,00	— 0,15	— 0,14	— 0,17	— 0,16
		17—I	3000	0,33	+ 567,03	+ 1208,84	+ 864,77	+ 442,02	— 0,21	+ 0,44	— 0,07	+ 0,15	— 0,36	+ 0,30	— 0,12	+ 0,10
				2,03		$N =$	+ 864,98	+ 441,58		$[p\tau]$	+ 0,27	+ 0,25			+ 0,29	+ 0,15
			$[p] =$	1,78			+ 0,15	+ 0,14							— 0,29	— 0,16
						⊙ 4	+ 865,13	+ 441,72		$\frac{[p\tau_x]}{[p]} =$	+ 0,15	+ 0,14	$= \frac{[p\tau_y]}{[p]}$		0,00	— 0,01
		11+III	1700	0,59	— 650,07	— 818,54	— 1040,76	— 50,61	+ 0,04	— 0,05	+ 0,02	— 0,03	— 0,10	+ 0,03	— 0,06	+ 0,02
19	15	V	1100	0,91	— 1040,80	— 250,56	— 1040,80	— 50,56	0,00	0,00	0,00	0,00	— 0,14	+ 0,08	— 0,13	+ 0,07
		17—IV	2200	0,45	— 1337,96	+ 715,98	— 1040,22	— 50,84	+ 0,58	— 0,28	+ 0,26	— 0,13	+ 0,44	— 0,20	+ 0,20	— 0,09
			$[p] =$	1,95		$N =$	— 1040,80	— 50,56		$[p\tau]$	+ 0,28	— 0,16			+ 0,20	+ 0,09
							+ 0,14	— 0,08							— 0,19	— 0,09
						⊙ 15	— 1040,66	— 50,64		$\frac{[p\tau_x]}{]p]} =$	+ 0,14	— 0,08	$= \frac{[p\tau_y]}{[p]}$		+ 0,01	0,00

obliczamy wyrównane sumy kątów i wypisujemy je pod sumami praktycznemi kątów w kolumnie 3-ej.

Różnica tych dwu pozycyj

$$f_\alpha = S_p - S_t$$

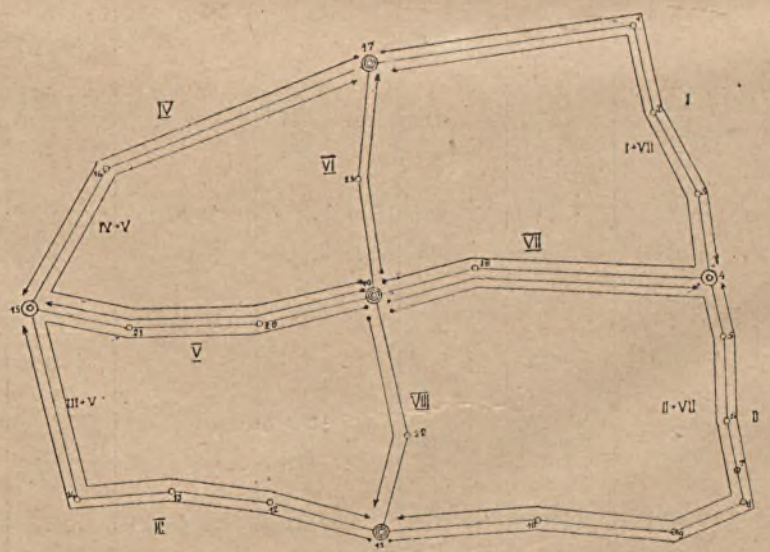
jest odchyłką kątową poligonu. Poniżej dla porównania wypisujemy dopuszczalną dla danego n odchyłkę kątową.

$$\max f_\alpha = \pm 1'.5 \sqrt{n}$$

dla minutowego teodolitu i rozrzucamy ją z dokładnością do 0′,5 na poszczególne kąty. Przy małych odchyłkach otrzymają poprawki tylko kąty między krótkiemi bokami. Poprawione kąty przepisujemy równolegle do kolumny 4-ej i między NN-ami punktów tej kolumny wypisujemy obliczone teraz azymuty. Obliczony ostatni azymut powinien się ściśle równać poprzednio wypisanemu.

W kolumnie 5 wypisujemy czwartaki. Kolumna ta nie jest niezbędną, gdyż moglibyśmy odrazu liczyć kolumnę 7-ą, lecz wtedy należałoby wprowadzać znak n (négatif) dla log sin azymutów, zawartych między 180° i 360° oraz dla log cos azymutów, zawartych między 90° i 270°.

Następnie wypełniamy kolejno kolumny 7, 8, 9 i 10-ą i wypisujemy u dołu w kolumnach 9 i 10-ej sumy obliczonych przyrostów.



Rys. 352b.

Kolumny od 5-ej do 10-ej należy liczyć dwukrotnie, przyczem od 7 do 10-ej pierwszy raz z tablic logarytmicznych, drugi raz z tablic przyrostów.

Obliczone sumy przyrostów przepisujemy do wykazu III-ego obliczenia spółrzędnych węzłowych punktów.

W wykazie tym wypisujemy kolejno: w kolumnie I-ej—punkt główny; w 2-ej obliczany węzłowy. Przytem przedewszystkiem obliczymy punkty 17 i 11-y (rys. 352b), następnie 4 i 15-y.

W kolumnie 3-ej wypisujemy dla punktów 17-ego i 11-ego numery tych poligonów, za pośrednictwem których dochodzimy od punktu głównego trzema najbliższemi drogami do wypisanego w kolumnie 2-ej punktu węzłowego; dla punktów 4 i 15 w kolumnie 3-ej wypisujemy w odpowiednich wierszach numery już obliczonych punktów węzłowych i poligonów, biegnących od tych punktów do wypisanego w kolumnie 2-ej. Tak np. dla punktu 4-ego w 3-ej kolumnie mamy np. 11 + II; znaczy to, że punkt czwarty obliczony zostanie ze spółrzędnych punktu 11-ego i sumy przyrostów poligonu II-ego.

W kolumnie 4 wypisujemy zaokrąglone do 50 m. długości poligonów, podanych w tym samym wierszu kolumny 3-ej W kolumnie 5-ej wypisujemy wagi.

$$p = \frac{1000}{L}$$

oraz poniżej ich sumę $[p]$ i $\frac{1000}{[p]} = l_w$.

Dla punktów 17 i 11-ego wypisujemy sumy przyrostów poligonów kolumny 3-ej w kolumnach 6 i 7-ej, i obliczone 3-ma drogami spółrzędne punktu węzłowego w kolumnach 8 i 9-ej. Obieramy następnie przybliżone liczby N dla tych spółrzędnych, obliczamy (kolumny 10 i 11) odchylenia τ oddzielnie dla x-ów i y-ów, następnie wyrazy $p\tau$ (kolumny 12 i 13) ich sumę $[p\tau]$ oraz średnią $\frac{[p\tau]}{[p]}$ i wreszcie najprawdopodobniejsze spółrzędne w kolumnie 8 i 9-ej.

$$N + \frac{[p\tau]}{[p]}$$

oddzielnie dla x-ów i y-ów.

Sprawdzamy rachunek w kolumnach 14 — 17.

Przechodzimy do punktów 4-ego i 15-go. W kolumnie 4-ej wypisujemy odpowiednie L w ten sposób jednak, że dla punktów, jak np. 4-y obliczany z 11 i II, odpowiednie L utworzy się jako suma l_w, obliczonego dla punktu 11-ego, i długości poligonu II-ego. Dla poligonów, biegnących od punktu głównego, L pozostaje bez zmiany.

W kolumnach 6 i 7-ej wypisujemy sumy przyrostów poligonów, zanumerowanych rzymskiemi liczbami w kolumnie 3-ej; w kolumnach zaś 8 i 9-ej wypisujemy spółrzędne punktu węzłowego np. 4-ego, obliczone na podstawie spółrzędnych punktu 11-go i sumy przyrostów poligonu II-ego, i t. d. Przejście od obliczonych spółrzędnych punktu węzłowego, podanych trzykrotnie w kolumnach 8 i 9 do spółrzędnych ostatecznych tego punktu poniżej za pośrednictwem kolumn 10 — 13 nie różni się od postępowania przy obliczeniu pierwszych punktów węzłowych. To samo dotyczy sprawdzenia w kolumnach 14 — 17. Wyrównane spółrzędne punktów węzłowych

wpisujemy do wykazu I-ego w kolumnaeh 11 i 12 we wszystkich poligonach.

Dla każdego poligonu w tych kolumnach u dołu wypisujemy różnice pomiędzy spółrzędnemi ostatniego i pierwszego punktu.

Od tych różnic odejmujemy odpowiednie sumy przyrostów w kolumnach 9 i 10-ej, i wypisujemy uzyskane w ten sposób f_x i f_y u dołu w kołumnach 9 i 10-ej. Są to odchyłki sum przyrostów.

Liczymy poniżej dla każdego poligonu odchyłkę linjową

$$f_L = \sqrt{f^2_x + f^2_y}$$

i porównamy z wielkością dopuszczalnej odchyłki (patrz tablice w końcu książki) dla poligonu o długości L. Dopuszczalne odchyłki w sumach przyrostów rozrzucamy z odwrotnym znakiem na poszczególne przyrosty proporcjonalnie do długości boków, wypisując poprawki nad przyrostami.

Poprawione przyrosty wypisujemy w tych samych wierszach w kolumnach 11 i 12. Dodajemy pierwsze wyrównane przyrosty do spółrzędnych pierwszego węzłowego punktu danego poligonu i otrzymujemy spółrzędne drugiego punktu tego poligonu; do otrzymanych spółrzędnych tego punktu dodajemy następne wyrównane przyrosty i uzyskujemy spółrzędne trzeciego punktu danego poligonu. Postępując tak do końca w każdym poligonie powinniśmy otrzymać wreszcie wyrównane spółrzędne drugiego punktu węzłowego danego poligonu.

Jeżeli odchyłka linjowa $f\alpha$ jest większą od dopuszczalnej, należy obliczenie sprawdzić. W braku błędów rachunkowych błędu należy szukać w wynikach pomiaru, — inaczej mówiąc — należy pomiar boków, a możliwe i kątów, danego poligonu powtórzyć. Wniosek taki nasunąć się może już przy obliczeniu kolumn 6 — 9 wykazu III.

O błędach i dokładności pomiarów długości.

157 a

§ 158. Błędy systematyczne, przypadkowe i różnice wyników pomiaru długości.

Rozpatrzmy pochodzenie wzorów na dopuszczalną różnicę pomiarów długości. Przy pomiarach długości mamy do czynienia z błędami systematycznemi, (regularnemi, stałemi) i przypadkowemi.

A. Błędy te powstają na skutek:

1) wad komparacji,

2) działania całego szeregu przyczyn, powodujących nie dające się zawsze ująć ściśle rachunkowo błędy. Zaliczamy do tych przyczyn: wpływy atmosferyczne, wadliwe ustawienie łaty lub ułożenie taśmy do poziomu, względnie wadliwą ocenę kąta pochylenia; zwisanie taśmy, uginanie się łat, odchylenia boczne od kierunku mierzonej prostej taśm albo łat; niedokładne przykładanie łat lub niezbyt ścisłe ustawianie szpilek, co najwięcej wpływa w wypadku pochyleń terenowych; niezbyt silne naciąganie taśm i t. p.

Poza błędami systematycznemi istnieje cały szereg błędów pomiaru, zwanych przypadkowemi, ponieważ wywołujące je przyczyny noszą naogół charakter przypadkowości.

Dążąc do usunięcia tych błędów, poznajemy źródła ich powstawania i wówczas stosujemy taki system pomiaru, przy którym większość oczekiwanych błędów zredukuje się do minimum.

Tak więc, przy ścisłych pomiarach wiedząc, że przy zmianie temperatury zmienia się długość miary, usuwamy wpływ zmian temperatury przez ścisłe określenie spółczynnika rozszerzalności linjowej pomiarowego przyrządu i przez notowanie przy pomiarze odczytów z termometru. Ponieważ jednak w odczytach z termometru mogą być błędy stałe, i ponieważ temperatura pomiarowego przyrządu różni się od temperatury powietrza, więc błędy, na skutek istnienia tych dwu przyczyn powstające, staramy się usunąć przez wykonywanie pomiaru przy wzrastającej i opadającej temperaturze, wskutek czego błędy, wynikające z wadliwej oceny temperatury występują pod dodatnią i ujemną postacią, wzajemnie się kompensując przy pomiarze tej samej prostej.

Wiedząc następnie, że każde odchylenie boczne łaty czy taśmy tworzy w wyniku powiększenie długości, usuwamy w znacznym stopniu wpływ

takich błędów przez ścisłe wytyczanie mierzonej prostej, a przy pomiarze łatami nawet przez wyznaczenie na gruncie śladu pionowej płaszczyzny, przechodzącej przez daną prostą, za pomocą wybielonego kredą długiego sznurka, mocno naciąganego nad odcinkiem prostej; pociągnięty ku górze i puszczony wolno sznur zostawia na ziemi biały ślad, po którym układamy łatę.

Wpływ pochylenia odcinków prostej do poziomu usuwa się albo przy pomocy poziomowania przyrządu pomiarowego, albo przez pomiar kąta pochylenia danego odcinka, albo za pomocą niwelowania końców odcinków o stałych spadach.

Tak więc, gdy kąt pochylenia wynosi α, wówczas obliczamy rzut poziomy l pomierzonego odcinka o długości L, t. j.

$$l = L \cos \alpha$$

lub też obliczamy wielkość poprawki p na pochylenie

$$p = l - L = L \cos \alpha - L = - L (1 - \cos \alpha) = - 2 L \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

skąd

$$l = L + p = L - 2 L \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2}$$

Jak widzimy, poprawka będzie zawsze ujemną.

Jeżeli usuwamy wpływ pochylenia danego odcinka do poziomu za pomocą niwelacji, przy której wyznaczamy różnicę h wysokości końców odcinka L, wówczas

$$l = \sqrt{L^2 - h^2} = L \sqrt{1 - \frac{h^2}{L^2}} = L \left(1 - \frac{h^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} = L - \frac{h^2}{2L} - \frac{h^4}{8L^3}$$

dalszych wyrazów rozwinięcia nie bierzemy pod uwagę, zaś w pomiarach taśmą lub łatami uwzględniamy ostatni wyraz tylko przy $L < 10\ h$. W zwykłych więc warunkach wyraz $\frac{h^2}{2L}$ jest poprawką, którą odjąć należy od pomierzonego odcinka, by otrzymać jego poziomy rzut.

Wszelkie jednak środki zaradcze, mające na celu wyrugowanie błędów pomiaru, nie mogą w zupełności powyższego celu osiągnąć; zawsze bowiem przy podwójnym, chociażby najściślej wykonywanym pomiarze prostej otrzymujemy pewną różnicę w wynikach. Tłomaczy się to tem, że w każdym pomiarze okazują swój wpływ pozostałości błędów systematycznych i błędy przypadkowe, mniej lub więcej zniekształcające wyniki pomiaru.

Rozpatrzmy przedewszystkiem wpływ błędów systematycznych na wyniki pomiaru długości.

B. Przypuśćmy, że n razy ułożyliśmy przyrząd o długości l w kierunku mierzonej prostej; oznaczmy przez $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n$ błędy systematyczne każdego ułożenia;

wówczas wzór

$$L = nl + \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n$$

oznaczy długość mierzonej prostej.

Wprowadźmy pewną średnią wartość τ

$$\tau = \frac{[\tau]}{n}$$

wówczas

$$L = nl + n\tau$$

lecz ponieważ dostatecznie dokładnie

$$n = \frac{L}{l}$$

więc

$$L = nl + \frac{\tau}{l} L$$

oznaczmy błąd systematyczny, odpowiadający jednostce długości przez

$$s = \frac{\tau}{l}$$

wtedy

$$L = nl + sL$$

lub błąd systematyczny pomiaru prostej jest równym:

$$\underline{\Delta L = L - nl = sL}$$

Stąd wyciągamy wniosek:

Błąd systematyczny pomiaru rośnie wprost proporcjonalnie do mierzonej długości.

Ponieważ znane błędy systematyczne rugujemy z pomiaru, więc nieznane pozostałości tych błędów z konieczności utożsamiamy z błędami przypadkowemi, o ile chodzi o przybliżone wnioski.

C. Rozpatrzmy teraz, w jaki sposób rośnie błąd przypadkowy prostej w miarę zwiększania się długości prostej.

Przypuśćmy, że w pewnej prostej o pomierzonej długości L taśma 1 ułożyła się n razy, mamy więc

$$L = l_1 + l_2 + \ldots + l_n$$

jeżeli błędy przypadkowe każdego ułożenia taśmy oznaczymy przez odpowiednie ε, wówczas przypadkowy błąd $\triangle L$ długości L będzie równy:

$$\triangle L = \pm \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 + \ldots \pm \varepsilon_n$$

Przypuśćmy dalej, że w danym pomiarze wpływ błędów systematycznych został usunięty tak dalece, że można go nie brać pod rozwagę.

Wówczas $\triangle L$ można traktować, jako błąd prawdziwy pomiaru; ponieważ zaś ten błąd, jak wynika z ostatniego równania, jest równy sumie błędów elementarnych, przeto średni błąd pomiaru m całej długości określony zostanie z równania:

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2$$

w którem m_1, m_2 ... m_n oznaczają średnie błędy każdego ułożenia.

Zamieńmy prawą część równania przez

$$nm_o^2 = [m^2]_1^n = [\varepsilon^2]$$

gdzie m_o^2 jest średnią kwadratów błędów przypadkowych każdorazowego ułożenia miary; wówczas

$$m^2 = nm_o^2$$

i stąd:

$$m = m_o \sqrt{n}$$

że zaś

$$n = \frac{L}{l}$$

przeto

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{l}} \sqrt{L} = \mu \sqrt{L}$$

Stąd wynika, iż: średni błąd przypadkowy pomiaru długości jest wprost proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z mierzonej długości.

Dla przyrządu o długości l_1 będzie:

$$m_1 = \frac{m'_o}{\sqrt{l_1}} \sqrt{L}$$

stąd

$$m^2 : m_1^2 = \frac{m_o^2}{l} : \frac{m'^2_o}{l_1}$$

Z tej proporcji możemy wyciągnąć dwa wnioski:

Przypuśćmy, że dokładność każdego ułożenia obydwu przyrządów jest jednakowa, t. j.

$$m_o = m'_o$$

wówczas

$$m : m_1 = \sqrt{l_1} : \sqrt{l}$$

co znaczy, że średnie błędu pomiaru przyrządami, dającemi jednakowe średnie błędy poszczególnego ułożenia, są odwrotnie proporcjonalne do pierwiastków z długości tych przyrządów.

Z dwu takich przyrządów należy do pomiaru użyć dłuższego.

II. Ażeby wyniki pomiaru były jednakowe, t. j. aby

$$m = m_1$$

powinien zachodzić warunek

$$\frac{m_o^2}{l} = \frac{m'^2_o}{l_1}$$

t. j.

$$m_o^2 : m'^2_o = l : l_1$$

stąd wynika, że dłuższy przyrząd może bez uszczerbku dla dokładności pomiaru dawać większy błąd poszczególnego ułożenia, z tem jednakże, aby przy $l > l_1$

$$m_o < m'_o \sqrt{\frac{l}{l_1}}$$

Przy zachowaniu tego warunku możemy zastąpić krótszy a dokładniejszy przyrząd przez dłuższy.

Ponieważ błędy systematyczne rosną proporcjonalnie do długości, zaś przypadkowe do pierwiastka z długości, to jakkolwiek błąd systematyczny na jednostkę długości przy pomiarze taśmą jest mniejszy od wpływu błędów przypadkowych, przy znacznym wzrastaniu mierzonej długości błędy systematyczne mogą przekroczyć wpływ błędów przypadkowych.

Z badań prof. Lorbera wielkość spółczynnika s dla wpływu błędów systematycznych została ustaloną na: — 0,000085 dla łat czterometrowych układanych bez użycia sznura, i na — 0,00032 dla taśmy stalowej. Badania nad wpływem błędów przypadkowych ustaliły wielkość spółczynnika μ na 0,003 dla łat bez sznura, 0,001 dla łat, układanych wzdłuż sznura i na 0,005 dla dwudziestometrowej taśmy stalowej. Rozpatrzmy metodę określania spółczynnika μ błędów przypadkowych.

Przypuśćmy, że dwukrotnie pomierzyliśmy pewną prostą; z wyników l_1 i l_2 pomiaru tworzymy średnią arytmetyczną

$$l = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

oraz, oznaczając

$$d = l_1 - l_2$$

obliczymy błędy pozorne

$$v_1 = l_1 - l = \frac{l_1 - l_2}{2} = \frac{d}{2}$$

$$v_2 = l_2 - l = \frac{l_2 - l_1}{2} = -\frac{d}{2}$$

skąd średni błąd pomiaru prostej będzie równy

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{d^2}{2}}$$

Przy całym szeregu n prostych, mierzonych podwójnie, ich średnie błędy będą równe:

$$m_1 = \pm \sqrt{\frac{d_1^2}{2}}$$

$$m_2 = \pm \sqrt{\frac{d_2^2}{2}}$$

$$— \quad — \quad — \quad — \quad —$$

$$m_n = \pm \sqrt{\frac{d_n^2}{2}}$$

lecz ponieważ na wielkość różnicy wyników dwu pomiarów wpływają głównie błędy przypadkowe, gdyż systematyczne błędy, jako posiadające stały znak, w znacznej mierze eliminują się przy tworzeniu różnicy, przeto:

$$m_1^2 = \mu_1^2 L_1$$

$$m_2 = \mu_2^2 L_2$$

$$— \quad — \quad — \quad —$$

$$m_n = \mu_n^2 L_n$$

skąd

$$\mu_1^2 = \frac{m_1^2}{L_1} = \frac{d_1^2}{2 L_1}$$

$$\mu_2^2 = \frac{m_2^2}{L_2} = \frac{d_2^2}{2 L_2}$$

$$— \quad — \quad — \quad — \quad — \quad —$$

$$\mu_n^2 = \frac{m_n^2}{L_n} = \frac{d_n^2}{2 L_n}$$

Stąd otrzymamy średnią wartości μ^2 równą:

$$\mu^2 = \frac{[\mu^2]}{n} = \frac{\left[\frac{d^2}{L}\right]}{2\,n}$$

skąd wreszcie otrzymujemy średni spółczynnik przypadkowy pomiaru:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{\left[\frac{d^2}{L}\right]}{2\,n}}$$

lub

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{\left[\frac{d^2}{2\,L}\right]}{n}}$$

Rozpatrzmy przykład:

Wyniki dwu pomiarów tych samych długości: l_1	l_2	$d = l_1 - l_2$	d^2	$\frac{d^2}{2\,L}$
564,68	564,70	— 0,02	0,0004	0,00000
500,30	500,60	— 0,30	0,09	0,00009
367,90	367,72	+ 0,18	324	5
139,72	139,67	+ 0,05	25	1
201,48	201,33	+ 0,15	225	5
785,34	785,15	+ 0,19	361	2
444,78	444,79	— 0,01	1	
361,62	361,60	+ 0,02	4	
508,15	508,12	+ 0,03	9	
240,44	240,25	+ 0,19	361	0,00007
274,49	274,51	— 0,02	4	
796,33	796,11	+ 0,22	484	3

$$\left[\frac{d^2}{2L}\right] = 0.00032$$

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{\left[\frac{d^2}{2\,L}\right]}{n}} = \pm\, 0{,}0052$$

D. Graniczna różnica wyników podwójnego pomiaru prostej.

Znamy trzy czynniki, wpływające na dokładność pomiaru długości:

1) błędy początkowego i ostatniego odczytu, lub przy zwykłej taśmie i łacie błąd ułożenia przyrządu na początku prostej i błąd odczytu na końcu prostej; błąd ten oznaczmy przez a,

2) błędy systematyczne, rosnące proporcjonalnie do długości, i

3) błędy przypadkowe pomiaru, rosnące proporcjonalnie do drugiego pierwiastku z długości.

Jeżeli prawdziwą długość mierzonej prostej oznaczymy przez L i przyjmiemy pod uwagę, że drugi pomiar w porównaniu z pierwszym wykonywany jest w nieco odmiennych warunkach, tak że błędy przypadkowe, oraz nieujęte przez rachunek wpływy warunków zewnętrznych, jak temperatury i t. p., są co do wielkości nieco różne, wówczas obydwa wyniki pomiaru długości wyznaczą się jako:

$$l_1 = L + a_1 + r_1 L \pm \mu_1 \sqrt{L}$$

$$l_2 = L + a_2 + r_2 L \pm \mu_2 \sqrt{L}$$

Stąd, pomijając błędy początkowego i końcowego odczytu a_1 i a_2, jako nie mające praktycznego znaczenia wobec wyrazów l_1 i l_2, określimy różnicę obydwu wyników pomiaru:

$$\triangle l = l_1 - l_2 = (r_1 - r_2) L \pm (\mu_1 - \mu_2) \sqrt{L}$$

a, oznaczając

$$r_1 - r_2 = s,$$

otrzymamy:

$$\triangle l = s L \pm (\mu_1 - \mu_2) \sqrt{L} = d$$

Ponieważ średni błąd różnicy rowna się jej samej, przeto, jeżeli różnica jest przedstawiona przez

$$d = s L \pm (\mu_1 - \mu_2) \sqrt{L} = s L \pm \mu_1 \sqrt{L} \pm \mu_2 \sqrt{L}$$

wówczas kwadrat średniego błędu różnicy będzie:

$$d^2 = s^2 L^2 + (\mu_1^2 + \mu_2^2) L$$

wprowadzając średnią μ^2 z kwadratów obydwu μ_1^2 i μ_2^2, otrzymamy kwadrat różnicy, równy.

$$d^2 = s^2 L^2 + 2 \mu^2 L$$

Badania nad grupami błędów przypadkowych ustaliły, że na 1000 błędów tylko trzykrotnie spotykamy błąd, równy trzykrotnemu średniemu błędowi, lub większy od niego, jeżeli z pomiarów wyeliminowane zostały błędy grube i systematyczne. Stąd powstało określenie dopuszczalnego, lub granicznego błędu G, jako równego trzykrotnemu błędowi średniemu:

$$\underline{G = 3\ m.}$$

Podstawiając do wzoru na d^2 graniczne s i μ, przechodzimy do granicznej wartości różnicy:

$$G^2 = (3d)^2 = (3s)^2 L^2 + 2 (3\mu)^2 L$$

Wzór ten służy za podstawę do obliczania dopuszczalnych różnic przy pomiarach długości.

W Prusach z wielokrotnych pomiarów taśmowych ustalono:

$$s = -0.00024$$

$$\mu = \pm 0.00453$$

Skąd otrzymano:

$$G = \pm 0{,}01 \sqrt{3{,}69\ L + 0{,}005\ L^2}$$

co po zaokrągleniu stanowi:

1) dla gruntów I klasy, a więc najdogodniejszych do pomiaru:

$$G_1 = \pm 0{,}01 \sqrt{4\ L + 0{,}005\ L^2}$$

2) dla gruntów II klasy:

$$G_2 = \pm G_1 \sqrt{\frac{3}{2}} = \pm 0{,}01 \sqrt{6\ L + 0.0075\ L^2};$$

3) dla gruntów III klasy:

$$G_3 = \pm G_1 \sqrt{2} = \pm 0{,}01 \sqrt{8\ L + 0{,}01\ L^2};$$

Inne instrukcje wychodziły z nieco odmiennych założeń. Uważając, że systematyczne błędy wchodzą ze stałym znakiem, otrzymujemy błąd pomiaru długości

$$\Delta L = r L \pm \mu \sqrt{L}$$

zaś średni błąd różnicy dwu pomiarów o błędach ΔL równy jest:

$$d = \sqrt{\Delta L^2 + \Delta L^2} = \Delta L \sqrt{2}$$

oraz graniczna różnica G dwu pomiarów równa jest:

$$G = d_{max} = 3\ \Delta L \sqrt{2} = 4{,}2\ \Delta L$$

lub w zaokrągleniu:

$$d_{max} = 4\ \Delta L$$

więc

$$\underline{d_{max} = 4\ r\ L + 4\ \mu \sqrt{L}}$$

Tak np. instrukcja Ministerstwa Reform Rolnych podaje:

$$d_{max} = 0{,}0005\ L + 0{,}015 \sqrt{L} + 0{,}05$$

dla średnio dogodnego dla pomiarów terenu; ostatni wyraz oznacza wpływ błędów odczytu i przyłożeń zera taśmy do początku prostej.

Dla najdogodniejszego terenu (I klasa):

$$d_{\mathrm{I}} = 0{,}8\ d_{\max}$$

dla najgorszych warunków (III klasa):

$$d_{\mathrm{III}} = 1{,}4\ d_{\max}$$

Według austrjackiej instrukcji dla średnich warunków:

$$d_{\max} = 0{,}00015\ L + 0{,}005\ \sqrt{L} + 0{,}015$$

przyczem

$$d_{\mathrm{I}} = 0{,}8\ d_{\max}$$

$$d_{\mathrm{III}} = 1{,}2\ d_{\max}$$

Instrukcja Ministerstwa Robót Publicznych poleca wzór:

$$\Delta L = 0{,}0002\ \sqrt{s^2 + 1000\ s}$$

dla średnich warunków —

$\Delta L_{\mathrm{I}} = 0{,}8\ \Delta L$ dla I klasy terenu,

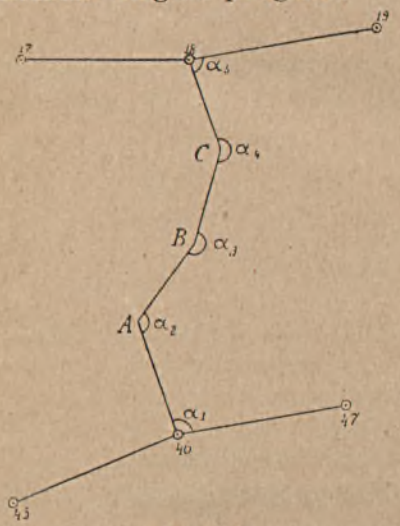
$\Delta L_{\mathrm{III}} = 1{,}2\ \Delta L$ dla III klasy terenu.

Dla porównania zestawmy dla II klasy dopuszczalną różnicę pomiaru 200 *m* według poszczególnych instrukcyj:

Ministerstwa Robót Publicznych	10 *cm*
„ Reform Rolnych	36 „
austrjackiej	12 „
pruskiej	35 „

§ 157. Poligony drugorzędne.

Dla zdjęcia szczegółów zakładamy w terenie poligony II rzędu, nawiązane do pierwszorzędnych. Ponieważ poligony te dostosowuje się do brzegu linij sytuacyjnych, które mogą mieć bardzo nieprawidłowy kształt, przeto ze względu na podrzędne znaczenie tych poligonów, pomiar ich zwykle jest mniej dokładny, niż w poligonach I rzędu; tak, np., Instrukcja Techniczna Ministerstwa Reform Rolnych poleca mierzyć kąty poligonów drugorzędnych jednokrotnie w jednem położeniu lunety i boki jeden raz taśmą. Oczywiście odpowiednio obniżają się w tym wypadku i wymagania techniczne; a więc ta sama instrukcja daje normę dla odchyłek kątowych w takich poligonach $4' \sqrt{n}$, zaś dla przyrostów spółrzędnych $\frac{1}{500} L$, gdzie L oznacza długość poligonu.



Rys. 353.

Rozpatrzmy wyrównanie ciągu II rzędu. Przypuśćmy, że od ⊙ *) 46 poligonu I-ego rzędu do punktu ⊙ 18 poligonu I-ego rzędu biegnie poligon II rzędu ⊙ 46 *A B C* ⊙ 18, w którym pomierzono kąty α_1 α_2 ... α_5 i wszystkie boki. Należy poligon II rzędu wyrównać w taki sposób, aby azymut boku ⊙ 18 — ⊙ 19, obliczony z danego azymutu ⊙ 46 — ⊙ 47 i kątów α_1 ... α_5, równał się azymutowi ⊙ 18 — ⊙ 19, danemu z wyrównania poligonów I-ego rzędu, oraz ażeby spółrzędne punktu ⊙ 18, obliczone na zasadzie spółrzędnych punktu ⊙ 46 i przyrostów spółrzędnych w poligonie II rzędu, równe były wyrównanym spółrzędnym punktu ⊙ 18.

Określmy przedewszystkiem azymuty boków poligonu ⊙ 46 *ABC* ⊙ 18.

$$(\odot 46 - A) = (\odot 46 - \odot 47) - \alpha_1 = \gamma'_{46,A}$$

$$(AB) = (\odot 46 - A) + 180^0 - \alpha_2 = \gamma'_{AB}$$

$$(BC) = (AB) + 180^0 - \alpha_3 = \gamma'_{BC}$$

$$(C \odot 18) = (BC) + 180^0 - \alpha_4 = \gamma'_{C,18}$$

$$(\odot 18 - 19) = (C \odot 18) + 180^0 - \alpha_5 = \gamma'_{18,19}$$

Jeżeli wyrównany w sieci I-ego rzędu azymut boku (⊙ 18—⊙ 19) równa się γ_{18-19}, wówczas obliczony powyżej azymut (⊙ 18 — ⊙ 19) może się różnić od γ_{18-19} o wielkość, nie przekraczającą odchyłki, dopuszczanej dla sumy kątów poligonu II rzędu. Jeżeli różnica $r = \gamma_{18-19} - (\odot 18 - \odot 19)$ jest dopuszczalną, wówczas dzielimy ją przez n (w danym razie 5) i dodajemy kolejno ze znakiem r do wszystkich azymutów wielkości:

*) Znak ⊙ zastępuje wyraz punkt.

$$\frac{r}{n},\ 2\frac{r}{n},\ 3\frac{r}{n}\ \ldots\ r$$

W ten sposób, oznaczając ostatecznie wyrównane azymuty przez γ obliczone zaś przez γ', otrzymamy:

$$\gamma_{46-A} = \gamma'_{46-A} + \frac{r}{n}$$

$$\gamma_{AB} = \gamma'_{AB} + 2\frac{r}{n}$$

$$\gamma_{BC} = \gamma'_{BC} + 3\frac{r}{n}$$

— — — — — — —

$$\gamma_{18-19} = \gamma'_{18-19} + r$$

Na podstawie wyrównanych azymutów i długości boków obliczymy przyrosty spółrzędnych boków ⊙ 46 — *A*, *AB*, *BC*, *C* — ⊙ 18 oraz sumy $[\Delta x]$ i $[\Delta y]$.

Odchyłki

$$fx = (x_{18} - x_{46}) - [\Delta x]$$

$$fy = (y_{18} - y_{46}) - [\Delta y]$$

nie powinny sięgać takich wartości, by

$$f_L = \pm\sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

t. j. t. zw. linjowa odchyłka — przekraczała przewidzianą normę.

Co się tyczy tej normy, to Instrukcja Ministerstwa Reform Rolnych ustala ją na $\frac{1}{500}$ długości poligonu *L*; jednakże jest to norma łagodna i oczekiwać możemy przy starannym pomiarze mniejszej odchyłki linjowej.

Odchyłkę w przyrostach, z jej znakiem, dzielimy przez ilość boków poligonu drugorzędnego proporcjonalnie do długości boków i dodajemy do obliczonych uprzednio przyrostów dla otrzymania ich wyrównanych wielkości, które następnie dodawać będziemy odpowiednio do spółrzędnych punktu ⊙ 46 i następnych.

Wielkości

$$x_A = x_{46} + \Delta x_{46-A} \qquad y_A = y_{46} + \Delta y_{46-A}$$

$$x_B = x_A + \Delta x_{AB} \qquad y_B = y_A + \Delta y_{AB}$$

$$x_C = x_B + \Delta x_{BC} \qquad y_C = y_B + \Delta y_{BC}$$

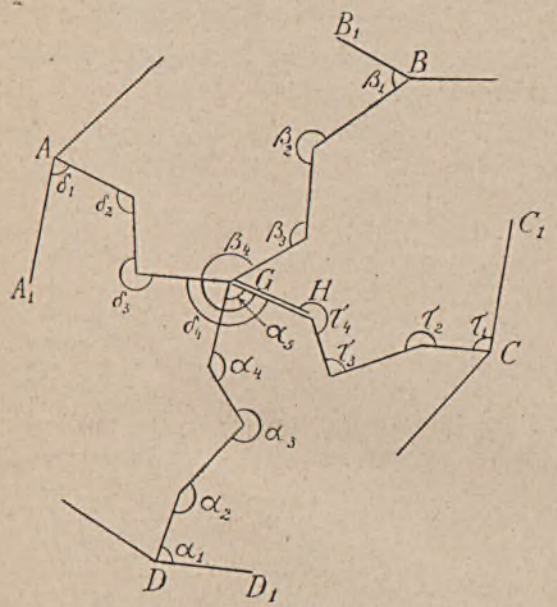
$$x_{18} = x_C + \Delta x_{C-18} \qquad y_{18} = y_C + \Delta y_{C-18}$$

będą wyrównanemi spółrzędnemi punktów danego poligonu.

Przy pomiarach, w których dopuszczana jest mniejsza dokładność pomiaru kątów i boków drugorzędnego poligonu, ograniczamy się często do obliczenia wyrównanych azymutów boków i nanosimy poligon na plan

graficznie, rozrzucając otrzymaną odchyłkę linjową zapomocą równoległych do kierunku odchyłki, poprowadzonych przez punkty danego poligonu. Poprawkę dla każdego punktu odkładamy na równoległej do odchyłki od danego punktu w kierunku odchyłki, t. j. odcinka, biegnącego od ostatniego wykreślonego punktu poligonu do jego właściwego położenia.

W wypadku, gdy poligony drugorzędne krzyżują się, tworzą one punkt węzłowy drugiego rzędu (pamiętać należy, że w dwu



Rys. 354.



Rys. 355.

przecinających się poligonach punkt ich przecięcia się jest punktem poligonowym obydwu poligonów, a więc na nim winny być w obydwu poligonach pomierzone kąty w ten sposób, aby można było określić każdy z kątów, utworzonych przez stykające się boki; niedozwolony więc jest pomiar kątów, jak na rys. 355). Wyrównanie takich poligonów może być dokonane w sposób następujący: określamy azymut boku węzłowego *GH* czterokrotnie, idąc od punktów I rzędu *A*, *B*, *C* i *D*; za najprawdopodobniejszy wynik obieramy średnią wag (rys. 354.)

$$\gamma = \frac{[p\,\gamma]}{[p]}$$

lub, gdy ilości kątów w każdym poligonie są zbliżone, zwykłą średnią arytmetyczną.

Następnie w każdym z 4-ch poligonów, łączących punkty poligonu I rzędu z punktem węzłowym, wyrównamy azymuty metodą, wskazaną na początku tego paragrafu, poczem obliczamy, idąc ku węzłowemu punktowi od *A*, *B*, *C* i *D*, przyrosty spółrzędnych poszczególnych boków. Sumując je odpowiednio, między *A* i *G*, *B* i *G*, *C* i *G*, *D* i *G*, otrzymamy:

$$[\Delta x]_1\ [\Delta y]_1,\ [\Delta x]_2\ [\Delta y]_2,\ [\Delta x]_3\ [\Delta y]_3,\ [\Delta x]_4\ [\Delta y]_4$$

skąd dla X_G otrzymamy cztery wartości:

$$x_1 = x_A + [\Delta x]_1,\ x_2 = x_B + [\Delta x]_2\ \ x_3 = x_C + [\Delta x]_3,\ \ x_4 = x_D + [\Delta x]_4$$

podobnie dla Y_G otrzymamy:

$$y_1 = y_A + [\Delta y]_1,\ y_2 = y_B + [\Delta y]_2,\ y_3 = y_C + [\Delta y]_3,\ y_4 = y_D + [\Delta y]_4$$

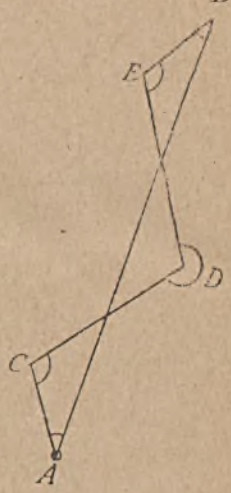
Przy jednakowej w przybliżeniu długości czterech poligonów, średnia arytmetyczna wyników dla X i Y daje wynik ostateczny dla spółrzędnych punktu węzłowego; przy różnej długości przyjmujemy za wagi wyników liczby:

$$p_1 = \frac{1000}{L_1} \qquad p_2 = \frac{1000}{L_2} \ \ldots \text{ i t. d.}$$

i określamy najprawdopodobniejsze spółrzędne:

$$x_G = \frac{[px]}{[p]}$$

$$y_G = \frac{[py]}{[p]}$$

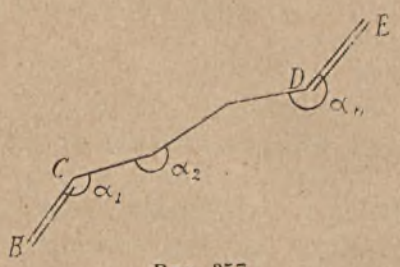


Rys. 325.

Następnie wyrównywamy przyrosty w poligonach, łączących punkt węzłowy G z punktami A, B, C i D, metodą, podaną dla wypadku poligonu drugorzędnego, łączącego pierwszorzędne punkty.

Udogodnienie, wynikające z wyrównania azymutów, pomijając określenie sumy kątów, specjalnie uwydatnione jest dla wypadku, często spotykanego przy pomiarze granic, gdy $A\,B$ jest bokiem poligonu I rzędu, zaś $A\,C\,D\,E\,B$ jest poligonem II rzędu (rys. 325).

Uwaga I.



Rys. 357.

Gdy przechodzimy od wyrównanych azymutów, lub spółrzędnych węzłowego punktu (np., od azymutu BC lub spółrzędnych p. B), do obliczenia odpowiednich azymutów, lub spółrzędnych przy następnym punkcie węzłowym, w wypadku, gdy dany azymut BC ma obliczoną wagę p_{BC}, wówczas wagę azymutu (DE) obliczamy dla równania

$$(DE) = (BC) + 180^0 - \alpha_1 - \alpha_2 \ldots - \alpha_n$$

$$\text{jako } \frac{1}{p_{DE}} = \frac{1}{p_{BC}} + n\frac{1}{p_\alpha};$$

ponieważ zaś wagą p_α każdego kąta jest jedność, gdy uważamy, że średnie błędy kątów są jednakowe, przeto i wagi nie mogą się różnić wzajemnie, a skoro możemy je zmieniać dowolnie z zachowaniem ich wzajemnego stosunku, zatem przyrównywamy je wszystkie, jako równe, do jedności. Stąd

$$\frac{1}{p_{DE}} = \frac{1}{p_{BC}} + n$$

Liczbę $\frac{1}{p_{BC}}$ przyrównamy do pewnej liczby n_{BC}, wyrażonej w postaci ułamka dziesiętnego, który będzie przedstawiał pewną fikcyjną liczbę kątów, na zasadzie której azymut BC został wyznaczony z azymutu pewnego boku, przyjętego za zupełnie dokładny.

W ten sposób powyższe równanie sprowadzi się do:

$$\frac{1}{p_{DE}} = n_{BC} + n$$

łatwiejszego w rachunku i nie wymagającego specjalnych oznaczeń w schematach.

Przykład:

$$p_{BC} = 0.60 \quad n_{BC} = \frac{1}{0.60} = 1{,}66 \quad n = 6$$

$$\frac{1}{p_{DE}} = 1{,}66 + 6 = 7.66 \quad p_{DE} = 0.13$$

Wielkość $n_{BC} = 1{,}66$ wyraża fikcyjne przejście od azymutu, przyjętego za dokładny, do określanego za pośrednictwem n_{BC} kątów.

Uwaga II.

Jeżeli przy obliczeniu ze wzoru

$$\frac{1}{p_{DE}} = \frac{1}{p_{BC}} + n \quad (1)$$

wiemy, że azymut (BC) obliczany był na zasadzie azymutu głównego, przyjętego za dokładny, i waga jego została obliczona ze wzoru $p = \frac{10}{n}$ (istnieją gotowe tabelki dla tego wzoru), wówczas w ogólnym wzorze $p = \frac{1}{n}$ waga została dziesięciokrotnie powiększona, co przekształci to równanie na $10\,p = \frac{1}{\frac{n}{10}}$, a więc równanie (1) zamieni się w

$$\frac{1}{p_{DE}} = \frac{1}{p_{BC}} + \frac{n}{10};$$

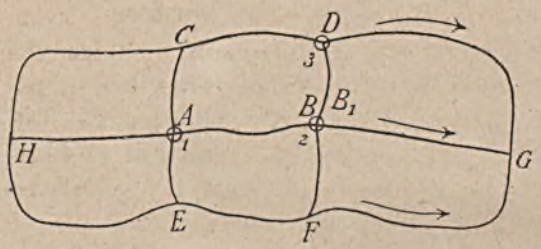
§ 159. Pomiary poligonowe na większych obszarach.

Praktyka wskazuje, że zakładanie sieci poligonów na obszarach, przekraczających 2000 *ha*, nie prowadzi do celu, gdyż, niezależnie od metody wyrównania, w poszczególnych poligonach, w miarę wzrostu ich liczby,

powstawać mogą odchyłki niedopuszczalne: przytem przyczyna tych odchyłek tkwi nie w błędach pomiaru, lecz w niewłaściwem określaniu poprawek dla azymutów i spółrzędnych w punktach węzłowych. Jakkolwiek wielkości te ustalane są jako najprawdopodobniejsze z całego szeregu wyników, jednak pozostałości błędów rozkładają się coraz nierównomierniej i stąd powstaje niejednokrotnie konieczność odniesienia wygórowanych poprawek do poligonów, które ze względu na ścisłość ich pomiaru takich poprawek nie powinny otrzymywać.

Związek poligonowy o tyle tylko może być uważany za ścisły, o ile wyrównanie jego jest proste i ogranicza się do niewielkiej liczby punktów węzłowych; gdy ilość poligonów, łączących te punkty, zaczyna rosnąć w miarę oddalania się od punktów głównych, cały związek poligonowy przestaje nosić charakter związku ogólnego i wyczuwa się dotkliwa potrzeba oparcia poligonów na punktach stałych, wyznaczonych ściślej od poligonowych.

Takiemi punktami są punkty triangulacji państwowej, a w ich braku — triangulacji lokalnej.



Rys. 358.

Układem poligonów, który jeszcze może być wyrównany względnie ściśle bez punktów trygonometrycznych, jest siatka poligonów o dwu punktach węzłowych wewnętrznych.

Przebieg wyrównania jest następujący:

1) punkt *A* obieramy za główny,

2) punkt *B* określamy trzykrotnie dla azymutu *BB* i spółrzędnych: z poligonu *AB*, *ACDB* i *AEFB*,

3) punkt *D* określamy z poligonów *ACD*, *BD* i *BGD*,

4) „ *F* „ „ „ *AEF*, *BF* i *BGF*,

5) „ *G* „ „ „ *DG*, *BG* i *FG*,

6) „ *C* „ „ „ *AC*, *DC* i *AHC*,

7) „ *E* „ „ „ *AE*, *FE* i *AHE*,

8) „ *H* „ „ „ *CH*, *AH* i *EH*.

Zasadą całego wyrównania jest przekształcenie każdego nowookreślonego punktu węzłowego w punkt główny, który przyjmujemy za podstawę do określania dalszych punktów.

Postępowanie w każdym punkcie obejmuje określenie przedewszystkiem najprawdopodobniejszego azymutu węzłowego, a następnie dopiero najprawdopodobniejszych spółrzędnych.

Odległość pomiędzy sąsiedniemi punktami węzłowemi nie powinna zbytnio przekraczać 2000 *m*.

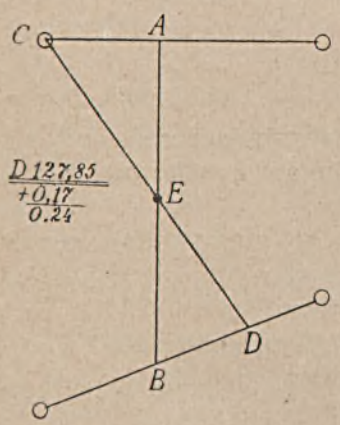
§ 159. Szkic sieci poligonowej i linij pomiarowych.

Przy większych pomiarach sporządza się, prócz planu i wcześniej niż plan, szkic sieci poligonowej. Na szkicu tym, sporządzonym graficznie,

w odniesieniu do południka zera spółrzędnych, wykreślane są w skali wszystkie poligony: długości boków i kąty jedne instrukcje polecają wypisywać, inne nie uważają tego za wskazane. W każdym bądź razie powinny być na szkicu 1) wypisane numery punktów poligonowych i 2) oznaczone przez strzałki kierunki obliczenia poligonów.

Jeżeli na poligonach oparto sieć linij pomiarowych, służących do zdjęcia szczegółów, to często (zalecenie obowiązujące pruskiej instrukcji) sporządza się szkic sieci linij pomiarowych. Na szkicu tym na końcu każdej wykreślonej linji pomiarowej wypisuje się dwukrotnie podkreśloną długość boku, oraz ułamek w postaci, np., $\frac{+\ 0{,}17}{0{,}24}$, który wskazuje, że na długości, równej danej linji pomiarowej, dopuszczana jest różnica dwukrotnego pomiaru 0,24.

Liczba zaś w liczniku podaje różnicę pomiędzy pomierzoną długością linji pomiarowej a jej długością, obliczoną ze spółrzędnych punktów posiłkowych (połączonych daną prostą), leżących na bokach poligonów, względnie na innych linjach pomiarowych.



Rys. 359.

Charakterystyczne dla pruskich i wzorowanych na nich innych przepisów technicznych jest wymaganie kontroli każdej prawie linji pomiarowej np. przez inną, przecinającą daną. Tak np. linja pomiarowa *AB* uważana jest za określoną w sposób „pewny", gdy ją w terenie przecięto inną linją pomiarową *CD* i gdy ze spółrzędnych punktów pomiarowych *A* i *B* oraz *B* i *D* określono spółrzędne punktu *E* przecięcia się obydwu prostych. Te dane umożliwiają obliczenie długości *AE*, *EB*, *ED* i *EC* ze spółrzędnych dla porównania z pomierzonemi długościami tych odcinków i określenia, czy zachodzące różnice są dopuszczane czy nie, co na rysunku oznaczono w odniesieniu do *BE*; przytem litera *D* przy długości 127,85 oznacza, że punkt *E* jest utrwalony pod ziemią w postaci drenarskiej rurki, gdyż w ten sposób poleca utrwalać punkty pomiarowe pruska instrukcja techniczna.

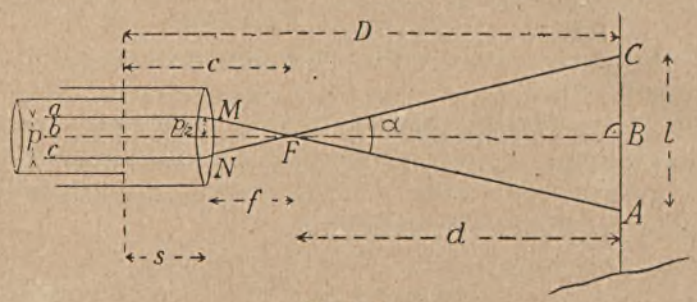
§ 160. Pomiar sytuacyjny.

Na podstawie sieci poligonów 1-ego i 2-ego rzędu mierzymy położenie szczegółów sytuacyjnych metodami: 1) rzędnych i odciętych, odniesionych do boków poligonowych (lub opartych o nie linij pomiarowych), gdy chodzi o ścisłe wyznaczenie położenia punktów i linij, mających z pewnych względów większe znaczenie, jak np., budynki, granice własności, linje komunikacyjne, i t. p.; 2) biegunową — gdy chodzi o przybliżone określenie położenia mniej ważnych szczegółów, jak np., granice użytków, których położenie zupełnie ściśle nigdy się nie da ustalić, ze względu na ich płynność, drogi polowe, ścieżki i t. p.

Inne metody przy pomiarze zapomocą teodolitu prawie nigdy nie są na szerszą skalę stosowane, metoda zaś biegunowa wtedy tylko opłaca się, gdy odległości określanych punktów możemy szybko określać, co uzyskujemy dzięki dalekomierzom. Rozpatrzmy najprostszy typ dalekomierza.

§ 161. Dalekomierz Rejchenbacha.

Dalekomierz ten posiada dodatkowe dwie nitki, umieszczone w jednakowej odległości od poziomej nici (równolegle do niej) krzyża nitek,



Rys. 360.

w jego płaszczyźnie. Przypuśćmy, że oś celowa lunety skierowana jest na łatę, ustawioną prostopadle do osi celowej. Płaszczyzna rysunku przedstawia płaszczyznę, przechodzącą przez łatę AC i oś celową lunety. Środkowa nitka na rysunku odpowiada punktowi b, dwie dalekomiercze — punktom a i c. Przesuwanie wyciągu siatkowego wewnątrz rurki objektywu powoduje przesuwanie się punktów a, b i c na prostych, które nie powinny się zbyt wiele odchylać od równoległości do optycznej osi objektywu.

Promienie, idące od punktów a, b i c ∥-e do osi optycznej objektywu, po przejściu przez objektyw przecinają się w jego ognisku F i idą dalej, przecinając łatę w punktach A, B i C. I odwrotnie, promienie, idące od punktów A, B i C przez punkt F i przez środek optyczny objektywu, przetną się w punktach a, b i c, tworząc obraz łaty.

Oznaczmy przez D — odległość od środka przyrządu (osi pionowej) do łaty,
„ „ f — ogniskową objektywu,
„ „ c — odległość przedniego ogniska objektywu od osi pionowej przyrządu,
„ „ d — odległość tego ogniska od łaty,
„ „ l — odcinek $A\ C$ na łacie,
„ „ p — odcinek $a\,c$, równy odległości między skrajnemi nitkami,
„ „ S — odległość objektywu od pionowej osi przyrządu.

Z podobieństwa △-ów MFN i AFC wynika

$$\frac{d}{f} = \frac{l}{MN},$$

ponieważ zaś

$$MN = p,$$

więc

$$d = \frac{f}{p} l,$$

przyczem

$$\frac{f}{\frac{1}{2} p} = ctg \frac{\alpha}{2},$$

więc

$$\frac{f}{p} = \frac{1}{2} ctg \frac{\alpha}{2}$$

Wielkości f i p przy użyciu lunety są stałe, przeto oznaczmy stały stosunek $\frac{f}{p}$ przez k. Otrzymamy:

$$d = kl$$

oraz

$$k = \frac{1}{2} ctg \frac{\alpha}{2}$$

wobec tego zaś, że

$$D = d + c,$$

zatem

$$\underline{D = kl + c}$$

Jest to wzór na odległość, wyznaczoną przez dalekomierz Rejchenbacha, od środka kątomierza do łaty.

Jeżeli rozstawimy skrajne nitki w taki sposób, by główna stała dalekomierza $k = 100$, t. j. dobierzemy $p = \frac{f}{100}$, to gdy łata podzielona będzie na centymetry i l oznaczać będzie ich ilość, wówczas kl wynosi taką samą ilość metrów.

Druga stała dalekomierza c zależy od długości lunety i odległości ogniskowej objektywu; $c = f + s$ sięga kilkudziesięciu *cm*.

Dalekomierz Rejchenbacha stosuje się przy lunetach z okularami Ramsdena i ortoskopowym.

§ 162. Stałe dalekomierza Rejchenbacha.

Stałe k i c dla wzoru $D = kl + c$ określamy w następujący sposób:

1) Stała $c = f + s$ składa się z ogniskowej f objektywu i odległości s objektywu od pionowej osi przyrządu. Jeżeli więc skierujemy lunetę na odległy przedmiot i przesuniemy wyciąg siatkowy tak, by obraz przedmiotu był widoczny, krzyż nitek znajdzie się prawie zupełnie ściśle w ognisku objektywu i wówczas taśmą płócienną zmierzymy f jako odległość od krzyża nitek do objektywu, mierzoną wzdłuż górnej tworzącej lunety.

Podobnie zmierzymy odległość s od punktu na lunecie, znajdującego się nad środkiem limbusu, do objektywu.

$$c = f + s$$

2) Główną stałą k określimy, posiłkując się wzorem:

$$k = \frac{D - c}{l}$$

Mianowicie: odmierzymy w równym poziomym terenie odległość D, równą, np., 100 m od środka (pionu) teodolitu; na końcu odmierzonej prostej ustawimy pionowo łatę, podzieloną na centymetry, i odczytamy odstęp l w centymetrach między położeniem dwu skrajnych nitek dalekomierza. Stąd obliczymy k.

Przypuśćmy

$$D = 100\ m;\quad c = 50\ cm;\quad l = 99\ cm;$$

wówczas

$$k = \frac{10000\ cm - 50}{99\ cm} = 100.5$$

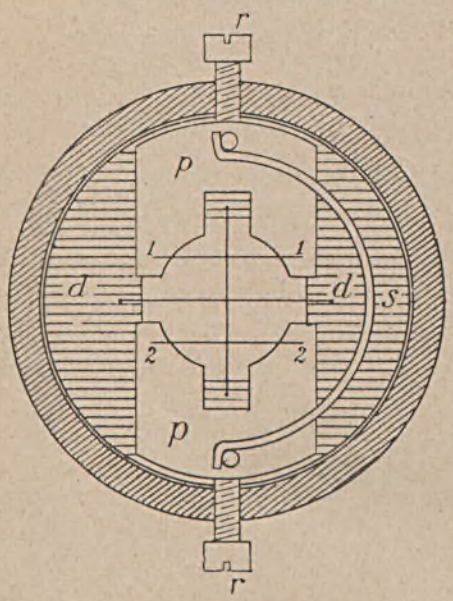
Dla ułatwienia rachunku powinniśmy k przyjąć za 100, lub 200, jako liczby okrągłe, dające przy mnożeniu odczytu l w centymetrach wyraz kl w metrach.

Mogą zajść dwa wypadki: a) nitki dalekomiercze są przytwierdzone do wspólnej z krzyżem nitek diafragmy, lub też zamiast nitek wyryte są na szklanej odpowiedniej płytce rysy, b) nitki dalekomiercze są przytwierdzone do płytek, które można przysuwać lub odsuwać od krzyża nitek w jego płaszczyźnie. W pierwszym wypadku stałej k, jako równej $\frac{f}{p}$, zmienić nie możemy, gdyż p (odległość między nitkami dalekomierza) jest stałą, w drugim — zmieniając odstęp p, odpowiednio zmieniamy k.

Gdy nitki dalekomierza są stałe, stała zaś k nie równa się 100 lub 200, należy, dla uniknięcia licznych mnożeń przez wielocyfrowe k, zbudować specjalną łatę dla danego dalekomierza.

W tym celu dla k bliskiego 100 odmierzamy od środka przyrządu 100 m + c, poczem należy ustawić na końcu tego odcinka łatę i skierować lunetę na łatę w taki sposób, by jedna nitka dalekomierza skierowana była ściśle na górny brzeg łaty; wówczas dolna nitka przetnie oś łaty w pewnym punkcie, który zostanie oznaczony ołówkiem przez pomocnika, zgodnie ze wskazówkami obserwatora przy teodolicie. Odcinek, łączący na łacie oznaczony punkt z górnym brzegiem łaty, dzielimy na 100 równych części i podział ten uskuteczniamy na całej łacie. Oczywiście, spółczynnik k nie będzie i teraz równy 100; jednak, przyjmując go za 100 dla zbudowanej łaty, przy użyciu jej uzyskamy dokładne wyniki.

Dalekomierze o ruchomych nitkach są zbudowane w sposób następujący: diafragma z krzyżem nitek ma wycięcie o bocznych brzegach prostolinjowych, wzdłuż których przesuwać się mogą dwie płytki p, rozsunięte przez ucisk sprężynki s. Nitki dalekomiercze 1 — 1 i 2 — 2 są nalepione na końce płytek w jednakowej odległości od krzyża nitek. Wkręcając śrubki r i r, zbliżamy nitki 1 — 1 i 2 — 2 do krzyża; wykręcając — oddalamy.



Rys. 361.

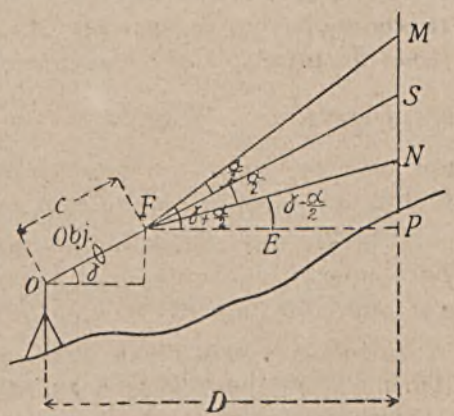
Jeżeli więc łata, podzielona na centymetry, odsunięta jest od teodolitu o 100 $m+c$, zaś krzyż nitek skierowany jest na jedną z metrowych kresek łaty, wówczas dolna i górna nitki winny przecinać na łacie kreski, oddalone od środkowej metrowej ściśle o 50 cm (o ile $k = 100$). Jeżeli to zaszło tylko w przybliżeniu, to, działając śrubkami r i r dalekomierza, sprowadzimy nitki skrajne do właściwego położenia. Wówczas stała dalekomierza będzie ściśle równa 100.

§ 163. Określenie odległości z dalekomierza przy pochyłym celu.

Przypuśmy, że oś celowa lunety skierowana jest na łatę; pochylenie osi celowej do poziomu wynosi γ; górna i dolna nitki przecinają łatę w punktach M i N. Środkiem teodolitu jest oś pionowa O; F jest przedniem ogniskiem objektywu. Gdy oznaczymy rzut poziomy prostej OS przez D, prostej zaś FS przez E, wówczas

$$D = E + c \cos \gamma$$

Określmy E:



Rys. 362.

$$MP = E\,tg\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$NP = E\,tg\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right)$$

ponieważ zaś

$$PM - NP = l$$

odczytowi z łaty, przeto

$$l = E\left\{tg\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right) - tg\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right)\right\}$$

pamiętając, że stała dalekomierza $k = {}^1/_2\ ctg\ \frac{\alpha}{2}$ lub $tg\ \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2k}$, zamienimy różnice tangensów:

$$tg\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right) - tg\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{tg\,\gamma + tg\,\frac{\alpha}{2}}{1 - tg\,\gamma\,tg\,\frac{\alpha}{2}} - \frac{tg\,\gamma - tg\,\frac{\alpha}{2}}{1 + tg\,\gamma\,tg\,\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{tg\,\gamma + \frac{1}{2k}}{1 - tg\,\gamma\,\frac{1}{2k}} - \frac{tg\,\gamma - \frac{1}{2k}}{1 + tg\,\gamma\,\frac{1}{2k}} =$$

$$= \frac{tg\,\gamma + tg^2\,\gamma\,\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{4k^2}\,tg\,\gamma - tg\,\gamma + tg^2\,\gamma\,\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} - \frac{1}{4k^2}\,tg\,\gamma}{1 - \frac{1}{4k^2}\,tg\,\gamma^2} =$$

$$= \frac{1 + tg^2\,\gamma}{k\left(1 - \frac{1}{4k^2}\,tg^2\,\gamma\right)} = \frac{1}{k\cos^2\gamma\left(1 - \frac{1}{4k^2}\,tg^2\,\gamma\right)};$$

więc

$$l = \frac{E}{k\cos^2\gamma\left(1 - \frac{1}{4k^2}\,tg^2\,\gamma\right)};$$

stąd

$$E = lk\cos^2\gamma - \frac{l}{4k}\sin^2\gamma;$$

i wreszcie

$$D = c\cos\gamma + lk\cos^2\gamma - \frac{l}{4k}\sin^2\gamma$$

Wskutek tego zaś, że kąty pochylenia γ są zwykle mniejsze od 30°, więc ostatni wyraz jest mniejszy od $\frac{l}{16\,k}$, zatem nawet przy odległości znacznej wyraz ten (np. dla $l = 200$ i $k = 100$) nie przekracza $\frac{1}{8}$ *m.*, a zwykle sięga zaledwie kilku *cm*; z tego względu ostatniego wyrazu nie bierzemy pod uwagę (gdyż dalekomierz daje znacznie mniejszą dokładność, wobec czego

$$D = c\cos\gamma + lk\cos^2\gamma$$

przytem w ten sposób określone D jest o pewną niewielką liczbę większe od prawdziwej wielkości.

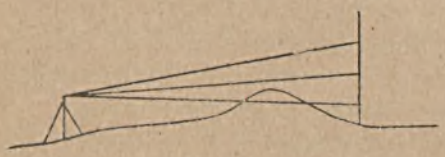
Jeżeli teraz zamiast $c \cos \gamma$ napiszemy $c \cos^2 \gamma$, to, np., przy dość znacznym kącie pochylenia $\gamma = 10^0$ i przy $C = 50$ *cm.*, otrzymamy, zamiast $c \cos \gamma = 49{,}2$ *cm.*, wyraz $c \cos^2 \gamma = 48{,}5$ *cm.*, przyczem taka zamiana częściowo skompensuje odrzucenie wyrazu $\frac{l}{4\,k} \sin^2 \gamma$. Z tego względu za najzupełniej dostateczny wzór na rzut poziomy odległości branej z dalekomierza możemy uważać

$$D = c \cos \gamma + lk \cos^2 \gamma$$

lub ostatecznie

$$D = (lk + c) \cos^2 \gamma$$

Kąt γ wyznacza się z koła wierzchołkowego teodolitu. Wielkość l wyznacza się albo z różnicy odczytów na łacie, odpowiadających skrajnym nitkom, albo w przypadku, gdy tylko górna i dolna nić przecinają łatę, czy to ze względu na przeszkody terenowe, czy na zbyt wielką odległość, wielkość l określamy, jako podwójną różnicę odczytów, odpowiadających jednej ze skrajnych i środkowej nici.



Rys. 363.

Badania doświadczalne (porównanie licznych pomiarów długości taśmą i zapomocą dalekomierza) stwierdzają, że błąd określenia długości z dalekomierza nie powinien przekraczać $\frac{1}{200}$ mierzonej długości, co stanowi 0.5%. Określmy jakich kątów γ pochylenia możemy nie brać pod uwagę przy ustalaniu długości. Ponieważ błąd odczytu wynosi do 0.5%, więc kątów γ, dających dwa razy mniejsze poprawki, uwzględniać nie będziemy.

Oznaczmy $lk + c$ przez A, wówczas

$$D = A \cos^2 \gamma.$$

Odrzucenie wpływu kąta γ na wielkość D powoduje przyrównanie D do A, co powoduje błąd $r = A - A \cos \gamma^2 = A \sin^2 \gamma$; jeżeli r ma być mniejsze od $\frac{1}{400} A$, więc $\sin \gamma < \frac{1}{20}$, skąd $\gamma < 3^0$. Oznacza to, że przy określaniu długości z dalekomierza możemy nie brać pod uwagę kątów pochylenia, mniejszych od 3^0.

§ 164. Dalekomierze Porro.

Gdy w lunecie z dalekomierzem Rejchenbacha ustawimy soczewkę zbierającą między objektywem i krzyżem nitek w takiej odległości od objektywu, że przednie ognisko układu soczewek w rurce objektywu znajdzie się

na osi pionowej teodolitu, wówczas w takim dalekomierzu $c = 0$ i odległość, odczytywana z dalekomierza, ujęta jest przez wzór

$$D = kl$$

przy poziomym celu i

$$D = kl \cos^2 \gamma$$

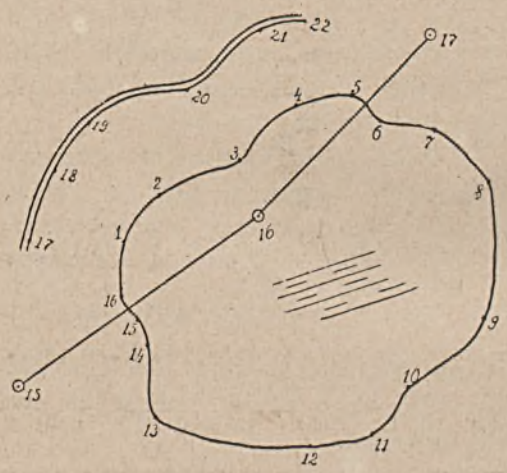
przy pochyleniu o kąt γ osi celowej do poziomu.

Przednie ognisko układu soczewek w rurce objektywu nazywamy punktem analitycznym (niezmiennym, stałym).

Usunięcie wyrazu c upraszcza rachunek. Teorję tego dalekomierza rozpatrzymy szczegółowo w dziale o tachymetrji.

§ 165. Pomiar szczegółów zapomocą dalekomierza.

Przypuśćmy, że na podstawie sieci poligonów przystępujemy do zdjęcia szczegółowego. Gdy niedokładność 1 *m.* wyznaczenia położenia punktów sytuacyjnych nie gra roli, wówczas wskazane jest użycie dalekomierza; zachodzi to najczęściej przy badaniach hydrotechnicznych, meljoracyjnych, pomiarach gospodarczych i wszędzie tam, gdzie bieg linij sytuacyjnych jest płynny, t. j. gdy położenie tej linji może ulegać zmianom, wskutek orki, wycinania drzewostanów i t. p.



Rys. 364.

Przebieg pomiaru, np. w punkcie 16-ym jest następujący:

1) po ustawieniu nad ⊙ 16 teodolitu sprzęgamy zero alhidady z zerem limbusu i przy zwolnionym limbusie celujemy do ⊙ 17, kończąc na sprowadzeniu osi celowej na ⊙ 17 zapomocą zacisku i leniwki limbusu; w użyciu teodolitu nierepetycyjnego notujemy odczyt przy celu do ⊙ 17;

2) wskazujemy robotnikom punkty załamań linij sytuacyjnych, na których mają być ustawiane łaty.

Łaty, używane przy zdjęciu zapomocą dalekomierza, mogą mieć podział na pojedyńcze centymetry

1) idący od zera u spodu łaty ku górze z opisem co 10 *cm.* lub

2) idący od zera u góry łaty ku dołowi z opisem co 10 *cm.*, albo też mogą być stosowane łaty, podzielone na decymetry, co drugi w postaci litery *E*, której działki i kreski są dwucentymetrowej grubości; te ostatnie łaty nie mają opisu. Każdy metr ma podział w innym kolorze — najczęściej kolejno idą kolory czarny i czerwony. W trzecim typie łaty, bardzo dogodnej na większych od 100 *m.* odcinkach, górną nitkę kierujemy na początek lub koniec 1-ego decymetra u góry łaty, zależnie od tego, przy którem z tych położeń górnej nitki dolna przecinać będzie podzielony decymetr; odczyt

składać się będzie z liczby pełnych dziesiątków (decymetrów, podzielonych i niepodzielonych) oraz kilku podwójnych centymetrów i części przeciętego tak, np., nitki g i d dają odczyt przy stałej

$$k = 100 \text{ równy } 20 + 6 + 1{,}2 = 27{,}2 \ m.$$

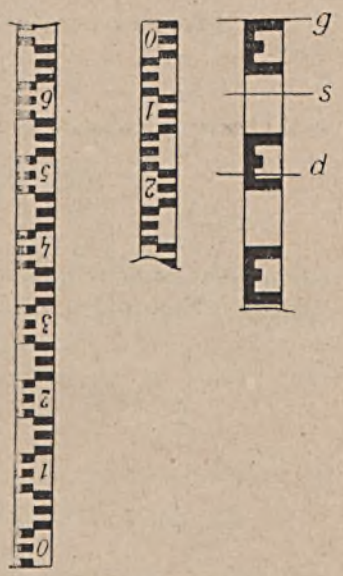
Dla kontroli należy odnotowywać odczyty ze wszystkich trzech nitek; podwójny odczyt ze środkowej powinien dać sumę odczytów ze skrajnych nitek, lub inaczej, odstępy od środkowej do skrajnych nitek powinny być równe;

3) po wysłaniu robotników (dwu do czterech) z łatami, odnotujemy przy celu do każdej łaty:

a) odczyt z limbusu, szacując minuty na oko przy bliższych odległościach,

b) odczyty z górnej, środkowej i dolnej nitki,

c) kąt pochylenia.



Rys. 365.

Wszystkie te odczyty powinny się znaleźć w wierszu poziomym, naprzeciw numeru mierzonego punktu.

W rubryce odległości w dalekomierzu Rejchenbacha dodajemy do różnicy odczytów z górnej i dolnej nitki stałą c dalekomierza, zaokrągloną do decymetra — w załączonym przykładzie $c = 50$ *cm*.

W kolumnie dla kątów pochylenia notujemy kąty, większe od 3°.

Stanowisko ⊙ 16

cel do ⊙ 17 — 0° 0′, wysokość osi obrotu lunety $h = 1{,}30$ *m*

Cel do	Kierunek	Nitki	Odległość z dalekomierza	Kąt pochylenia	Rzut poziomy	Kontrole	Uwagi
1	192°43′	67 100 134,5	68,0	5° 22′	67,4	100 134,5 — 67 100 33 34,5	brzeg łąki przy ornem
2	194° 4′	102 130 157,5	56,0	4° 5′	55,7	130 157,5 —102 —130 28 27,5	„ „
3	250° 2′	288 300 —	24,5	— —	24,5	(300 - 288) 2 = 24	„ „

i t. d.

Środkową nić kierujemy na poszczególne metry lub decymetry tak, by skrajne przecinały widoczne punkty na łacie.

Obliczenia rzutu poziomego należy dokonywać zapomocą suwaka, wykresu, lub, mając wypisane co 20′ kwadraty sinusów częściej spotykanych kątów pochylenia (do 10°), obliczać poprawkę r:

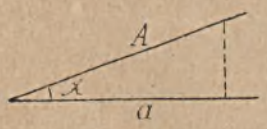
$$r = A - A\cos^2\gamma = A\sin^2\gamma$$

więc:

$$D = A\cos^2\gamma = A - r$$

§ 166. Wykres $D = (kl + c)\cos^2\gamma = A\cos^2\gamma$

Wykres ten opiera się o wzór $D = A\cos x = A\cos^2\gamma$. Jeżeli bowiem wykreślimy kąt x. odpowiadający warunkowi $\cos x = \cos^2\gamma$, i na ednem z ramion kąta odetniemy od wierzchołka odcinek A i odrzutujemy dany odcinek na drugie ramię kąta, wówczas rzut a odcinka A będzie równy



Rys. 366.

$$a = A\cos x = D$$

Kąty x dla poszczególnych γ, branych co 1_0, obliczymy ze wzoru

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\gamma$$

gdyż

$$\cos x = \cos^2\gamma$$

$$1 - \cos x = 1 - \cos^2\gamma = \sin^2\gamma$$

$$2\sin^2\frac{x}{2} = \sin^2\gamma,$$

skąd

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\gamma$$

Wykres zbudujemy zapomocą stycznych: tabela danych niezbędnych do sporządzenia wykresu, winna zawierać co 1° daty dla γ i obliczonych z powyższego wzoru x ów oraz $tg\,x$.

γ	3°	4°	5°
x	4° 14′	5° 39′	7° 4′
$tg\,x$	0.0742	0.0990	0.124

i t. d aż do γ=25°, gdyż większe kąty pochylenia spotykane są bardzo rzadko.

Odcinamy w skali planu $MN = 300$ *m.* i obliczamy tangensy dla promienia MN, np., dla $\gamma = 5^0$

$$tgx = 300 \times 0{,}124 = 37{,}2.$$



Rys. 367.

Na końcu każdego odciętego $tg\ x$ wypisujemy odpowiednie γ. Przypuśćmy, że mamy

$$A = 152\ m.\ \gamma = 5^0;$$

odcinamy w skali planu na promieniu, odpowiadającym

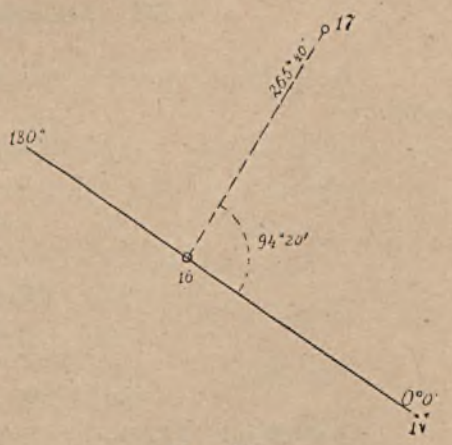
$$\gamma = 5^0,\ MR = 152\ m.$$

Z otrzymanego punktu R, rozsuwając odpowiednio cyrkiel, odnajdziemy rzut R na prostą $MT \perp y$ do MN. Łuk, zatoczony właściwym promieniem RR, będzie styczny do MF. Wielkość RR, możemy odciąć na planie, jako wielkość $D = A \cos^2 \gamma$, wziętą w skali planu.

§ 167. Nanoszenie wyników pomiaru na plan.

Ponieważ poligony są naniesione wiadomym sposobem, przeto pozostaje wkreślić punkty szczegółowe metodą, podaną w § 23 cz. III.

Pewna trudność powstaje przy użyciu teodolitu nierepetycyjnego, gdy odczyt, odpowiadający kierunkowi łącznikowemu ⊙ 16 — ⊙ 17, nie jest równy 0° 0′. Wówczas należy wykreślić kierunek 0° 0′ i, od tego kierunku, jako osi biegunowej odcinać kierunki zgodnie z § 23 cz. III. Przypuśćmy, że kierunek ⊙ 16 — ⊙ 17 odnotowano z limbusu jako 265° 40′; jeżeli podział na limbusie był prawym, wówczas odcinamy w prawo kąt ⊙ 17 — ⊙ 16 — $N = 360^0$ — 265° 40′ = 94° 20′ i kreślimy średnicę 0° — 180° dla przenośnika, jako linję N — ⊙ 16 — 180°. Od tej prostej w odpowiednich kierunkach na obliczonych odległościach od ⊙ 16, odciętych w skali planu, znajdą się punkty szczegółowe, które po wykreśleniu połączone zostaną w ten sposób, jak położone są na linjach sytuacji w terenie.



Rys. 368.

ROZDZIAŁ VII.

Obliczanie powierzchni i podział figur.

§ 168. Obliczanie powierzchni.

Obliczenia powierzchni mogą być dokonywane:

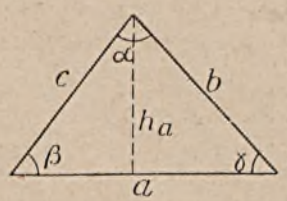
I) analitycznie, na zasadzie danych liczbowych, otrzymanych z pomiaru, bez użycia planu,

II) graficznie na zasadzie danych liczbowych, branych (cyrklem) z planu, lub częściowo z pomiaru, częściowo z planu;

III) mechanicznie, zapomocą różnego typu przyrządów, zwanych planimetrami.

§ 169. Analityczne obliczenie powierzchni.

Rozpatrzmy przedewszystkiem wzory na powierzchnie △-ów i czworoboków.



Rys. 369.

Oznaczając powierzchnie △-a przez p, mamy:

$$2p = ah_a = bh_b = ch_c$$

Wystarcza więc jeden bok i jego wysokość; jeżeli z pomiaru w terenie mamy dwie pary takich wielkości, wówczas powierzchnie, obliczone z obydwu par, będą się nieco różnić.

Zastępując wysokości wzorami typu

$$h_a = c \sin \beta = b \sin \gamma$$

otrzymamy:

$$2p = ac \sin \beta = ab \sin \gamma = bc \sin \alpha$$

Eliminując jeden z boków z każdego z tych wyrazów, np.:

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

otrzymujemy, przekształcając

$$2p = a \cdot \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} \sin \beta = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma} =$$

$$= \frac{a^2}{ctg\, \gamma + ctg\, \beta};$$

grupę:

$$2p = \frac{a^2}{ctg\, \beta + ctg\, \gamma} = \frac{b^2}{ctg\, \alpha + ctg\, \gamma} = \frac{c^2}{ctg\, \alpha + ctg\, \beta};$$

Także stosuje się wzór Herona

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

gdzie

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Dla prostokąta o bokach a i b mamy

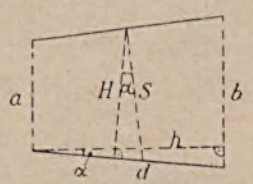
$$p = ab$$

dla trapezu

$$p = \frac{a+b}{2} h,$$

przyczem a i b są podstawami, h wysokością.

Gdy w trapezie opuścimy ze środka jednego z nierównoległych boków prostopadłą H do drugiego nierównoległego boku d, przez h nazwiemy wysokość trapezu, tworzącą z bokiem d kąt α, wówczas, ponieważ kąty między H i s (środkowa linja trapezu), a h i d są równe, więc powierzchnia trapezu



Rys. 369 a.

$$p = h s,$$

lecz

$$h = d \cos \alpha$$

zaś

$$s = \frac{H}{\cos \alpha}$$

więc

$$p = Hd$$

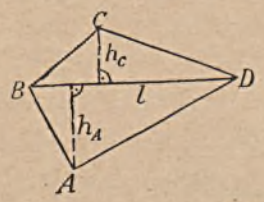
co znaczy, że powierzchnia trapezu równa się jednemu z nierównoległych boków mnożonemu przez długość prostopadłej, opuszczonej na ten bok ze środka drugiego nierównoległego boku.

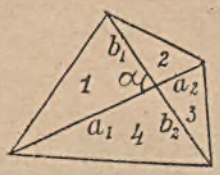
Dla dowolnego czworoboku mamy wzory:

$$2p = lh_c + lh_A$$

$$2p = l(h_c + h_A)$$

gdzie $l = B_A^2 D$ jest przekątną.





Rys. 370.

Gdy znane są odcinki przekątnych między wierzchołkami czworoboku i punktem przecięcia się przekątnych oraz kąt α między przekątnemi, wówczas dla każdego z 4-ch wewnątrz utworzonych $\triangle$-ów otrzymujemy, pamiętając, że $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$,

$$2p_1 = b_1 a_1 \sin\alpha$$

$$2p_2 = b_1 a_2 \sin\alpha$$

$$2p_3 = a_2 b_2 \sin\alpha$$

$$2p_4 = b_2 a_1 \sin\alpha$$

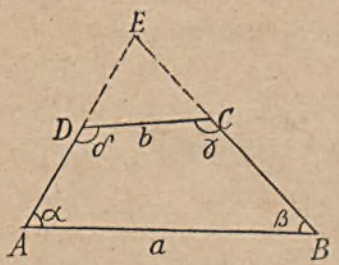
i, dodając, otrzymujemy podwójną powierzchnię P czworoboku:

$$2P = \{b_1(a_1 + a_2) + b_2(a_1 + a_2)\} \sin\alpha = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \sin\alpha$$

a, oznaczając obydwie przekątne przez l i f, mamy:

$$2P = lf \sin\alpha$$

Gdy dane są dwa przeciwległe boki i wszystkie kąty czworoboku wówczas, przedłużając nieznane boki do przecięcia się w punkcie E, piszemy



Rys. 371.

$$2P_{ABCD} = 2P_{ABE} - 2P_{DEC} = \frac{a^2}{ctg\,\alpha + ctg\,\beta} - \frac{b^2}{ctg(180^0 - \gamma) + ctg(180^0 - \delta)}$$

skąd

$$2P_{ABCD} = \frac{a^2}{ctg\,\alpha + ctg\,\beta} + \frac{b^2}{ctg\,\gamma + ctg\,\delta}$$

Dane są 3 boki i dwa kąty między niemi zawarte:

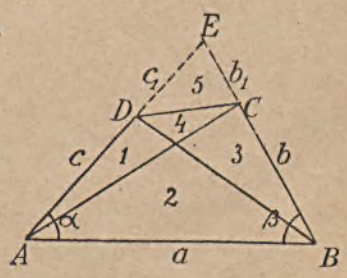
Przedłużamy ramiona danych kątów α i β do przecięcia się w E, oraz wykreślamy przekątne. Otrzymujemy pięć ponumerowanych $\triangle$-ów.

Powierzchnia P czworoboku $ABCD$ jest równa

$$P = (p_1 + p_2) + (p_2 + p_3) + (p_4 - p_2)$$

$$p_1 + p_2 = \frac{1}{2} ac \sin\alpha$$

$$p_2 + p_3 = \frac{1}{2} ab \sin\beta$$



Rys. 372.

Oznaczając $DE = c_1$ $CE = b_1$ $\sphericalangle E = 180^0 - (\alpha + \beta) = \varepsilon$ możemy napisać:

$$\frac{1}{2} bc \sin \varepsilon = \frac{1}{2} [(b + b_1) - b_1] [(c + c_1) - c_1] \sin \varepsilon =$$

$$= \frac{1}{2} \{(b+b_1)(c+c_1) \sin \varepsilon - b_1 (c_1+c_1) \sin \varepsilon - (b_1 + b) c_1 \sin \varepsilon + b_1 c_1 \sin \varepsilon\} =$$

$$= \{(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5) - (p_5 + p_4 + p_1) - (p_5 + p_4 - p_3) + p_5\} =$$

$$= p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 - p_5 - p_4 - p_1 - p_5 - p_4 - p_3 + p_5) =$$

$$= p_2 - p_4$$

stąd

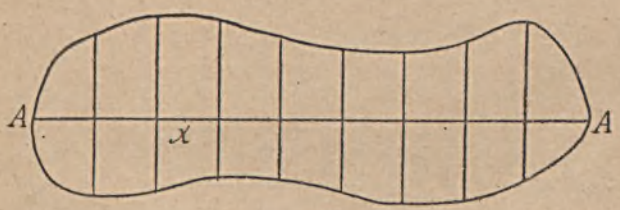
$$p_4 - p_2 = -\frac{1}{2} bc \sin \varepsilon = -\frac{1}{2} bc \sin (\alpha + \beta)$$

oraz

$$P = \frac{ac \sin \alpha + ab \sin \beta - bc \sin (\alpha + \beta)}{2}$$

Przypuśćmy, że mamy określić powierzchnię figury, ograniczonej krzywemi.

Wzór Simpsona.



Rys. 373.

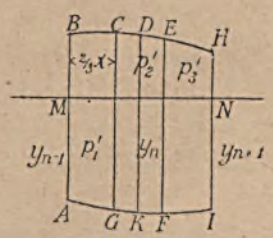
Poprowadzimy prostą (oś odciętych), przecinającą wzdłuż całą figurę, i podzielimy ją na n równych części. W punktach podziału budujemy prostopadłe (rzędne) do AA. W ten sposób dzielimy całą figurę na wąskie paski o szerokości x. Rozpatrzmy dwa dowolne sąsiednie paski $ABDK$ i $DHJK$.

Podzielmy odcinek $MN = 2x$ osi odciętych w tych dwu paskach na 3 równe części i poprowadźmy przez punkty podziału rzędne CG i EF.

Oznaczmy:

$$AB = y_{n-1},\ DK = y_n,\ HI = y_{n+1}$$

Szerokość nowych pasków, utworzonych przez podział dwu pierwotnych na trzy równe części, wynosi $^2/_3\ x$. Oznaczmy ich powierzchnie przez



Rys. 374.

$$p'_1,\ p'_2,\ p'_3$$

$$p_1' = \frac{2}{3} x \left(\frac{y_{n-1} + CG}{2}\right)$$

$$p_2' = \frac{2}{3} \; x \; \left(\frac{CG + EF}{2}\right)$$

$$p_3' = \frac{2}{3} \; x \; \left(\frac{EF + y_{n+1}}{2}\right)$$

Zaś suma tych trzech pasków wyniesie

$$P_0 = \frac{2}{3} \; x \; \left(\frac{y_{n-1}}{2} + CG + EF + \frac{y_{n+1}}{2}\right)$$

lecz, przyjmując $C\ D\ E\ F\ K\ G$ za trapez, mamy

$$CG + EF = 2y_n$$

więc

$$P = \frac{2}{3} \; x \; \left(\frac{y_{n-1}}{2} + 2y_n + \frac{y_{n+1}}{2}\right)$$

Pozbierajmy pary pierwotnych pasków w całej figurze:

$$p_1 + p_2 = \frac{2}{3} \; x \; \left(\frac{y_0}{2} + 2y_1 + \frac{y_2}{2}\right)$$

$$p_3 + p_4 = \frac{2}{3} \; x \; \left(\frac{y_2}{2} + 2y_3 + \frac{y_4}{2}\right)$$

$$p_5 + p_6 = \frac{2}{3} \; x \; \left(\frac{y_4}{2} + 2y_5 + \frac{y_6}{2}\right)$$

$$p_n + p_{n+1} = \frac{2}{3} \; x \; \left(\frac{y_{n-1}}{2} + 2y_n + \frac{y_{n+1}}{2}\right)$$

dodając, otrzymujemy wzór na ogólną powierzchnię P,

$$P = \frac{2}{3} \; x \; \left[\frac{y_0 + y_{n+1}}{2} + 2\,(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_n) + \right.$$
$$\left. + (y_2 + y_4 + y_6 + \ldots + y_{n-1})\right]$$

lub też

$$P = \frac{x}{3} \left\{(y_0 + y_{n+1}) + 4\,(y_1 + y_3 + \ldots + y_n) + 2\,(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-1})\right\}$$

t. j. powierzchnia według wzoru Simpsona równa się trzeciej części elementu odciętej, mnożonej przez sumę wyrazów, z których pierwszy jest sumą skrajnych rzędnych, drugi poczwórną sumą rzędnych nieparzystych (ponieważ pierwszą rzędną przyjęliśmy za zerową) i trzeci — podwojoną sumą rzędnych parzystych.

Wzór Simpsona znajduje zastosowanie i w wypadku, gdy jedna z granic danej figury jest osią odciętych, druga zaś zmierzona jest metodą rzutowania. Wówczas np. co 10 *m.* mierzyć należy rzędne.

Wzór się uprości, jeżeli pierwsza, niekiedy i ostatnia, rzędna równa się zeru. Przy obliczaniu powierzchni między bokiem poligonu (lub linji pomiarowej) a granicą, zdjętą metodą rzutowania, ma również zastosowanie wzór na obliczenie powierzchni z trapezów.

§ 170. Błędy powierzchni najprostszych figur, obliczonych z wymiarów w terenie.

Rozpatrzmy prostokąt o bokach a i h pomierzonych ze średniem błędami m_a i m_h. Średni błąd powierzchni

$$p = ah$$

obliczymy ze wzoru dla średniego błędu funkcji w ogólnej postaci:

$$p = f(a, h)$$

dla której

$$m_p^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 m_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)^2 m_h^2$$

co dla naszego wypadku daje:

$$m_p^2 = h^2 m_a^2 + a^2 m_h^2$$

Przyjmijmy jako wzór na średni błąd pomiaru boku

$$m_l = \sqrt{k_1 l + k_2 l^2}$$

wówczas

$$m_p^2 = h^2 (k_1 a + k_2 a^2) + a^2 (k_1 h + k_2 h^2)$$

lub

$$m_p^2 = k_1 a h (a + h) + 2 k_2 a^2 h^2$$

Załóżmy, że stosunek boków prostokąta wynosi:

$$\frac{a}{h} = n$$

skąd

$$p = ah = \frac{a^2}{n}$$

oraz

$$a = \sqrt{pn}$$

zaś

$$p = ah = h^2 n$$

więc

$$h = \sqrt{\frac{p}{n}}$$

zatem

$$m_p{}^2 = k_1\, p \left(a + \frac{a}{n}\right) + 2k_2\, p^2 = k_1\, pa \left(\frac{n+1}{n}\right) + 2k_2\, p^2 =$$

$$= k_1\, p^{3/2}\, \frac{(n+1)}{\sqrt{n}} + 2k_2\, p^2$$

co dla kwadratu wyniesie:

$$m_p{}^2 = k_1\, p^{3/2}\, \sqrt{2} + 2\, k_2\, p^2$$

zaś dla $n = 10$:

$$m_p{}^2 = k_1\, p^{3/2} \cdot 3{,}3 + 2\, k_2\, p^2$$

Wynika stąd, że przy zmianie stosunku boków, w prostokątach o tej samej powierzchni, we wzorze $m_p{}^2$ ulega zmianie wyraz, zawierający spółczynnik k_1 wpływu błędów przypadkowych pomiaru długości; natomiast wyraz, zawierający k_2 pozostaje stałym.

§ 171. Powierzchnia z trapezów.

a) Figura leży z jednej strony osi odciętych (rys. 375):

$$P_{ABC} = P_{ABB_oA_o} + P_{BCC_oB_o} - P_{ACC_oA_o}$$

$$2\, P_{ABB_oA_o} = (x_b - x_a)(y_a + y_b)$$

$$2\, P_{BCC_oB_o} = (x_c - x_b)(y_b + y_c)$$

$$2\, P_{ACC_oA_o} = (x_c - x_a)(y_a + y_c)$$

Stąd

$$2\, P_{ABC} = (x_b - x_a)(y_a + y_b) + (x_c - x_b)(y_b + y_c) - (x_c - x^a)(y_a + y_c)$$

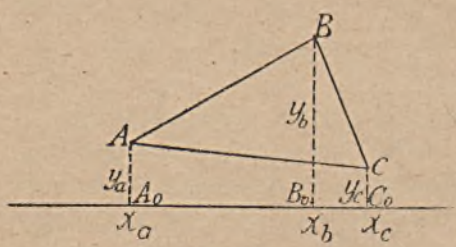
lub, zmieniając przed ostatnim jednomiarem znak na +, otrzymujemy:

$$2\, P_{ABC} = (x_b - x_a)(y_a + y_b) + (x_c - x_b)(y_b + y_c) + (x_a - x_c)(y_a + y_c)$$

Dla podanego na rysunku wypadku rzędne $y_a\ y_b\ y_c$ są ujemne, gdyż punkty leżą w lewo od osi x; wobec czego wyraz $2\, P_{ABC}$ wypadnie z obliczeń ze znakiem —; gdyby figura leżała całkowicie z prawej strony osi X, znak byłby +; ogólnym więc wzorem na powierzchnie będzie

$$2\, P = \pm \Sigma (x_{n+1} - x_n)(y_n + y_{n+1})$$

przytem: tworzymy poszczególne iloczyny, przesuwając się w jednym kierunku



Rys. 375.

kolejno od punktu, nie opuszczając żadnego; 1-ym wyrazem każdego iloczynu będzie zawsze różnica pomiędzy odciętą następnego a odciętą poprzedniego punktu, drugim — suma rzędnych tych punktów. Zmiana kierunku obliczenia $A\,B\,C$ na $A\,C\,B$ spowoduje zmianę znaku wszystkich składników, gdyż

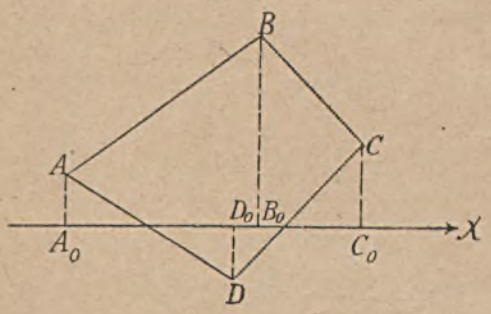
$$x_{n+1} - x_n = -(x_n - x_{n+1})$$

a więc zmieni się i znak obliczonej powierzchni, nie wpływając na jej wielkość. Jeżeli do wzoru na powierzchnię figury z trapezów przejdziemy po odrzutowaniu figury na oś y, to w wypadku, gdy figura leży po jednej stronie osi y, otrzymamy wzór:

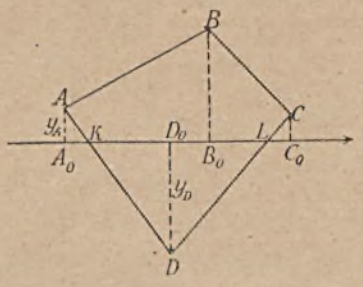
$$2\,P = \pm \Sigma\,(y_{n+1} - y_n)\,(x_n + x_{n+1})$$

b). Rozpatrzmy wypadek, gdy jedna z osi rozcina daną figurę na dwie części.

Oznaczmy powierzchnię $ABCD$ literą P (rys. 377).



Rys. 376.



Rys. 377.

$$2\,P = 2\,p_{ABB_0A_0} + 2p_{B_0BCC_0} + 2\,(p_{LDD_0D} - p_{LCC_0}) + 2\,(p_{DDD_0K} - p_{AAA_0K});$$

$$2\,p_{ABB_0A_0} = (x_b - x_a)\,(y_a + y_b)$$

$$2\,p_{BCC_0B_0} = (x_c - x_b)\,(y_b + y_c)$$

Obliczmy

$$(2p_{LD_0B} - p_{LCC_0});$$

w tym celu określmy

$$A_0K \text{ i } D_0K$$

oraz

$$C_0L \text{ i } D_0L$$

dla

$$(2p_{DDD_0K} - p_{AAA_0K})$$

$$A_0K = y_a\,\frac{x_d - x_a}{y_a + y_d}$$

pódobnie

$$D_0K = y_d\,\frac{x_d - x_a}{y_a + y_d}$$

analogicznie

$$C_0 L = y_c \frac{x_c - x_d}{y_c + y_d}$$

oraz

$$D_0 L = y_d \frac{x_c - x_d}{y_c + y_d}$$

$$2 p_{KDoB} = K D_0 . y_d = y_d^2 \frac{x_d - x_a}{y_a + y_d}$$

$$2 p_{AAoK} = K A_0 . y_a = y_a^2 \frac{x_d - x_a}{y_a + y_d}$$

stąd

$$2(p_{KDoB} - p_{AAoK}) = \frac{(x_d - x_a)(y^2_d - y_a)^2}{y_a + y_d} = (x_d - x_a)(y_d - y_a);$$

Podobnież

$$2(p_{LDoD} - p_{CCoL}) = L D_0 . y_d - L C_0 . y_c = y^2_d \frac{x_c - x_d}{y_c + y_d} -$$

$$- y^2_c \frac{x_c - x_d}{y_c + y_d} = (x_c - x_d)(y_d - y_c).$$

Stąd

$$2P = (x_b - x_a)(y_a + y_b) + (x_c - x_b)(y_b + y_c) +$$
$$+ (x_c - x_d)(y_d - y_c) + (x_d - x_a)(y_d - y_c);$$

Wprowadźmy znaki rzędnych; y_a y_b są ujemne, y_c y_d są dodatnie

$$2P = -(x_b - x_a)(y_a + y_b) - (x_c - x_b)(y_b + y_c) -$$
$$-.(x_d - x_c)(y_d + y_c) - (x_a - x_d)(y_d + y_c)$$

lub ostatecznie

$$2P = \pm \{(x_b - x_a)(y_a + y_b) + (x_c - x_b)(y_b + y_c) +$$
$$+ (x_d - x_c)(y_d + y_c) + (x_a - x_d)(y_d + y_c)\}$$

albo symbolicznie

$$2P = \pm \Sigma (x_{n+1} - x_n)(y_n + y_{n+1})$$

Przez analogję dla rzutu figury na oś y, otrzymamy:

$$2P = \pm \Sigma (y_{n+1} - y_n)(x_n + x_{n+1})$$

Jeżeli obliczenia powierzchni dokonywamy z tych wzorów, wówczas należy stosować obydwa dla skontrolowania rachunku.

Tworząc wyrazy

$$x_{n+1} - x_n$$

oraz

$$y_{n+1} - y_n,$$

należy sprawdzić, czy

$$1)\ \Sigma\ (x_{n+1} - x_n) = O$$

$$1)\ \Sigma\ (y_{n+1} - y_n) = O$$

gdyż

$$x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \ldots = O$$

$$y_2 - y_1 + y_3 - y_2 + y_4 - y_3 + \ldots = O$$

a także, czy

$$3)\ \Sigma\ (y_n + y_{n+1}) = 2\ \Sigma\ y_n$$

$$4)\ \Sigma\ (x_n + x_{n+1}) = 2\ \Sigma\ x_n$$

Do tworzenia iloczynów należy przystępować nie wcześniej, niż po dokonaniu tych sprawdzeń.

Obliczenie powierzchni ze spółrzędnych zapomocą wzoru na trapezy.

1	2		3		4		5		6	
№ № punktów	SPÓŁRZĘDNE				RÓŻNICE				ILOCZYNY	
	x_k		y_k		$x_{k+1} - x_k$		$y_{k+1} + y_k$		$(x_{k+1} - x_k) \times (y_{k+1} + y_k)$	
1	+	453,73	−	844,96	+	123,95	−	1376,33	−	170596,1035
2	+	577,68	−	531,37	+	6,21	−	1054,63	−	6549,2523
3	+	583,89	−	523,26	−	137,14	−	923,62	+	126665,2468
4	+	446,75	−	400,36	−	247,11	−	1076,86	+	266102,8746
5	+	199,64	−	676,50	+	111,39	−	1462,54	−	162912,3306
6	+	311,03	−	786,04	+	142,70	−	1631,00	−	232743,7000
			−	3762,49	+	384,25	−	7524,98	+	392768,1214
					−	384,25			−	572801,3864
						0,0		$2\ P =$	−	180033,2650

Sprawdzamy obliczenie 4-ej kolumny, przez utworzenie sumy wyrazów, która powinna być zerem.

Suma liczb kolumny 5-ej równać się powinna podwojonej sumie liczb w kolumnie 3-ej.

Na str. 400 otrzymamy dla $2P$ ten sam wynik co i obecnie, z tą jednak różnicą, że jednokrotne obliczenie powierzchni ze wzoru na trapezy daje oszczędność tylko jednej kolumny w porównaniu z 2-em

rozwiązaniem; dwukrotne obliczenie powierzchni ze wzoru na trapezy wymagałoby jeszcze trzech kolumn, a więc zbyt wielu obliczeń. Z tego względu wzór na powierzchnię z trapezów niema przy obliczeniu ze spółrzędnych zastosowania.

c) Wzór na powierzchnię z trapezów ma również zastosowanie do obliczenia powierzchni, zawartej między linją pomiarową lub poligonową a granicą figury. Przypuśćmy, że metodą rzutowania na boki poligonu $A\,B$ i $B\,C$ mierzymy granicę $A\,d\,e\,f\,g\,i\,k\,l\,C$ obszaru O. Chodzi o określenie, jakiej wielkości powierzchnia gruntów obszaru O mieści się między granicą a linjami poligonów; oczywiście za dodatnią przyjmujemy powierzchnię figur $A\,d\,e\,m\,f\,g\,r\,B\,A$ oraz $s\,l\,C$, za ujemną — $r\,s\,k\,i$.

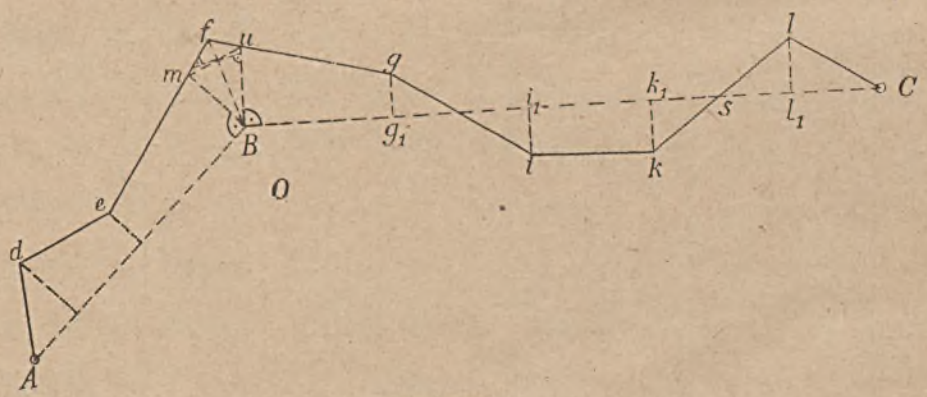
Aby mieć dostateczną ilość danych z pomiaru, należy w punktach załamań, jak np. B, mierzyć rzędne do prostych $A\,B$ i $B\,C$, t. j. $B\,m$ i $B\,u$.

Wzór

$$2\,P = \pm\,\Sigma\,(x_{n+1} - x_n)\,(y_n + y_{n+1})$$

stosować będziemy dla każdej lokalnej odciętej oddzielnie; tak więc określimy powierzchnie $A\,d\,e\,m\,B\,A$ oraz $B\,u\,g\,i\,k\,l\,C\,B$ i wreszcie powierzchnię $m\,B\,u\,f$.

Co się tyczy znaków dla y, to dla obszaru O przy kierunku $A\,B\,C$ pomiaru odciętych i kolejności punktów $d\,e\,m\,f$... regułą będzie: lewe rzędne (na terenie obszaru) są dodatnie, jak np. $h_d\ h_l$, prawe (na sąsiednim obszarze, jak np. $h_i\ h_k$) są ujemne.



Rys. 378.

Figurę $g\,g_1\,r\,i_1\,i$ należy traktować jako skrzyżowany trapez ($g\,r\,i$ jest prostą) o przecinających się nierównoległych bokach $g_1\,i_1$ i $g\,i$. Dla naszego wypadku podwójną jego powierzchnię otrzymamy z rachunku:

$$(B\,i_1 - B\,g_1)\,[(g\,g_1 + (-\,i\,i_1)] = g_1\,i_1\,(g\,g_1 - i\,i_1)$$

skrzyżowany zaś trapez $k\,l\,l_1\,k_1$ da podwójną powierzchnię $k_1\,l_1\,(l\,l_1 - k\,k_1)$

Powierzchnię figury $m\,B\,u\,f$ albo określimy graficznie z planu, (można podwoić skalę), albo też w terenie wyznaczamy punkty $m\,i\,u$, mie-

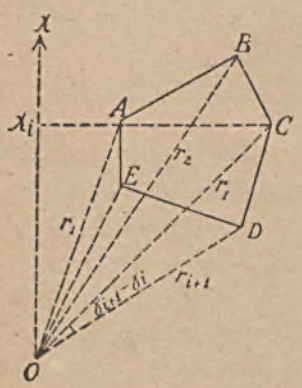
rzymy odcinki $m\,u$, $m\,f$, $f\,u$ i, mając rzędne $m\,B$ i $B\,u$, stosujemy wzór Herona; lub też mierzymy $B\,f$ i długości prostopadłych h_1 i h_2, spuszczonych z m i u na $B\,f$; powierzchnią będzie $\frac{1}{2}\,B\,f\,(h_1 + h_2)$.

§ 172. Powierzchnia zamkniętego poligonu ze spółrzędnych.

Wzory L'Huillera.

Przypuśćmy, że początek spółrzędnych znajduje się poza granicami danej figury.

Jeżeli od początku spółrzędnych poprowadzimy promienie wodzące $r_1\ r_2\ \ldots\ r_i\ r_{i+1}\ \ldots$ do wierzchołków danej figury i kąty kierunkowe (lub azymuty) promieni wodzących oznaczymy $\gamma_1\ \gamma_2\ \ldots\ \gamma_i\ \gamma_{i+1}\ \ldots$, wówczas, stosując wzór na podwójną powierzchnię $\triangle$-a i np. (OCD)



Rys. 379.

$$2p_i = r_i\,r_{i+1}\sin(\gamma_{i+1} - \gamma_i),$$

otrzymamy dodatnie pola $O\,A\,B$, $O\,B\,C$, $O\,C\,D$ oraz ujemne, jak $O\,D\,E$ i $O\,E\,A$, gdyż

$$\gamma_{OE} - \gamma_{OD}$$

(następny mniej poprzedni) jest ujemne;

$$2p_i = r_i\,r_{i+1}(\sin\gamma_{i+1}\cos\gamma_i - \cos\gamma_{i+1}\sin\gamma_i) =$$

$$= r_i\cos\gamma_i\,r_{i+1}\sin\gamma_{i+1} - r_i\sin\gamma_i\,r_{i+1}\cos\gamma_{i+1}$$

lecz

$$r_i\cos\gamma_i = x_i \qquad r_{i+1}\sin\gamma_{i+1} = y_{i+1}$$

$$r_i\sin\gamma_i = y_i \qquad r_{i+1}\cos\gamma_{i+1} = x_{i+1}$$

stąd

$$2p_i = x_i\,y_{i+1} - y_i\,x_{i+1}$$

Powierzchnia P całej figury $ABCDE$ równa się algebraicznej sumie trójkątów typu OCD, tak więc

$$2P = [2\overset{n}{\underset{i=1}{}}p_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i\,y_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} y_i\,x_{i+1}$$

Napiszmy grupę tę w częściowem rozwinięciu

— — — — — — —

— — — — — — —

$$2p_{i-1} = x_{i-1}\,y_i - y_{i-1}\,x_i$$

$$2p_i = x_i\,y_{i+1} - y_i\,x_{i+1}$$

$$2p_{i+1} = x_{i+1}\, y_{i+2} = y_{i+1}\, x_{i+2}$$

$$2p_{i+2} = x_{i+2}\, y_{i+3} - y_{i+2}\, x_{i+3}$$

— — — — — — — —

— — — — — — — —

i zsumujmy; otrzymamy $2P$ w postaci:

a) grupując według jednakowych x

$$2P = \ldots + x_i\,(y_{i+1} - y_{i-1}) + x_{i+1}\,(y_{i+2} - y_i) + x_{i+2}\,(y_{i+3} - y_{i+1}) + \ldots$$

t. j. podwójna powierzchnia jest sumą wyrazów, z których każdy jest iloczynem bieżącego x przez różnicę pomiędzy następnym a poprzednim y, co symbolicznie ujmujemy we wzorze:

$$\underline{2P = \Sigma\, x_n\,(y_{n+1} - y_{n-1})}$$

w którym zamiast n podstawiamy kolejno bieżące numery wierzchołków poligonu o danych spółrzędnych,

b) grupując według jednakowych y, otrzymujemy:

$$2\,P = \ldots + y_i\,(x_{i-1} - x_{i+1}) + y_{i+1}\,(x_i - x_{i+2}) + y_{i+2}\,(x_{i+1} - x_{i+3}) + \ldots$$

t. j. podwójna powierzchnia poligonu równa się sumie wyrazów, z których każdy jest iloczynem bieżącego y przez różnicę miedzy y-ami poprzedniego a następnego punktu.

Symbolicznie wzór ten ujmujemy w postaci

$$\underline{2\,P = \Sigma\, y_n\,(x_{n-1} - x_{n+1})}$$

Obydwa te wzory (L'Huillera lub Gaussa) stosują się przy obliczeniu powierzchni; wyniki powinne być jednakowe, o ile nie zaokrąglaliśmy znaków po przecinku.

Tak więc, ażeby otrzymać powierzchnię danego obszaru, należy obliczyć ze spółrzędnych powierzchnię obwodowego poligonu (obwodnicy) i do wyniku dodać powierzchnię z domiarów (patrz poprzedni § p. c.).

Obliczenia powierzchni ze spółrzędnych dokonywać należy w odpowiednich schematach. Przed przystąpieniem do tworzenia iloczynów sprawdzić należy różnicę typu

$$y_{n+1} - y_{n-1} \quad \text{i} \quad x_{n-1} - x_{n+1}$$

Utworzymy grupę kolejnych różnic:

— — — — — — — — — —

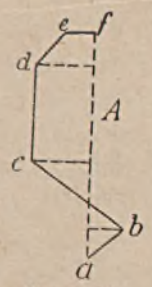
— — — — — — — — — —

— — — — —	— — — — —
$y_{n-1} - y_{n-3}$	$x_{n-1} - x_{n+1}$
$y_n - y_{n-2}$	$x_n - x_{n+2}$
$y_{n+1} - y_{n-1}$	$x_{n+1} - x_{n+3}$
$y_{n+2} - y_n$	$x_{n+2} - x_{n+4}$
— — — — —	— — — — —
— — — — —	— — — — —
— — — — —	— — — — —

Jak widzimy, w każdej kolumnie każdy wyraz wchodzi tak ze znakiem +, jak —. Suma więc wszystkich różnic daje zero.

$$\Sigma\,(y_{n+1} - y_{n-1}) = \Sigma\,(x_{n-1} - x_{n+1}) = 0$$

co jest kontrolą właściwego obliczenia różnic.



Rys. 380.

Wzory L'Huillera mają również zastosowanie przy określeniu powierzchni danego obszaru, zawartej między osią odciętych a rzędnemi, z tem zastrzeżeniem, że dla obszaru, położonego po prawej stronie osi odciętych af rzędne (np. ab), skierowane w prawo, będą dodatnie, w lewo — ujemne, zaś odcięte rosną, gdy przy przejściu od punktu do punktu $abcdef$ mierzony obszar A leży po prawej stronie; odwrotnie, gdy przy posuwaniu się od punktu do punktu mamy obszar A po lewéj ręce, wówczas prawe rzędne będą ujemne, lewe dodatnie, (patrz tabelkę str. 400).

§ 173. Wzory skrócone na powierzchnie trójkątów i czworoboków.

Podwojona powierzchnia △-a ABC ze spółrzędnych wynosi

$$2P = x_a\,(y_b - y_c) + x_b\,(y_c - y_a) + x_c\,(y_a - y_b)$$

zmniejszamy wszystkie spółrzędne o x_A i y_A; powierzchnia $2P$ nie ulegnie zmianie i wzór się przekształci na następujący:

$$2P = (x_b - x_a)\,(y_c - y_a) + (x_c - x_a)\,\{-(y_b - y_a)\} =$$

$$= (x_b - x_a)\,(y_c - y_a) - (x_c - x_a)\,(y_b - y_a);$$

$$2P = \triangle x_{ab}\,\triangle y_{ac} - \triangle x_{ac}\,\triangle y_{ab}$$

t. j. podwojona powierzchnia △-a równa się iloczynowi $\triangle x$ lewego przez $\triangle y$ prawego boku mniej iloczyn $\triangle x$ prawego przez $\triangle y$ lewego boku.

PRZYKŁADY.

Obliczenie powierzchni parceli № 1.

1	2		3		4		5		6		7	
№ № punktów	SPÓŁRZĘDNE x		y		RÓŻNICE $x_{n-1}-x_{n+1}$		$y_{n+1}-y_{n-1}$		ILOCZYNY			
	z wzorów $2P = [x_n\ (y_{n+1} - y_{n-1})] = [y_n\ (x_{n-1} - x_{n+1})]$											
1	+	453,73	—	844,96	—	266,65	+	254,67	+	225308,5840	+	115551,4191
2	+	577,68	—	531,37	—	130,16	+	321,70	+	69163,1192	+	185839,6560
3	+	583,89	—	523,26	+	130,93	+	131,01	—	68510,4318	+	76495,4289
4	+	446,75	—	400,36	+	384,25	—	153,24	—	153838,3300	—	68459,9700
5	+	199,64	—	676,50	+	135,72	—	385,68	—	91814,5800	—	76997,1552
6	+	311,03	—	786,04	—	254,09	—	168,46	+	199724,9036	—	52396,1138
					±	650,90	±	707,38	+	494196,6068	+	377886,5040
									—	314163,3418	—	197853,2390
								$2P$	=	180033,2650	=	180033,2650
								P	=	$9^{ha}\,0016^{m2}$		

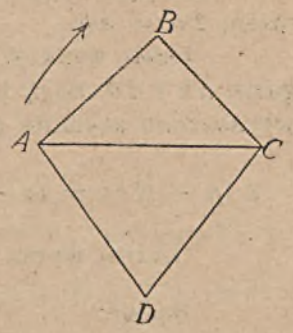
Obliczenie powierzchni z domiarów figury $A\,C\,D\,E\,F\,B$ (rys. 51, str. 53), wchodzącej w skład obszaru, położonego po prawej stronie $A\,C\,D\,E\,F$

		x		y	$x_{n-1}-x_{n+1}$		$y_n(x_{n-1}-x_{n+1}$
A		0		0	+	82,50	
	+	9,80	—	6,50	—	33,40	+ 217,10
	+	33,40	—	4,40	—	48,60	+ 213,84
	+	58,40	—	17,20	—	58,90	+ 1013,08
	+	92,30	—	9,40	—	33,90	+ 318,66
	+	92,30		0,0	+	92,30	
					+	174,80	1762,68 $2P$
					—	174,80	881,34 P
						0,0	

Stosując ten wzór do czworoboku *ABCD*, napiszemy

$$2p_{ABC} = \triangle x_{ab}\ \triangle y_{ac} - \triangle x_{ac}\ \triangle y_{ab}$$

$$2p_{ACD} = \triangle x_{ac}\ \triangle y_{ad} - \triangle x_{ad}\ \triangle y_{ac}$$



Rys. 381.

dodając:

$$2P_{ABCD} = \triangle x_{ac}\ (\triangle y_{ad} - \triangle y_{ab}) - \triangle y_{ac}\ (\triangle x_{ad} - \triangle x_{ab});$$

lecz

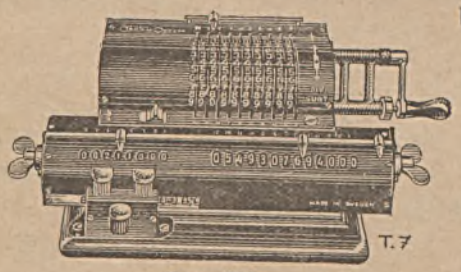
$$\triangle y_{ad} - \triangle y_{ab} = \triangle y_{bd}$$

$$\triangle x_{ad} - \triangle y_{ab} = \triangle x_{bd}$$

stąd

$$2P_{ABCD} = \Delta x_{ac}\ \Delta y_{bd} - \Delta y_{ac}\ \Delta x_{bd}$$

t. j. podwojona powierzchnia czworoboku równa się iloczynowi $\triangle x$ pierwszej przekątnej przez $\triangle y$ drugiej mniej iloczyn Δy pierwszej przez Δx drugiej.



Rys. 381a.

UWAGA. Obliczenia analityczne wymagają znacznej liczby iloczynów; mnożenia należy dokonywać na arytmometrze, lub zapomocą tablic rachunkowych Crella.

Do najlepszych typów należą arytmometry firmy Odner (rys. 381a), Triumphator i Brunsviga.

§ 174. Graficzne obliczenia powierzchni.

Graficzne obliczenia powierzchni mają zastosowanie głównie przy określaniu powierzchni figur prostolinjowych. Polegają na:

1) podziale danej figury na △—y i obliczeniu ich powierzchni z podstaw i wysokości, przyczem podstawy i wysokości bierzemy z planu, korzystając z podziałki,

2) lub też podziale całej figury przez proste ‖-e na paski trapezowe i obliczeniu ich powierzchni z wymiarów, wziętych z planu; trapezy mogą być jednakowej wysokości, lub różnej,

3) zamianie figury na równoważny jej trójkąt i określeniu jego powierzchni.

§ 175. Podstawy graficznego obliczenia powierzchni.

1) Podział danej figury na trójkąty powinien być dokonany w taki sposób, aby ilość trójkątów była możliwie mała, więc ich powierzchnie — możliwie większe. Wymaganie to oparte jest na założeniu, że im mniej danych wypadnie brać z planu, tem mniej błędów możemy popełnić.

2) Wysokości i podstawy △-ów powinny być możliwie równej wielkości; wówczas błąd powierzchni będzie zmniejszony.

Wynika to z następującego dowodu:

Przypuśćmy, że a i h są podstawą i wysokością $\triangle$-a o powierzchni p, zatem $2p = ah$.

Jeżeli wielkość a obliczymy z planu z błędem da, b — z błędem db, gdzie da i db mogą być tak ujemne, jak dodatnie, wówczas i powierzchnia wyznaczona zostanie z błędem dp, tak więc

$$2(p + dp) = (a + da)(h + dh) = ah + hda + adh + da.\,dh$$

Ostatni wyraz może być odrzucony, jako dostatecznie mały.

Będzie:

$$2p + 2dp = ah + hda + adh$$

skąd

$$2dp = hda + adh$$

Błędy dh i da można uważać za jednakowe, jako błędy graficznego określenia długości, stąd

$$2dp = (a + h)\,da = a\left(1 + \frac{h}{a}\right)da$$

Oznaczmy

$$\frac{h}{a} = k$$

wówczas

$$2dp = a\,(1 + k)\,da$$

lecz

$$a = \frac{2p}{h} = \frac{2p}{ak},$$

przeto

$$a^2 = \frac{2p}{k} \quad \text{i} \quad a = \frac{\sqrt{p}\sqrt{2}}{\sqrt{k}}$$

więc

$$2\,dp = \sqrt{p}\,\sqrt{2}\,\frac{1 + k}{\sqrt{k}}\,da;$$

stąd

$$\frac{dp}{p} = \frac{da}{\sqrt{p}\,\sqrt{2}} \cdot \frac{1 + k}{\sqrt{k}}$$

Określmy, przy jakim stosunku $\frac{h}{a} = k$ błąd $\frac{dp}{p}$ będzie minimalny; zajdzie to oczywiście przy

$$\frac{1 + k}{\sqrt{k}} = \text{Min.}$$

Przyrównywając pochodną do zera, otrzymamy

$$\frac{\sqrt{k} - (1 + k)\frac{1}{2\sqrt{k}}}{k} = 0,$$

a stąd

$$2k - (1 + k) = 0$$

i wreszcie $k = 1$, co oznacza, że najdokładniej określimy powierzchnie takich trójkątów, w których $\frac{a}{h} = 1$, w których zatem $a = h$, t. j. podstawa jest równa wysokości.

3) Należy unikać budowy Δ-ów o bardzo nieznacznej wysokości.

Ze wzoru $2dp = a\,dh + h\,da,$

dzieląc równanie przez $2p = a\,h,$
otrzymujemy:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dh}{h} + \frac{da}{a}$$

t. j. względny błąd powierzchni równa się sumie stosunkowych błędów określenia wysokości i podstawy.

Przyjmując za błąd określenia wysokości i podstawy tę samą wielkość $d\,a,$
otrzymamy:

$$\frac{dp}{p} = \frac{da}{h} + \frac{da}{a}$$

przy $h = a$

$$\frac{dp}{p} = 2\,\frac{da}{a}$$

wielkość $\frac{dp}{p}$ dla $a = 100$ *m.* na planie, np., w skali 1:10.000, na którym błąd *da* graficznego określenia długości wynosi około 1 *m.* przy $a = h,$ wyniesie:

$$\frac{dp}{p} = 2\,\frac{1}{100} = \frac{1}{50};$$

Jeżeli jednak wyobrazimy sobie trójkąt o tej samej powierzchni, lecz o znacznej wielkości stosunku podstawy do wysokości, to z równania

$$\frac{dp}{p} = \frac{da}{h} + \frac{da}{a}$$

np., przy $h = 20\,d\,a,$ otrzymamy:

$$\frac{dp}{p} > \frac{1}{20}$$

dla rozpatrzonego wypadku, przy $da = 1{,}0\ m$, taki błąd w obliczeniu powierzchni zaszedłby dla △-a o $h < 20\ m$.

Możemy wyciągnąć jeszcze jeden wniosek ze wzoru:

$$\frac{dp}{p} = \frac{da}{a} + \frac{da}{h}$$

mianowicie: *względny błąd powierzchni jest tem mniejszy przy graficznem obliczeniu, im większe są wymiary wysokości i podstawy*, zatem przy podziale figury na △-y należy budować większe △-y, a więc mniejszą ich ilość (patrz wniosek 1-y).

4) Ze wzoru

$$dp = a\,dh + h\,da$$

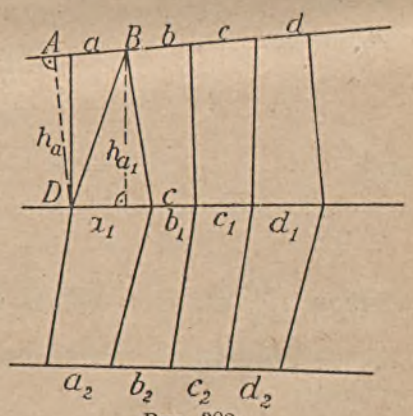
wynika, że dla otrzymania przy $a > h$ możliwie małego dp, należy dążyć do zmniejszenia dh. Jeżeli tedy $a > h$, t. j. mamy do czynienia z △-em o małej w stosunku do podstawy wysokości, wówczas wysokość należy określić dokładniej.

5) Wynika z powyższego, że ponieważ powierzchnie najprostszych figur są iloczynem dwu wymiarów, to w wypadku, gdy jeden z nich jest stosunkowo mały, należy dążyć do określania go nie z planu, a z pomiaru na gruncie.

Jeżeli, np., h jest takim wymiarem, wówczas będzie $dh = o$ w porównaniu z da, wziętem z planu, i wtedy

$$dp = h\,da,$$

w którym to wzorze h jest wielkością nieznaczną, zatem i dp będzie niewielkie.



Rys. 382.

Stąd niezmiernie ważny wniosek dla obliczenia powierzchni figur: z pomiaru w terenie należy zbierać mniejsze miary, wchodzące do obliczenia powierzchni figur.

Jeżeli więc mamy szereg *wąskich parcel*, to przy pomiarze linjowym, dla otrzymania odcinków $a_1\ b_1\ c_1\ d_1\ a\ b\ c\ d$, oznaczymy na linjach pomiarowych czy poligonowych miary bieżące w przecięciu się tych linij z granicami parcel.

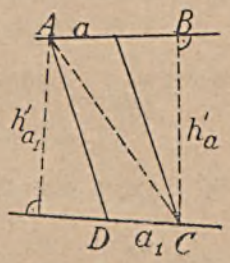
Wówczas powierzchnia P parceli $A\,B\,C\,D$ obliczona zostanie ze wzoru:

$$2\,P = 2\,p_{ABD} + 2\,p_{DCB} = a\,h_a + a_1\,h_{a1}$$

ponieważ $a < h_a$ i $a_1 < h_{a\,1}$, więc mniejsze miary a i a_1, wprowadzone (z różnicy odpowiednich miar bieżących w szkicowniku) do obliczeń, jako miary z gruntu, w wielkim stopniu podniosą dokładność obliczenia powierzchni, co byłoby niemożliwe przy czysto graficznem obliczeniu powierzchni.

Dla uniknięcia zaś grubych błędów, taki pomiar powierzchni, jak zresztą każdy inny, winien być wykonany po raz drugi, przytem i na podstawie innych danych: — tę samą figurę rozbijamy na dwa inne △-y: $A\,B\,C$ i $A\,D\,C$ drugą przekątną $A\,C$ czworoboku; wówczas do obliczeń wprowadzimy dwie inne wysokości h^1_a i $h^1_{a\,1}$ i stąd

$$2\,P = a\,h^1_a + a_1\,h^1_{a\,1}$$



Rys. 383.

Z dwu w ten sposób otrzymanych wyników wyprowadzamy średnią, gdy niema grubego błędu.

6) Wzór

$$d\,p = a\,d\,h + h\,d\,a$$

wskazuje, że błąd określenia powierzchni będzie mniejszy, jeżeli tak $d\,a$, jak i $d\,h$, będzie zmniejszone; dla zmniejszenia zaś błędów $d\,a$ i $d\,h$ określenia z planu odcinków, należy wykreślać plany w większej skali.

To też widzimy, że w wypadkach graficznego określania powierzchni parcele o większej jednostkowej wartości wykreślają się w większej skali — tak np., plany wiosek są wykreślane w skali $\frac{1}{4000}$, $\frac{1}{2000}$, miasteczek $\frac{1}{1000}$, miast $\frac{1}{500}$ lub $\frac{1}{250}$

Oczywiście prócz błędów w powierzchni, wchodzi w grę ilość szczegółów przy ustalaniu skali.

7) Zakładając we wzorze:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dh}{h} + \frac{da}{a}$$

$d\,h = d\,a = 0{,}1\ mm$ dla figury o danych a i h, na planie otrzymamy:

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{k} \text{ i } dp = \frac{p}{k}$$

Dla planu w skali $\frac{1}{M}$ błąd ten wyniesie $d\,P = M^2\,d\,p$, gdy powiększymy skalę n razy, to jest wykreślimy plan w skali

$$\frac{n}{M} = \frac{1}{\frac{M}{n}}$$

wówczas błąd tej powierzchni wyniesie

$$d\,P_1 = \frac{M^2}{n^2}\,dp$$

skąd wniosek, iż błąd graficznego obliczenia powierzchni zmniejsza się proporcjonalnie do kwadratu powiększenia skali planu.

Wykazuje to, że niema celu ustalać zbyt wielkich skal dla planów, gdyż przejście do planu o dwukrotnej skali zmniejsza czterokrotnie wielkość błędu powierzchni.

8. Dokładność pomiaru graficznego mniejszych figur waha się poniżej $\frac{1}{100}$, większych około $\frac{1}{200} - \frac{1}{300}$. We wzorze $\frac{dp}{p} = \frac{dh}{h} + \frac{da}{a}$:

1) dla małych figur załóżmy $a = h = 10$ *mm.*, 2) dla wielkich — 50 *mm.*, a dla $dh = da$ załóżmy 0,1 *mm.* Otrzymamy $\frac{dp}{p} = 2\,\frac{da}{a}$ dla małych: $\frac{dp}{p} = \frac{1}{50}$ i dla wielkich $\frac{1}{250}$.

§ 176. Błąd graficznego określenia powierzchni.

Dla ustalenia norm dla dokładności określenia powierzchni najprostszych figur należy przyjąć pewne założenia, poczynić odpowiednie wnioski teoretyczne i dostosować je do danych doświadczalnych.

Rozpatrzmy pewną figurę, której powierzchnię ustalamy z dwu wymiarów a i h, wziętych z planu.

$$p = ah$$

Nie znając prawdziwych błędów wymiarów a i h, winniśmy się oprzeć na ich średnich błędach, które drogą doświadczalną możemy ustalić. Oznaczmy je przez m_a i m_h

$$m_p^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)^2 m^2{}_a + \left(\frac{\partial p}{\partial h}\right)^2 m^2{}_h = h^2\, m^2{}_a + a^2\, m^2{}_h$$

Przy graficznem określaniu a i h możemy przyrównać m_a i m_h do pewnej wielkości c, ze względu na okoliczność, że różnica długości a i h nie wpływa na dokładność ich określenia z planu, gdy takie określenie nie jest połączone z podziałem a i h na niejednakową liczbę części; zakładając

$$m_a = m_h = c$$

otrzymujemy $\quad m_p{}^2 = c^2\,(a^2 + h^2); \qquad m_p = c\,\sqrt{a^2 + h^2}$

a więc błąd powierzchni prostokąta jest proporcjonalny do jego przekątnej.

Wielkości a i h mogą być zbliżone, ale ale też mogą się znacznie różnić; ponieważ jednak przy zbyt wielkiej różnicy pomiędzy a i h mniejszą miarę staramy się brać z gruntu, przeto istnieje pewna granica, przy której unikamy graficznego obliczenia powierzchni. Drugim skrajnym wypadkiem jest $a = h$.

Załóżmy, że z napotykanych najprostszych figur na planach za

przeciętny stosunek dwu boków a i h możemy przyjąć pewne n, tak więc $\frac{a}{h} = n$ (lub też przyjąć kilka danych dla n, np., $n = 1$, $n = 5$, $n = 20$)

$$a = \frac{p}{h} = \frac{\frac{p}{a}}{n} = \frac{p\,n}{a}$$

skąd

$$a^2 = p\,n;\ h = \frac{a}{n} = \frac{\sqrt{p\,n}}{n}$$

skąd

$$h^2 = \frac{p}{n}$$

więc

$$m^2_p = c^2 \left(p\,n + \frac{p}{n}\right) = c^2 p \left(n + \frac{1}{n}\right) = c^2 p\,\frac{n^2 + 1}{n}$$

skąd

$$\underline{m_p = \pm c\ \sqrt{p}\ \sqrt{\frac{n^2 + 1}{n}} = \pm c\ \sqrt{p}\ k}$$

Stąd wniosek, że średni błąd powierzchni jest proporcjonalny do drugiego pierwiastka z powierzchni.

Określmy wielkość spółczynnika

$$k = \sqrt{\frac{n^2 + 1}{n}}$$

W najdogodniejszym wypadku

$$n = 1;\ k = \sqrt{2} = 1{,}4$$

więc

$$m_p = \pm\ 1{,}4\ c\sqrt{p}$$

w stosunkowo niedogodnych wypadkach, gdy

$$n = 10{,}20,\ k = \sqrt{n}$$

i wówczas

$$\underline{m_p = \pm\ c\ \sqrt{n}\ \sqrt{p}}$$

Ponieważ

$$c = \pm\ 0{,}1\ mm,$$

przeto

$$1{,}4\ c = 0{,}14\ mm$$

ale, np., przy

$$n = 16$$

będzie

$$c\sqrt{n} = 0{,}4\ mm.$$

Dla średnich warunków spółczynnik k przy $\sqrt{p}$ możemy przyrównać do 0,2 *mm*;

będzie wówczas

$$m_p = \pm 0{,}2 \sqrt{p}\ mm^2$$

co dla skali

1 : 1000
1 : 2000
1 : 4000

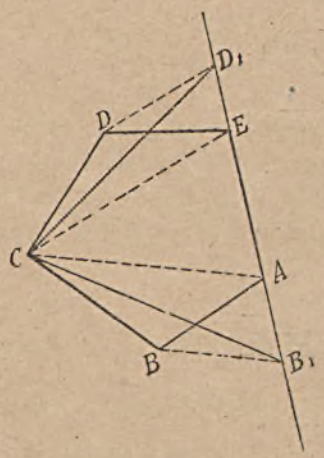
wynosi przy powierzchni P

$$m_P = \pm 0{,}2 \sqrt{P}\ m^2$$
$$m_P = \pm 0{,}4 \sqrt{P}\ m^2$$
$$m_P = \pm 0{,}8 \sqrt{P}\ m^2$$

§ 177. Zamiana figur.

Zamiana figur na trójkąty polega na przekształceniu figury o danej powierzchni na Δ-y o tej samej powierzchni. Przypuśćmy, że przystępujemy do zamiany na trójkąt figury $ABCDE$. Za podstawę obieramy przedłużony bok AE, za wierzchołek Δ-a wierzchołek, najdalej od podstawy odległy.

W wypadku figur wydłużonych za podstawę obierzemy jeden z boków KK, lub LL, gdyż inne rozwiązanie dałoby równoważny Δ o małej wysokości. Zamiana polega na kolejnem przesuwaniu, poczynając od podstawy AE, kolejnych wierzchołków figury na podstawę zapomocą równo-



Rys. 384.



Rys. 385.

ległych (np. BB_1) do prostych, łączących poprzedni punkt figury na podstawie z następnym (np. CA). W ten sposób wierzchołek B przesunie się do B_1 i, zamiast łamanej ABC, otrzymujemy prostą CB_1, tworzącą z CA tę samą powierzchnię, co i ABC,

gdyż

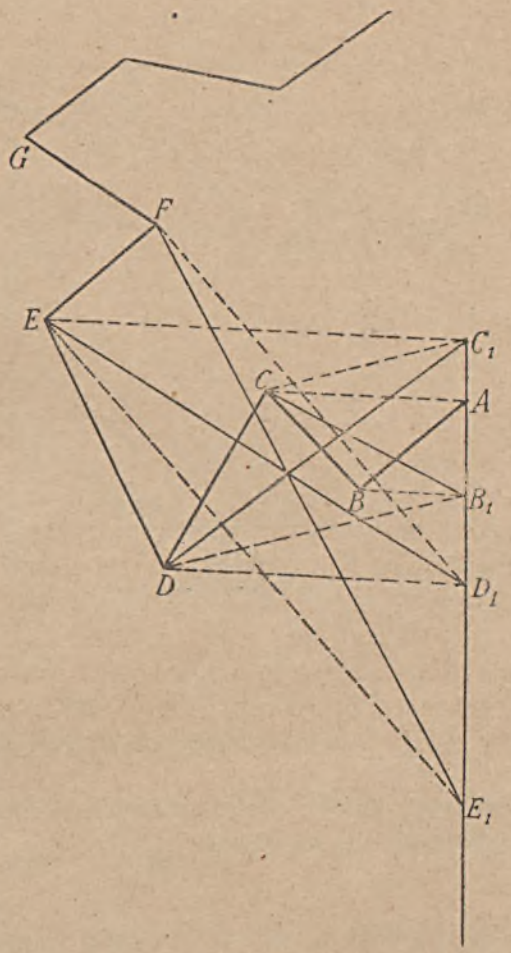
$$P_{ABC} \overset{w}{=} P_{AB_1C}$$

jako Δ-y o wspólnej podstawie AC i jednakowej wysokości ($BB_1 \parallel CA$).

Postępując w taki sposób z figurą $ABCDEFG$ ... (rys. 386)

punkt B przesuniemy do $B_1 \parallel AC$
punkt C „ „ $C_1 \parallel B_1D$
punkt D „ „ $D_1 \parallel C_1E$
punkt E „ „ $E_1 \parallel D_1F$
i t. d.

w ten sposób prosta E_1F z prostą FA dają Δ o powierzchni równoważnej z powierzchnią figury, zawartej między prostą AF i łamaną $ABCDEF$.



Rys. 386.

Przy takiej zamianie dobrze mieć igiełkę, osadzoną tępszym końcem w koreczku. Ustawiając igiełkę w B, przesuwamy bok ekierki równolegle (zapomocą drugiej ekierki) od położenia AC do zetknięcia się z igiełką, poczem przestawiamy ją na podstawę w B_1 stycznie do tego samego boku ekierki. Ekierkę I-ą układamy wzdłuż B_1D, igiełkę przestawiamy do C i ekierkę przesuwamy $\parallel$-e do zetknięcia się z igiełką, którą przenosimy na podstawę stycznie do tego samego boku ekierki do p. C_1. Znów I-ą ekierkę ustawiamy do położenia C_1E, poczem igiełkę przestawiamy do punktu D, dosuwamy $\parallel$-e do niej ekierkę i przestawiamy igiełkę na podstawę do punktu D_1 i t. d., i t. d. W taki sposób przy użyciu igiełki unikamy konieczności używania ołówka do kreślenia równoległych odcinków. Dla sprawdzenia zamiany obieramy drugą podstawę i znów budujemy równoważny Δ. Powierzchnie obydwu Δ-ów nie powinny się różnić więcej, niż o dopuszczalną różnicę dwukrotnego obliczenia.

§ 178. Zamiana na Δ-y i trapezy.

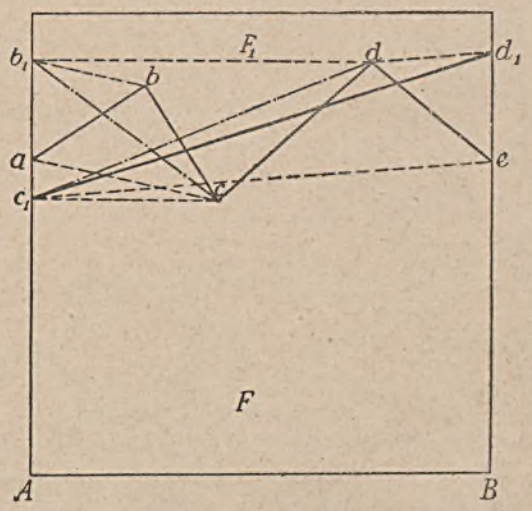
Gdy na planie wykreślona jest sieć kwadratów, na podstawie której wkreślono do planu poszczególne punkty, wówczas, znając powierzchnię każdego kwadratu, możemy obliczyć ilość całkowicie wewnątrz figury położonych kwadratów, zaś części niezupełnych kwadratów, wchodzące w skład danej figury, zamienimy bądź na Δ-y, bądź na trapezy.

Przypuśćmy, że *abcde* wewnątrz danego kwadratu ogranicza powierzchnię figury.

Punkt b przesuwamy $\parallel$-e do ac do punktu b_1

„ c „ „ „ „ $b_1 d$ „ „ c_1

„ d „ „ „ „ $c_1 e$ „ „ d_1



Rys. 387.

W ten sposób prosta $c_1 d_1$ oddzieliła od kwadratu powierzchnię $c_1 d_1 B A$, równoważną *abcde BA*. Dla skontrolowania rachunku linję *abcde* zastępujemy po raz drugi prostą, przechodzącą, np., przez punkt *e*. Obliczając dwukrotnie zamienioną powierzchnię figury, za ostateczny wynik bierzemy średnią arytmetyczną obydwu F_1 i F_2 wyników.

Jeszcze dokładniejszy wynik otrzymamy, jeżeli w obydwu wypadkach obliczymy dopełnienia F'_1 i F'_2 zamienionej figury do całego kwadratu; oznaczając powierzchnię kwadratu przez Q, powinniśmy otrzymać:

$$F_1 + F'_1 = Q$$
$$F_2 + F'_2 = Q$$

wskutek jednak nieuniknionych błędów, otrzymamy w obydwu wypadkach odchyłki v_1 i v_2, równe

$$v_1 = Q - (F_1 + F'_1)$$
$$v_2 = Q - (F_2 + F'_2)$$

które z ich znakiem dodamy odpowiednio do F_1 i F_2.

Otrzymamy dwa wyniki $F_1 + \frac{v_1}{2}$ oraz $F_2 + \frac{v_2}{2}$.

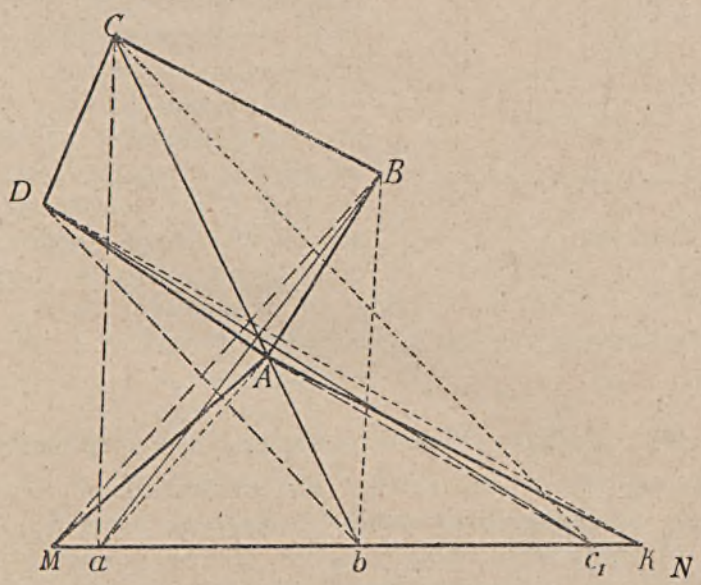
Średnia jest ostatecznym wynikiem.

§ 179. Zamiana figur metodą Zaręby.

Jan Zaręba, geometra przysięgły, skonstruował przed 1829 planimetr (przyrząd, służący do obliczenia powierzchni figur). Jakkolwiek sam przyrząd wyszedł obecnie z użycia, to jednak zasady, o jakie oparł Zaręba swój wynalazek, mają zastosowanie przy graficznem obliczaniu powierzchni figur prostolinjowych.

Zaręba wprowadził do miernictwa: 1) zamianę figur na trójkąt o podstawie, leżącej nazewnątrz figury, i o wierzchołku, będącym wierzchołkiem danej figury, oraz 2) zamianę figur na trójkąt o założonej wysokości, leżący nazewnątrz danej figury.

Przypuśćmy, że figurę $A\,B\,C\,D$ zamieniamy na trójkąt o wierzchołku A i podstawie, leżącej na MN.



Rys. 388.

Dowolny punkt M prostej MN łączymy z punktem A.

Ponieważ

$$P_{ABCD} = P_{MABCDM} - P_{MDA}$$

więc zamieńmy obydwa wyrazy w prawej części równania na figury z podstawami, leżącemi na NM.

$P_{MABCDM} = P_{MAB} + P_{MBC} + P_{MCD}$ zaś $P_{MAB} = P_{MaB}$ gdyż $Aa \parallel MB$

lecz

$P_{MAB} + P_{MBC} = P_{MaB} + P_{MBC} = P_{MbC}$ „ $Bb \parallel aC$

$P_{MAB} + P_{MBC} + P_{MCD} = P_{MbC} + P_{MCD} = P_{MC_1D}$ „ $Cc_1 \parallel Db$

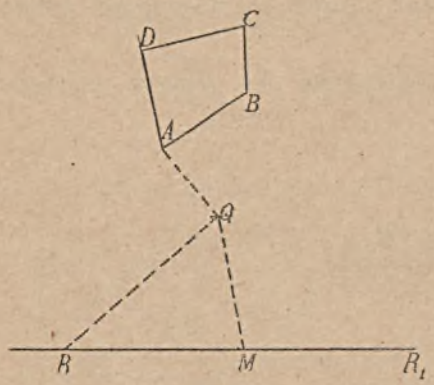
stąd

$$P_{ABCD} = P_{MC_1D} - P_{MAD} = P_{MADC_1}$$

lecz

$$P_{MADC_1} = P_{MAC_1} + P_{AC_1D} = P_{MAC_1} + P_{AC_1K} = P_{MAK}$$

Prostą $M A$, łączącą p. M podstawy z wierzchołkiem A figury, Zaręba nazwał „powierzchnią niknącą", t. j. równą zeru; figurę $A B C D$ Zaręba zamieniał na trójkąt, jako figurę $M A B C D A M$.



Rys. 389.

Dalsze ułatwienie wprowadził Zaręba, wprowadzając „powierzchnię niknącą" w postaci łamanej. Mianowicie, przy zamianie figury $A B C D$ na trójkąt, obieramy podstawę trójkąta na RR_1, wykreślonej poza figurą $A B C D$. Za wierzchołek trójkąta obieramy punkt Q, odległy o 200 jednostek od RR_1. Obierając na podstawie punkt R, wykreślamy proste RQ i QA, otrzymując w ten sposób „powierzchnię niknącą" $R Q A$; wówczas figurę $A B C D$, traktowaną jako $R Q A B C D A Q R$, zamieniamy na równoważny trójkąt $R M Q$, jak powyżej, przenosząc zapomocą równoległych punkty $Q A B C$ i D na $R R$.

Stąd $P = 100\ R M$

§ 180. Graficzne obliczenie powierzchni figur krzywolinjowych.

Przy obliczaniu powierzchni szczegółów, ograniczonych krzywemi, lub łamanemi, dogodnie jest rozbijać figurę na paski trapezowe o stałej szerckości, równej pewnej okrągłej liczbie metrów w skali planu.

Używane są w tym celu przyrządy, zwane harfami (lub planimetrami nitkowemi), oraz paletki.

Harfa jest czworokątną ramą na dwu przeciwległych brzegach której naciągnięte są struny w stałych odstępach, tworzące układ równoległych prostych.

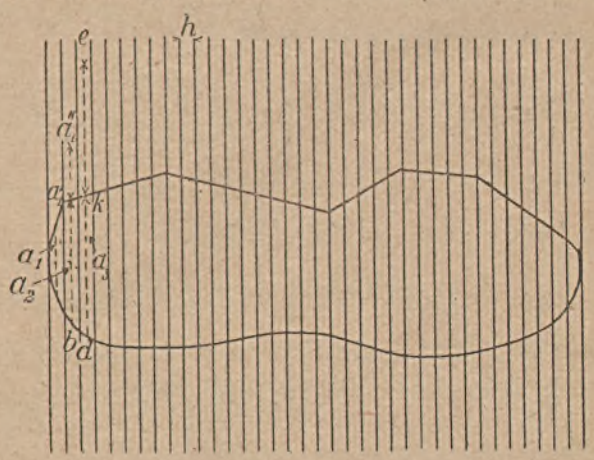
Paletka jest cienką płytką celuloidową z wyrzniętym na niej układem równoległych prostych. Często taki układ równoległych o stałym odstępie wykreśla się na kalce (rys. 390).

Użycie tego rodzaju przyrządów polega na ułożeniu ich na danej figurze w taki sposób, by jeden, lub, o ile to jest dogodne, obydwa krańce figury znalazły się na równoległych prostych. Jeżeli odstęp między równoległemi równy jest h, średnie zaś trapezów są równe $a_1\ a_2 \ldots a_n$ wówczas powierzchnia

$$P = h\ (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)$$

lub symbolicznie:

$$\underline{P = h \Sigma a}$$

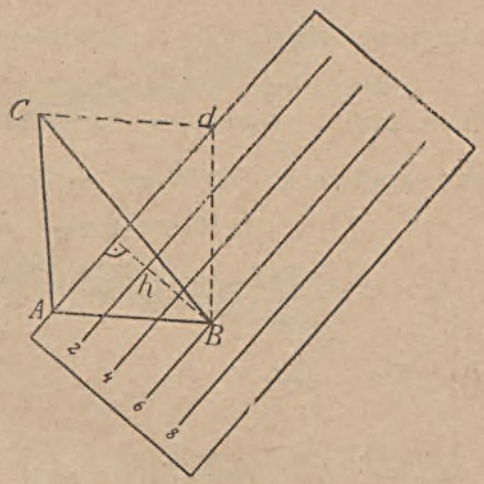


Rys. 390.

Aby nie liczyć poszczególnych a, sumujemy je zapomocą cyrkla, odpowiednio biorąc w rozpięcie cyrkla a_1, przestawiając go do położenia $a'_1\ a''_1$ i zamieniając krok cyrkla na $a''_1\ b$, dalej na $ed = ek + a_3 = a''_1\ b + a_3$ i t. d.

Zwykle odstępy między równoległemi nie przekraczają $5mm$, co, np., dla skali 1 : 1000 odpowiada $5m$.

Przy obliczeniu powierzchni Δ-ów lub figur, dających się rozbić na Δ-y, używa się przyrząd, zwany agrometrem.



Rys. 391.

Agrometr w najdogodniejszej postaci jest płytką celuloidową z podziałką na ściętym brzegu i z kilku wyciętemi prostemi o znanych odległościach od brzegu.

Odległości te wynoszą 2, 4, 6, 8 cm.

Jeżeli przez wierzchołek Δ-a wykreślimy prostą, ∥-ą do podstawy trójkąta $A\ B\ C$ (powierzchnię którego określamy) i przyłożymy agrometr do podstawy Δ-a w taki sposób, by ścięty brzeg i jedna z równoległych agrometru przechodziły przez końce podstawy Δ-a, wówczas

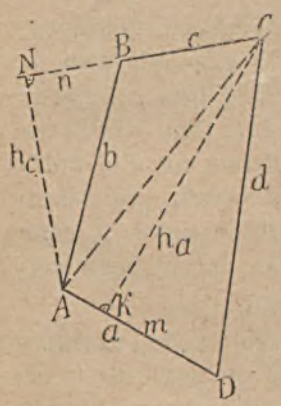
$$P_{ABC} = P_{ABd} = \frac{Ad \cdot h}{2}$$

$A\ d$ odczytamy z podziałki, h jest znane; jeżeli $h = 2\ cm$, wówczas

$$p = A\ d\ cm^2$$

§ 181. Obliczenie powierzchni czworokątów o danych bokach.

W wypadku, gdy na planie wykreślono czworokąt, którego boki są znane, gdyż wyniki pomiaru ich długości są opisane na planie, względnie w szkicu polowym, wówczas powierzchnię takiej parceli możemy określić z wielką ścisłością.



Rys. 392.

Przekątna $A\ C$ dzieli figurę na dwa △-y: $A\ B\ C$ i $A\ C\ D$

$$2p_{ABCD} = 2p_{ABC} + 2p_{ACD} = c\,h_c + a\,h_a$$

Ponieważ a i c są dane, więc określimy h_c i h_a.

Przy znacznej dokładności rachunku określimy z cyrkla i podziałki $DK = m$ i obliczymy

$$h_a = \sqrt{d^2 - m^2}$$

oraz

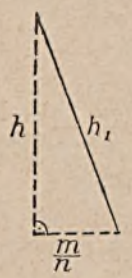
$$h_c = \sqrt{b^2 - n^2}$$

W ten sposób określone h_a i h_c są bardzo dokładnemi wielkościami, gdyż błąd graficznego określenia m, równy $\frac{1}{10}\,m$ przy $m = h$, wpłynie na odchylenie obliczanego h od właściwej wielkości nie większe niż $\frac{1}{200}\,h$.

Wobec tego zaś, że błąd określenia m jest znacznie mniejszy od 0,1 m, przeto i dokładność określenia h jest znacznie wyższa. Przyjmijmy błąd graficznego określenia wielkości m za $\frac{1}{n}\,m$.

Wskutek tego błędu zamiast h obliczymy

$$h_1 = \left(h^2 + \frac{m^2}{n^2}\right)^{1/2}$$



Rys. 393.

przy $h = m$

$$h_1 = h\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = h\left(1 + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{8n^4} \ldots\right)$$

Załóżmy $n = 20$

$$h_1 = h + \frac{h}{800} - \frac{h}{128000}$$

Wówczas błąd obliczenia h możemy przyrównać do $\frac{h}{800}$.

§ 182. Mechaniczne obliczenie powierzchni.

Przyrządy, umożliwiające obliczenie powierzchni figur, ograniczonych prostemi lub krzywemi, nazywamy planimetrami.

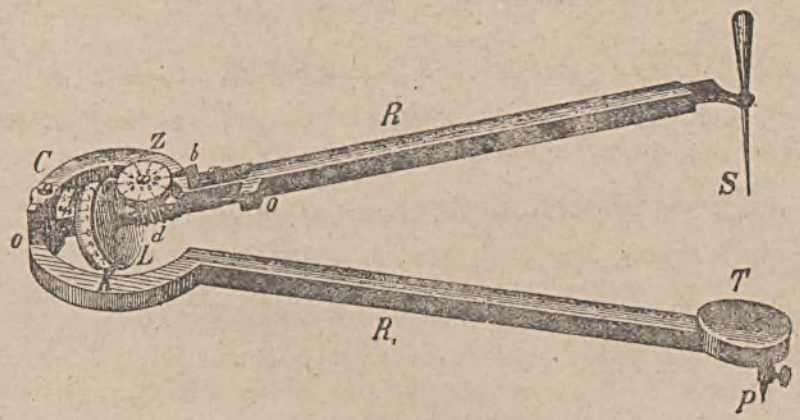
Rozpatrzmy planimetry Coradiego (Zurych).

Planimetry biegunowe Coradiego:

Zwykły planimetr biegunowy składa się z dwu ramion: wodzącego R i biegunowego R_1, połączonych zawiasem C, dokoła którego obydwa ramiona mogą się obracać. Ramię biegunowe zakończone jest igłą p i ciężarkiem T; ramię wodzące—zaostrzonym sztyfcikiem S. W ramieniu wodzącem osadzona jest oś oo, przy obrocie której obraca się osadzone na niej kółko całkujące K. Do kółka całkującego przytwierdzony jest bęben, podzielony na 100 części o średnicy nieco mniejszej od kółka całkującego. Z ramą przy zawiasie C połączony jest nieruchomy nonjusz kółka całkującego przy zawiasie C. Oś oo jest równoległa do ramienia wodzącego.

Obrót osi oo zapomocą śruby bez końca d i zazębionego liczydła z wprawia liczydło w ruch obrotowy przy posuwaniu się po papierze kółka całkującego. Liczydło podzielone jest na 10 części; indeks b przy liczydle

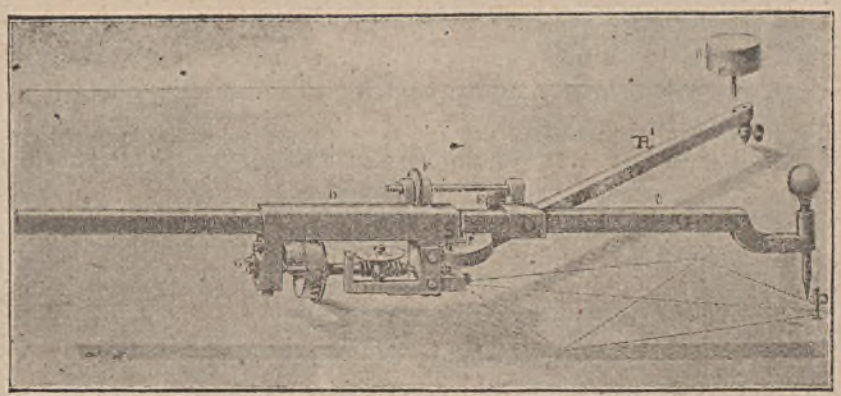
daje możność obliczania podziałek liczydła. Pełny obrót kółka całkującego odpowiada obrotowi liczydła o jedną jego podziałkę. Całkowity obrót liczydła odpowiada 10 obrotom kółka całka całkującego; ponieważ zaś dokładność nonjuszu wynosi 0,1 podziałki kółka, podzielonego na 100 części, prze-



Rys. 394.

to całkowity obrót liczydła odpowiada $10 \times 100 \times 10 = 10000$ podziałek nonjuszu.

Przy użyciu tego planimetru biegun p wciska się w plan, zaś wodzidło S przesuwamy wzdłuż obwodu danej figury, odczytując z licznika kółka i nonjuszu liczbę, odpowiadającą początkowemu ustawieniu wodzidła na obwodzie figury, oraz liczbę, odpowiadającą temu samemu położeniu wodzidła S po przesunięciu wzdłuż obwodu całej figury i powrocie do



Rys. 395.

pierwotnego położenia. Później określimy zależność funkcyjną, zachodzącą między różnicą tych odczytów a wielkością powierzchni figury.

W rozpatrzonym typie planimetru długość obydwu ramion jest wielkością stałą.

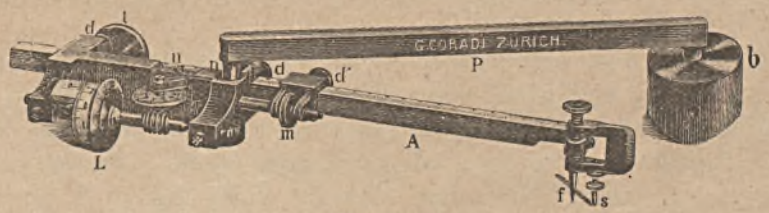
Ulepszony typ takiego planimetru posiada ramię wodzące o zmiennej długości. Ramię wodzące jest połączone przegubem w S z ramieniem

biegunowem; tak więc ramię wodzące może się obracać po łuku koła dokoła S podobnie, jak w typie pierwotnym.

Punkt zaś S poruszać się może dokoła bieguna p po łuku koła o promieniu R_1, równym długości ramienia biegunowego. Ramię wodzące W może się wysuwać z pochwy D, złączonej z pochewką D_1, obrotem leniwki, działającej na ramię wodzące po sprzężeniu z pochewką D_1 zapomocą zacisku E. Wysuwając ramię wodzące z pochwy, zwiększamy liczoną od przegubu S do ostrza wodzącego p długość ramienia wodzącego, wskutek czego możemy przy tem samem położeniu bieguna przesuwać p wzdłuż figur o większych obwodach.

Kółko całkujące może się znajdować nietylko na przedłużeniu ramienia wodzącego $w = ps$, ale także na niem, między p i s.

W obydwu rozpatrzonych typach planimetru o stałem i zmiennem ramieniu wodzącem przy tem samem położeniu bieguna możemy obwodzić figurę przy położeniu ramienia wodzącego po jednej stronie ramienia biegunowego, wskutek czego wpływy wszystkich błędów konstrukcji przyrządu obciążają wynik z tym samym znakiem, niezależnie od ilości obwodzeń figury przy danem położeniu bieguna. Teorja przyrządu opiera się na założeniu, że 1) oś obrotu kółka całkującego jest równoległa do ramienia wo-



Rys. 396.

dzącego (ostrze wodzące—przegub) i 2) płaszczyzna kółka całkującego jest prostopadła do osi obrotu. Ponieważ idealne zachowanie tych warunków w konstrukcji przyrządu jest niemożliwe, przeto Coradi udoskonalił poprzednie typy planimetrów, konstruując t. zw. planimetr biegunowy kompensacyjny, umożliwiający przy tem samem położeniu bieguna ustawianie ramienia wodzącego po obydwu stronach biegunowego.

Obecnie z biegunowych planimetrów używane są prawie wyłącznie kompensacyjne (rys. 396).

§ 183. Planimetr biegunowy kompensacyjny.

Planimetr biegunowy kompensacyjny składa się z dwu oddzielnych ramion — biegunowego P i wodzącego W.

Ramię wodzące przesuwa się w pochwie D (długość ramienia może się więc zmieniać), zakończone jest z jednej strony ostrzem f, zwanem wodzidłem, oraz podpórką s, z drugiej zaś strony posiada jako punkty oparcia kółko całkujące L oraz kółko podpórkowe l. W ten sposób w każdem położeniu ramię wodzące zachowuje równowagę. Ramię biegunowe P z jednej strony zakończone jest ciężarkiem b z wysuniętą nieco pod nim igiełką, ustawianą na planie i grającą rolę bieguna; z drugiej strony ramię biegu-

nowe posiada wysunięty ku dołowi trzpień, zakończony starannie wypolerowaną stalową kulką, wkładaną w tulejkę ramy D ramienia wodzącego, z wydrążonem w dole tulejki łożyskiem kulkowem, które tworzy oś obrotu ramienia wodzącego.

Zacisk d' i leniwka m umożliwiają mikrometryczne przesuwanie ramienia wodzącego w pochwie $D\ C$. Zwolnienie zacisku d umożliwia zmiany długości ramienia wodzącego od 33 do 166 mm.

Kółko całkujące z nonjuszem i licznikiem może znajdować się na przedłużeniu ramienia wodzącego $D\ f$, jak również między ostrzem f i osią D.



Rys. 397.

Załączony rysunek przedstawia planimetr tego ostatniego typu, w którym skala zmian długości ramienia wodzącego jest bardziej ograniczona, niż w pierwszym typie kompensacyjnego planimetru. O ile w pierwszym typie zapomocą nonjuszu n możemy ściśle ustawiać ramię wodzące na założoną długość, o tyle w drugim typie (rys. 397) takie ustawienie jest mniej dokładne w braku nonjuszu i leniwki.

§ 184. Teorja planimetru biegunowego.

Ramię wodzące planimetru przy obwodzeniu figur podlega następującym elementarnym przesunięciom:

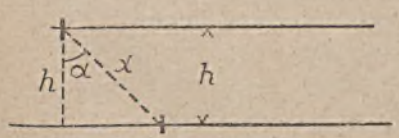
1) w linji ramienia wodzącego,

2) równolegle do siebie w kierunku prostopadłej do ramienia wodzącego,

3) równolegle do siebie w kierunku ukośnym,

4) dokoła osi planimetru.

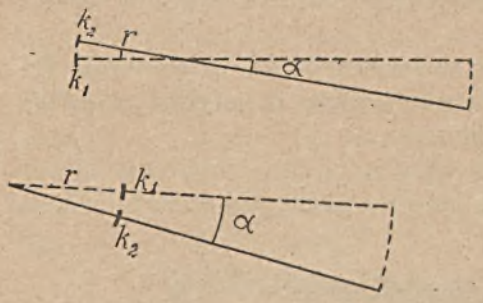
Kółko całkujące w 1-ym wypadku, jako $\perp$-e do ramienia wodzącego, będzie się ślizgać, nie obracając się zupełnie, w 2-im wypadku potoczy się, obracając się o łuk, równy długości prostopadłej do ramienia wodzącego, o którą to ostatnie zostało przesunięte; w trzecim wypadku kółko przesunie się o pewien odcinek x, lecz obróci się tylko o łuk $h = x \cos \alpha$, gdzie α jest kątem między płaszczyzną kółka całkującego a kierunkiem przesuwania się ramienia wodzącego, i w czwartym wypadku:



Rys. 398.

a) gdy kółko leży na przedłużeniu ramienia wodzącego i odległość kółka od osi planimetru wynosi r, kąt zaś obrotu i łuk o promieniu jednostkowym, odpowiadający temu kątowi, nazwiemy α, wówczas kółko opisze łuk $\smile k_1 k_2 = r\alpha$ i po-

nieważ przesunięcie kółka idzie w kierunku odwrotnym do ruchu wodzidła, przeto łuk $r\alpha$ oznaczamy jako ujemny;



Rys. 399.

b) gdy kółko leży pomiędzy wodzidłem a osią planimetru, wówczas obróci się o dodatni łuk $k_1\ k_2 = r\alpha$. Jakiekolwiek inne przesunięcia ramienia wodzącego są oczywiście układem tych czterech elementarnych przesunięć. Jeżeli oznaczymy b długość łuku na kółku całkującem, odpowiadającego $\frac{1}{1000}$ obwodu kółka (dokładność odczytu z nonjuszu przy bębenku), wówczas obrotowi kółka o łuk h czy $r\alpha$ odpowie zmiana odczytu z bębenka

$$\text{równa } \frac{h}{b} \text{ czy } \frac{r\alpha}{b}.$$

Ustalmy zależności, zachodzące pomiędzy powierzchnią figury a stopniem dokonanego przy obwodzie figury obrotu kółka całkującego.

Zależności te będą różne przy ustawieniu bieguna planimetru wewnątrz i nazewnątrz obwodzonej figury.

Biegun planimetru wewnątrz figury.

Przypuśćmy, że przy biegunie, ustawionym w punkcie B, obwodzimy, zaczynając od punktu A, granicę figury $A_1\ A_2\ A_3\ \ldots\ A_n\ A$, oraz załóżmy, że, utrzymując ramię wodzące w powietrzu, ustawiliśmy kółko całkujące na odczyt zerowy; tak więc, gdy ostrze wodzące znajduje się w A, odczyt, wzięty z kółka, jest zero.

Przypuśćmy, że na nieskończenie małej części $A_1\ A_2$ obwodu figury przesunięcie ostrza od A do A_1 powoduje równoległe do siebie przesunięcie ramienia wodzącego o wielkość h. Oś planimetru D zatacza dokoła B łuk koła o promieniu, równym ramieniu biegunowemu; założenie nasze jest więc równoznaczne z założeniem, że $A\ A_1 \parallel D_1\ D_2$. Oczywiście takie przesunięcie zachodzi na bardzo małej części obwodu, poczem nastąpi innego rodzaju elementarne przesunięcie, mianowicie przy przesunięciu wodzidła A_1 do A_1 ma miejsce jego obrót dokoła D_2, po którym znów nastąpi równoległe przesunięcie i t. d.

Planimetr przy przejściu wodzidła od A_1 po A_2 opisał więc:

1) powierzchnię p_3 wycinka kołowego $B\ D_1\ D_2$,
2) powierzchnię p_1 równoległoboku $A\ A_1\ D_2\ D_1$ oraz
3) powierzchnię p_2 wycinka kołowego $A_1\ A_2\ D_2$.

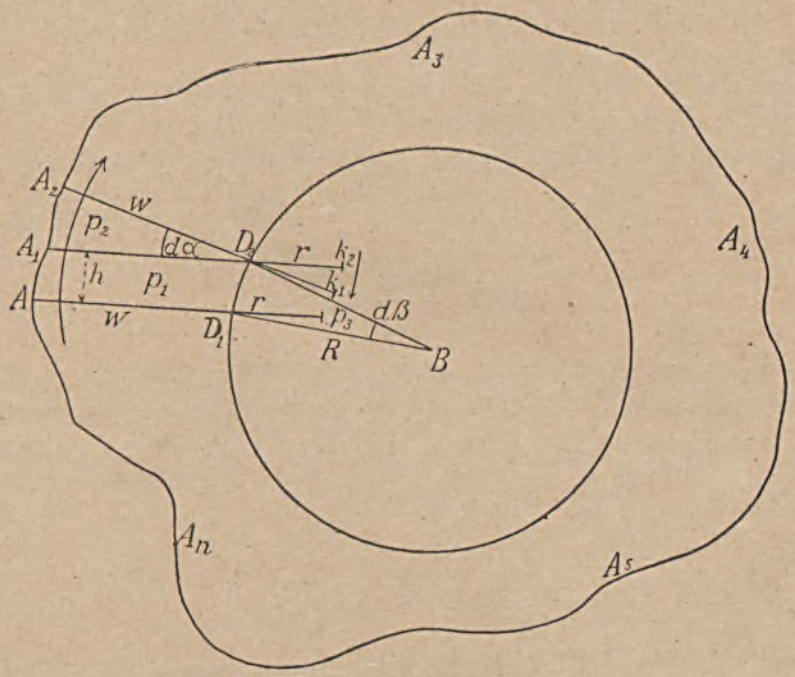
Oznaczmy ramię wodzące literą W, biegunowe R, odległość kółka całkującego od osi planimetru literą r, łuki o jednostkowym promieniu, odpowiadające kątowi $D_2\ B\ D_1$, przez $d\ \beta$ i kątowi $A_1\ A_2\ D_2$ przez $d\ \alpha$.

Wówczas

$$p_1 = w\,h$$

$$p_2 = \frac{w^2\,d\alpha}{2}$$

$$p_3 = \frac{R^2\,d\beta}{2}$$



Rys. 400.

Gdy ostrze wodzące po obwodzie całej figury wróci do A, wtedy powierzchnię P całej figury otrzymamy, sumując nieskończenie wiele nieskończenie małych p_1 p_2 i p_3, mianowicie

$$P = \Sigma p_1 + \Sigma p_2 + \Sigma p_3$$

lecz

$$\Sigma p_1 = \Sigma w\,h = w\,\Sigma h$$

$$\Sigma p_2 = \Sigma\,\frac{w^2\,d\alpha}{2} = \frac{w^2}{2}\,\Sigma\,d\alpha$$

$$\Sigma p_3 = \Sigma\,\frac{R^2\,d\beta}{2} = \frac{R^2}{2}\,\Sigma\,d\beta$$

Ale po dokonaniu obwodzenia całej figury: $\Sigma\,d\beta = 2\,\pi$, oraz ponieważ ramię wodzące wraca do pierwotnego położenia, przeto i $\Sigma\,d\alpha = 2\,\pi$

więc

$$P = w\Sigma h + \frac{w^2}{2}\,2\pi + \frac{R^2}{2}\,2\pi$$

a stąd

$$\underline{P = w\Sigma h + \pi w^2 + \pi R^2} \qquad (1)$$

Przypuśćmy, że kółko całkujące obróciło się o N podziałek (tysięcznych obwodu) bębenka. Wielkość N odczytamy po dokonaniu obwodzenia figury bezpośrednio, gdy początkowy odczyt w A_1 był równy zeru, względnie obliczymy, jako różnicę odczytów po i przed oprowadzeniem wodzidła wzdłuż obwodu figury.

W ostatniem równaniu Σh jest wielkością nieznaną; jeżeli wyrazimy Σh przez znane N, wówczas określimy P.

Przesunięcie wodzidła z A do A_1 wpłynie na obrócenie kółka całkującego o $\frac{h}{b}$ podziałek; przesunięcie z A_1 do A_2 obróci kółko o łuk

$$k_1\,k_2 = -\frac{r\,d\alpha}{b}$$

gdyż 1) kółko obróci się w kierunku odwrotnym do przesunięcia wodzidła i 2) jeżeli z D_2 zatoczymy łuk o jednostkowym promieniu, to długośc tego łuku między ramionami $D_2\,k_1$ i $D_2\,k_2$ wyniesie $d\alpha$, będzie przeto

$$k_2\,k_1 : d\alpha = r : 1$$

skąd

$$k_2\,k_1 = r\,d\alpha$$

Całkowity zaś obrót kółka po oprowadzeniu wodzidła wzdłuż obwodu całej figury równa się sumie elementarnych obrotów typu $A\,A_1$ i $A_1\,A_2$, tak więc:

$$N = \Sigma\frac{h}{b} - \Sigma\frac{r\,d\alpha}{b}$$

stąd

$$Nb = \Sigma h - r\,\Sigma\,d\alpha$$

ponieważ zaś

$$\Sigma\,d\alpha = 2\pi$$

więc

$$Nb = \Sigma h - 2\pi r$$

i wreszcie

$$\underline{\Sigma h = Nb + 2\pi r} \qquad (2)$$

Podstawiając ten wyraz do (1) równania, otrzymamy:

$$P = Nbw + 2\pi r w + \pi w^2 + \pi R^2$$

a stąd:

$$P = N b w + \pi (w^2 + R^2 + 2 r w)$$

Iloczyn $b w$ podziałki bębenka przez długość w ramienia wodzącego nazywamy wartością podziałki planimetru i oznaczamy literą p

tak więc

$$b w = p$$

wyraz zaś

$$\pi (w^2 + R^2 + 2 r w) = C$$

nazywamy, jako składający się ze znanych wielkości, stałą C planimetru. W taki sposób wzór na powierzchnię figury z planimetru w wypadku, gdy biegun ustawiony jest wewnątrz figury, będzie:

$$\underline{P = N p + C} \qquad (3)$$

U w a g a I:

W planimetrze, w którym kółko znajduje się pomiędzy wodzidłem a osią planimetru, obrót kółka w elemencie p_2 jest postępowy, tak że:

$$N = \Sigma \frac{h}{b} + \Sigma \frac{r d \alpha}{b}$$

skąd

$$\Sigma h = N b - 2 \pi r$$

i

$$C = \pi (w^2 + R^2 - 2 w r)$$

Ogólnym więc wzorem na C jest

$$C = \pi (w^2 + R^2 \pm 2 r w)$$

przyczem + odpowiada całkującemu kółku, umieszczonemu na przedłużeniu ramienia wodzącego, znak — odpowiada planimetrowi, w którym całkujące kółko znajduje się między wodzidłem a osią planimetru.

U w a g a II.

Wzór $$P = Np + C$$

w wypadku odczytów n_1 i n_2 z kółka przed i po oprowadzeniu wodzidła wzdłuż obwodu figury zamieni się w

$$P = (n_2 - n_1) p + C$$

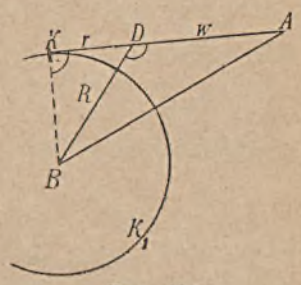
a jeżeli oznaczymy $$C = q p,$$

wówczas

$$\underline{P = (n_2 - n_1 + q) p} \qquad (4)$$

§ 185. Geometryczna interpretacja stałej C planimetru.

Jeżeli przedstawimy sobie takie położenie kółka całkującego, że przedłużenie jego płaszczyzny przechodzi przez biegun B planimetru, wówczas, oznaczając literą D oś planimetru, A—wodzidła, z $\triangle$-a ADB napiszemy:



Rys. 401.

$$AB^2 = W^2 + R^2 + 2rw$$

dla kółka na przedłużeniu AD i

$$AB^2 = W^2 + R^2 - 2rw$$

dla kółka między A i D.

Więc $$C = \pi AB^2$$

to znaczy, że:

stała C planimetru jest powierzchnią koła, którego promień równa się odległości bieguna od wodzidła w tem położeniu planimetru, gdy przedłużenie płaszczyzny kółka przechodzi przez biegun.

Jeżeli, nie zmieniając wielkości kąta prostego BKA, obrócimy cały planimetr dokoła B, wówczas kółko, będąc $\perp$-e do ramienia wodzącego, ślizgać się będzie po kole kk_1: inaczej mówiąc, stała C planimetru jest powierzchnią takiego koła (o promieniu BA), oprowadzenie po którem wodzidła pociąga za sobą tylko ślizganie się kółka.

Takie koło nazywamy obojętnem lub głównem.

Jeżeli obwodzimy figurę przy umieszczeniu bieguna wewnątrz i jeżeli we wzorze

$$P = Np + C$$

dla danej figury $$P < C$$

to Np powinno być ujemne, t. j. $P = C - Np$, co ma miejsce przy ujemnem N we wzorze $P = Np + C$, czyli wtedy, gdy przy przesuwaniu wodzidła w kierunku ruchu wskazówki zegara kółko całkujące obraca się w kierunku zmniejszających się odczytów na bębenku, wtedy bowiem odczyt n_2 w końcu obwodu będzie mniejszy od odczytu n_1 przy rozpoczęciu obwodu i

$$N = n_2 - n_1$$ będzie ujemne.

Jeżeli rysunek podaje figurę wewnątrz koła głównego, to ponieważ $P = C - Np$, więc absolutna wielkość Np jest powierzchnią zakreskowaną między kołem obojętnem a obwodem figury.



Rys. 402.

Wzory

$$P = (n_2 - n_1)\, p + C$$

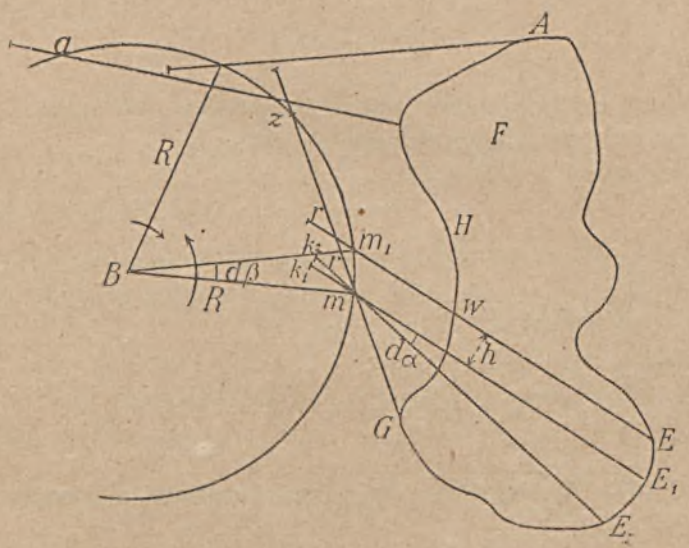
$$P = (n_2 - n_1 + q)\, p$$

przy stosowaniu automatycznie wyznaczają znak wyrazu Np przy obwodzeniu figury w kierunku wskazówki zegara.

§ 186. Określenie powierzchni przy biegunie nazewnątrz figury.

Przy obwodzeniu figury F, przy biegunie B nazewnątrz niej położonym, ramię wodzące będzie przesuwać się między skrajnemi położeniami Ba zm; tak więc, gdy wodzidło przesuwa się wzdłuż $AEGA$, ramię biegunowe opisze powierzchnię $+ Bam - Bma = 0$, ponieważ suma algebraiczna kątów $d\beta$ będzie zerem.

Pozostaną elementarne przesunięcia ramienia wodzącego typu $m_1 E E_1 m$ (przesunięcie równoległe) i $m E_1 E_2$ (przesunięcie kątowe). Przy obwodzeniu figury, np., od A przez $E_1 G$ do A suma $d\alpha$ jest zerem, gdyż jeżeli ramię wodzące wychyli się o pewne $\Sigma d\alpha$ w prawo od pierwotnego położonia, to winno o takie samo $\Sigma d\alpha$ wychylić się w lewo, by wrócić do pierwotnego



Rys. 403.

położenia. Wskutek tego suma powierzchni wycinków kołowych typu $m E_1 E_2$ będzie równa zeru, gdyż długość ramienia wodzącego przy obwodzeniu jest wielkością stałą.

Przypuśćmy, że dodatnie przesunięcia h i $d\alpha$ zachodzą na część obwodu, ujemne — na GHA. Dodatnie powierzchnie planimetr opisze w granicach $A E G$, ujemne w granicach $G A$: algebraiczną sumą będzie powierzchnia figury F. Ponieważ zaś algebraiczna suma wycinków typów $m E_1 E_2$ równa jest zeru, więc powierzchnia F równa się algebraicznej sumie powierzchni elemantarnych pasków typu $m E_1 E m$, t. j.

$$P = \Sigma\, wdh = w \Sigma\, dh$$

Elementarne przesunięcie wodzidła z E do E_1 powoduje obrót kółka o $\frac{h}{b}$ podziałek, przesunięcie od E_1 do E_2 obróci kółko wstecz o łuk $k_1 k_2$ t. j. $\frac{rd\alpha}{b}$, a więc, ze względu na kierunek obrotu, kółko obróci się o $-\frac{rd\alpha}{b}$ podzia-

łek. Algebraiczna suma tych elementarnych obrotów daje przyrost N odczytu z bębenka kółka całkującego po dokonaniu obwodzenia całej figury:

$$N = \Sigma \frac{h}{b} \pm \Sigma \frac{r\,d\alpha}{b} = \Sigma \frac{h}{b} \pm \frac{r}{b} \Sigma\, d\alpha$$

lecz

$$\Sigma\, d\alpha = o$$

więc

$$N = \frac{\Sigma h}{b}$$

skąd

$$\Sigma\, h = N b$$

stąd

$$P = w N b$$

Ponieważ zaś poprzednio już oznaczyliśmy $w\,b$ literą p, t. j. nazwaliśmy $w\,b$ wartością podziałki planimetru, przeto

$$\underline{P = N p}$$

lub, wyrażając przyrost N odczytu z bębenka zapomocą różnicy pomiędzy odczytami n_2 (po oprowadzeniu wodzidła wzdłuż obwodu całej figury) i n_1 (przed oprowadzeniem), otrzymamy:

$$\underline{P = (n_2 - n_1)\, p}$$

§ 187. Analiza wzoru na wartość podziałki planimetru

Wzór

$$P = N p$$

wymaga szczegółowego zbadania wartości p podziałki planimetru, która jest funkcją długości ramienia wodzącego i obwodu kółka całkującego (gdyż jeżeli promień kółka całkującego oznaczamy literą k, wówczas $b = \frac{2\pi k}{1000}$).

Wielkość

$$p = w\,b$$

nazywamy bezwzględną wartością podziałki planimetru.

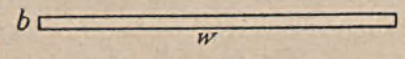
Względna zaś wartość podziałki planimetru p' zależy od skali planu, tak więc dla skali $\frac{1}{m}$ będzie

$$p' = w \,.\, m \,.\, b \,.\, m = w\,b\,m^2 = p\,m^2$$

Bezwzględna wartość podziałki planimetru wyraża powierzchnię prostokąta, którego boki są równe długości ramienia wodzącego i łukowi b o długości, równej 0,001 obwodu kółka całkującego.

Względna zaś wartość daje wielkość powierzchni w terenie, odpowiadającą w skali planu bezwzględnej wartości podziałki planimetru.

1) Planimetr biegunowy o stałem ramieniu wodzącem w posiada stałą bezwzględną wartość podziałki planimetru; względna zaś wartość podziałki zmienia się ze zmianą skali planu, czyli że mamy:



Rys. 403a.

$$\text{dla planu w skali } \frac{1}{m};\ p' = wbm^2$$

$$\text{„ „ „ } \frac{1}{m};\ p'_1 = wbm_1^2$$

a stąd wynika że

$$p' : p'_1 = m^2 : m_1^2 = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m^2}, \text{ t. j.}$$

względne wartości podziałek planimetru o stałem ramieniu są proporcjonalne do kwadratów mianowników samych skal, lub odwrotnie proporcjonalne do kwadratów samych skal.

2) W planimetrach z ramieniem wodzącem o zmiennej długości wartość podziałki planimetru zmienia się, jak w poprzednim wypadku, ze zmianą skali planu, gdy nie zmieniamy długości ramienia wodzącego.

3) Jeżeli w planimetrze o przesuwanem ramieniu wodzącem chcemy przy zmianie skali planu zachować względną wartość podziałki, to należy ramię wodzące przesunąć.

Dla planu w skali $\frac{1}{m}$ zachodzi

$$p' = w\,b\,m^2$$

Wielkość p' zachowamy dla planu w skali $\frac{1}{m_1}$, gdy zmienimy w na takie w_1 przy którem

$$p' = w_1\,b\,m_1^2$$

stąd

$$w\,b\,m^2 = w_1\,b\,m_1^2$$

i obliczymy nową długość ramienia wodzącego, jako

$$w_1 = w\,\frac{m^2}{m_1^2}$$

odpowiadającego tej samej, co poprzednio, wartości podziałki planimetru

Jak widzimy, powstaje proporcja:

$$w_1 : w = m^2 : m_1^2 = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m^2}$$

t. j. przy zachowaniu względnej wartości podziałki planimetru ze zmianą skali należy zmienić długość ramienia wodzącego w taki sposób by długości ramion wodzących, odpowiadających różnym skalom, były odwrotnie proporcjonalne do kwadratów mianowników skal (lub wprost proporcjonalne do kwadratów skal).

4) Dla tego samego planu (tej samej skali) możemy zmienić względną wartość podziałki planimetru, zmieniając odpowiednio długość ramienia wodzącego.

Mamy

$$p' = w\,b\,m^2$$

aby zmienić p' na p'_1 należy zmienić w na takie w_1 by zachodziło:

$$p'_1 = w_1\,b\,m^2$$

stąd

$$p' : p'_1 = w : w_1$$

ponieważ wartość podziałki jest polem prostokąta, którego jeden bok jest równy długości ramienia wodzącego, a drugi $\frac{1}{1000}$-ej obwodu kółka, więc chcąc to pole zmienić n-krotnie, nie mogąc zmienić obwodu kółka, zmienić należy n-krotnie długość ramienia (patrz rys. 403a).

Z ostatniego wzoru wynika, że dla tej samej skali względne wartości podziałek są proporcjonalne do długości odpowiadających im ramion wodzących.

Obliczymy:

$$p'_1 = p' \frac{w_1}{w}$$

5) Przy zmianie skali i względnej wartości podziałki planimetru należy określić nową długość ramienia wodzącego:

dla skali $\frac{1}{m}$ i ramienia w

$$p' = w\,b\,m^2$$

ze zmianą skali na $\frac{1}{m_1}$ i wartości podziałki na p'_1 ulec musi zmianie i długość ramienia wodzącego, zamieniając się w takie w_1, by

$$p'_1 = w_1\,b\,m_1^2$$

Z proporcji

$$p' : p'_1 = w\,m^2 : w_1\,m_1^2$$

określimy

$$w_1 = w \frac{p'_1}{p'} \cdot \frac{m^2}{m_1^2}$$

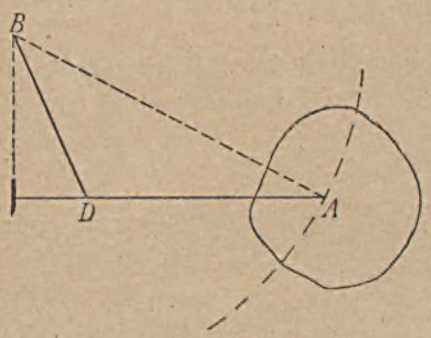
§ 188. Użycie planimetru biegunowego.

Plan, na którym obliczamy powierzchnię, winien być ustawiony poziomo; papier pomarszczony obniża dokładność obliczania mechanicznego gdyż kółko zatacza na fałdach inną, niż wypada, drogę.

Należy starać się ustawiać planimetr tak, by biegun leżał poza figurą; przy większych figurach należy je dzielić istniejącemi na planie linjami (a w ich braku linjami pomocniczemi) na mniejsze figury w liczbie 2—3. Gdy jednak zachodzi konieczność podziału figury, dającej się obwieść przy biegunie wewnątrz, — na więcej niż 2—3 części, dla uchwycenia wodzidłem obwodu każdej z nich przy biegunie nazewnątrz, wówczas określamy powierzchnię takiej figury przy biegunie wewnątrz niej.

Miejsce dla bieguna należy obrać tak, aby 1) przy obwodzeniu figury kółko zawsze znajdowało się na planie i nie przechodziło poza brzegi arkusza, 2) przy obwodzeniu kąt między ramionami nie był zbyt ostry (mniejszy od 30°) lub zbyt rozwarty (większy od 150°), 3) części obwodu figury, położone przy kole obojętnem, nie były do niego równoległe, a tem bardziej nie leżały na tem kole.

W tym celu ustawiamy wodzidło A w środku obwodzonej figury i obracamy ramię biegunowe do czasu, gdy biegun B znajdzie się na przedłużeniu płaszczyzny kółka całkującego. Jeżeli spostrzeżemy, że łuk, zatoczony promieniem BA, przetnie obwód figury i nie będzie biegł równolegle do bliskich doń granic figury, możemy uważać próbne umiejscowienie bieguna za dobrze obrane. W przeciwnym razie należy biegun przesunąć do innego punktu, leżącego mniej więcej na łuku zatoczonym z puntu A promieniem AB, i znów zwrócić uwagę na to, czy łuk, zatoczony z nowego ⊙ B promieniem BA, przecina w odpowiedni sposób figurę, czy nie.



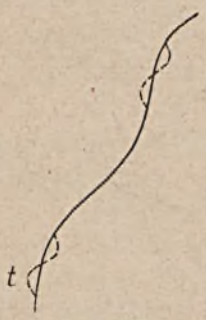
Rys. 404.

Przed rozpoczęciem obwodzenia wodzidło należy ustawić w takim punkcie obwodu figury, który leży na lub przy obojętnem kole, gdyż niedokładności pierwszego i ostatniego posunięcia nie odbiją się na odczycie z kółka całkującego.

Po takiem ustawieniu wodzidła zapiszemy odczyt z kółka całkującego i obwodzimy odręcznie ruchem jednostajnym i powolnym granicę figury, dopóki wodzidło nie powróci do punktu wyjścia. Wskutek drżenia ręki wodzidło często odsuwa się od obwodu, obwodząc poza granicą figury pewną powierzchnię t; należy wtedy (rys. 405) taką samą drobną powierzchnię obwieść zaraz po drugiej stronie obwodu. Jeżeli obwód figury składa się z szeregu prostych, można wodzidło posuwać wzdłuż przykładanych do tych prostych linijek; natomiast jeżeli tych prostych na obwodzie jest niewiele (1—4) wówczas użycie linijki nie jest wskazane, gdyż wprowadzimy do wyniku wpływ błędów stałych, więcej zniekształcających wy-

nik, niż wpływy wzajemnie się kompensujących, przy odręcznem obwodzeniu, odchyleń w obydwu kierunkach od obwodu.

Po zakończeniu obwodzenia figury zanotujemy odczyt z kółka.



Rys. 405.

Przy biegunie nazewnątrz figury, obwodzenie w kierunku wskazówki zegara daje drugi odczyt większy od pierwszego i odwrotnie — przy obwodzeniu w odwrotnym kierunku; to samo prawidło jest słuszne dla bieguna położonego wewnątrz figur, których powierzchnia jest większa od koła obojętnego. Jeżeli zaś biegun jest położony wewnątrz figury, mniejszej od koła głównego, wówczas przy obwodzeniu w kierunku ruchu wskazówki zegara pierwszy odczyt będzie większy od drugiego i odwrotnie — przy obwodzeniu w lewym kierunku.

Stąd wynika prawidło:

1) przy biegunie nazewnątrz figury od większego odczytu odejmujemy mniejszy i różnicę mnożymy przez wartość podziałki;

2) przy biegunie wewnątrz:

a) przy obwodzeniu w kierunku ruchu wskazówki zegara drugi odczyt zwiększamy o stałą q (koło obojętne w podziałkach planimetru) i od sumy odejmujemy pierwszy odczyt:

$$P = (n_2 + q - n_1)\ p$$

b) przy obwodzeniu w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówki zegara pierwszy odczyt zwiększamy o q i od sumy odejmujemy drugi odczyt:

$$P = (n_1 + q - n_2)\ p$$

Przy obwodzeniu figury należy zwracać uwagę na to, ile razy zero bębenka przeszło obok zera nonjuszu, oraz ile razy zero licznika przeszło około swego indeksu.

Odczyt składa się z odczytu liczby na liczniku, odczytu z bębna i nonjuszu. Jeżeli około zera nonjuszu znajduje się mała liczba bębenka (1 do 4), wówczas z licznika zanotujemy większą z dwu liczb, znajdujących się przy indeksie, jeżeli zaś przy zerze nonjuszu ustawiła się liczba bębenka, większa od 5, wówczas należy z licznika odczytać mniejszą z liczb, położonych po obydwu stronach indeksu.

Jeżeli przy obwodzeniu figury odczyty z bębenka rosną i zero przeszło kilka razy koło indeksu licznika, to należy zwiększyć drugi odczyt o tyle tysięcy, ile razy zero licznika przeszło obok indeksu.

Jeżeli zaś kółko obraca się w kierunku malejących napisów i zero licznika przeszło obok indeksu kilkakrotnie, wówczas pierwszy odczyt powiększamy o tyle tysięcy, ile razy zero licznika przeszło obok indeksu.

Powierzchnię każdej figury należy określać zapomocą planimetru conajmniej dwukrotnie:

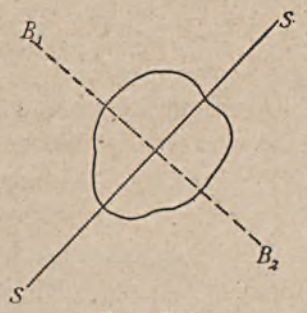
1) W wypadku użycia zwykłego planimetru biegunowego przy każdem z dwu obwodzeń biegun winien znajdować się w innym punkcie; punkty te winny być tak obrane, by prosta, łącząca je, była prostopadła do osi

symetrji figury, przytem przy biegunie B_1 ramię wodzące jest ustawione po lewej stronie biegunowego, przy biegunie zaś B_2 — po prawej.

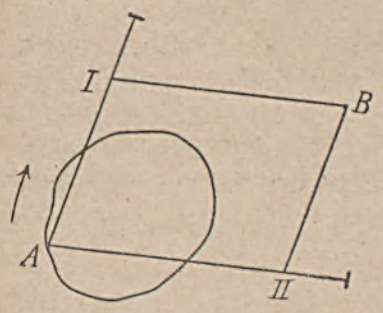
W ten sposób średnia arytmetyczna obydwu wyników będzie wolna od wpływu nierównoległości osi obrotu kółka całkującego do ramienia wodzącego.

Taki sam wynik otrzymamy, jeżeli przy jednem położeniu bieguna jeden raz obwodzić będziemy figurę, mając ramię wodzące po lewej stronie biegunowego, drugi raz — po prawej.

To ostatnie postępowanie stosujemy przy użyciu planimetrów kompensacyjnych.



Rys. 406.



Rys. 407.

Gdy mamy do czynienia z małemi figurami, wówczas należy skracać ramię wodzące, wskutek czego i wartość podziałki planimetru zmniejszy się odpowiednio do relacji

$$p' : p'_1 = w : w_1.$$

Kółko całkujące obróci się wówczas o większy łuk, i błąd, równy 1 — 2 podziałkom planimetru, będzie mniejszy.

Przed obliczeniem powierzchni należy sprawdzić wartość podziałki planimetru.

188a

§ 187. Określenie stałych planimetru.

Firmy, wyrabiające planimetry (Coradi, Ott i t. d.), załączają do planimetru w pudełku tabelki, w których są podane bezwzględne wielkości stałych planimetru, wyrażone w mm^2, oraz względne ich wartości, podane dla szeregu skal, a przy planimetrach o przesuwanem ramieniu, również i dla podanych w tabelce liczb — długości ramienia wodzącego.

Tak np., załączona przez firmę Coradi tabelka planimetru № 22233 jest ułożona w następujący sposób:

Podziałki	Położenie indeksu na ramieniu przesuwanem	Wartość podziałki planimetru	Stała C planimetru
1 : 1000	333.3	10 m^2	18933
1 : 5000	333.2	250 m^2	18933

Nie można jednak stosować danych takiej tabelki bez sprawdzenia, gdyż niejednokrotnie okazuje się, że liczby, podane w tabelce, odbiegają od właściwych.

Rozpatrzmy sprawdzenie stałych planimetru.

A. Sprawdzenia wartości podziałki planimetru dokonać można zapomocą figury o ściśle znanej powierzchni i zapomocą załączonej przez firmy t. zw. linijki próbnej.

Przypuśćmy, że mamy na planie ściśle wykreśloną figurę, np. kwadrat (należy sprawdzić długości boków i przekątnych, oraz prostolinjowość boków) o znanej bezwzględnej powierzchni (wyrażonej w $mm.^2$).

Jeżeli, np., bok kwadratu wynosi 100 *mm.* wówczas jego powierzchnia równa jest 10000 $mm.^2$.

Obwodzimy kilkakrotnie (4 razy) daną figurę, przy biegunie planimetru, nazewnątrz niej położonym, przytem po dwukrotnem przesunięciu ramienia wodzącego wzdłuż obwodu całej figury, zmieniamy położenie bieguna, przestawiając przy użyciu planimetru kompensacyjnego za każdym razem ramię wodzące na inną stronę ramienia biegunowego.

Zapisujemy: 1) długość ramienia wodzącego, 2) początkowy i końcowy odczyt przy każdem obwodzeniu oraz 3) obliczamy różnicę $n_2 - n_1$ odczytów z każdego obwodzenia i wreszcie, o ile poszczególne wyniki (różnice) różnią się nie więcej, niż o 1—2 podziałki od średniej arytmetycznej wszystkich obwodzeń (wątpliwy wynik należy skreślić i dokonać nowego obwodzenia), wówczas średnią arytmetyczną uważamy za ostateczny wynik.

Naprzykład:

Bok kwadratu 100 *mm.*

Długość ramienia wodzącego $w = 332{,}2$.

Obwodzenia

	I	II	III	IV
n_2	1688	1100	4052	2431
n_1	687	101	3053	1432
$n_2 - n_1$	1001	999	999	999

Średnia 999,5.

Wartość podziałki planimetru (bezwzględna).

$$p = \frac{P}{n_2 - n_1} = \frac{10000}{999{,}5} = 10{,}005\ mm^2.$$

stąd zaś otrzymamy względną wartość podziałki planimetru dla skali $\frac{1}{m}$

$$p' = p\,m^2$$

np., dla skali $\frac{1}{1000}$ w rozpatrywanym wypadku

$$p'_{1000} = 10{,}005\ m^2$$

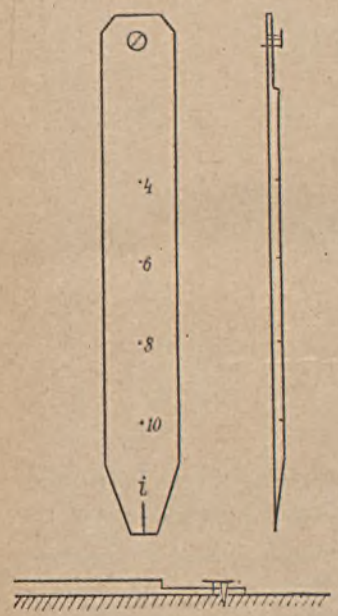
dla skali $\frac{1}{4000}$

$$p'_{4000} = 160{,}08\ m^2.$$

Sprawdzenia wartości podziałki planimetru możemy dokonać zapomocą linijki próbnej.

Linijka próbna jest płytką metalową 10-milimetrowej szerokości, grubości do 1,5 *mm.* i długości około 12 *cm*, Przy jednym końcu płytki osadzona jest w niej przechodząca nawylot igiełka, nieco wystająca pod dolną powierzchnią płytki, utrzymywana z góry śrubką. Drugi koniec płytki est ścięty w kształcie kąta dwuściennego; jedną płaszczyzną tego kąta jest dolna powierzchnia płytki; na górnej płaszczyźnie ścięcia mamy wycięty indeks *i* w postaci kreski, dochodzącej do krawędzi ścięcia (rys. 408).

Na górnej powierzchni płytki w odległościach od igły, równych 4. 6. 8. 10. *cm.*, są wydrążone dziurki, dostatecznie głębokie, aby w nich mogło być ustawione wodzidło planimetru.



Rys. 408.

Jeżeli wbijemy igłę płytki w plan, zaznaczymy położenie indeksu na planie, to możemy obrócić linijkę próbną o całe koło, co nastąpi, gdy indeks wróci do swego pierwotnie oznaczonego położenia. Jeżeli więc ustawimy planimetr wodzidłem w jednym z otworów linijki próbnej, oznaczymy przy indeksie kreską jego położenie, zapiszemy odczyt n_1 z planimetru i obrócimy linijkę dokoła jej igły o całe koło (indeks zatrzymamy przy znaczku na papierze), oraz zanotujemy drugi odczyt n_2, wówczas możemy obliczyć wartość podziałki planimetru.

Mianowicie, przypuśćmy, że wodzidło było umieszczone w otworku znajdującym się w odległości 8 *cm.* od igły; wówczas powierzchnia zatoczonego przez wodzidło koła wynosi

$$P = \pi 8^2\ cm^2 = 64\pi\ cm^2$$

a stąd wartość podziałki

$$p = \frac{P}{n_2 - n_1}$$

Pamiętać naieży, że $p = wb$ jest funkcją długości ramienia wodzącego, przeto ze zmianą długości ramienia wodzącego zmienia się wartość podziałki planimetru zgodnie z relacją:

$$p : p_1 = w : w_1$$

Każde więc p odpowiada jednemu tylko w.

B. Określenie stałej q i C planimetru.

Z poprzedniego wiemy, że

$$q = \frac{C}{p}$$

jest powierzchnią koła obojętnego, wyrażonego w podziałkach planimetru.

Ponieważ

$$C = \pi\,(w^2 + R^2 \pm 2\,r\,w)$$

a zatem C jest funkcją w, przeto dla ustawienia każdego ramienia wodzącego na nową długość, zmieniać się będzie tak C, jak q.

Wielkość q określimy ze wzorów na powierzchnię:

$$P = (n_2 + q - n_1)\,p$$

$$P = (n_1 + q - n_2)\,p$$

dla obwodzenia w kierunku ruchu wskazówki zegara i dla obwodzenia w kierunku odwrotnym, t. j. lewym.

Stąd dla obydwu wypadków obwodzenia wynika:

$$q = \frac{P}{p} - (n_2 - n_1)$$

$$q = \frac{P}{p} + (n_2 - n_1)$$

więc ogólny wzór będzie:

$$\underline{q = \frac{P}{p} \mp (n_2 - n_1)}$$

przytem znak mniej — przed nawiasem odpowiada obwodzeniu w kierunku ruchu wskazówki zegara, znak + odwrotnemu kierunkowi obwodzenia.

Z ostatniego wzoru wynika reguła dla określania stałej q: należy obwodzić figurę o znanej powierzchni P (kwadrat, sześciokąt lub koło), zanotować pierwszy n_1 i końcowy n_2 odczyty i podstawić do wzoru na q.

Mając q, obliczymy

$$\underline{C = p\,q.}$$

Ponieważ we wzorze

$$q = \frac{P}{p} \mp (n_2 - n_1)$$

wyraz $\frac{P}{p}$ oznacza znaną powierzchnię, wyrażoną w podziałkach planimetru, przeto, gdy obierzemy powierzchnię P takiej wielkości, aby ją można było obwieść przy biegunie, położonym nazewnątrz, wówczas, obwodząc ją w kierunku ruchu wskazówki zegara, otrzymamy początkowy n'_1 i końcowy odczyt n'_2, tak że

$$P = (n'_2 - n'_1)\, p$$

skąd

$$q = (n'_2 - n'_1) \mp (n_2 - n_1)$$

zaś

$$C = \{(n'_2 - n'_1) \mp (n_2 - n_1)\}\, p$$

Przykład.

Przy ustawieniu bieguna nazewnątrz figury otrzymano z obwodzenia figury następujące wyniki:

	Obwodzenia	
	I	II
n_1	1	1543
n_2	3062	4606
$n_2 - n_1$	3061	3063
średnia	3062	

przy obwodzeniu zaś tej samej figury z biegunem wewnątrz w kierunku ruchu wskazówki zegara, zero indeksu przeszło obok indeksu dwa razy przy malejących odczytach; wyniki obwodzenia przy biegunie wewnątrz podane są w tabelce II-ej:

Obwodzenie	odczyty		różnice	średnia
	n_1	n_2	$n_2 - n_1$	
I	29886	9372	— 20514	—20513.5
II	25733	2520	— 20513	

(Ze względu na drukrotne przejście zera obok licznika bezpośrednie odczyty 9886 i 5733 powiększono o 20000)

$$q = (n'_2 - n'_1) - (n_2 - n_1)$$

$$q = 3062 - (-20513{,}5) = 23575{,}5$$

Obwodząc figurę o znanej powierzchni P, możemy bezwzględną wielkość stałej C określić na podstawie wzoru

$$P = C + Np$$

w którym $N = n_2 - n_1$ (różnicy odczytów przed obwodzeniem i po).

Wzór ten ma zastosowanie przy obwodzeniu w kierunku ruchu wskazówki zegara. Obliczymy:

$$C = P - Np$$

przytem jeżeli P i p są wielkościami bezwzględnemi, wówczas i C nią będzie, jeżeli zaś P i p odpowiadają skali planu, wówczas i p będzie jej odpowiadać.

W wypadku obwodzenia w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówki zegara, stosujemy wzór:

$$P = C - Np$$

skąd

$$C = P + Np$$

ogólnym więc wzorem będzie

$$C = P \mp Np$$

i, jak dla q, tak i tutaj, znak — odpowiada kierunkowi ruchu wskazówki, znak + odwrotnemu kierunkowi obwodzenia.

Stałą C planimetru możemy określić zapomocą próbnej linijki, wstawiając ostrze bieguna planimetru w otwór, w którym jest osadzona igiełka linijki (oczywiście igiełkę należy uprzednio usunąć). Wodzidło zaś planimetru ustawimy w jednem z wydrążeń (np. w oznaczonem jako 10 *cm*).

Całkowitego obrotu linijki dokoła bieguna dokonamy, 1) oznaczając pierwsze położenie indeksu linijki na papierze, 2) notując pierwszy odczyt i 3) drugi odczyt po zakończeniu obwodzenia całego koła, a więc po ścisłem dosunięciu indeksu do znaku na papierze.

Ponieważ powierzchnia obwodzonego zapomocą linijki koła jest mniejsza od powierzchni koła obojętnego, przeto, obracając linijkę w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówki zegara, otrzymamy:

$$C = P + Np$$

przytem

$$N = n_2 - n_1$$

1886

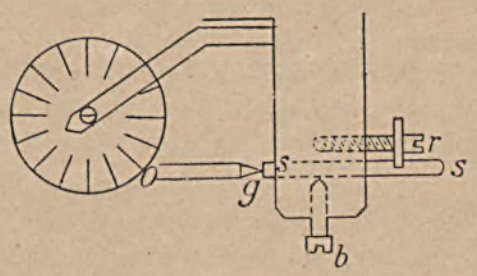
§ 188. Sprawdzenie planimetru.

A. Oś o obrotu całkującego kółka nie powinna się wahać w swych gniazdach g.

Jeżeli stwierdzimy wahania osi przy lekkiem jej poruszaniu palcami, należy przesunąć jedno z gniazd w kierunku kółka całkującego (ścisnąć oś). Dokonamy tego po odkręceniu w ramie planimetru śrubki bocznej b, naciskającej na sztyft gniazdowy ss, przechodzący przez ramię osi kółka, i zapomocą wkręcania równoległej do niego rektyfikacyjnej śrubki r posuwamy naprzód sztyft gniazdowy, a więc i gniazdo. Wkręcanie śrubki rektyfikacyjnej ma na celu dosunięcie gniazda do stożkowo ściętego końca

osi, ale tylko w takim stopniu, aby boczne wahania osi były uniemożliwione; gdy cel jest osiągnięty, dokręcamy znów boczną śrubkę *b* w ramie planimetru.

B. Kółko całkujące winno się obracać zupełnie swobodnie. Sprawdzamy to, wprawiając palcem kółko w ruch obrotowy; obrót powinien trwać kilka sekund, stopniowo tracąc tempo; jeżeli obrót kończy się zbyt szybko z raptownem przejściem od ruchu szybkiego do spokoju, przyczyna tej wady leży w niewłaściwem osadzeniu osi obrotu kółka całkującego gdy zaś gniazda osi zostały we właściwy sposób osadzone, wówczas przyczyny wadliwego obracania się kółka należy szukać w tarciu bębenka o nonjusz; jeżeli tak jest, lub też w wypadku, kiedy nawet obrót kółka jest prawidłowy, lecz między nonjuszem i bębenkiem znajduje się zbyt wielka szpara, uniemożliwiająca dokładne odczytywanie, wówczas wielkość szpary należy zmienić, przesuwając kółko w kierunku od lub do nonjuszu. Przesuwania tego dokonamy przez posunięcie zapomocą odpowiednich śrubek rektyfikacyjnych sztyftów gniazdowych we właściwym kierunku.



Rys. 409.

Dalsze sprawdzenie planimetru polega na:

1) określeniu, czy płaszczyzna całkującego kółka jest ⊥-a do ramienia wodzącego,

2) sprawdzeniu dat tabelki, załączonej w pudełku do planimetru.

C. Nieprostopadłość kółka ustalić można z dwukrotnego obwodzenia dowolnej figury przy biegunie, położonym nazewnątrz: jeden raz przy ramieniu wodzącem po prawej stronie biegunowego, drugi raz—przy odwrotnem ułożeniu ramion.

Jeżeli wyniki przy obydwu obwodzeniach różnią się nie więcej, niż o 2 podziałki planimetru, wówczas możemy uważać, że kółko jest osadzone prawidłowo. Przy większej różnicy — planimetr nadaje się też do użytku z tym jednak warunkiem, że powierzchnie figur będziemy zapomocą niego zawsze określać dwukrotnie—ramię wodzące raz po lewej, drugi raz po prawej stronie ramienia biegunowego, gdyż średnia arytmetyczna usuwa wpływ błędu.

Oczywiście, sprawdzając ten warunek, tak należy obierać miejsce bieguna, by żadna część obwodu figury nie pokrywała, ani nie była równoległa do koła obojętnego wpobliżu niego.

W najnowszych planimetrach biegunowych obok śrubki *b* w ramie planimetru znajduje się śrubka korekcyjna, zapomocą której możemy jedno gniazdo, a więc i jeden koniec osi obrotu kółka, przesuwać w kierunku prostopadłym do ramienia wodzącego, wskutek czego zachodząca nierównoległość osi obrotu kółka do ramienia wodzącego może być usunięta, względnie kółko całkujące może być ustawione prostopadle do ramienia wodzącego.

Jeżeli w ramie planimetru istnieje boczna śrubka, umożliwiająca poprzeczne przesuwanie osi obrotu kółka, wówczas po szeregu prób możemy usunąć nieprostopadłość kółka do ramienia wodzącego.

D. Sprawdzenie dat tabelki polega na określeniu podanych dla wypisanych długości ramienia wodzącego stałych p i q planimetru.

Jeżeli otrzymamy dla p przy podanem w inny wynik, niż wypisany w tabelce, należy w tabelce albo poprawić p, albo poprawić w. Ze względu jednak na to, że p podane jest zawsze w postaci liczby okrągłej, co upraszcza planimetryczny rachunek powierzchni, przeto dążymy do określenia w, odpowiadającego rzeczywiście p.

Jeżeli więc w tabelce dla w mamy podane pewne p, przy nastawieniu zaś ramienia wodzącego na w z obwodzenia figury o znanej powierzchni otrzymujemy wartość podziałki p_1, wówczas nominalnej wielkości p odpowiada inna jakaś długość w_o ramienia wodzącego, określona z proporcji

$$w : w_0 = p_1 : p_0$$

skąd odnajdziemy

$$w_0 = p_0 \frac{w}{p_1}$$

i poprawimy przy p w tabelce wielkość w na w_0.

Do takiego samego wyniku dojdziemy w inny sposób: przy nominalnej wartości podziałki p, odpowiadającej nominalnej długości w ramienia wodzącego i znanej powierzchni obwodzonej figury P, powinniśmy przy obwodzeniu otrzymać nominalną ilość N_n podziałek: $N_n = \frac{P}{p}$, natomiast, po zakończeniu obwodzenia planimetrem o ramieniu wodzącem w, otrzymujemy określoną N_0 ilość podziałek, co znaczy, że przy danem ramieniu wodzącem wartość podziałki wynosi nie p, lecz pewne p_0, a więc p odpowiada pewne w_0.

Jest tedy

$$p N_n = p_o N_o$$

ponieważ zaś

$$p = w_o b$$

więc

$$w_o b N_n = w b N_o$$

skąd:

$$w_o = w \frac{N_o}{N_n}$$

Obliczone w_0 wypiszemy w tabelce zamiast w.

Przykład.

Powierzchnia obwodzona	Ramię wodzące i nominalna wartość podziałki	Odczyty		Różnice	Średnia	Obliczona wartość podziałki $m\,m^2$
		n_1	n_2			
10040 mm^2	333,1 / 10,00	1	1002	1001	1001	10,030
		0	1000	1000		
		14	1015	1001		
		128	1130	1002		

Sprawdzenie wskazuje, że określona wartość podziałki jest większa od nominalnej. Ponieważ nominalna wartość podziałki, jako w danym wypadku liczba okrągła, jest dogodniejsza w rachunku, niż 10,03, przeto skrócimy ramię zgodnie z proporcją:

$$w_n : w = 10{,}03 : 10$$

stąd

$$w = 0{,}997 \times w = 0{,}997 \times 333{,}1 = 332{,}1.$$

A więc skoro długość ramienia wodzącego zmienimy na 332,1, wówczas wartość podziałki planimetru wyniesie równo 10 *mm*.

Inaczej:

$$N_n = \frac{10040}{10} = 1004$$

$$N_0 = 1001$$

$$w_0 = 333{,}1\ \frac{1001}{1004} = 332{,}1$$

Określenie powierzchni szczegółów, leżących wewnątrz figury o danej powierzchni P.

Przypuśćmy, że sprawdzoną przy danem ramieniu wodzącem wartością podziałki planimetru jest p.

Przy obwodzeniu danej powierzchni P powinniśmy otrzymać $N = \frac{P}{p}$ podziałek.

Obwodząc wszystkie szczegóły, leżące wewnątrz P, a więc szczegóły o powierzchniach $p_1\ p_2\ \ldots\ p_n$, których suma winna być równa P, otrzymujemy kolejno dla każdej z figur $n_1\ n_2\ \ldots\ n_k$ podziałek.

Kontrolą prawidłowości obwodzenia jest

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = N$$

o ile suma

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

różni się od N nie więcej, niż o $2\sqrt{k}$ podziałek, to odchyłkę rozrzucamy na poszczególne wyniki, otrzymując wyrównane n_1 n_2 ... n_k, i przechodzimy do obliczenia powierzchni szczegółów

$$p_1 = n'_1\, p$$

$$p_2 = n'_2\, p \text{ it.d.}$$

lub, ponieważ

$$P = n\, p,$$

więc:

$$p_1 : P = n'_1 : N, \text{ skąd } p_1 = P\,\frac{n'_1}{N}$$

$$p_2 : P = n'_2 : N, \text{ skąd } p_2 = P\,\frac{n'_2}{N}$$

jak widzimy — nawet nie wprowadzając do rachunku wartości podziałki p, możemy obliczyć poszczególne p_1 p_2 ... i t. d.

Jeżeli obliczamy powierzchnię z planu, który uległ skurczeniu, to obliczać należy powierzchnie szczegółów w każdym kwadracie siatki oddzielnie. Za wartość podziałki planimetru dla danego kwadratu (oraz wszystkich tych, w których skurcz jest identyczny) przyjmujemy iloraz od podzielenia nominalnej powierzchni kwadratu (bez uwzględnienia skurczu) przez ilość podziałek, którą otrzymaliśmy przy obwodzeniu figury.

Obliczone wewnątrz kwadratu powierzchnie szczegółów wyrównać należy do nominalnej powierzchni kwadratu.

§ 189. Powierzchnie małych figur i dokładność obliczenia.

Jeżeli wartość podziałki planimetru jest większa od $\frac{1}{200}$ powierzchni figury (względnie większa od stosunku, odpowiadającego wymaganej dokładności obliczenia), wówczas należy ramię wodzące planimetru skrócić, czem odpowiednio zmniejszymy wartość podziałki planimetru, a więc tem samem podniesiemy dokładność określenia powierzchni małych figur.

Skrócenia ramienia wodzącego dokonamy na mocy prawidła o proporcjonalności długości ramion wodzących do odpowiadających tym długościom wartości podziałek.

Dokładność obliczenia powierzchni planimetrem biegunowym.

Ściśle określonych norm dokładności, uzyskiwanej przez planimetry biegunowe, nie można podawać, gdyż na tę dokładność wywiera wpływ zbyt

wiele różnorodnych, a często zupełnie nieuchwytnych, czynników, jak np. gatunek papieru (gładki, chropowaty i t. d.), kształt figury (wydłużone mierzą się mniej dokładnie od zaokrąglonych), drżenie ręki, zanieczyszczenie przyrządu i t. d.

Względny błąd obliczenia powierzchni zapomocą planimetru jest mniejszy dla figur dużych, niż dla małych, tak np. dla kompensacyjnego planimetru średnia dwu obwodzeń figury o powierzchni 100 cm^2 może odbiegać od właściwej wielkości o $\frac{1}{300} - \frac{1}{400}$ i mniej.

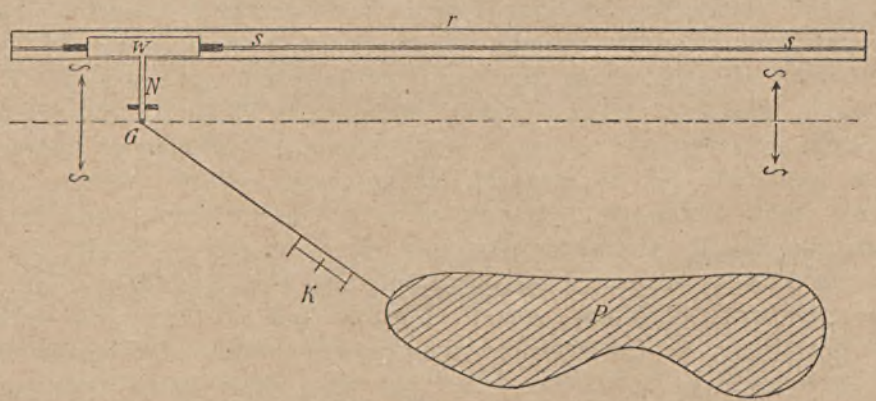
Dla figur mniejszych ten sam błąd może być większy od $\frac{1}{200}$, a nawet więcej dla bardzo małych figur. Jeżeli taka dokładność byłaby niedopuszczalna, skrócić zaś ramię wodzące już więcej nie można, wówczas lepiej jest obliczać daną powierzchnię graficznie, gdy niema wymiarów polowych.

Co się tyczy planimetru Amslera (zwykły biegunowy), to dokładność, przezeń uzyskiwana, jest znacznie mniejsza — mianowicie dla powierzchni 100 cm^2 wynosi około $\frac{1}{100}$.

§ 190. Odmiana planimetrów biegunowych.

Jeżeli przyjmiemy ramię biegunowe za równe nieskończoności, wówczas sprzęg ramion wodzącego i biegunowego będzie się przesuwać po łuku koła o promieniu, równym nieskończoności, a więc po prostej.

Jeżeli tedy nadamy dowolnemu punktowi ramienia wodzącego ruch prostolinjowy, to mieć będziemy planimetr o jednem tylko ramieniu wodzącem, gdzie kółko całkujące K winno się znajdować między wodzidłem a tym punktem G ramienia, który jest wprawiony w prostolinjowy ruch, względnie na przedłużeniu prostej, łączącej wodzidło z tym punktem.



Rys. 410.

Ramię biegunowe zastępuje wózek W z ramieniem WNG; punkt G, łączący z wózkiem ramię wodzące, przesuwa się ‖-e do szyny ss, po której toczy się wózek W.

Zapomocą takiego planimetru dogodnie można obliczać pola figur wydłużonych.

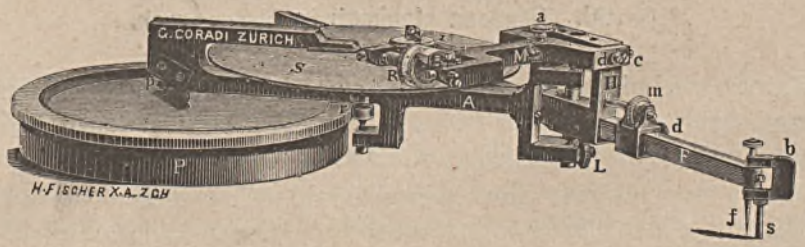


Rys. 410a.

Rys. 410a przedstawia planimetr tego typu, do starczanego u nas przez firmę Gerlach.

§ 191. Planimetr biegunowy tarczowy.

Biegunem tego planimetru jest środek ciężkiej płyty *P*, do której jest przytwierdzony zazębiony pierścień *r*, po którym przesuwa się mały walec zębaty, obracający się na osi pionowej, mającej swe gniazda w rozgałęzieniu ramienia biegunowego *A*.



Rys. 411.

Obrót ramienia biegunowego wprawia w ruch obrotowy tak walec zębaty, jak i osadzoną centrycznie na jego osi tarczę *S*, oklejoną papierem. W rozgałęzieniu końca ramienia biegunowego osadzona jest oś pionowa obrotu ramy *H*, przez którą przechodzi przesuwane ramię wodzące *F* z wodzidłem *f*. Poziomy przegub górnej części ramy *H* łączy z nią widełki *M*, w których rozgałęzieniu osadzona jest pozioma oś całkującego kółka z licznikiem (podobnie, jak w zwykłych planimetrach). Obrót tarczy *S* wprawia w obrót kółko całkujące; gdy zaś tarcza jest nieruchoma, wodzidło jednak porusza się dokoła pionowej osi ramy *H*, wówczas i widełki *M*, obracając się dokoła tej samej osi, przesuwają kółko całkujące, nie wprawiając go w ruch obrotowy, lecz w ślizgowy ruch po tarczy, dla tej mianowicie przyczyny, że przedłużenie płaszczyzny kółka całkującego również przechodzi przez oś obrotu ramy *H*. Tak więc obrót kółka może spowodować tylko ruch ramienia biegunowego, wywołany posuwaniem wodzidła.

Śrubka *a* umożliwia podnoszenie po skończonej pracy widełek *M* z kółkiem całkującem ku górze.

Zalety tego planimetru polegają: 1) na izolowaniu kółka całkującego od planu, co uniezależnia wyniki pomiaru powierzchni od właściwości ga-

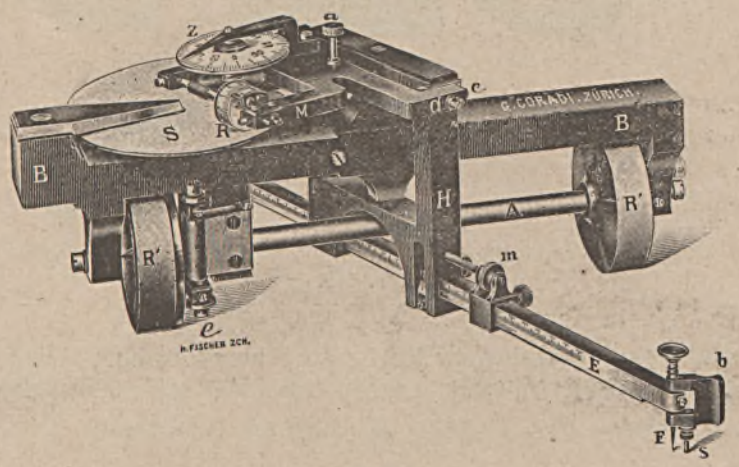
tunku papieru — planu i 2) na nieznacznej wartości podziałki tego planimetru, wahającej się od 0,5 do 2 *mm*.

Dokładność planimetru tarczowego jest więcej niż dwukrotnie wyższa od dokładności planimetru zwykłego kompensacyjnego Coradiego.

Wartość podziałki planimetru tarczowego określamy z obwodzenia figury o znanej powierzchni zupełnie podobnie, jak w planimetrach biegunowych zwykłych.

Figury należy obwodzić dwukrotnie: w kierunku prawym i lewym, i za ostateczny wynik brać średnią arytmetyczną.

Odczyty są pięciocyfrowe, gdyż licznik jest podzielony na 50 części, bęben na 100 i nonjusz daje dziesiąte części podziałek bębna.



Rys. 412.

Wartość podziałki tarczowego planimetru jest funkcją długości ramion biegunowego R i wodzącego w, promienia zazębionego walca r, odległości d osi pionowej obydwu ramion od środka tarczy obrotowej, promienia k, płyty P i obwodu c kółka całkującego; wyraża się wzorem

$$p = \frac{Rwr}{dk} \cdot \frac{c}{1000}$$

Wzór ten ma jednak znaczenie tylko teoretyczne, podobnie, jak wzór $p = wb$ w planimetrach biegunowych typu Amsler-Coradi.

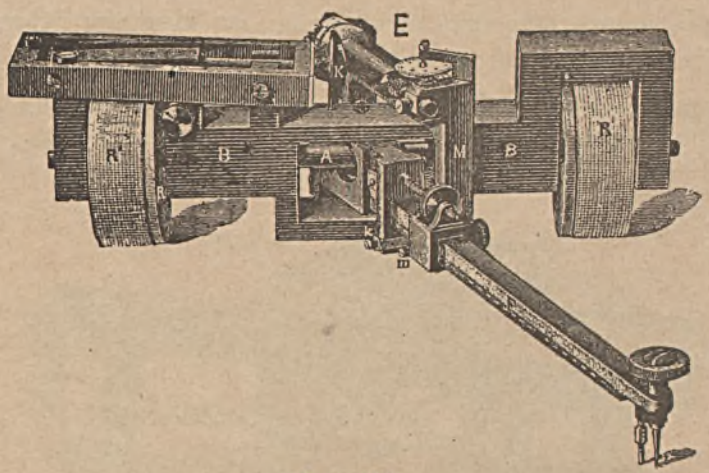
Na płycie P zaznaczoną jest przez dwie strzałki ta część pierścienia r przesuwanie po której walca zębatego daje dobre wyniki. Pozostałej części obwodu pierścienia należy unikać.

Obecnie ma duże wzięcie planimetr tarczowy na walcach z ramieniem przesuwalnem, pozwalający wymierzać figury o szerokości do 50 *cm* i dowolnej długości. Planimetr ten nie należy już do typu biegunowych; podobny jest (rys. 412) w użyciu do planimetru rolkowego Homana-Coradiego.

§ 192. Planimetr rolkowy Homana - Coradiego.

Przez ramę B przechodzi oś A obrotu walców R, których powierzchnia jest pocentkowana, dzięki czemu nie ślizgają się po papierze i mogą się poruszać tylko w kierunku ⊥-ym do ich osi.

Zazębiony brzeg lewego walca R trybami swemi chwyta tryby kółka osadzonej na osi poziomej czaszy kulistej k w górnej ramie, połączonej



Rys. 413.

z ramą B nad lewym walcem. Ruch obrotowy lewego walca powoduje obrót dokoła osi czaszy kulistej. Na osi pionowej w rozgałęzieniu środkowem ramy B obraca się łożysko k ramienia wodzącego F o zmiennej długości.

W górnej części ramy M, sprzęgniętej z łożyskiem wodzidła, obraca się dokoła osadzonej w ramie M poziomej osi (równoległej do ramienia wodzącego) walec E, zakończony kółkiem całkującem z nonjuszem. Walec E, sprężyną, umieszczoną w prawej części ramy M u dołu, naciska na czaszę kulistą. Całkowite obroty walca E notuje licznik nad M.

Oś czaszy kulistej jest równoległa do osi A walców R.

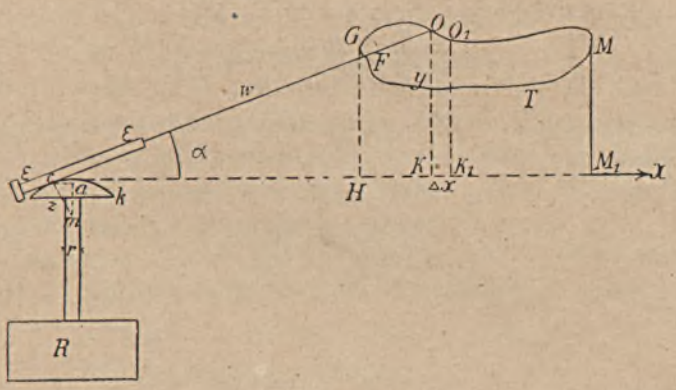
Gdy ramię wodzące przesuwa się wzdłuż prostopadłej do tych osi, obrót czaszy kulistej nie wpływa na walec E, ponieważ czasza dotyka wówczas walca stale tym samym punktem. Jeżeli jednak planimetr posuwa się naprzód przy ramieniu wodzącem, odchylonem w prawo od położenia ⊥-ego do osi walców R (jak na rysunku), to walec E, wskutek obrotu czaszy, jest wprawiany w obrót przez porywanie go punktami czaszy, leżącemi bliżej kółka całkującego, i kółko całkujące obraca się w kierunku rosnących podziałek; przy ramieniu wodzącem, odchylonem w lewo od prostopadłej do osi walców R, przechodzącej przez oś obrotu ramy R, posuwanie się ramienia wodzącego wprawia walec E, a więc i kółko całkujące, w obrót w kierunku malejących podziałek. Im większy jest kąt odchylenia w lewo lub w prawo ramienia wodzącego, tem dalsze od wierzchołka części czaszy kulistej wprawiają w obrót walec E i przytem w obrót szybszy.

Ponieważ tryby walca R i osi czaszy kulistej są jednakowe, więc obrót walców R o pewien łuk wprawia oś czaszy w obrót, przy którym każdy punkt powierzchni osi czaszy opisze taką samą drogę, jak walec R.

Przyjmijmy za oś x $\perp$-ą do osi walców R, przechodzącą przez osi obrotu ramy walca EE, t. j. przez rzut wierzchołka czaszy kulistej. Wówczas rzędną dowolnego punktu o, w którym znajduje się wodzidło, jest

$$y = w \sin \alpha,$$

przytem α oznacza kąt wychylenia ramienia wodzącego w od osi x.



Rys. 414.

Jeżeli planimetr posunie się naprzód o nieskończenie małe Δx, wówczas powierzchnia figury $o\, o_1\, k_1\, k$ jest równa

$$p = y\, \Delta x$$

Przesunięcie l punktu styczności c czaszy i walca E jest tyle razy większe od Δx, ile razy promień $a\, c = h$ koła obrotu punktu C jest większy od promienia r osi czaszy (gdyż każdy punkt powierzchni tej osi również obrócił się o Δx)

stąd

$$l : \Delta x = h : r$$

oraz

$$l = \frac{h}{r}\, \Delta x$$

lecz

$$h = z \sin \alpha,$$

gdzie z jest promieniem cm czaszy, zaś $\sphericalangle\, cma = \alpha$, więc

$$l = \frac{z \sin \alpha}{r}\, \Delta x$$

Przesunięcie to wykazuje kółko całkujące zmianą odczytu n_1 na n_2; jeżeli wartość podziałki kółka wynosi b, wówczas

$$(n_2 - n_1)\, b = \frac{z \sin \alpha}{r}\, \Delta x$$

a stąd

$$\Delta x = \frac{(n_2 - n_1)\, b\, r}{z \sin \alpha}$$

oraz

$$p = y \Delta x = w \sin \alpha \cdot \frac{(n_2 - n_1)\, b\, r}{z \sin \alpha} = \frac{w b r}{z} (n_2 - n_1) = C (n_2 - n_1)$$

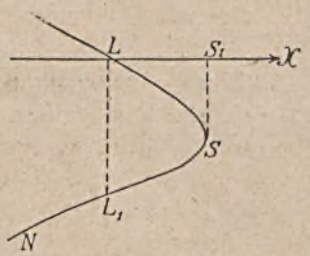
gdzie literą C oznaczyliśmy stały wyraz $\frac{wbr}{z}$.

Posuwanie wodzidła od O ku M po obwodzie figury obraca dalej kółko całkujące w kierunku rosnących podziałek; od M do G planimetr cofa się i kółko kręci się w odwrotnym kierunku; o ile więc powierzchnia $O M M_1 K$ byłaby obliczana z odczytów na kółku jako dodatnia, to powierzchnia $M M_1 H G$ obliczy się jako ujemna. Suma dodatniej powierzchni $G O M M_1 H$ i ujemnej $M M_1 H G$ daje powierzchnię obwodzonej figury $G O M T G$.

Jeżeli więc przy obwodzie w kierunku ruchu wskazówki zegara pierwszym odczytem w punkcie, np., O był n_1, po zakończeniu zaś obwodzenia całej figury w punkcie O odczytaliśmy z kółka n_2, to powierzchnią figury będzie

$$\underline{P = C (n_2 - n_1)}$$

Gdy wodzidło przetnie oś x, przechodząc w prawo od niej po LS, wówczas walec EE dotknie czaszy po drugiej stronie wierzchołka czaszy i posuwanie się wodzidła wprzód wprawia kółko w obrót w kierunku malejących podziałek; posuwanie się planimetru wstecz przy obwodzie figury po granicy SN wprawia kółko w obrót w kierunku rosnących podziałek. O ile więc powierzchnia LSS_1, obliczona na mocy wzoru $C (n_2 - n_1)$, byłaby ujemna, o tyle powierzchnia LSL_1 będzie dodatnia, ich suma — dodatnia.



Rys. 415.

W ten sposób planimetr automatycznie sumuje powierzchnię z jej elementarnych pasków między osią x i obwodem figury:

$$P = C (n_2 - n_1) + C (n_3 - n_2) + C (n_4 - n_3) + \ldots = C (N - n_1)$$

gdzie N jest końcowym, n_1 — początkowym odczytem.

Stałą

$$C = \frac{wbr}{z}$$

określimy na podstawie obwodzenia figury o znanej powierzchni P ze wzoru:

$$\underline{C = \frac{P}{N - n_1}}$$

Po skończonj pracy należy:

1) odsunąć tryby osi czaszy kulistej od trybów walca R' podnosząc górną ramę,

2) odsunąć w prawo od czaszy kulistej ramę M.

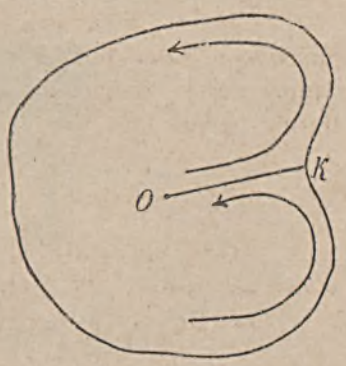
Planimetr ten jest bardzo dogodny przy obwodzeniu wydłużonych figur; oś x-ów (kierunek biegu walców) układamy w kierunku największego wydłużenia figury.

Dokładność, uzyskiwana przez ten typ planimetru, sięga przy sprzyjających okolicznościach $\frac{1}{3000}$.

§ 193. Planimetr Prytza.

Duński kapitan Prytz wynalazł planimetr o niezmiernie prostej konstrukcji. Jest to na obydwu końcach zgięty pręt, którego jeden koniec, będący wodzidłem, jest zaostrzony, drugi zaś jest spłaszczony w kształcie ostrza siekierki.

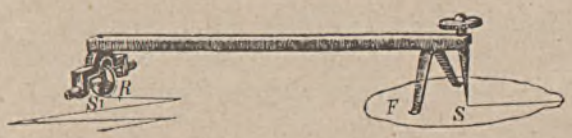
Sposób użycia planimetru Prytza jest następujący (patrz rys. 416 i 418).



Rys. 416.

Wodzidło ustawiamy w środku ciężkości figury i przez naciśnięcie drugiego końca planimetru uzyskujemy na planie ślad siekierki: następnie pionowo utrzymywany przyrząd posuwamy po prostej do obwodu figury, przesuwamy wodzidło wzdłuż całej granicy figury, po tej samej prostej posuwamy zpowrotem wodzidło do środka ciężkości figury i znów, naciskając z góry drugi koniec planimetru, znaczymy na planie drugi ślad siekierki. Określamy cyrklem odległość r między obydwoma śladami oraz odległość a między ostrzem wodzącem a środkiem ostrza siekierki. Powierzchnia figury będzie równa w przybliżeniu:

$$P = ar.$$



Rys. 417.

Wielkość a wynosi okrągłą liczbę, najczęściej 25 cm.

Ponieważ środek ciężkości figury obraliśmy na oko, więc dla podniesienia dokładności wyniku odwracamy planimetr dokoła środka ciężkości (utrzymując w nim wodzidło) figury o 180^0 i obwodzimy figurę, jak poprzednio, lecz w przeciwnym kierunku.

Otrzymujemy nowe r, między śladami siekierki.

Jeżeli oznaczymy przeciętną odległość środka ciężkości figury do obwodu literą x,

wówczas

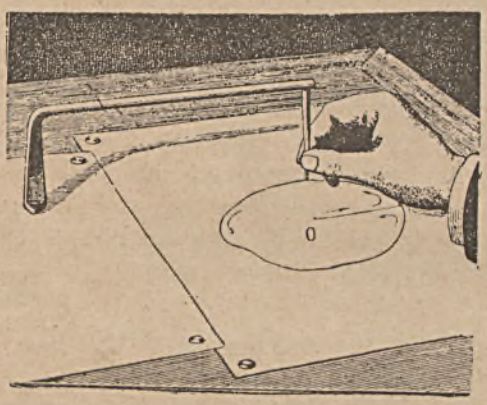
$$P = a\,\frac{r+r_1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{4a^2}\right)$$

przytem jeżeli x jest niewielkie w porównaniu z a, to możemy uprościć wzór do

$$P = a\,\frac{r+r_1}{2}$$

Dokładność wyników waha się około $\frac{1}{100}$.

Aby planimetr dawał właściwe wyniki, płaszczyzna ostrza siekierki winna przechodzić przez wodzidło, co sprawdzamy, posuwając planimetr wzdłuż prostej, łączącej końce planimetru. Przy przesuwaniu wo-



Rys. 418.

dzidła po tej prostej, ostrze siekierki będzie odsuwaś się od prostej, gdy warunek nie jest zachowany.

Przy ulepszonych konstrukcjach tego planimetru dane są boczne podpórki siekierce, dzięki czemu możemy bez trudności utrzymywać planimetr w pionowej płaszczyźnie przy obwodzeniu (rys. 417).

§ 194. Wskazówki, dotyczące obliczeń powierzchni.

Pomijając obliczenia powierzchni pojedyńczych parcel, jako dostatecznie proste, zajmiemy się dziedziną obliczeń powierzchni w wypadkach bardziej skomplikowanych.

Mamy do obliczenia powierzchnie figur, znajdujących się na planie pewnego objektu, np. wsi.

W granicach danego objektu znajdują się użytki, jak, np., rola, łąki, lasy, wody i t. p., oraz parcele poszczególnych właścicieli.

Granice użytków, szczegóły sytuacyjne (drogi i t. p.), granice parcel są wykreślane na planie na zasadzie pomiaru, opartego na związku poligonowym.

Obliczenia należy dokonywać, przechodząc od ogółu do szczegółów, — mianowicie obliczymy:

1) powierzchnię ogólną ze spółrzędnych,

2) powierzchnie kompleksów ze spółrzędnych,

3) powierzchnie użytków w kompleksach — graficznie lub planimetrem,

4) powierzchnie parcel w kompleksach ze spółrzędnych, lub na zasadzie miar z gruntu oraz miar z planu.

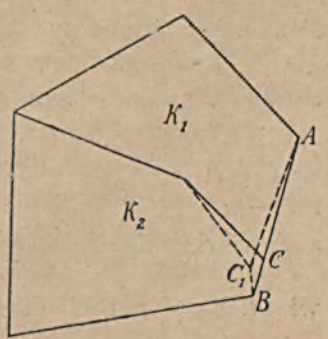
Ogólną powierzchnię ze spółrzędnych obliczyć należy dwukrotnie z X-ów i Y-ów; powinniśmy uzyskać dwa identyczne wyniki, o ile przy mnożeniach nie były dokonywane zaokrąglenia w cyfrach po przecinku.

Części ogólnej powierzchni, zawarte między poligonem obwodowym a granicą objektu, należy obliczyć, stosując wzory na obliczenie powierzchni z trapezów lub ze spółrzędnych, przyjmując bok poligonu za oś odciętych, domiary — za rzędne. Cały obszar należy podzielić na kompleksy poligonami, biegnącemi wzdłuż naturalnych granic, jak np., drogi, granice użytków, rzeczki i t. p.

Im większą ilość kompleksów założymy, tem dogodniej będzie liczyć powierzchnie parcel i szczegółów; im bardziej skomplikowany jest stan użytków i im drobniejsze są parcele, tem mniejsze kompleksy należy obierać.

Instrukcje pomiarowe zezwalają na tworzenie dość wielkich kompleksów, dochodzących do 100 *ha*; o ile takie kompleksy można uważać przy wielkich parcelach za dostateczne, o tyle przy małych parcelach należy tworzyć 10 — 20 hektarowe kompleksy.

Suma powierzchni kompleksów powinna równać się ściśle ogólnej powierzchni, za wyjątkiem wypadków, kiedy przy tworzeniu kompleksów za jeden lub kilka ich punktów obraliśmy punkty, leżące na bokach poligonu obwodowego. Gdy, np., do poligonu obwodowego weszły punkty A i B, natomiast punkt C wszedł tylko do poligonu, oddzielającego kompleksy, i został obliczony ze spółrzędnych punktów A i B, jako punkt położony na prostej, wówczas błąd, tkwiący w przyjęciu spółrzędnych punktu C z pewną (np., do 0,01 *m*.) dokładnością, sprawi to, że punkt C wychyli się od kierunku AB o części *cm*. i zajmie położenie C_1 ($CC_1 \leqslant 0{,}5$ *cm*.).



Rys. 419.

Suma powierzchni kompleksów K_1 i K_2 nie uwzględni powierzchni $\triangle$-a ABC_1, wskutek czego, jeżeli oznaczymy powierzchnię wykreślonej figury literą p, będzie

$$p - K_1 - K_2 = \pm p_{ABC_1}$$

zaś

$$p_{ABC_1} = {}^1/_2 d_{AB} \cdot r$$

gdzie

$$r \leqslant 0{,}5 \text{ cm.}$$

tak więc przy

$$d_{AB} = 200\ m \text{ i } r < 0{,}5\ cm \text{ będzie } p_{ABC_1} < 1\ m^2$$

O otrzymane drobne różnice należy zmienić ogólną powierzchnię, co zastąpi wprowadzenie spółrzędnych punktu C do poligonu obwodowego, a więc i do wykazu spółrzędnych punktów, na zasadzie którego ustalono ogólną powierzchnię.

Obliczone powierzchnie parcel należy wyrównać do powierzchni kompleksów. Każda z parcel winna być obliczona dwukrotnie. Wyniki obydwu obliczeń nie powinny się różnić (według Instrukcji Ministerstwa Robót Publicznych) więcej, niż o:

$$\begin{aligned} &0.001\,p + 0.2\,\sqrt{p} \text{ dla planu w skali } \frac{1}{1000} \\ &0.001\,p + 0.4\,\sqrt{p} \text{ „ „ „ } \frac{1}{2000} \\ &0.001\,p + 0.8\,\sqrt{p} \text{ „ „ „ } \frac{1}{4000} \end{aligned} \qquad (F)$$

(Na zasadzie tych wzorów ułożono tablicę III-ą powyższej Instrukcji).

Oczywiście, wzory te nie mają zastosowania do powierzchni parcel, obliczanych ze spółrzędnych, gdyż wówczas obydwa wyniki obliczenia powinny być identyczne; we wszystkich innych wypadkach średnia arytmetyczna obydwu obliczeń jest wynikiem obliczenia powierzchni parceli.

Suma tak uzgodnionych powierzchni parcel może się różnić od powierzchni kompleksu nie więcej, niż o F dla kompleksu, według Instrukcji Ministerstwa Robót Publicznych.

Jeżeli różnica pomiędzy sumą powierzchni parcel a powierzchnią kompleksu nie przekracza różnicy dozwolonej, wówczas powierzchnie parcel należy wyrównać do powierzchni kompleksu.

Otrzymamy więc wyrównane powierzchnie parcel.

Każda z parcel składa się z jednego lub kilku użytków.

Jeżeli powierzchnie oddzielnie obliczonych w kompleksie z planimetru lub graficznie użytków wyrównamy do powierzchni kompleksu, otrzymamy wyrównane powierzchnie $U_1\ U_2 \ldots\ U_n$ użytków.

Następnie w każdej parceli obliczymy użytki, wchodzące w jej skład, i obliczone powierzchnie wyrównamy do powierzchni parceli.

Obliczenie sprawdzimy, porównywając sumę części danego użytku, leżących w poszczególnych parcelach, z powierzchnią U całego użytku w kompleksie. Różnica pomiędzy sumą tych elementarnych powierzchni użytków a powierzchnią U całego użytku nie powinna przekraczać $\frac{1}{100}\ U$, przy niewielkich zaś parcelach $\frac{1}{50}\ U$ (Instr. Min. Ref. Rolnych).

Wyrównania jednak elementarnych powierzchni użytków do ich całkowitych powierzchni dokonywać nie należy; wystarczy określić, czy normy $\frac{1}{100}\ U$, względnie $\frac{1}{50}\ U$, (lub F według Instr. Min. Rob. Publ.) są zachowane.

Jako wynik tego rodzaju obliczeń sporządza się rejestr pomiarowy.

§ 195. Rejestr pomiarowy.

Rejestr ten jest zestawieniem powierzchni tak ogólnej, jak poszczególnych użytków, należących do każdego właściciela. Każda parcela na planie, stanowiąca działkę jednego właściciela, ujętą w granice, ma swój numer, pod którym wpisuje się do rejestru.

Rejestr układa się według właścicieli lub parcel; w pierwszym wypadku wypisują się pod nazwiskiem właściciela wszystkie stanowiące jego własność parcele, w drugim — parcele wypisują się w kolejnym porządku numerów, przy każdym zaś numerze parceli wypisuje się nazwisko właściciela (tutaj każdy właściciel może być wymieniony kilkakrotnie w różnych miejscach rejestru).

Tytuły u góry rejestru podają nomenklatury gruntów, jak ogrody, orne, łąki, wody, rowy, drogi i t. p. Suma powierzchni użytków i nieużytków, wchodzących w skład każdej parceli, winna równać się ogólnej powierzchni parceli (kolumna 3-a).

Zamknięcie rejestru stanowią sumy powierzchni we wszystkich kolumnach; tak podsumowane powierzchnie wszystkich typów gruntów na całym obszarze winny dawać w sumie powierzchnię, równą sumie powierzchni ogólnych wszystkich parcel, a więc powierzchnię całego obszaru. (Patrz tabelkę na str. 450).

§ 196. Podział figur.

W praktyce pomiarowej mamy często do czynienia z podziałem figur o określonej powierzchni na pewne, założone zgóry, części. Zagadnienia te urozmaicane są często, jak np. przy scalaniu, zamianie gruntów, prostowaniu granic i t. p., wprowadzeniem warunku, aby odcinane części wynosiły wartości, zgóry założone lub określone. Mamy wówczas do czynienia z powierzchniami użytków, podzielonemi na klasy, z których w każdej jednostka powierzchni jest oszacowana do znanej wysokości. Szacunek taki może odpowiadać cenom rynkowym na ziemię: np., 1 *ha* I klasy jest oszacowany na 400 zł., 1 *ha* II klasy na 350 i t. d.; ale też możemy mieć do czynienia z szacunkiem względnym, przy którym dany jest tylko stosunek wartości poszczególnych klas gruntów, np.:

$$k_1 : k_2 : k_3 : \ldots\ldots = 100 : 70 : \ldots = 10 : 7 : \ldots\ldots$$

często bez podania rzeczywistej wartości gruntów którejkolwiek z klas.

Wszystkie zagadnienia, dotyczące podziału figur, dają się rozbić na dwie grupy:

1) podziały powierzchni,
2) podziały figur z uwzględnieniem wartości gruntów.

Wszelkie podziały mogą być wykonywane: graficznie (przy lub bez pomocy rachunku) i analitycznie.

Podziały, wykonywane zapomocą planimetru, zaliczać będziemy do grupy graficznych.

PRZYKŁAD. Rejestr pomiarowy wsi Polesie, gm. Lipka, pow. N.

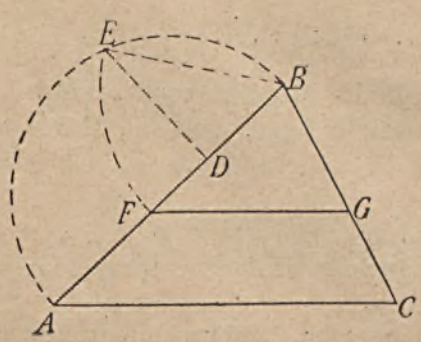
	Nomenklatury gruntów Imię i nazwisko posiadaczy	Ogólna powierzchnia		Grunty orne		Łąki		Lasy		Drogi i rowy	
		ha.	metry	*ha.*	metry	*ha.*	metry	*ha.*	metry	*ha.*	metry
1	Stanisiaw Jeż	27	9350	20	5113	3	7518	2	7785		8934
2	Mikołaj Prus	28	7248	20	6234	4	4910	2	7821		8281
3	Franciszek Duda	25	4790	19	4934	3	4757	2	7616		7489
4	Jan Zalewski	27	8578	18	3957	5	6779	2	7757	1	0085
5	Gustaw Bryła	28	9337	21	7233	4	2378	2	7845		1881
6	Tadeusz Bryła	24	9938	18	8371	3	2329	2	7793		1445
7	Mieczysław Gajda	24	7146	18	5269	3	1959	2	7796		2122
8	Filip Górecki	24	2416	17	4841	3	8019	2	8011		1545
9	Mateusz Brun	23	2047	15	0819	5	1423	2	7963		1842
10	Marjan Brun	23	2088	14	9158	5	3247	2	7719		1964
11	Zygfryd Beim	23	8589	13	8104	6	92g3	2	7930		3320
12	Alfred Hirsz	21	7186	13	9994	4	7595	2	7862		1735
	Ogółem . .	305	8708	213	4027	54	0146	33	3898	5	0637

Ogółem trzysta pięć hektarów osiem tysięcy siedemset osiem metrów kwadratowych.

§ 197. Podział graficzny.

Rozpatrzmy kilka przykładów.

I. Podzielić trójkąt prostą, $\parallel$-ą do jednego z boków, w ten sposób, aby stosunek odciętej części do powierzchni $\triangle$-a wyniósł $m : n$.



Rys. 420.

Dana jest powierzchnia P $\triangle$-a ABC.

Odcinająca prosta winna być $\parallel$-a do boku AC.

Odcinamy BD takiej długości, aby $BD : BA = m : n$; wystawiamy w punkcie D $\perp$-ą do AB do przecięcia się z półkolem, zbudowanem na AB, jako na średnicy, w punkcie E. Z punktu B promieniem BE odcinamy na BA odcinek BF. Przez punkt F prowadzimy $FG \parallel AC$.

Oznaczmy powierzchnię $\triangle$-a BFG literą p; będzie

$$p : P = m : n$$

mianowicie dlatego, że:

$$p : P = BF^2 : BA^2$$

lecz

$$BF^2 = BE^2 = BD \cdot BA$$

więc

$$p : P = BD \cdot BA : BA^2 = BD : BA = m : n, \text{ co } b.\ d.\ d.$$

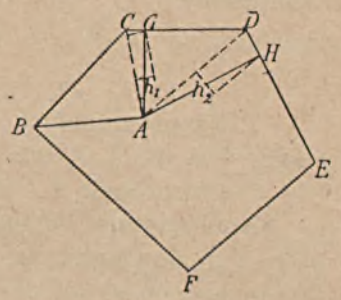
II. Podzielić poligon o powierzchni P prostemi, przechodzącemi przez punkt A, leżący wewnątrz poligonu, na części w stosunku $m : n : r : q$. Określimy powierzchnie odcinanych części:

$$p_1 = \frac{P}{m + n + r + q} m;$$

$$p_2 = \frac{P}{m + n + r + q} n;$$

$$p_3 = \frac{P}{m + n + r + q} r;$$

$$p_4 = \frac{P}{m + n + r + q} q;$$



Rys. 421.

Sprawdzamy, czy $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = P$.

Obliczymy powierzchnie

p'_1 △-a ABC, p'_2 △-a ACD, p'_3 △-a ADE, p_4 △-a AEF i p_5 △-a AFB

Suma $p'_1 + p_2 + \ldots . p'_5$ powinna się różnić nie więcej, niż o dopuszczalną różnicę, od danej powierzchni P; gdy P nie jest znane, wówczas suma powyższa daje P. Oczywiście, każdy trójkąt musi być obliczony dwukrotnie.

Jeżeli P jest dane, to powierzchnie poszczególnych △-ów wyrównywamy w ten sposób, aby ich suma wyniosła P.

Przypuśćmy, że

$$p'_1 + p'_2 > p_1 > p'_1$$

Wówczas linja podziału przejdzie przez punkt A wewnątrz Δ-a ACD.

Tworzymy różnicę $p_1 - p'_1$. Określamy wysokość h_1 Δ-a o podstawie AC.

$$h_1 = \frac{2\ (p_1 - p'_1)}{AC}$$

Równoległa do boku AC, wykreślona w odległości h, przetnie bok CD w punkcie G.

Oczywiście

$$p_{ACG} = p_1 - p'_1$$

Odcięliśmy więc czworobok $A\,B\,C\,G$ o powierzchni p'.
Obliczamy

$$p_{AGD} = p'_2 - p_{ACG}$$

Przypuśćmy, że

$$p_{AGD} + p'_3 > p_2 > p_{AGD}$$

Uzyskujemy różnicę

$$p_2 - p_{AGD}$$

i obliczamy:

$$h_2 = \frac{2(p_2 - p_{AGD})}{A\,D};$$

Na prostopadłej do $A\,D$ odcinamy h_2 i, kreśląc przez otrzymany punkt $\parallel$-ą do $A\,D$, otrzymamy w przecięciu się z $D\,E$ punkt H.

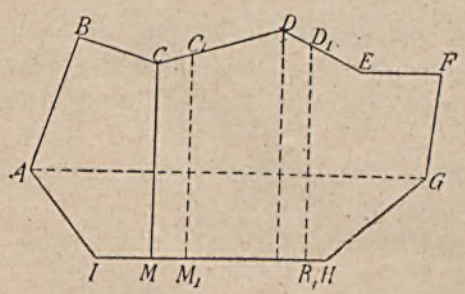
Czworobok $A\,G\,D\,H$ jest figurą o powierzchni p_2.

Analogicznie odcinamy p_3 i sprawdzamy, czy pozostała po odcięciu p_1 p_2 i p_3 powierzchnia równa się w granicach dokładności powierzchni p_4. W ten sposób skontrolujemy prawidłowość podziału.

III. Odciąć powierzchnie p_1 p_2 . . . . prostemi o danym kierunku ($\parallel$-ym lub prostopadłym do danego).

Stosować będziemy metodę kolejnych przybliżeń, polegającą na tem, że odcinamy powierzchnię, bliską danej, a następnie odcinamy lub dodajemy różnicę.

Przypuśćmy, że kierunkiem, założonym do projektowania, jest kierunek, prostopadły do prostej $A\,G$.



Rys. 422.

Powierzchnia poligonu $A\,B\,C\,D$ . . . . . $J\,A$ wynosi P.

Należy odciąć powierzchnię p_1 p_2 i p_3.

Spuszczamy $\perp$-ą $C\,M$ do $A\,G$ i obliczamy powierzchnię figury $A\,B\,C\,M\,J$, rozbijając ją na $\triangle$-y, lub zamieniając na trójkąt.

Przypuśćmy, że ta powierzchnia wynosi p'_1, przyczem $p'_1 > p_1$. Należy dołączyć $p'_1 - p_1$.

Obliczamy

$$h_1 = \frac{p'_1 - p_1}{C\,M}$$

i w odległości h od $C\,M$ $\parallel$-e do $C\,M$ wykreślamy $C_1\,M_1$. Znów obliczamy powierzchnię p''_1 figury $A\,B\,C_1\,M_1\,J$.

Jeżeli różnica

$$p''_1 - p \leqslant \frac{1}{n}\,p$$

gdzie $\frac{1}{n}$ jest założoną dokładnością projektowania, wówczas projektowanie uważamy za skończone, w innym razie odcinamy lub dodajemy różnicę po raz trzeci.

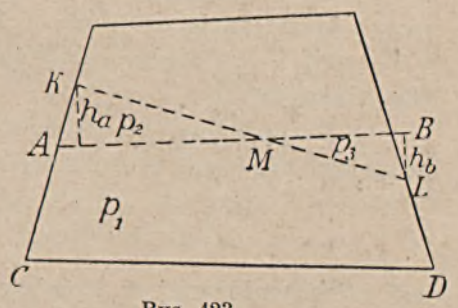
W taki sam sposób zaprojektujemy drugą powierzchnię $p_2 = p_{C_1DD_1R_1M_1}$. Następnie porównamy powierzchnię p'_3 figury D_1EFGHR_1 z p_3. Jeżeli $p'_3 - p_3$ jest mniejsze od $\frac{1}{n}p_3$, projektowanie uważamy za skończone, przyczem za ostatecznie zaprojektowane przyjmujemy powierzchnie p_1 p_2 i p_3.

Jeżeli zaś $p'_3 - p_3 > \frac{1}{n} p_3$, projektowanie należy powtórzyć.

W wypadku krzywolinjowych granic stosujemy przy obliczeniu kolejnych przybliżeń planimetr.

IV. Odciąć od danej figury powierzchnię p prostą, przechodzącą przez dany punkt M.

Jeżeli położenie punktu M umożliwia rozwiązanie, wówczas kreślimy taką prostą AMB, aby odcięła powierzchnie $ABDC$ bliską p. Przypuśćmy, że obliczona powierzchnia $ABCD$ wynosi $p_1 < p$. Należy dołączyć $p - p_1$, kreśląc prostą, przechodzącą przez M. Załóżmy, że będzie to prosta KL, tworząca $\triangle$-y AMK i BML o powierzchniach p_2 i p_3. Gdy mamy $AM > MB$, powinno być



Rys. 423.

$$p_2 - p_3 = p - p_1 = p_0$$

Oznaczmy prostopadłe do AB, spuszczone z K i L, literami h_a i h_b. Mamy:

$$p_2 = \frac{1}{2} MA \cdot h_a$$

$$p_3 = \frac{1}{2} MB \cdot h_b$$

Oznaczmy

$$MA = r\,AB$$

$$MB = q\,AB,$$

gdzie r i q są ułamkami właściwemi.

Stąd

$$p_0 = \frac{1}{2} AB\,(r\,h_a - q\,h_b)$$

Zakładając w przypliżeniu

$$\frac{h_a}{h_b} = \frac{AM}{MB} = \frac{r}{q}$$

skąd

$$h_a = \frac{r}{q} h_b$$

otrzymamy:

$$p_0 = \frac{1}{2} AB \left(\frac{r^2}{q} h_b - q h_b\right) = \frac{1}{2} AB.h_b \left(\frac{r^2 - q^2}{q}\right),$$

skąd

$$h_b = \frac{2q\, p_0}{(r^2 - q^2)\, AB};$$

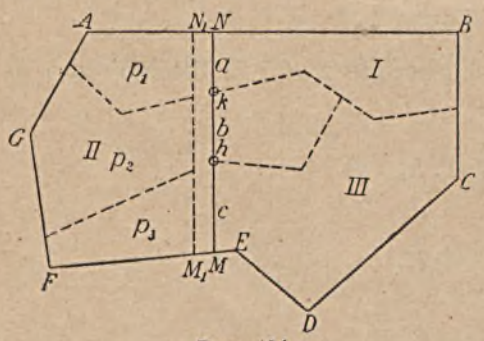
Budując zapomocą prostopadłej h_b do MB punkt L, kreślimy prostą LMK, obliczamy powierzchnię figury $CDLK$ i porównywamy z daną powierzchnią p. Jeżeli różnica nie przekracza wymaganej dokładności, wówczas projektowanie uważamy za skończone, w przeciwnym wypadku powtarzamy postępowanie, jak wyżej, rozpoczynając je już nie od AB, lecz od KL.

V. Odciąć od danej figury powierzchnię o wartości w, biorąc pod uwagę klasyfikację gruntów, t. j. wartości k_1 k_2 k_3 jednostek powierzchni w klasach I, II i III-ej, oddzielonych w terenie i na planie t. zw. linjami klasyfikacyjnemi.

Przypuśćmy, że odcięliśmy prostą MN figurę $ANMFG$ o powierzchni $p_1 + p_2 + p_3$ w ten sposób, że wartość tej powierzchni

$$w_0 = p_1 k_1 + p_2 k_2 + p_3 k_3$$

jest bliska założonej w. Powierzchnie p_1 p_2 p_3 oznaczają powierzchnie części klas I, II i III wewnątrz figury A N M F G.



Rys. 424.

Jeżeli, np., $w_0 > w$, wówczas należy odciąć przy MN pasek o wartości $w_0 - w = w_1$.

Bierzemy z planu w cyrkiel odcinki $NK = a$, $Kh = b$, $hM = c$.

Obliczmy wartość paska o podstawie MN i wysokości równej jednostce.

Przyjmując dla takiego paska linje klasyfikacyjne za $\parallel$-e, otrzymamy powierzchnie części paska w poszczególnych klasach, równe a, b i c. oraz ich wartość, równą $a k_1 + b k_2 + c k_3$. Ponieważ powierzchnia paska wynosi $a + b + c$, więc średnia wartość k_0 jednostki powierzchni w pasku będzie równa (dla jednostkowej wysokości paska):

$$k = \frac{a k_1 + b k_2 + c k_3}{a + b + c}$$

co jest wzorem dla średniej wagi (wagami klas są wielkości a, b i c).

Wzór ten dogodniej jest dla celów praktycznych przedstawić w postaci:

$$k_0 = \frac{a}{a+b+c} k_1 + \frac{b}{a+b+c} k_2 + \frac{c}{a+b+c} k_3$$

gdyż spółczynniki przy k_1 k_2 i k_3 możemy sprowadzić do najprostszych ułamków, których suma powinna się równać jedności (w praktyce wystarcza, gdy jest jej bliska), np.

$$k_0 = \frac{1}{6} k_1 + \frac{1}{3} k_2 + \frac{1}{2} k_3$$

Aby odciąć pas o wartości $w_1 = w_0 - w$, należy odciąć powierzchnię

$$p_0 = \frac{w_1}{k_0}$$

co uskutecznimy zapomocą wykreślenia prostej $M_1 N_1 \parallel M N$ w odległości od $M N$; równej

$$h = \frac{p_0}{M N}$$

Dla upewnienia się, że zadanie jest we właściwy sposób rozwiązane, należy obliczyć powierzchnię figury $A N_1 M_1 F G$, równą, np., P, wewnątrz niej obliczyć powierzchnię klas p'_1 p'_2 i p'_3, wyrównać je, aby

$$p'_1 + p'_2 + p'_3 = P$$

i określić wartość

$$w_P = p'_1 k_1 + p'_2 k_2 + p'_3 k_3$$

O ile różnica $W_P - W$ jest dostatecznie mała (dokładność jest zgóry założona), wówczas uznajemy zadanie za skończone; w innym wypadku — postępowanie powtarzamy od prostej $M_1 N_1$.

VI. Od wykreślonego na planie trapezu odciąć powierzchnię p prostą $\parallel$-ą do podstawy.

Dane są boki a i b oraz wysokość h trapezu.

Kreślimy

$$DF \parallel CB; \quad AF = a - b$$

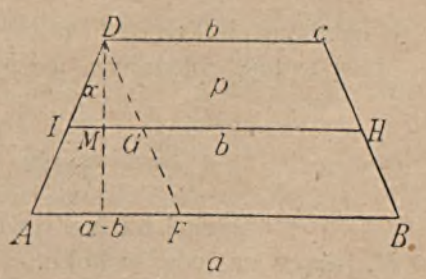
Przypuśćmy, że prosta IH odcina powierzchnię p. Prowadzimy $DM \perp IH$; oznaczmy $DM = x$, $IG = y$.

Wówczas powierzchnia $ICDH$

$$p = \frac{2b + y}{2} x$$

lecz

$$x : h = y : (a - b), \text{ więc } y = \frac{x (a - b)}{h}$$



Rys. 425.

stąd

$$2p = \left[2b + \frac{x(a-b)}{h}\right] x;$$

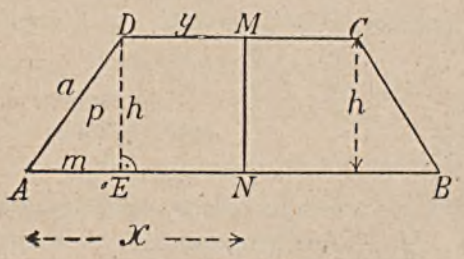
lub

$$2ph = 2bhx + (a-b)x^2$$

Wysokość X odcinanego trapezu określimy z równania:

$$(a-b)x^2 + 2bhx - 2ph = O.$$

VII. Dany jest bok a i wysokość h trapezu. Odciąć prostą, $\perp$-ą do AB, powierzchnię P.



Rys. 426.

Oznaczmy

$$AE = m$$

gdy

$$DE \perp AB$$

$$m = \sqrt{a^2 - h^2};$$

oznaczając powierzchnię Δ-a AED literą p:

$$p = \frac{1}{2}mh = \frac{1}{2}h\sqrt{a^2 - h^2};$$

Przypuśćmy, że MN odcina powierzchnię $ADMN$, równą P, wówczas powierzchnia figury $DEMN$ będzie równa $P-p$. Oznaczmy $AN=x$, $DM=y$

$$y = EN = \frac{P-p}{h} = \frac{P}{h} - \frac{p}{h} = \frac{P}{h} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - h^2};$$

$$x = m + EN = \sqrt{a^2 - h^2} + \frac{P}{h} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - h^2} = \frac{P}{h} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - h^2}$$

Na prostej DC odetniemy

$$y = DM$$

$$x = AN$$

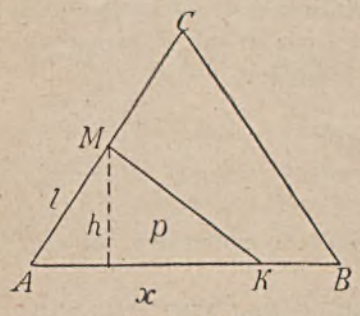
i, ustalając punkty M i N w terenie, otrzymamy odcinającą prostą MN, czyniącą zadość założonym warunkom.

§ 198. Analityczny podział figur.

I. Odciąć od Δ-a powierzchnię p prostą, przechodzącą przez punkt M, leżący na jednym boku.

Dane są wszystkie elementy Δ-a oraz $MA = l$

Przypuśćmy, że prosta MK odcina powierzchnię p. Należy ustalić $AK = x$.



Rys. 427.

Mamy:

$$2p = lx \sin A,$$

skąd

$$x = \frac{2p}{l \sin A};$$

Jeżeli zaś dane są tylko trzy boki $\triangle$-a, wówczas w terenie mierzymy spuszczoną z punktu M prostopadłą h na AB z równania

$$2p = xh$$

otrzymamy:

$$x = \frac{2p}{h};$$

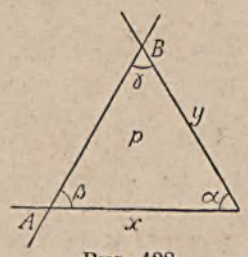
II. Odciąć wewnątrz kąta α powierzchnię p prostą, tworzącą z jednym z ramion danego kąta kąt β.

Zadanie zostanie rozwiązane, gdy ustalimy odległości x i y punktów A i B przecięcia się projektowanej prostej z ramionami kąta od jego wierzchołka

$$xy \sin \alpha = 2p$$

lecz

$$y = \frac{x \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$



Rys. 428.

więc

$$2p = \frac{x^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{x^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} = \frac{x^2}{ctg\ \alpha + ctg\ \beta}$$

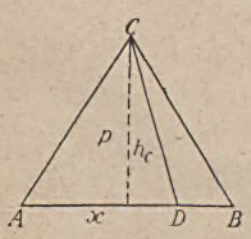
stąd

$$x = \sqrt{2p\ (ctg\ \alpha + ctg\ \beta)}$$

Analogicznie, wprowadzając kąt $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$, otrzymamy:

$$y = \sqrt{2p\ (ctg\ \alpha + ctg\ \gamma)}$$

III. Odciąć powierzchnię p prostą, przechodzącą przez wierzchołek Δ-a o danej powierzchni P.



Rys. 429.

Przypuśćmy, że DC odcina powierzchnię p. Należy ustalić położenie punktu D, t. j. $AD = x$.

Oznaczając literą h_c wysokość Δ-a t. j. prostopadłą spuszczoną z wierzchołka C, możemy napisać:

$$x h_c = 2p$$

$$AB \cdot h_c = 2P$$

skąd

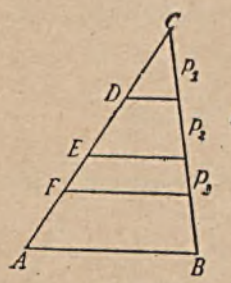
$$x : AB = p : P$$

co oznacza, że proste, przechodzące przez wierzchołek Δ-a, odcinają od danego Δ-a powierzchnie, których stosunek do powierzchni P danego Δ-a odpowiada stosunkowi podstaw Δ-ów odciętego i danego.

Oczywiście

$$x = BA \frac{p}{P}$$

IV. Trójkąt dany podzielić prostemi, ‖ -emi do podstawy, na części o powierzchniach p_1 p_2....



Rys. 430.

Dana jest powierzchnia P Δ-a ABC.

Ponieważ powierzchnie podobnych figur są proporcjonalne do kwadratów odpowiednich boków,

przeto

$$1)\ p_1 : P = CD^2 : CA^2$$

skąd

$$CD = CA \sqrt{\frac{p_1}{P}}$$

$$2)\ (p_1 + p_2) : P = CE^2 : CA^2$$

skąd

$$CE = CA \sqrt{\frac{p_1 + p_2}{P}}$$

analogicznie

$$CF = CA \sqrt{\frac{p_1 + p_2 + p_3}{P}}$$

gdy

$$p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p.$$

t. j. dany △ dzielimy na równe części, wówczas

$$CD = CA \sqrt{\frac{p}{P}} = m\,CA,$$

gdzie

$$m = \sqrt{\frac{p}{P}}$$

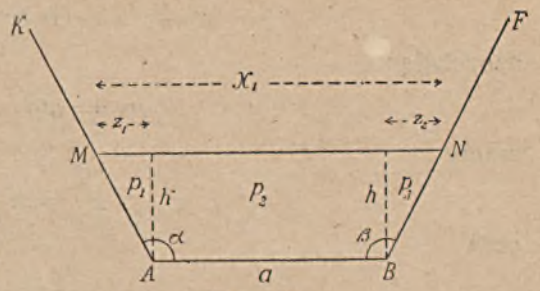
$$CE = CA \sqrt{\frac{2p}{P}} = m\,CA\,\sqrt{2}$$

$$CF = \qquad\qquad = m\,CA\,\sqrt{3}$$ i t. d.

V. Od figury $K\,A\,B\,F$ odciąć prostą $\parallel$-ą do $A\,B$ powierzchnię p, mając pomierzone:

$$A\,B = a, \quad \sphericalangle\,\alpha = K\,A\,B$$

$$\sphericalangle\,\beta = F\,B\,A.$$



Rys. 431.

a) Spuśćmy z punktów A i B prostopadłe do $M\,N \parallel A\,B$. Otrzymamy trzy figury o powierzchniach p_1, p_2, p_3

$$p_1 = \frac{h}{2} z_1 = \frac{h}{2} h\ ctg\ (180^0 - \alpha) = -\frac{h^2}{2}\ ctg\,\alpha$$

$$p_2 = a\,h$$

$$p_3 = \frac{h}{2} z_2 = \frac{h}{2} h\ ctg\ (180^0 - \beta) = -\frac{h^2}{2}\ ctg\,\beta$$

Jeżeli $M\,N$ odcina żądaną powierzchnię p, to powinno być:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = a\,h - \frac{h^2}{2}\,(ctg\,\alpha + ctg\,\beta)$$

Oznaczając

$$m = ctg\ \alpha + ctg\ \beta$$

otrzymamy równanie dla określenia h

$$m\,h^2 - 2\,a\,h + 2\,p = 0$$

$$h = \frac{+2\,a \pm \sqrt{4\,a^2 - 8\,m\,p}}{2\,m} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2\,m\,p}}{m}$$

następnie określimy

$$M\,A = \frac{h}{\sin\ (180^0 - \alpha)} = \frac{h}{\sin\ \alpha}$$

$$N\,B = \frac{h}{\sin\ \beta}$$

Mając $A\,M$ i $B\,N$, łatwo ustalić w terenie punkty M i N.

Dogodniej jest w wypadku projektowania kilku parcel prostemi, $\parallel$-emi do $A\,B$ oraz przy $\alpha + \beta$ bliskiem do 180^0, a więc m bliskiem do zera, stosować inne postępowanie, mianowicie:

$$M\,N = x_1 = a + z_1 + z_2 = a - h\ ctg\ \alpha - h\ ctg\ \beta$$

stąd

$$x_1 = a - h\ (ctg\ \alpha + ctg\ \beta),$$

oznaczając

$$m = ctg\ \alpha + ctg\ \beta$$

mamy

$$x_1 = a - m\,h$$

oraz

$$\frac{a - x_1}{h} = m$$

ponieważ zaś

$$(a + x_1)\ h = 2\ p,$$

więc, mnożąc ostatnie dwa równania, otrzymujemy:

$$a^2 - x_1^2 = 2\ mp$$

$$x_1 = \sqrt{a^2 - 2\ mp}$$

oraz

$$h = \frac{a + x_1}{2\ p} \qquad \frac{2p}{a + x_1}$$

gdy

$$\alpha > 90^0 < \beta,$$

wówczas

$$m = ctg\ \alpha + ctg\ \beta < o \text{ i } x_1 > a$$

gdy

$$\alpha < 90^0 > \beta,$$

wówczas

$$m > o \text{ i } x < a$$

gdy

$$\alpha = \beta = 90^0,$$

wówczas

$$m = o \quad x_1 = a$$

W wypadku, gdy projektujemy szereg parcel ‖-emi do AB, obliczamy kolejno:

$$x_1 = \sqrt{a^2 - 2\ mp_1}$$

$$x_2 = \sqrt{x_1^2 - 2\ mp_2}$$

$$x_3 = \sqrt{x_2^2 - 2\ mp_3}$$

$$h_1 = \frac{2\ p.}{a + x_1}$$

$$h_2 = \frac{2\ p_2}{x_1 + x_2}$$

$$h_3 = \frac{2\ p_3}{x_2 + x_3}$$ i t. d.

Następnie dla sprawdzenia obliczamy:

$$x_n = \sqrt{a^2 - 2\,m\ (p_1 + p_2 + ... + p_n)}$$

$$H_n = \frac{2\ (p_1 + p_2 + ... p_n)}{a + x_n}$$

Powinno zachodzić równanie:

$$H = h_1 + h_2 + ... + h_n,$$

co daje kontrolę rachunku.

Jak widzimy, rozwiązanie powyższego zagadnienia nie wymaga sporządzania planu.

VI. Równolegle do granicy ABC odciąć powierzchnię p.

Pomierzono:

$$AB = b_1$$

$$BC = b_2$$

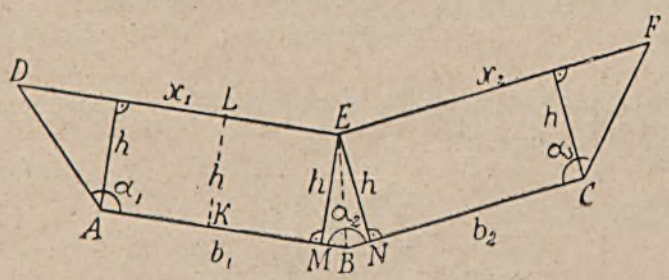
oraz kąty

$$\alpha_1\ \alpha_2 \text{ i } \alpha_3$$

Poprowadźmy dwusieczną kąta środkowego α_2.

Przypuśćmy, że proste $DE \parallel AB$ i $EF \parallel BC$ odcinają określaną powierzchnię p.

Prostopadłe EM i EN są równe, gdyż wchodzą do prostokątnych Δ-ów o wspólnej przeciwprostokątnej EB i równych ostrych kątach $\frac{\alpha_2}{2}$.



Rys. 432.

Boki $DE = x_1$ i $EF = x_2$ określimy z równań:

$$x_1 = b_1 - h\,ctg\alpha_1 - h\,ctg\ \frac{\alpha_2}{2}$$

$$x_2 = b_2 - h\,ctg\,\frac{\alpha_2}{2} - h\,ctg\,\alpha_3$$

dodając, otrzymamy:

$$[x] = [b] - h\,(ctg\,\alpha_1 + 2\,ctg\,\frac{\alpha_2}{2} + ctg\,\alpha_3)$$

oznaczając wyraz w nawiasie przez m, napiszemy:

$$[x] = [b] - mh,$$

skąd

$$h = \frac{[b] - [x]}{m} \qquad (a)$$

lecz

$$\begin{aligned} (b_1 + x_1)\,h &= 2\,p_1 \\ (b_2 + x_2)\,h &= 2\,p_2 \\ \hline \{[b] + [x]\}\,h &= 2\,p \end{aligned}$$

Podstawiając h z równania (a), otrzymamy

$$[b]^2 - [x]^2 = 2\,mp$$

skąd

$$[x] = \sqrt{[b]^2 - 2\,mp}$$

oraz

$$h = \frac{2\,p}{[b] + [x]}$$

Dla wprowadzenia podziału na grunt obliczymy i odmierzymy:

$$AD = \frac{h}{\sin(180^0 - \alpha_1)} = \frac{h}{\sin\alpha_1}$$

$$CF = \frac{h}{\sin\alpha_3}$$

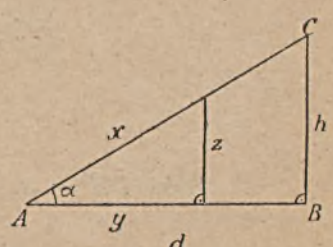
W dowolnym punkcie K na boku AB wystawimy $\perp$-ą $KL = h$ i wytyczymy $DLE = x_1$ a dla kontroli pomierzymy EF, które powinno równać się x_2.

VII. Odciąć powierzchnię p prostą $\perp$-ą do ramienia kąta:

a) kąt α pomierzono.

$$2\,p = yz = y^2\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad y = \sqrt{\frac{2\,p}{\mathrm{tg}\,\alpha}}$$

$$x = \frac{y}{\cos\alpha} = \sqrt{\frac{2p}{\mathrm{tg}\,\alpha\,\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{4\,p}{\sin 2\,\alpha}};$$



Rys. 433.

b) kąt α jest nieznany:

W dowolnym punkcie B wystawiamy prostopadłą do AB i mierzymy:

d

$$AB = d \quad CB = h$$

$$p_0 = p_{ABC} = \frac{dh}{2}$$

$$p_0 : p = d^2 : y^2$$

$$y = d\sqrt{\frac{p}{p_0}} \text{ i analogicznie } z = h\sqrt{\frac{p}{p_0}}$$

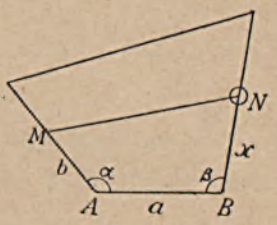
zaś

$$x = \sqrt{z^2 + y^2} = \sqrt{\frac{p}{p_0}(d^2 + h^2)}$$

VIII. Od czworoboku o danym boku a i przyległych doń kątach α i β odciąć powierzchnię p prostą, przechodzącą przez punkt M, leżący na drugim boku w odległości b od punktu A.

Zagadnienie rozwiążemy, gdy ustalimy położenie punktu N, przez który ma przejść prosta, odcinająca p.

Oznaczmy $BN = x$



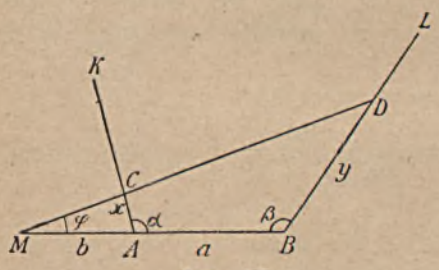
Rys. 434.

$$2p = ab \sin\alpha + ax \sin\beta - bx \sin(\alpha + \beta)$$

$$x = \frac{2p - ab \sin\alpha}{a \sin\beta - b \sin(\alpha+\beta)}$$

IX. Odciąć powierzchnię p, prostą, przechodzącą przez punkt M, leżący na przedłużeniu boku AB.

Dane są: $a = AB$, α, β i $b = MA$.



Rys. 435.

Przypuśćmy, że prosta MD odcina od figury $KABL$ powierzchnię p i tworzy z BM kąt φ.

$$2p = 2p_{MBD} - 2p_{AMC} =$$

$$= \frac{(a+b)^2}{ctg\,\varphi + ctg\,\beta} - \frac{b^2}{ctg\,\varphi - ctg\,\alpha}$$

$$2p\,(ctg\,\varphi + ctg\,\beta)\,(ctg\,\varphi - ctg\,\alpha) = (a+b)^2\,(ctg\,\varphi - ctg\,\alpha) - b^2\,(ctg\,\varphi + ctg\,\beta).$$

Oznaczmy:

$$ctg\,\varphi = z$$
$$ctg\,\beta = m$$
$$ctg\,\alpha = n$$
$$a + b = l$$

będzie

$$2p\,(z+m)\,(z-n) = l^2\,(z-n) - b^2\,(z+m)$$

$$2\,pz^2 + 2\,p\,(m - n)\,z - 2\,pmn = lz^2 - ln^2 - b^2z - b^2m$$

$$2\,pz^2 + \{2\,p\,(m - n) - l^2 + b^2\}\,z + (ln^2 + bm^2 - 2pmn) = 0.$$

Oznaczmy spółczynnik przy z^2 literą A, przy z literą B, wyraz wiadomy równania literą C. Otrzymamy równanie drugiego stopnia:

$$Az^2 + Bz + C = 0$$

skąd określimy

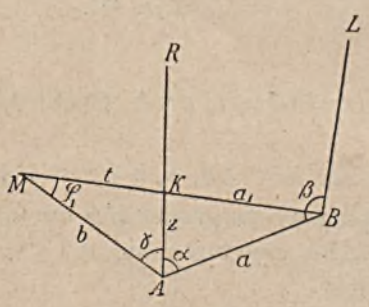
$$z = ctg\,\varphi = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4\,AC}}{2A}$$

Mając z i φ, obliczymy

$$AC = x = b\,\frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}$$

$$BD = y = (a + b)\,\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi + \beta)}$$

X. Od tej samej figury odciąć powierzchnię, przechodzącą przez dany punkt M.



Rys. 436.

Jeżeli dany punkt M jest dany, wówczas dane są $MA = b$ i $\sphericalangle MAR = \gamma$.

Połączmy punkt M z B, otrzymamy w przecięciu się z AR punkt K.

Jeżeli obliczymy $\sphericalangle RKB$, $KB = a_1$, KBL i $MK = t$ oraz powierzchnię Δ-a ABK równą p_0, wówczas przy BK odetniemy powierzchnię $p - p_0$ metodą wskazaną w IX zadaniu.

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\{\varphi_1 + (\gamma + \alpha)\}} =$$

$$= \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_1\cos(\gamma + \alpha) + \cos\varphi_1\sin(\gamma + \alpha)}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\cos(\gamma + \alpha) + ctg\,\varphi_1\sin(\alpha + \gamma)}$$

skąd

$$\operatorname{ctg}\varphi_1 = \frac{b - a\cos(\gamma + \alpha)}{a\sin(\alpha + \gamma)}$$

Stąd obliczymy kąt φ_1

oraz

$$AK = z = b\,\frac{\sin\varphi_1}{\sin(\varphi_1 + \gamma)};\quad MK = t = b\,\frac{\sin\gamma}{\sin(\varphi_1 + \gamma)}$$

$$\text{Kąt } RKB = 180^0 - (\gamma + \varphi_1)$$

$$\text{Kąt } KBL = \beta - \sphericalangle KBA = \beta - \{180^0 - \alpha - \sphericalangle BKA\} = \beta - 180^0 + \alpha + \varphi_1 + \gamma.$$

Zagadnienie sprowadziliśmy do poprzedniego.

XI. Podzielić czworobok $ABCD$ prostą EF na części w stosunku $m : n$ w ten sposób, aby boki AD i BC były podzielone w równych stosunkach.

Oznaczmy: $AB = a$, $CD = b$, $AD = c$, $CB = d$, $AE = r$, $FB = s$.

Podział winien być tak uskuteczniony, by

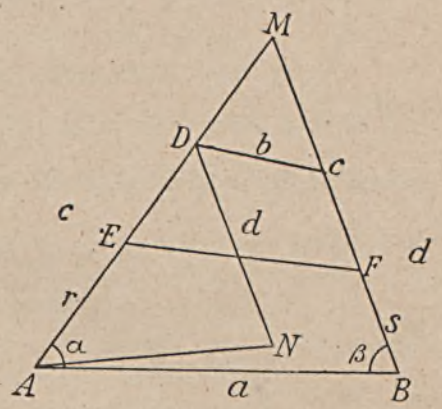
$$P_{ABFE} : P_{EFCD} = m : n$$

$$r : c = s : d = q$$

gdzie q jest nieznane.

Powierzchnia P czworoboku $ABCD$ określa się z równania:

$$2P = ac \sin \alpha + ad \sin \beta - cd \sin (\alpha + \beta)$$



Rys. 437.

Jeżeli przez punkt D poprowadzimy $DN = CB$ równolegle do CB, wówczas otrzymamy trójkąt zbieżności ADN o powierzchni p_o, równej

$$p_o = \frac{cd}{2} \sin (\alpha + \beta)$$

gdyż

$$\sphericalangle ADN = \sphericalangle AMB = 180^0 - (\alpha + \beta)$$

Stąd

$$2P = a (c \sin \alpha + d \sin \beta) - 2p_o$$

Powierzchnia $p_1 = p_{ABFE}$, zgodnie z założeniem, określi się z równania:

$$2p_1 = 2 \frac{m}{m+n} P = ar \sin \alpha + as \sin \beta - rs \sin (\alpha + \beta),$$

lecz

$$r = cq$$

$$s = dq,$$

więc

$$(1) \qquad 2p_1 = q (ac \sin \alpha + ad \sin \beta) - q^2 cd \sin (\alpha + \beta),$$

ponieważ

$$cd \sin (\alpha + \beta) = 2p_o$$

$$ac \sin \alpha + ad \sin \beta = 2P + cd \sin (\alpha + \beta) = 2P + 2p_o = 2 (P + p_o),$$

więc z (1)-ego

$$2p_o q^2 - 2q (P + p_o) + 2p_1 = 0,$$

skąd

$$p_o\, q^2 - q\,(P + p_o) + p_1 = 0.$$

Stąd szukany stosunek q będzie równy:

$$q = \frac{P + p_0 \pm \sqrt{(P + p_0)^2 - 4\, p_0\, p_1}}{2\, p_0}$$

i obliczymy

$$r = c\, q, \qquad s = d\, q$$

Przy $\alpha + \beta$, bliskiem 180^0, co często zachodzi w czworobokach, p_0 jest bliskie zera, dogodniej jest obliczać nie q, a $\frac{1}{q}$, mianowicie, dzieląc równanie dla q przez q^2, otrzymamy

$$p_0 - \frac{P + p_0}{q} + \frac{p_1}{q^2} = o$$

lub

$$p_1 \left(\frac{1}{q}\right)^2 - (P + p_0)\,\frac{1}{q} + p_0 = o$$

skąd

$$\frac{1}{q} = \frac{P + p_0 \pm \sqrt{(P + p_0)^2 - 4\, p_1\, p_0}}{2\, p_1} = \frac{P + p_0}{2\, p_1} \pm$$

$$\pm \frac{P + p_0}{2\, p_1} \sqrt{1 - \frac{4\, p_1\, p_0}{(P + p_0)^2}};$$

§ 199. Projektowanie kompleksów i grup parcel.

Przy projektowaniu licznych działek, należy je łączyć po kilka w grupy i, przed szczegółowym projektowaniem poszczególnych parcel, projektować uprzednio t. zw. grupy parcel. Zwykłe postępowanie ma następujący przebieg:

1) cały obszar, podlegający podziałowi, dzieli się na kompleksy,

2) kompleksy dzielimy na grupy parcel,

3) grupy dzielimy na poszczególne parcele.

Oczywiście kompleksy winny być tak obliczone, aby suma ich powierzchni równa była powierzchni całego obszaru; tak samo w każdym kompleksie suma powierzchni grup parcel winna być równa powierzchni kompleksu; wreszcie projektowanie poszczególnych parcel powinno dać ostateczne ich powierzchnie, uzgodnione z powierzchniami grup.

Co się tyczy położenia granic kompleksów, to za takowe obieramy istniejące granice dzielonego obszaru, koleje, szosy i trakty oraz rzeczki,

dzielące obszar na naturalne kompleksy, granice użytków, oczywiście możliwie wyprostowane, oraz linje projektowane, oddzielające całe grupy parcel; często wzdłuż tych projektowanych linij przebiegają po jednej ich stronie projektowane drogi dojazdowe, łączące najczęściej drogi istniejące, które nie ulegają skreśleniu (np. drogi międzywioskowe, trakty, szosy i t. p.).

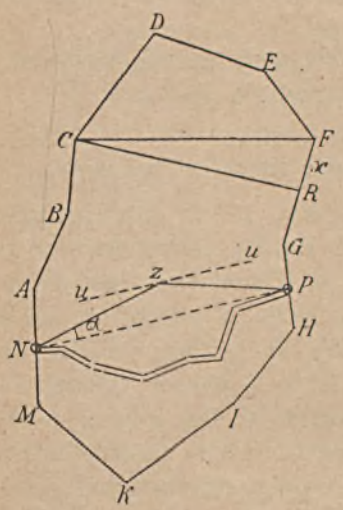


Rys. 438.

Dążyć należy do takiego projektowania linij, oddzielających całe grupy parcel, aby te linje tworzyły najmniejszą ilość załamań, a także by kąty, utworzone przez projektowane linje oraz istniejące drogi (np. *CAB*), nie były mniejsze od 60°, o ile linje te leżą w gruntach ornych lub mają być, jak *A B*, granicami dróg.

Rozpatrzmy kilka przykładów.

Odciąć przy granicy *CDEF* kompleks o powierzchni *P* prostą, przechodzącą przez punkt *C*.



Rys. 439.

Przypuśćmy, że przybliżone projektowanie (graficznie lub planimetrem) wskazuje, że projektowana prosta przetnie bok *FG*.

Wówczas obliczamy ze spółrzędnych powierzchnię *CDEFG*, która wyniesie p_o. Następnie obliczymy powierzchnię p_1 Δ-a *CFG*. Przy *CF* dołączyć należy $P - p_o$.

Projektowaną prostą będzie *CR*, przecinająca bok *FG* w punkcie *R*, odległym od *F* od odcinek $FR = X$, obliczany z równania:

$$(P - p_o) : p_1 = X : FG$$

$$X = \frac{P - p_o}{p_1} FG$$

Odcinek *FG* jest dany.

Jeżeli, np., linja, oddzielająca kompleksy, ma przejść przez wyloty starych dróg, t. j. przez punkty *N* i *P*, gdyż wzdłuż niej ma przejść nowozaprojektowana droga zamiast starej, wówczas, o ile inne miejscowe względy nie wchodzą w grę, zaprojektujemy ją w postaci łamanej *AZP*. Mianowicie kompleks *NZPHIKM* ma mieć powierzchnię *P*. Powierzchnia poligonu *NPHIKM* wynosi p_0. Przypuśćmy, że $P > p_0$. Należy dodać $P - p_0$. Po obliczeniu spółrzędnych (gdy nie są dane) punktu *N* na prostej *AM* i *P* na *GH* obliczymy:

$$tg\ (NP) = \frac{Y_p - Y_N}{X_p - X_N}$$

oraz długość

$$NP = \frac{Y_p - Y_N}{\sin\ (NP)} = \frac{X_p - X_N}{\cos\ (NP)}$$

Stąd wysokością Δ-a NPZ będzie

$$h = \frac{2\,(P - p_0)}{NP}$$

Położenie punktu Z możemy ustalić w dowolnym punkcie równoległej uu do NP, poprowadzonej od NP w odległości h, lub, zakładając kąt α, obliczymy

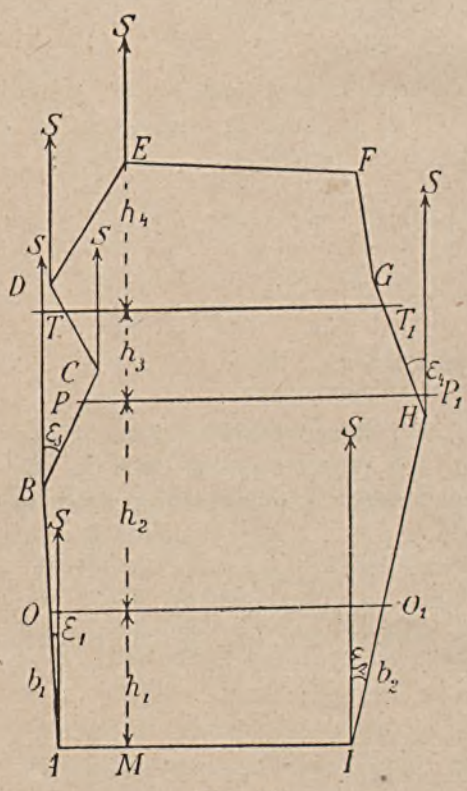
$$NZ = \frac{h}{\sin \alpha}$$

Mając azymut (NP), obliczymy $(N\,Z) = (N\,P) - \alpha$ oraz spółrzędne

$$X_z = X_N + NZ \cos (NZ)$$

$$Y_z = Y_N + NZ \sin (NZ)$$

Dla skontrolowania rachunku porównamy obliczoną ze spółrzędnych punktów N, Z i P powierzchnię Δ-a NZP z powierzchnią $P - p_0$.



Rys. 440.

Projektowanie parcel w grupach.

Przypuśćmy, że w danej grupie czy kompleksie należy zaprojektować n parcel. Przy $n > 6$ wskazane jest dokonanie podziału tych n parcel na taką liczbę grup, aby w każdej z nich nie było więcej, niż 5—6 parcel. Grupy te należy projektować ściśle, a więc ustalać ich powierzchnie ze spółrzędnych. Przypuśćmy, że nasz rysunek przedstawia jedną z takich grup, w której mamy zaprojektować szereg parcel z dokładnością, np., do $\frac{1}{200}$.

Stosujemy metodę kolejnych przybliżeń (§ 197), projektując prostemi ‖-emi, np., do AI. Spuśćmy z punktu E prostą $EM \perp AI$.

Odczytamy z planu długość AM i obliczymy spółrzędne punktu M

$$X_M = X_A + AM \cos (AI)$$

$$Y_M = Y_A + AM \sin (AI)$$

Ze spółrzędnych punktów E i M obliczymy na zasadzie azymutu $(ME) = (AI) - 90^0$ lub określimy graficznie

długość

$$ME = \frac{y_E - y_M}{\sin (ME)} = \frac{x_E - x_M}{\cos (ME)};$$

Powinno zachodzić równanie:

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = ME.$$

Wielkości h odczytamy z podziałki; otrzymamy, dodając poszczególne h, wyraz $[h]$, różny od ME.

Wysokość h należy poprawić o wielkość

$$\frac{ME - [h]}{n}$$

Wyrównaliśmy w ten sposób wysokości parcel. Z wyrównanych wysokości h_1 h_2 .... h_n korzystamy przy ustalaniu punktów przecięcia się prostych OO_1, PP_1 i TT_1 z bokami poligonu ABC ..,. HIA; położenie tych punktów winniśmy znać dla właściwego wprowadzenia projektu w terenie.

Oznaczmy odcinki AO i IO_1 literami b i b_1. Ścisły kierunek (azymut) prostopadłej do AI jest równy $(AS) = (BS) =$ ..... $(PS) = (IS) = (AI) - 90^0$.

Obliczymy kąty, tworzone przez boki poligonu, obejmującego daną grupę, z prostopadłemi do AI;

tak więc

$$\varepsilon_1 = (AS) - (AB)$$
$$\varepsilon_2 = (IH) - (IS)$$
$$\varepsilon_3 = (BC) - (BS)$$
$$\varepsilon_4 = (HS) - (GH)$$
$$— — — — — —$$
$$— — — — — —$$
$$— — — — — —$$

a stąd

$$b_1 = \frac{h_1}{\cos \varepsilon_1}$$

$$b_2 = \frac{h_1}{\cos \varepsilon_2}$$

$$BP = \frac{h_2 - BO \cos \varepsilon_1}{\cos \varepsilon_3}$$

$$HP_1 = \frac{h_2 - O_1 H \cos \varepsilon_2}{\cos \varepsilon_4}$$

— — — — — — — —

— — — — — — — —

— — — — — — — —

Wystarczającem sprawdzeniem obliczenia tych odcinków będzie porównanie ich z długościami b_1, b_2, BP, HP_1 i t. d., wziętemi z planu w jego podziałce.

Na projekcie, równolegle do odpowiednich boków parcel, wypiszemy obliczone miary b_1, b_2, BP, HP_1, i t. d. i projekt wprowadzimy w terenie, odmierzając odpowiednio te odcinki i ustalając na ich końcach znaki graniczne. Oczywiście, po odmierzeniu, np., $b_1 = AO$, należy zmierzyć oddzielnie OB i sprawdzić, czy $b_1 + OB$ zgadza się w granicach dokładności podwójnego pomiaru prostych z długością AB w rejestrze rachunku spółrzędnych.

Obliczanie odcinków b na podstawie h i cos ε może być wykonane zapomocą tablic przyrostów metodą kolejnych przybliżeń.

Przypuśćmy, że

(1) $h = 197{,}58$
$\varepsilon = 10^0\ 39'$

Na stronicy cos 10^0 tablic przyrostów dla najbliższej, lecz większej od h okrągłej liczby 200, odnajdziemy:

dla boku	mamy przyrost h	
200	196,55	pozostaje 1,03 = 197,58 — 196,55
1.00	0.98	pozostaje 0,05 = 1,03 — 0,98
0,05	0,05	
Razem: b=201,05	h=197,58	

(b) dla $h = 178{,}31$
$\varepsilon = 35^0\ 43'$

Na stronicy cos 35^0 mamy:

dla boku:	przyrost h	
150	121,78	pozostaje 178,31—121,78=56,53
60	48,71	pozostaje 56,53—48,71=7,82
9	7,31	pozostaje 7,82—7,31=0,51
0,62	0,51	
Razem dla b=219,62	h=178,31	

Projektowanie grupy parcel trapezami.

Przypuśćmy, że w czworoboku ⊙ 17 ⊙ 26 ⊙ 27 ⊙ 25 o danej powierzchni należy zaprojektować szereg parcel prostemi, ∥-emi do boku ⊙ 25 ⊙ 27.

W załączonym przykładzie dane są:

ogólna powierzchnia grupy P=18 *ha* 8345 m^2;

powierzchnia projektowanych parcel, każda, za wyjątkiem parceli 39, o powierzchni $p = 1$ *ha* 4488 m^2;

wszystkie boki i kąty czworoboku, jak na rys. 440a.

Rachunek projektowania posuwa się bardzo szybko przy użyciu arytmometru. Dla wszystkich bowiem parcel α i β są jednakowe, a więc i wyraz

$$-2p\ (ctg\ \alpha + ctg\ \beta)$$

jest wspólny.

Kolejność projektowania jest następująca: (patrz str. 473):

wpisujemy projektowane p i $2p$ w kolumnie 2-ej dla każdej parceli;

w kolumnie 8-ej obliczamy $ctg\ \alpha + ctg\ \beta$ i wtedy do kolumny 2-ej dla każdej parceli wpisujemy $-2p\ (ctg\ \alpha + ctg\ \beta)$;

w kolumnie 3-ej wpisujemy długość a_n początkowego boku i kwadrat tej długości, obliczony na arytmometrze;

w tej samej kolumnie następnej parceli wypiszemy drugą podstawę parceli 28-ej, obliczonej ze wzoru dla trapezu

$$x^2 = a_{n+1}^2 = a_n^2 - 2p \times$$

$$\times\ (ctg\ \alpha + ctg\ \beta) = 54375{,}1666$$

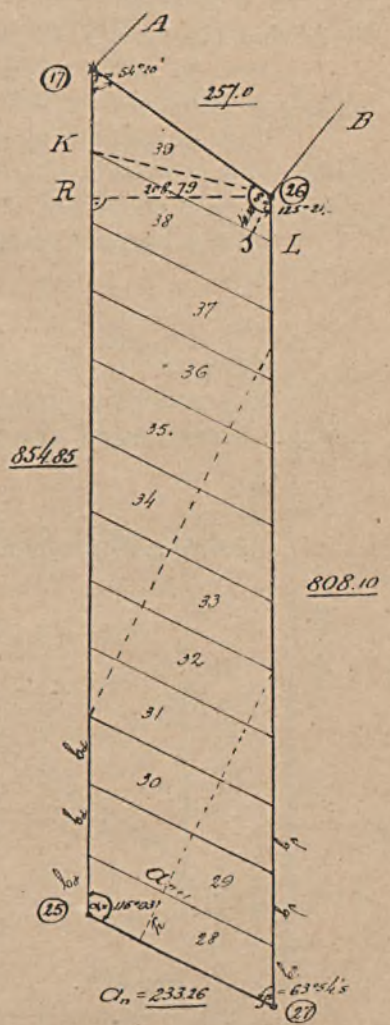
a więc, jako algebraiczna suma dolnej pozycji kolumny 2-ej i kolumny 3-ej.

Nad uzyskaną pozycją a_{n+1}^2 wypisujemy pierwiastek z niej, t. j. $a_{n+1} = 233{,}18$ w kolumnie 3-ej.

Analogicznie obliczymy całą kolumnę 3-ą dla wszystkich parcel.

Kolumnę 4-ą dla każdej parceli wypiszemy jako sumę a_n danej i następnej parceli, poczem obliczymy kolumnę 5-ą dla wszystkich parcel. Następnie obliczymy całą kolumnę 6-ą, a wreszcie — 7-ą.

Ponieważ ostatnia parcela № 39 nie jest trapezem, przeto należy oddzielnie obliczyć jej powierzchnię dla porównania z różnicą pomiędzy powierzchnią całej grupy parcel ⊙ 25 ⊙ 27 ⊙ 26 ⊙ 17 a sumą parcel od 28 do 38-ej włącznie.



Rys. 440a.

W tym celu dzielimy parcelę 39-ą na dwa Δ-y: ⊙ 17 K ⊙ 26 i K ⊙ 26 L obliczamy odcinki:

$$⊙\ 17\ K = ⊙\ 25\ ⊙\ 17 - [b_\alpha]$$

$$\odot 26\, R = \odot 26 \odot 17 \sin \gamma = 208{,}79$$

$$\odot 26\, S = (\odot 26 \odot 27 - [b_3]) \sin \beta = 41{,}33$$

Stąd

$$P_{39} = p_{\odot 17\,K \odot 26} + p_{K \odot 26\,L} = \frac{\odot 17\, K \times \odot 26\, R}{2} + \frac{KL \times \odot 26\, S}{2}$$

Odcinek KL jest ostatnim obliczonym $a_{n+1} = 232{,}43$.
Z powyższego obliczenia (kolumna 8)

$$P_{39} = 1\ ha\ 4516\ m^2$$

różni się o $27 m^2$ od reszty kompleksu po zaprojektowaniu parcel od 28 do 38-ej włącznie, równej $18\ ha\ 8345 - 12 \times 1{,}4488\ ha = 1{,}4489\ ha$.

Jest to więc różnica niewielka, przytem zupełnie dopuszczana Instrukcją Ministerstwa Reform Rolnych.

Przy pomiarach miejskich różnicę tę należałoby rozrzucić ze znakiem — na wszystkie parcele danego kompleksu po 2—3 m^2 na każdą, gdyż różnica ta jest wynikiem zaokrągleń w ostatnich cyfrach rachunku.

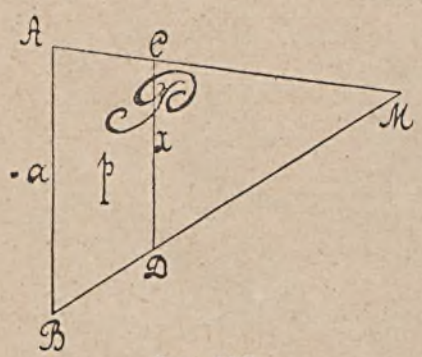
Gdyby kompleks ciągnął się dalej ku AB i

$$p_{39} > p_{KL \odot 26 \odot 17}$$

wówczas resztę parceli 39-ej moglibyśmy zaprojektować $\parallel$-e do $\odot 17 \odot 26$ i podobnie projektować dalsze parcele, oddzielając w kolumnie „Uwagi“ kreską nową grupę od poprzedniej i licząc nowe

$$ctg\ \alpha + ctg\ \beta.$$ (patrz tabelkę str. 473).

Analityczne projektowanie grup trapezów.



Rys. 440b.

Przypuśćmy, że między dwiema prostemi o kierunkach AM i BM mamy zaprojektować szereg parcel prostemi, $\parallel$-emi do AB.

Jeżeli oznaczymy powierzchnię odcinanej parceli literą p, powierzchnię $\triangle$-ą AMB literą P, wówczas powierzchnią $\triangle$-a CDM byłaby wielkość $P - p$.

Oznaczmy $CD = x$, wówczas

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{P-p}{P}$$

a stąd

$$x = a \sqrt{\frac{P-p}{P}} = a \sqrt{1-\frac{p}{P}}$$

Ponieważ

$$2P = \frac{a^2}{ctg\ \alpha + ctg\ \beta} = \frac{a^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$

Wzór: $a_{n+1} = \sqrt{a^2_n - 2p\,(cotg\alpha + cotg\beta)}$; $h = \frac{2p}{a_n + a_{n+1}}$;

№ № parcel	Powierzchnia projektowana p $2p$ $-2p(ctg\alpha + ctg\beta)$	a_n a^2_n a_{n+1} a^2_{n+1}	$a_n + a_{n+1}$	$h = \frac{2p}{a_n + a_{n+1}}$	$\frac{1}{\sin\alpha}$ $b_\alpha = \frac{h}{\sin\alpha}$	$\frac{1}{\sin\beta}$ $b_\beta = \frac{h}{\sin\beta}$	UWAGI
1	2	3	4	5	6	7	8
28	1,4488 2,8976 — 35,0610	233,26 54410,2276	466,44	62,12	1,113077 69,14	1,113468 69,17	
29	1,4488 2,8976 — 35,0610	233,18 54375,1666	466,29	62,14	„ 69,17	„ 69,19	$\alpha = 116^0\,03'$ $\beta = 63^0\,54',5$
30	„	233,11 54340,1056	466,14	62,16	„ 69,19	„ 69,21	$ctg\alpha = -0,48851$ $ctg\beta = +0,48972$
31	„	233,03 54305,0446	465,99	62,18	„ 69,21	„ 69.24	$ctg\alpha + ctg\beta =$ $= +0,00121$
32	„	232,96 54269,9836	465,84	62,20	„ 69,23	„ 69,26	
33	„	232,88 54234,9226	465,69	62,22	„ 69,26	„ 69,28	
34	„	232,81 54199,8616	465,54	62,24	„ 69,28	„ 69,30	
35	„	232,73 54164,8006	465,39	62,26	„ 69,30	„ 69,32	
36	„	232,66 54129,7396	465,24	62,28	„ 69,32	„ 69,35	
37	„	232,58 54094,6786	465,09	62,30	„ 69,34	„ 69,37	
38	„	232,51 54059,6176	484,94	62,32	„ 69,37	„ 69,39	
39	„	232,43 54024,5566			93,04	46,02	
					854,85	808,10	

Sprawdzenie parceli № 39. $= 1,4516\ m^2$

$P_{\text{A K.17.26}} = 9713\ m^2$ $P_{\text{parc. № 39}}$

$P_{\text{A 26.L.K.}} = 4803$ „ powinno być $18,8345 - 12 \times 1,4488 = 1,4489$ „

Odchyłka $= +27$ „

$fp = \frac{1}{530}$;

może być obliczone, więc możemy również ustalić wielkość stosunku

$$k = \frac{p}{P} = \frac{2\,p \sin(\alpha + \beta)}{a^2 \sin\alpha \sin\beta}$$

i

$$x = a\sqrt{1-k}$$

wysokość zaś trapezu o powierzchni p wyniesie:

$$h = \frac{2\,p}{a+x} = \frac{2\,p}{a\,(1+\sqrt{1-k}} = \frac{2\,p\,(1-\sqrt{1-k}}{a\,k}$$

Lecz

$$\sqrt{1-k} = 1 - \frac{k}{2} - \frac{k^2}{8} - \frac{k^3}{16} = \ldots\ldots\ldots$$

stąd

$$h^* = \frac{2\,p}{a\,k}\left(\frac{k}{2} + \frac{k^2}{8} + \frac{k^3}{16}\cdot\ldots\ldots\right) = \frac{p}{a} + \frac{p}{a}\cdot\frac{k}{4} + \frac{p}{a}\cdot\frac{k^2}{8} + \ldots\ldots$$

Jeżeli

$$P > 10\,p$$

t. j. jeżeli $k < 0{,}1$, a więc cecha log k wynosi $\overline{2}$,

wówczas

$$\frac{p}{a}\cdot\frac{k^2}{8} < \frac{p}{a}\cdot\frac{1}{8000}$$ 800

jest wyrazem o tyle małym w zwykłych warunkach (gdy przy przeciętnej wielkości parcel h jest mniejsze lub niezbyt większe od a), że może nie być brany pod uwagę.

A wtedy wzór na h przekształci się na:

$$h = \frac{p}{a} + \frac{p}{a}\cdot\frac{k^*}{4}$$

Metoda ta może być stosowana w zastępstwie zasadniczej metody projektowania trapezów.

Przykład:

Dane:

$a = 255{,}1$

$\alpha = 68^0\,0'$

$\beta = 101^0\,15'$

$p = 5000\ m^2$

---

*) Wzór opracowany przez prof. p. M. Jankowskiego.

Obliczenie k:

log 2 p	4.00 000
log sin $(\alpha + \beta)$	9.27 073
2 *clog* a	5.18 658
clog sin β	0.00 843
clog sin α	0.03 283
log k	8.49 857

Obliczenie h:

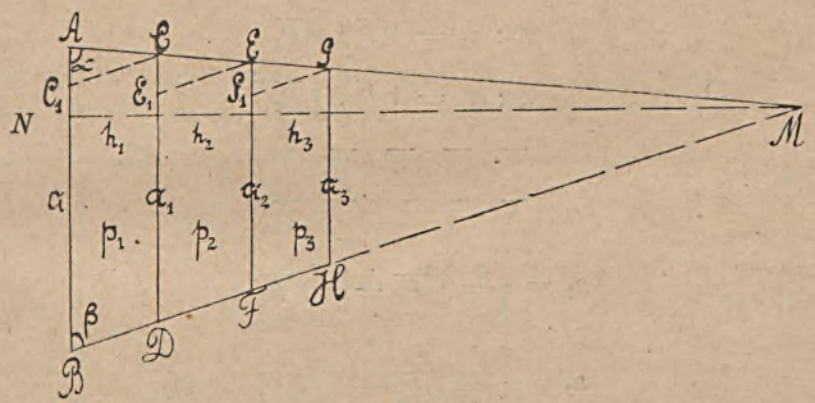
log p	3.69 897
log a	2.40 671
log $(p:a)$	1.29 226
log k	8.49 857
clog 4	9.60 206
log $\frac{p}{a} \cdot \frac{k}{4}$	9.39 289

$$\frac{p}{a} = 19{,}60$$

$$\frac{p}{a} \cdot \frac{k}{4} = 0{,}247$$

$$h = 19{,}85$$

Obliczenie odcinków $A\,B$ i $C\,D$ przy znanych a, h, α p nie wymaga rozpatrywania. Dla projektowania następnej parceli należy obliczyć $C\,D$.



Rys. 440 c.

Gdy mamy do zaprojektowania cały szereg parcel prostemi, ‖-emi do $A\,B$, wówczas postępowanie lepiej jest oprzeć na następujących podstawach: Przypuśćmy, że proste $C\,D$, $E\,F$, $G\,H$ i t. d. mają odciąć powierzchnię trapezów p_1, p_2, p_3 ..... o nieznanych tymczasem wysokościach h_1, h_2, h_3.....

Oznaczmy literą M przecięcie się prostych $A\,G$ i $B\,H$, literą P powierzchnię △-a $A\,M\,B$, literą H — wysokość $M\,N$ tego △-a.

$$2\,P = \frac{a^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \qquad (1)$$

$$H = \frac{2P}{a} = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \qquad (2)$$

Oznaczmy:

$$\begin{aligned} P_1 &= P - p_1 = P_{MCD} \\ P_2 &= P - (p_1 + p_2) = P_{EFM} \qquad (3) \\ P_3 &= P - (p_1 + p_2 + p_3) = P_{GHM} \\ &- - - - - - - - - - \\ &- - - - - - - - - - \end{aligned}$$

Oznaczmy:

$$CD = a_1$$

$$EF = a_2$$

$$- - - -$$

$$- - - -$$

Przeprowadzimy przez C, E, G... proste $\parallel$-e do BH do przecięcia się z podstawami odpowiednich trapezów w punktach C_1, E_1, G_1...

Obliczmy teraz podstawy a_1, a_2, a_3... oraz wysokości h_1, h_2... trapezów.

Z podobieństwa $\triangle$-ów ABM, CDM, EFM i t. d. napiszemy:

$$a : a_1 = \sqrt{P} : \sqrt{P_1}$$

$$a : a_2 = \sqrt{P} : \sqrt{P_2}$$

$$- - - - -$$

$$- - - - -$$

a stąd:

$$a_1 = \frac{a}{\sqrt{P}} \sqrt{P_1} = r \sqrt{P_1}$$

$$a_2 = \frac{a}{\sqrt{P}} \sqrt{P_2} = r \sqrt{P_2} \qquad (4)$$

$$a_3 = \frac{a}{\sqrt{P}} \sqrt{P_3} = r \sqrt{P_3}$$

$$- - - - - - -$$

$$- - - - - - -$$

gdzie

$$r = \frac{a}{\sqrt{P}} \qquad (4a)$$

czyli wspólny wyraz $\frac{a}{\sqrt{P}}$ oznaczyliśmy r.

Z podobieństwa △-ów ACC_1, ECE_1, GEG_1... do △-a ABM napiszemy:

$$h_1 : H = (a - a_1) : a$$

$$h_2 : H = (a_1 - a_2) : a$$

— — — — — —

— — — — — —

a stąd

$$h_1 = \frac{H}{a}(a - a_1) = s(a - a_1)$$

$$h_2 = \frac{H}{a}(a_1 - a_2) = s(a_1 - a_2) \qquad (5)$$

$$h_3 = \frac{H}{a}(a_2 - a_3) = s(a_2 - a_3)$$

— — — — — — — —

— — — — — — — —

gdzie

$$s = \frac{H}{a} \qquad (5a)$$

Kolejność rozwiązania: obliczymy wzory (1), (2), (4a), (5a); obliczenie ze wzorów (3), (4), (5)-ego możemy ułożyć w schemat, jak np.:

№№ parcel	Powierzchnia parcel m^2	$\frac{P}{P-p_1}$ $\frac{P-p_1-p_2}{\ldots}$ $\ldots$	$\frac{\log r}{\frac{1}{2}\log P_n}$ $\log a$	a_n	$a_n - a_{n+1}$	$\frac{\log s}{\log(a_n - a_{n+1})}$ $\log h_n$	h_n
		— 295600	9.75629	310,20		0.78845	
			2.77073		— 26,33	1.42045	
1	52300		2.52702	336,53		2.20890	161,77
		— 347900			— 23,37		
			2.79989			1.36866	
2	50000		2.55618	359,90		2.15711	143,59
		— 397900			— 21,94		
3	50000						

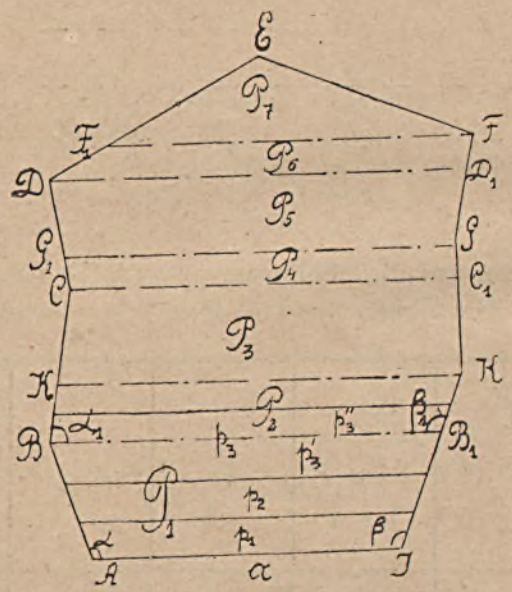
— — — — — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

Gdy punkt M otrzymujemy na przedłużeniu ramion AG i BH, co zachodzi przy $\alpha + \beta > 180^0$, wówczas wielkości P i H wypadną ujemne. Należy wtedy projektowane powierzchnie trapezów traktować jako dodatnie i przy obliczeniu r, s, a_n h_n nie zwracać uwagi na otrzymane znaki P, P_1, P_2.... we wzorach 4 i 4(a). Znaki ujemne obliczonych h również nie mają znaczenia, gdyż wskazują jedynie, że trapezy układają się w kierunku AG, BH, a nie w odwrotnym.

Projektowanie trapezami w bardziej skomplikowanych wypadkach.

Dotychczas rozpatrzyliśmy metody projektowania trapezów, zawartych między dwiema prostemi, tworzącemi z kierunkiem projektowania kąty α i β. Takie wypadki zachodzą najczęściej w kompleksach, położonych wewnątrz dzielonego obszaru, gdy linje, oddzielające kompleksy są, zaprojektowane w postaci prostych o znacznej długości. Często jednak linje, od-



Rys. 440 d.

dzielające kompleksy, składają się z szeregu niedługich stosunkowo prostych, dość znacznie odbiegających od głównego kierunku granicy kompleksu. W spotęgowanym stopniu występuje takie zjawisko w kompleksach, ograniczonych już to obwodnicą, już to pewną linją naturalną, jak np. brzeg rzeki i t. p. W tych bowiem wypadkach mamy cały szereg dość krótkich boków, a ponadto co utrudnia analityczne projektowanie, cały szereg załamań linji, ograniczającej taki kompleks, nie ma obliczonych spółrzędnych.

Rozpatrzmy te obydwa wypadki.

a) Wszystkie załamania granicy ABC .... „ KI kompleksu mają obliczone spółrzędne. Odcinamy parcele p_1, p_2, ... p_u prostemi $\parallel$-emi do AI.

Dzielimy cały kompleks na części prostemi ‖-emi do AI, a przechodzącemi przez wierzchołki ograniczającego kompleks poligonu, jak np BB_1, KK_1, CC_1 ....

Uzyskamy w ten sposób cały szereg głównych trapezów ABB_1I BB_1K_1K, KK_1C_1C .... o powierzchniach P_1, P_2, ...

Projektowanie trapezami odbędzie się więc w granicach głównych trapezów.

Tak, np., w trapezie ABB_1I o powierzchni P zaprojektujemy parcele p_1 i p_2. Jeżeli $p_1 + p_2 + p_3 > P_1 > p_1 + p_2$, wówczas parcelę p_3 dzielimy na dwie części p_3' i p_3'' takie, że

$$p_3' = P_1 - p_1 - p_2$$

$$\text{i } p_3'' = p_3 - p_3'$$

Po określeniu długości BB_1 i kątów $\alpha_1 = KBB_1$ i $\beta_1 = KB_1B$ możemy projektować parcele aż do prostej KK_1, gdzie znów zajdzie potrzeba rozłożenia jednej z parcel na 2 części, obliczenia długości KK_1 i kątów $\alpha_2 = CK_1K$ oraz $\beta_2 = C_1KK_1$.

Jak stąd wynika, należy więc stworzyć główne trapezy, poniekąd odpowiadające terminowi grup parcel, o powierzchniach P_1, P_2 ...., które należy obliczyć i projektować wewnątrz nich.

Obliczenie kątów α i β przy każdej równoległej do AI nie nasuwa trudności, gdyż azymuty AI oraz wszystkich boków poligonu są znane; wypadnie więc tylko utworzyć w odpowiedni sposób różnice tych azymutów dla otrzymania wszystkich α i β.

Długości BB_1, CC_1 .... określimy w następujący sposób:

obliczamy wysokość H_1 pierwszego głównego trapezu

$$H_1 = AB \sin \alpha$$

oraz

$$IB_1 = \frac{H}{\sin \beta} = AB \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

oraz

$$KB_1 = IK - IB_1$$

oraz

$$BB_1 = a - H_1 (ctg\, \alpha + ctg\, \beta)$$

$$\text{i } 2P = (a + BB_1) H_1.$$

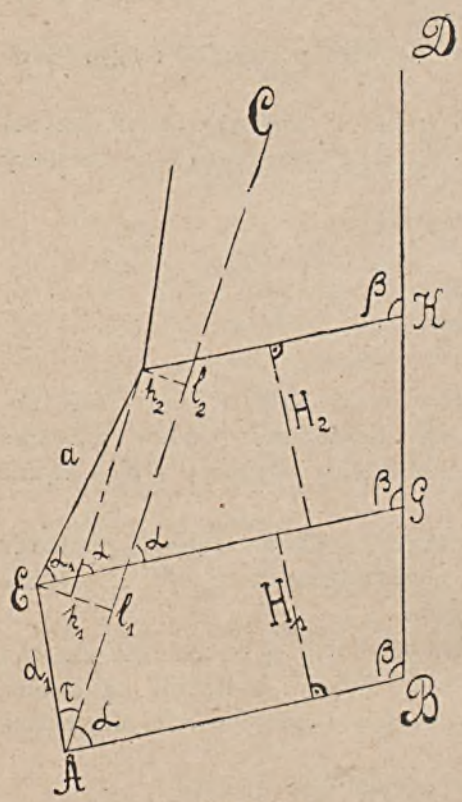
Podobnie dla II-ego głównego trapezu:

$$H_2 = KB_1 \sin \beta_1$$

$$K_1B = \frac{H_2}{\sin \alpha_1}$$

$$K_1 C = BC - K_1 B$$

$$KK_1 = BB_1 - H_2 (ctg\ \alpha_1 + ctg\ \beta_1)$$



Rys. 440 e.

oraz

$$2 P_2 = (BB_1 + KK_1) H_2$$

Analogicznie liczymy aż do końca kompleksu.

Kontrolą ostateczną rachunku jest porównanie *[P]* z powierzchnią kompleksu, uzyskaną ze spółrzędnych; różnica wyniknie tak dzięki zaokrągleniom, jak również wskutek tego, że boki, np., *AB*, *BC*..., nie są uzgodnione ze spółrzędnemi. W każdym bądź razie różnica będzie niewielka i należy ją rozrzucić na odpowiednie *P*.

Projektowanie poszczególnych parcel w głównych trapezach nie wymaga dalszych omówień.

b) Gdy poszczególne załamania granic kompleksu są zdjęte z domiarów do boków poligonu (np. do *AC*) i projektować należy prostemi ‖-emi do *AB*, wówczas, aby stosować postępowanie, rozpatrzone w poprzednim punkcie, należy (rys. 440 c):

1) kąt α zmienić o τ, obliczony z równania

$$tg\ \tau = \frac{h_1}{l_1}$$

w którem h_1 oznacza rzędną, l_1 — odciętą punktu *E* w stosunku do boku *AC*.

2) obliczyć H_1 i *BG* (*EG* ‖ *AB*) z równań

$$H_1 = d_1 \sin (\alpha + \tau)$$

$$BG = \frac{H_1}{\sin \beta}$$

3) obliczyć *EG* i powierzchnię trapezu *AEGB*.

4) obliczyć

$$\alpha_1 = \alpha - \tau_1$$

gdzie τ_1 otrzymamy z równania

$$tg\,\tau_1 = \frac{h_1 - h_2}{l_2 - l_1}$$

w którem h_1, l_1 i h_2, l_2 oznaczają rzędne i odcięte punktów E i F. *)

5) obliczyć ($a = EF$)

$$H_2 = a \sin \alpha_1$$

następnie

$$KG = \frac{H_2}{\sin \beta}$$

oraz długość FK i powierzchnię trapezu głównego $EGKF$.

Posuwając się w podobny sposób dalej, otrzymamy powierzchnie trapezów głównych, zawartych między równoległemi, przechodzącemi przez wszystkie załamania granic kompleksu. Zestawimy sumę tych powierzchni z powierzchnią całego kompleksu, odpowiednio je wyrównamy i wówczas przystąpimy do projektowania poszczególnych parcel.

Oczywiście, takie postępowanie jest o tyle kosztownem, że w wypadku wielkiej liczby domiarów o nieznacznych różnicach w odciętych, może być stosowane tylko przy projektowaniu bardzo drogich parcel. W innych wypadkach, a specjalnie wtedy, gdy plan jest sporządzony w dużej skali, możemy się ograniczyć na projektowaniu metodą kolejnych przybliżeń.

§ 200. Regulacja granic.

Przy przebudowie ustroju rolnego, a często niezależnie od niej, zachodzi potrzeba dokonania takiej zamiany granic poszczególnych parcel, aby te granice były prostolinjowe, a jednak powierzchnie, względnie wartość parcel, których granice ulegają przesunięciu, wskutek niego nie uległy zmianie.

Rozpatrzmy kilka typowych wypadków.

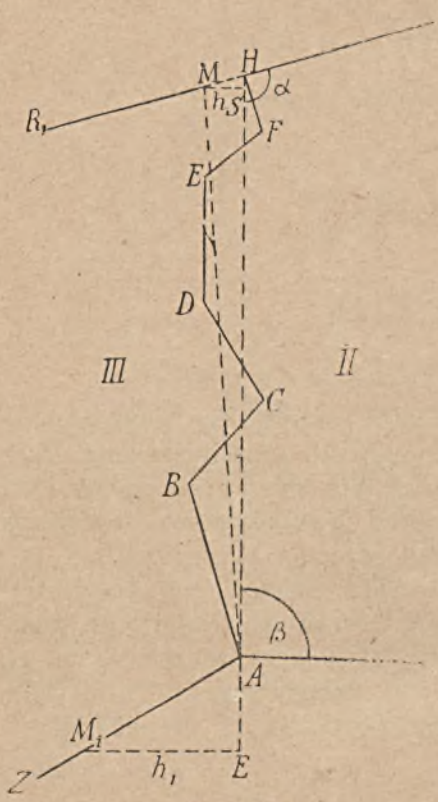
Granice własności II i III obszaru stanowi łamana $A\,B\,C\,D\,E\,F\,H$. Punkty załamania tej granicy zmierzymy metodą rzutowania w odniesieniu do prostej AB. Powierzchnię gruntów obszaru II-ego, licząc ją między prostą AB a granicą obliczymy ze wzorów

$$2\,P = \Sigma\, x_n\,(y_{n+1} - y_{n-1}) =$$

$$= \Sigma\, y_n\,(x_{n-1} - x_{n+1});$$

*) Na rysunku na końcu rzędnej h_2 dopisać F.

przytem dodatnie odcięte X liczyć będziemy od A ku H, rzędne zaś, idące od AH do punktów załamania, a leżące na gruntach II obszaru (np., $\odot E$), będą ujemne, leżące na obszarze III — dodatnie; obliczona powierzchnia P ze znakiem + wskaże, że obszar II posiada więcej o P gruntów po lewej stronie AH, niż obszar III po prawej, odwrotne zaś ustosunkowanie wskaże znak — przy P. Przypuśćmy, że powierzchnię P obliczyliśmy ze znakiem +; wobec tego należy po lewej stronie boku AH dodać III właścicielowi powierzchnię P.



Rys. 441.

Najdogodniej w danym wypadku będzie uskutecznić zamianę granic przez dołączenie P w postaci $\triangle$-a AMH, gdzie MH jest przedłużeniem RH.

Gdy kąt α jest zmierzony, wówczas MH obliczymy z wysokości Δ AHM, równej

$$h = \frac{2P}{AH}$$

skąd

$$MH = \frac{h}{\sin\alpha}$$

Gdy kąty nie są pomierzone, wówczas zastosujemy sposób wskazany w § 198.

Jeżeli wypadnie dołączać $\parallel$-e do AH, to zastosujemy przy znanej wielkości kątów α i β wskazówki w § 198; w braku α — β, metodę kolejnych przybliżeń, używając do wykreślenia figury $R_1 HAZ$ dwu pomocniczych rzędnych h i h_1 i odciętych HS i AE dowolnych punktów M i M_1 leżących na bokach HR_1 i AZ w celu określenia punktów przecięcia się $\parallel$-ej do AH z bokami AZ i HR_1.

ROZDZIAŁ VIII.

NIWELACJA.

§ 201. Klasyfikacja pomiarów wysokościowych.

Dla ustalenia wysokości punktów nad poziomem odniesienia, za który obieramy średnią powierzchnię mórz i oceanów (względnie pewną powierzchnię, równoległą do poziomu mórz), lub dla ustalenia różnic wysokości poszczególnych punktów, posługujemy się pomiarami wysokościowemi (hypsometrycznemi).

Pomiary pionowe dzielimy na:

1) niwelację (poziomowanie) i
2) pomiary wysokości:
   a) geometryczne,
   b) trygonometryczne,
   c) barometryczne (fizyczne),

w zależności od tego, czy stosujemy podstawy geometryczne, trygonometryczne, czy też fizyczne do rozwiązania zagadnienia.

§ 202. Niwelacja.

Dla potrzeb pomiarów wysokościowych, wykonywanych dla celów technicznych, wystarcza przyjąć powierzchnię odniesienia za powierzchnię kuli, koncentrycznej ze środkiem kuli ziemskiej.

Przypuśćmy, że określamy różnicę wysokości punktów A i B. Poprowadźmy przez te punkty powierzchnie kuliste, koncentryczne ze środkiem ziemi. Różnicą wysokości obydwu punktów będzie odcinek BK równy różnicy promieni spółśrodkowych sfer, prowadzonych przez punkty A i B.

W § 9 ustaliliśmy, że w odległości D od dowolnego punktu A styczna AN do powierzchni poziomowej AMK o promieniu R, równym promieniowi kuli ziemskiej, odległa jest od niej o odcinek

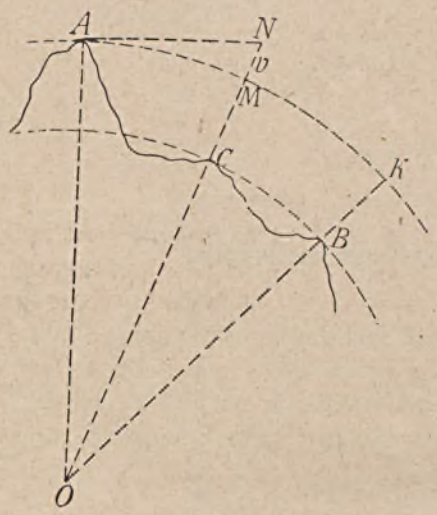
$$v = MN$$

obliczany z równania

$$v = \frac{D^2}{2R}$$

Tak, np. przy $D = 100$ *m.* będzie $v = 0.8$ *mm.*

Jeżeli więc odcinek $v = 0.8$ *mm* i mniejsze odcinki nie mają praktycznego znaczenia, t. j. o ile różnice wysokości A i punktów, leżących na pionie punktu M (gdy $A\,M = 100$ *m*), mają być określone z dokładnością mniejszą, niż do 1 *mm*, wówczas za powierzchnię odniesienia, zamiast kulistej powierzchni $A\,M$ możemy przyjąć płaszczyznę $A\,N$, styczną w punkcie A do poziomu $A\,M$.



Rys. 442.

Jeżeli więc prawdziwą różnicą wysokości punktów A i C jest odcinek $C\,M$, to przy założeniu, że powierzchnię poziomową punktu A na danej jej części utożsamiamy z płaszczyzną $A\,N$, styczną do $A\,M$, tę samą różnicę wysokości określimy, jako odcinek $C\,N$.

Przy określaniu różnicy wysokości zapomocą niwelacji, korzystamy z płaszczyzny, stycznej o powierzchni poziomowej jednego z dwu badanych punktów. Postępujemy w ten sposób dlatego, że zrealizowanie prostych, leżących w płaszczyźnie, stycznej do powierzchni poziomowej, nie nasuwa trudności, czego nie można powiedzieć o powierzchniach poziomowych.

Płaszczyznę styczną do powierzchni poziomowej, t. j. do prawdziwego poziomu, nazywamy poziomem pozornym punktu styczności, t.j. danego punktu, gdyż przez każdy punkt możemy poprowadzić powierzchnię poziomową i płaszczyznę, styczną do niej.

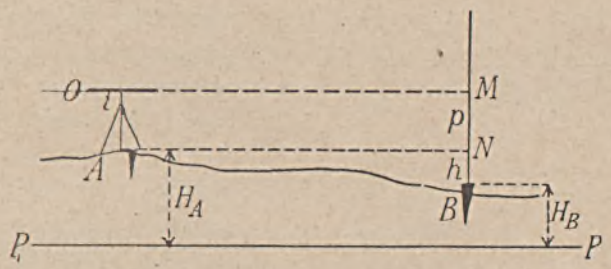
Poziom pozorny może być zrealizowany przez płaszczyznę, styczną do punktu głównego libeli; przyrząd, składający się z libeli i lunety, tak skonstruowany, że oś celowa lunety leży w płaszczyźnie, $\parallel$-ej do płaszczyzny stycznej punktu głównego libeli, nazywa się niwelatorem.

§ 203. Niwelacja wprzód.

Przypuśćmy, że określamy różnicę wysokości punktów A i B. Jeżeli nad punktem A ustawimy niwelator, którego oś celowa, ustawiona do poziomu, znajduje się na wysokości i nad palikiem A, to kierując oś celową lunety na łatę ustawioną pionowo (jako przedłużenie pionu punktu B) w punkcie B, otrzymamy punkt M przecięcia się osi celowej z łatą. Gdy

łata jest podzielona na części metra, poczynając od spodu ku górze, wówczas odczytem, odpowiadającym punktowi M będzie pewna wielkość p.

Poprowadźmy $AN \parallel OM$. Oznaczając literami H_A i H_B wysokość



Rys. 443.

punktów A i B nad poziomem odniesienia PP (przedłużona pod lądami powierzchnia mórz, względnie poziom t. zw. umówiony, t. j. przyjęty na dowolnej wysokości nad poziomem morza), oraz różnicę wysokości punktów A i B literą h_{AB}, otrzymamy

$$H_A + i = H_B + p$$

skąd

$$H_B - H_A = i - p$$

t. j. różnica między wysokością stanowiska łaty B i stanowiska niwelatora A równa się różnicy, liczonej w odwrotnej kolejności, pomiędzy wysokością i osi celowej niwelatora nad punktem A a odczytem p na łacie.

Oznaczając różnicę wysokości $H_B - H_A$ zapomocą h_{AB}, t. j. przyrostu wysokości na odcinku AB, poprzednie równanie przepiszemy w postaci:

$$h_{AB} = H_B - H_A = i - p.$$

Przy zachowaniu warunku, że kolejność A i B w przyroście wysokości h_{AB} jest odwrotna do kolejności A i B w różnicy $H_B - H_A$, mieć będziemy:

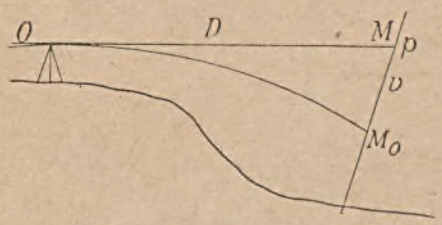
$h_{AB} > o$, gdy $H_B > H_A$, t. j. przy wzniesieniu AB

$h_{AB} = o$, gdy $H_B = H_A$, t. j. przy poziomem AB

$h_{AB} < o$, gdy $H_B < H_A$, t. j. przy opadającem AB.

Przy niwelacji wprzód pamiętać należy, że na odległościach łaty od niwelatora, większych od 113 m., wpływ krzywizny ziemi przekracza 1 mm., przyczem uwzględnienie tego wpływu wymaga zmniejszenia odczytu p o poprawkę

$$V = \frac{D^2}{2R}$$



Rys. 444.

gdyż poziomem punktu O jest powierzchnia OM_0, a nie płaszczyzna OM (rysunek daje przekrój pionowy tych powierzchni, przechodzący przez oś celową).

Zmniejszenie p zwiększa $i - p$, a więc h_{AB}, co znaczy, że różnice wysokości, określone zapomocą poziomu pozornego (z niwelacji wprzód), są mniejsze od rzeczywistych, a więc wprowadzamy poprawkę v, zwiększając dodatnie h_{AB}, lub zmniejszając absolutną wartość ujemnego $h_{AB} = H_B - H_A$.

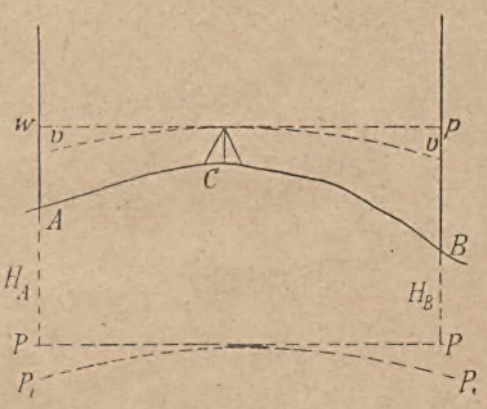
Wprowadzenie poprawki v przy niwelacji wprzód tam tylko jest niezbędne, gdzie wynik ma być otrzymany z taką dokładnością, przy której wielkość tej poprawki nie może być odrzucana.

W praktyce przy niwelacji dla celów technicznych nie uwzględniamy v, tem bardziej, że punkty, których wysokość określamy z niwelacji wprzód, określamy z dokładnością około 1 *cm*.

§ 204. Niwelacja ze środka.

Dla określenia różnicy wysokości dwu punktów A i B stosuje się również niwelacja ze środka, przy której niwelator ustawiamy w jednakowych odległościach od obydwu punktów, a więc albo w środku C odcinka AB, albo też w dowolnym punkcie prostopadłej MN do AB, poprowadzonej przez środek AB.

Przypuśćmy, że spoziomowana oś celowa niwelatora ustawionego w C przecina łaty, ustawione na A i B, w punktach, odpowiadających odczytom w i p na łatach, liczonym od dołu (w odczyt wstecz, p — odczyt wprzód).



Rys. 445.

Przypuśćmy dalej, że wysokości punktów A i B odnosimy do pewnego umówionego poziomu PP, są więc niemi wielkości H_A i H_B.

Ponieważ zastrzegliśmy sobie poziomość osi celowej, a więc równoległość jej do PP, przeto:

$$H_A + w = H_B + p$$

stąd

$$h_{AB} = H_B - H_A = w - p$$

t. j. różnica pomiędzy wysokościami następnego a poprzedniego punktu równa się różnicy między odczytem wstecz, a odczytem wprzód.

Gdy dana jest zgóry wysokość H_A, należy zaś określić H_B, wówczas z ostatniego równania obliczamy:

$$H_B = H_A + (w - p)$$

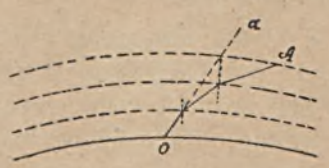
Jeżeli za poziom odniesienia obieramy powierzchnię kulistą, to odczyty w i p z łat, jednakowo odległych od niwelatora, winniśmy zmniejszyć o tę samą poprawkę v, ponieważ zaś

$$w - v - (p - v) = w - p,$$

więc stąd wynika, że wprowadzenie poprawek v do odczytów w i p nie zmieni różnicy $w - p$. Jest to zaletą, jedną z wielu, niwelacji ze środka w porównaniu z niwelacją wprzód, gdyż przy niwelacji ze środka możemy nie brać pod uwagę wpływu kulistości ziemi na wyniki spostrzeżeń.

§ 205. Wpływ refrakcji na wyniki niwelacji.

Jak wiadomo, promień, przechodzący przez warstwy powietrza o różnej gęstości, ulega załamaniu, przytem, gdy z warstw mniej gęstych przechodzi do gęstszych, wówczas zbliża się ku prostopadłej do stycznej dane, warstw. W taki sposób obraz przedmiotu A oko odtwarza na przedłużeniu ostatniego elementu krzywej, po której promień wpada do oka, a więc w kierunku oa. Z badań, dokonywanych nad zjawiskiem refrakcji, wynika, że krzywa refrakcyjna w przybliżeniu może być uważana za łuk koła o promieniu, większym około 7 razy od promienia kuli ziemskiej, tak, że promień poziomy wpada do oka wzdłuż ostatniego elementu krzywej, której krzywizna jest znacznie łagodniejsza od krzywizny ziemi. Przeciętną wielkość wpływu r refrakcji przyjmujemy za równą



Rys. 446.

$$r = 0{,}13\ v$$

gdzie v oznacza wpływ krzywizny ziemi, równy

$$v = \frac{D^2}{2R}$$

Ponieważ dla promieni, idących w poziomie lub z góry, położenie obserwowanych punktów jest dzięki refrakcji podniesione, czyli, że w kierunku wpadającego do oka promienia widzimy punkty, leżące w rzeczywistości niżej, przeto należy w tych wypadkach, a więc i przy niwelacji, poprawkę r dodawać do odczytu na łacie.

Wobec tego zaś, że poprawkę na krzywiznę ziemi odejmujemy od odczytu na łacie, więc poprawka u, odpowiadająca wpływowi krzywizny i refrakcji, będzie równa:

$$u = r - v = 0{,}13\, v - v = -0{,}87\, v = -0{,}87\, \frac{D^2}{2R}$$

gdzie D jest odległością niwelatora od łaty, R — promieniem ziemi. Załączona tabelka podaje dla różnych odległości D wielkość u łącznej poprawki.

Dm	*Umm*
30	0,06
50	0,17
100	0,68
121	1,00
200	2,70
500	17,10

Przy niwelacji ze środka poprawka refrakcyjna jednakowo zmienia wielkości odczytów wstecz i wprzód; stąd wniosek, że różnica wysokości dwu punktów przy niwelacji ze środka, przyrównana do różnicy odczytów wstecz i wprzód, wolna jest od wpływu refrakcji. Jest to drugą zaletą niwelacji ze środka.

Z tabelki dla poprawki u, wynikającej z krzywizny ziemi i refrakcji, wynika, że przy niwelacji wprzód, o ile unikamy obliczania poprawki u, nie chcemy zaś wskutek tego wprowadzić do odczytu błędu większego od 1 *mm*, należy unikać odległości od łaty większej od 120 *m*.

Wielkość $r = 0{,}13\, v$ ustalona została dla warstw powietrza, położonych nad ziemią; dla warstw powietrza, leżących nad zbiornikami wód, jak jeziora i t. p., należy brać r o połowę większe.

r, obliczone na podstawie odpowiedniego wzoru, nie odpowiada rzeczywistości przy niezrównoważonym stanie warstw powietrza, co zachodzi przy t. zw. wibracji powietrza w warstwach, bliżej ziemi położonych, w czasie od 9 do 3-ej, około południa w lecie, przy silnem działaniu promieni słonecznych. Obserwując wówczas przez lunetę przedmioty na powierzchni ziemi, dostrzegamy prócz drgań tych przedmiotów, falowanie warstw powietrza. Zmienna gęstość tych warstw wpływa na zmianę spółczynnika refrakcyjnego. Z tych względów ściślejszych niwelacyj w takim czasie wykonywać nie należy, za wyjątkiem chłodniejszych dni.

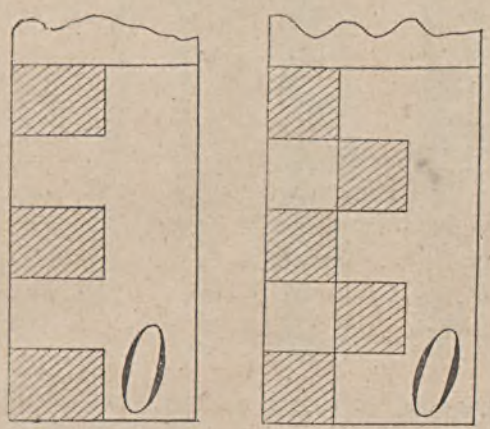
§ 206. Przyrządy niwelacyjne.

Przyrządy te dzielimy na:
1) łaty niwelacyjne i
2) niwelatory.
Niwelatory dzielą się na:
1) niwelatory hydrostatyczne,
2) niwelatory wahadłowe,
3) niwelatory z libelą i lunetą.

Hydrostatyczne i wahadłowe niwelatory prawie nie są już stosowane; mają one znaczenie raczej historyczne.

§ 207. Łaty niwelacyjne.

Są to zwykłe pryzmatyczne łaty drewniane trzy lub czterometrowej długości z jednego kawałka drzewa, lub z dwu, połączonych zawiasem, wreszcie — wysuwane. Podział na łatach jest wykonany, licząc od spodu łaty, jako zera, ku górze w centymetrach. Kolejne metry odróżniają się kolorem centymetrowych półek: czerwony, czarny. Każdy metr jest podzielony na decymetry, decymetry na centymetry, z których co drugi jest pomalowany lub jeżeli wszystkie są pomalowane, wówczas co drugi jest przesunięty.



Rys. 447.

Decymetry są opisane od zera ku górze, przytem najdogodniejszy do odczytywania jest taki opis, przy którym każda liczba leży w polu swego decymetru.

Dwie łaty stanowią komplet dla niwelacji ze środka. Jeżeli taki komplet ma być używany wyłącznie przy niwelacji ze środka, wówczas pierwsze centymetry (kreski zerowe) mogą nie wypadać u spodu łaty, a być od niego odsunięte o jednakowy odcinek na obydwu łatach.

Używane są dla niwelacji odległych od siebie stałych punktów niwelacyjnych, zwanych reperami, podstawki z lanego żelaza pod łaty. Podstawki te nazywają butami, żabkami (rys. 449) i t. p. Jeżeli są zakończone u góry kulką, lub trzpieniem walcowym (jeden lub dwa) wówczas każda łata ma u dołu odpowiednio wyżłobione wydrążenie.

Dla pionowego ustawienia łaty służą libele pudełkowe, odpowiednio przymocowane do łat, lub zawieszone z boku albo z tyłu łaty (na niepodzielonej szerokiej stronie) piony.

Przy specjalnych pomiarach, jak górnicze, lub robotach ziemnych używane są łaty z przesuwanemi wzdłuż nich tarczami, które można

sprzęgać z łatą po posunięciu tarczy na wysokość celu. Tarcze posiadają wydrążenia w postaci kółeczek, lub kresek, prostopadłych do osi łaty. Są często zaopatrzone w nonjusze dla odczytywania milimetrów na łacie. Gdy oświetlone z tyłu tarczy otwory znajdą się w poziomie osi celowej niwelatora, wówczas sprzęgamy tarczę z łatą.

Dla uniknięcia błędów w odczytach używają niekiedy łat o podziale dwustronnym: zwykłym — z jednej strony obydwu łat i przesuniętym



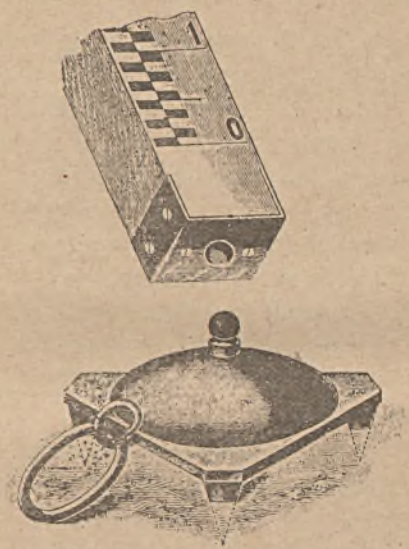
Rys. 448a.



Rys. 448b.



Rys. 448c.



Rys 449.

o tę samą wielkość, podziale — na drugiej stronie każdej łaty. Tak więc na takiej łacie podział z jednej strony idzie od zera u spodu łaty, z drugiej zaś strony łat zero jest podniesione o tę samą dowolnie przyjętą wielkość, np., 0,183 *m*. Prócz podziału przesuniętego stosuje się podział, uzupełniający do dziesięciu; wówczas obydwie strony mają jednakowy podział, lecz numeracja na jednej stronie idzie od zera do 3 *m* od dołu, na drugiej zaś od 7 *m* do 10 *m* od góry w dół.

W taki sposób odczytowi 2.425 z jednej strony łaty, odpowiadać powinien odczyt 7.575 z drugiej strony, co daje kontrolę prawidłowości odczytów.

Typy łat firmy Gerlach podają rys. 448a (typ francuski złożony z dwu wysuwanych części z klamrą i zaciskiem) i rys. 448b (wysuwana łata angielska) i 448c — łata składana.

§ 208. Niwelatory hydrostatyczne.

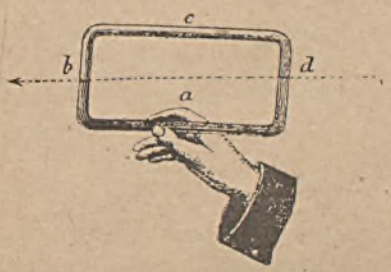
Ponieważ poziom cieczy w połączonych naczyniach znajduje się na jednym poziomie, przeto sporządzane są rurki szklane najróżnorodniejszego kształtu, umożliwiające przez przedłużanie prostej, stycznej do obydwu poziomów, uzyskiwanie poziomych celowych przy odpowiedniem ustawieniu oka.

Do takich przyrządów należą:

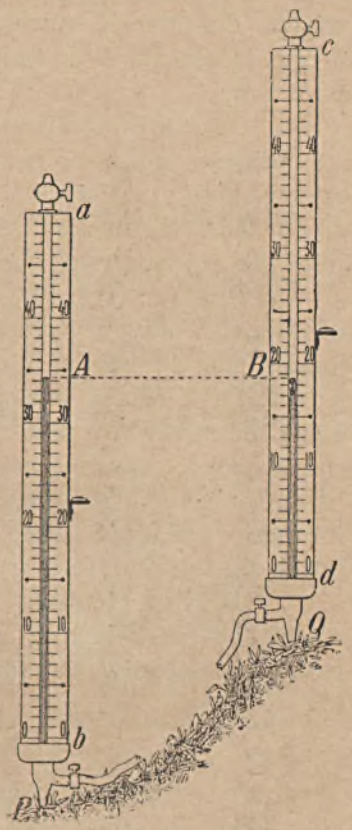
1) pierścień szklany, napełniony częściowo cieczą, nieco zabarwioną,

2) zgięta rurka szklana z cieczą,

3) zwykłe rurki szklane, połączone wężem gumowym, zaopatrzone w podziałki w postaci łat, do których rurki są przymocowane. Typ ten jest bez porównania dokładniejszy od dwu poprzednich.



Rys. 450.



Rys. 451.

Ustawiając łaty z rurkami w dwu punktach A i B i odczytując na łatach wysokości poziomu a i b cieczy, uzyskujemy różnicę wysokości obydwu punktów, jak w niwelacji ze środka, t. j.

$$h = a - b.$$

Metodą tą projektowano w końcu XVIII stulecia wykonać niwelację Wisły od źródeł do ujścia.

§ 209. Niwelatory wahadłowe.

Składają się z dwu części, a więc: 1) przyrządu do celowania F, połączonego stale z 2) ciężarkiem P, grającym rolę pionu (rys. 452).

Obydwie części obracać się mogą dokoła osi poziomej, osadzonej w spodarce niwelatora wahadłowego, przyczem środek ciężkości właściwego

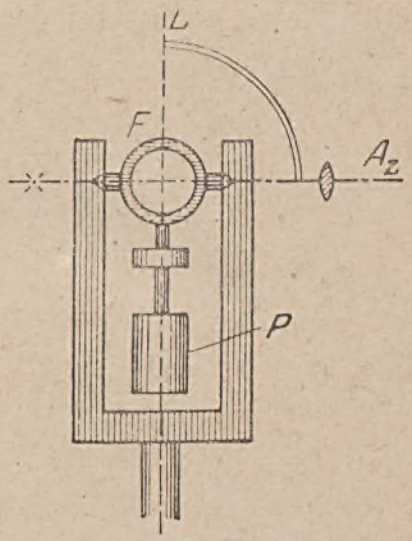
przyrządu znajduje się poniżej osi obrotu, dzięki czemu po kilku wahaniach przyrząd uzyskuje równowagę; wówczas oś celowa, jako prostopadła (z konstrukcji) do pionu, przechodzącego przez środek ciężkości przyrządu jest pozioma, a więc nadaje się do niwelacji.

Przyrządy tego typu dają niewielką dokładność niwelacji — około 5 *cm.* na 25 *m.*, a co najwyżej 0,5 *m.* na 1 *km.*

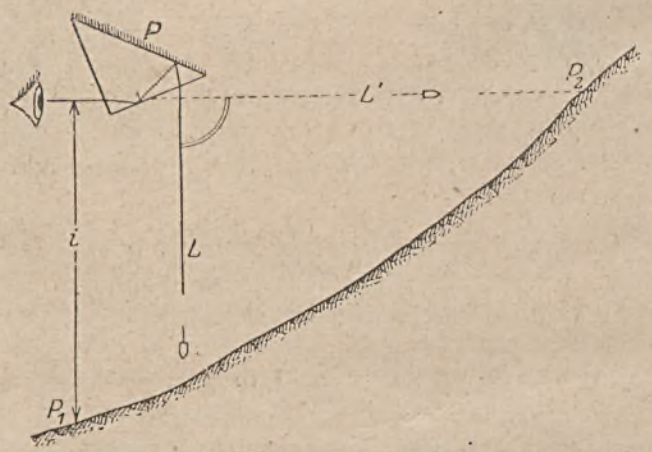
Oś celową realizują dwie poziome proste: jedna w postaci wąskiej szpary, jako przeziernika ocznego, druga w postaci naciągniętego włosienia—lub też przyrząd posiada lunetkę.

Promień (rys. 453) idący od zawieszonego przy pryzmacie pionu, załamuje się, zmieniając kierunek o 90°, a więc na kierunek poziomy. Przedłużając obserwowany przez pryzmat kierunek pionu, uzyskujemy poziomą celową, przecinającą teren w punkcie, którego wysokość odpowiada wysokości oka obserwatora (rys. 453).

Dokładność takiej niwelacji jest niższa od uzyskiwanej za pośrednictwem niwelatorów wahadłowych.



Rys. 452.



Rys. 453.

Połączenie węgielnicy zwierciadlanej lub pryzmatu z pionem jest odmianą wahadłowego niwelatora.

§ 210. Niwelatory z libelą.

Ilość typów takich niwelatorów jest dość znaczna; różnią się głównie sposobem połączenia lunety z libelą, oraz lunety ze spodarką; rozpa-

trzymy najczęściej u nas używane. Ponieważ niwelatory, w których para poziomych przezierników realizuje oś celową, obecnie nie są używane, więc rozpatrzymy typy niwelatorów, zaopatrzonych w lunetę. Pod względem połączenia lunety ze spodarką dzielimy niwelatory na dwie główne grupy:

1) niwelatory ze stałą lunetą (rys. 455),

2) niwelatory z lunetą przekładaną (rys. 462).

Libela niwelatora może być osadzona na:

1) alhidadzie,

2) lunecie,

3) lub też może być nasadkowa, t. j. ustawiona na pierścieniach lunety.

Poza tem używane są niwelatory specjalnej konstrukcji, umożliwiające kierowanie osi celowej pod kątem do kilku stopni do poziomu.

Każdy niwelator składa się z: 1) dolnej części, zwanej spodarką, służącej dla ustawienia niwelatora na statywie, 2) alhidady, obracającej się dokoła osi na spodarce, 3) połączonych z alhidadą dźwigarków lunety, 4) samej lunety i 5) libeli.

Spodarka jest trójnożna, sprzęgana ze statywem śrubą środkową; posiada trzy śruby nastawowe; lub też spodarka (w niwelatorach małodokładnych) osadza się tuleją na czopie statywu (patrz rys. 475).

Trójnożne spodarki posiadają odpowiednio wytoczone wydrążenie, w którem osadza się stożkowo ścięta metalowa oś obrotu niwelatora, połączona z alhidadą niwelatora zapomocą naśrubka u dołu osi.

Alhidada posiada pierścieniowy ustrój śruby zaciskowej i leniwej.

Dźwigarki są połączone na stałe z alhidadą i wysokość jednego z nich może być zmienioną, jak w teodolicie, zapomocą urządzenia, pozwalającego opuszczać łożysko lunety na dźwigarku, albo też jeden z dźwigarków może być nieco podnoszony, lub opuszczany nad alhidadą zapomocą t. zw. śruby elewacyjnej, umożliwiającej nieznaczne pochylanie lunety w płaszczyźnie pionowej.

Luneta w niwelatorach jest połączona na stałe z dźwigarkami, lub też może być w stosunku do nich przekładana o 180°; w tym wypadku luneta może być swemi pierścieniami obracana w łożyskach dokoła swej osi geometrycznej.

Lunetami niwelatorów są zwykle lunety astronomiczne o powiększeniu: 17—20 słabsze, 30—40 silniejsze.

Tak samo wartości podziałek libeli niwelatorów wahają się w najdokładniejszych od 4″ do 8″, w mniej dokładnych od 20″ do 30″.

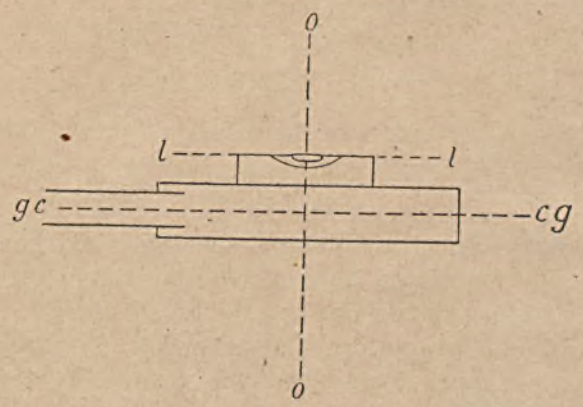
W kilku typach niwelatorów na alhidadzie osadzone są dwie krzyżowe libele (prostopadłe do siebie libele rurkowe), lub libela pudełkowa dla szybszego ustawienia alhidady do poziomu.

Używane są również (przy niwelacji terenowej) niwelatory, zaopatrzone w limbus, z lunetami przekładanemi, w udoskonalonym zaś przez firmę Gerlach typie, luneta może być zaopatrzona w poziomą oś obrotową, specjalnie nasadzaną na lunetę. Do tego typu wrócimy przy niwelacji terenowej.

Ustrój osiowy niwelatorów stanowią następujące osie:

1) oś niwelatora, zwana też osią obrotu alhidady, 2) oś celowa i 3) oś geometryczna lunety, oraz 4) oś libeli niwelacyjnej.

Zasadniczym przy użyciu niwelatora warunkiem, jest równoległość osi celowej do osi libeli. Postępowanie, mające na celu uzyskanie tego wa-



Rys. 454.

runku, różnić się będzie dla poszczególnych typów niwelatora. Zależności, które winny zachodzić w ustroju osiowym, streszczają się w warunkach:

oś celowa $cc \parallel ll$ (oś libeli),

$cc \parallel ll \perp OO$ (osi niwelatora),

$cc \parallel gg$ (oś celowa $\parallel$ do osi geometrycznej przekładanej lunety); cc i gg tworzą jedną prostą.

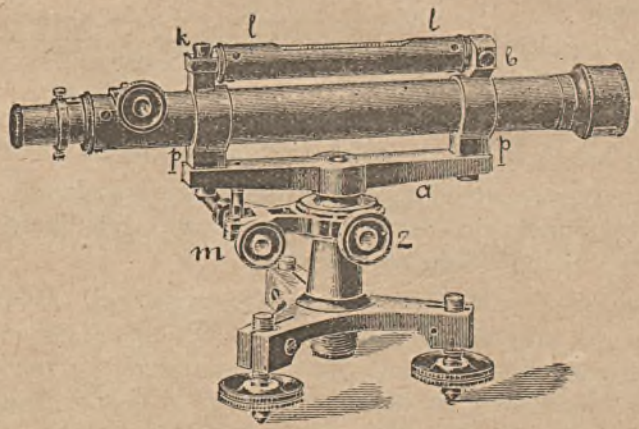
Przez oś geometryczną rozumiemy prostą, łączącą środki pierścieni lunety.

Rozpatrzymy najczęściej stosowane u nas typy niwelatorów.

§ 211. Niwelatory ze stałą lunetą.

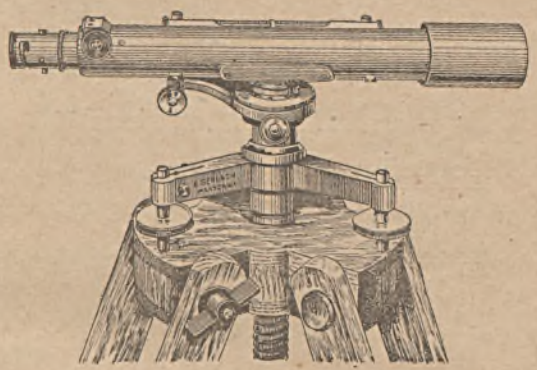
Rozpatrzmy typy niwelatorów północno i południowo-niemiecki.

Typ północno-niemiecki (rys. Nr. 465) posiada trójnożną spodarkę,



Rys. 455.

w wydrążeniu której obraca się stożkowo ścięta oś obrotu niwelatora, połączona u góry z alhidadą *a* niwelatora, do której są przymocowane dźwigarki *pp* połączonej z niemi na stałe lunety. Na górnem zakończeniu dźwigarków lub na alhidadzie, jest osadzona libela ze śrubką rektyfikacyjną *k*, służącą do opuszczania lub podnoszenia przyległego końca libeli (obrotem śrubki zapomocą stalowego sztyfcika).



Rys. 456.

Sprzęg *z* służy do unieruchomienia lub zwalnienia alhidady. Przy zaciśniętym sprzęgu *z* działa śrubka mikrometryczna *m*, wprawiając w ruch powolny alhidadę z lunetą.

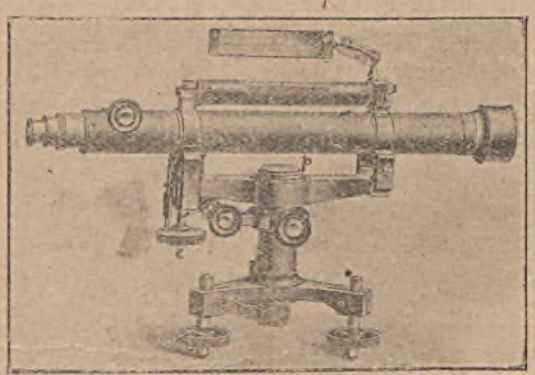
Sprowadzamy bańkę libeli do środka, działając śrubami nastawowemi spodarki; ustawiając oś libeli temi śrubami do poziomu, tem samem ustawiamy poziomo oś celową, o ile oś libeli (względnie płaszczyzna styczna do głównego punktu) i oś celowa są równoległe.

Na rys. 456 mamy niwelator Gerlacha z libelą z boku lunety.

Południowo-niemiecki typ niwelatora różni się głównie tym od północno-niemieckiego typu, że alhidada może być pochylona tylko ze spodarką, natomiast luneta z libelą może być pochylona zapomocą t. zw. śruby elewacyjnej *e*, połączonej z jednym z dźwigarków.

Libela pudełkowa *p* służy do przybliżonego sprowadzenia alhidady do poziomu wskutek działania śrub nastawowych, zaś ścisłe sprowadzenie osi celowej do poziomu wykonywa śruba elewacyjna.

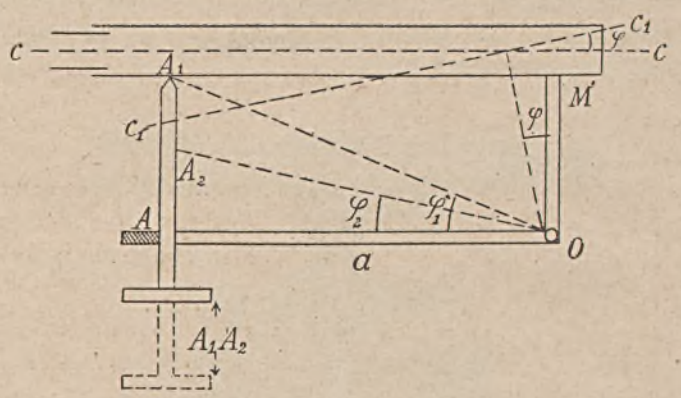
Śruba elewacyjna tych niwelatorów przy wkręcaniu lub wykręcaniu przesuwa się wzdłuż swej osi, nie przestaje więc być prostopadłą do alhidady.



Rys. 457.

Ponieważ przy opuszczeniu śruby o $A\,A_1$ oś celowa lunety z poło-

żenia cc wychyliła się do położenia $c_1 c_1$, t. j. kąt φ, przeto pomiędzy wielkością φ a wielkością odcinka $A_1 A_2$ istnieje pewnego rodzaju zależność:



Rys. 458.

ponieważ zaś

$$A_1A_2 = AA_1 - AA_2,$$

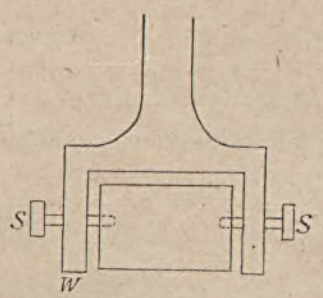
gdzie

$$AA_1 = OA\ tg\ \varphi_1$$

$$AA_2 = OA\ tg\ \varphi_2$$

przeto, wobec tego, że $A_1 A_2$ odpowiada różnicy stycznych kątów φ_1 i φ_2, nazywamy dany typ śruby elewacyjnej śrubą tangencjalną. Śruba ta, przechodząc przez grubą płytę alhidady $A\ O$, przesuwa się wzdłuż swej osi, a więc dźwigar OM winien być tak urządzony, by mógł pochylać się dokoła punktu O.

W tym celu dźwigarek OM jest u dołu rozwidlony; tworzy on widełki ww, przez które przechodzą śrubki s, wkręcane w odpowiednie wydrążenia alhidady; w taki sposób zostaje koniec alhidady a przy dźwigarku O nieruchomy, zaś dźwigarek może obracać się nieco dokoła osi ss.



Rys. 459.

§ 212. Sprawdzenie i rektyfikacja niwelatora ze stałą lunetą, libelą na dźwigarkach i śrubą elewacyjną.

Ponieważ w tym niwelatorze nie możemy sprawdzić równoległości osi libeli do osi celowej, przeto sprawdzenie takiego niwelatora dotyczy:

1) równoległości głównej płaszczyzny (stycznej do punktu głównego) libeli niwelacyjnej do osi celowej,

2) prostopadłości osi libeli niwelacyjnej do osi niwelatora,

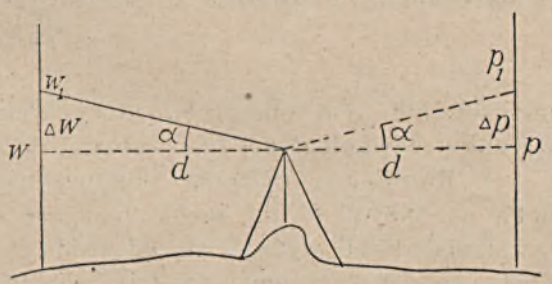
3) prostopadłości osi libeli alhidadowych (o ile istnieją) do osi niwelatora,

4) prostopadłości nici poziomej niwelatora do jego osi.

I. Ażeby sprawdzić, czy oś celowa jest równoległa do płaszczyzny głównej libeli niwelacyjnej, należy:

a) ustawić niwelator pośrodku w jednakowej (około 50 *m*) odległości od dwu łat, ustawionych na stałych punktach, i sprowadzając przy celu do każdej łaty bańkę libeli do środka śrubami nastawowemi (lub elewacyjną, gdy niwelator jest w przybliżeniu ustawiony do poziomu), zanotować odczyty w i p z obydwu łat.

Różnicą wysokości jest $h = w - p$ nawet wówczas, gdy oś celowa nie jest ∥-a do płaszczyzny głównej libeli; przypuśćmy bowiem, że oś celowa tworzy z tą płaszczyzną pewien kąt, wtedy zamiast właściwych odczytów w i p zanotujemy $w + \triangle w, p + \triangle p$, gdzie $\triangle w$ i $\triangle p$ są błędami odczytów, spowodowanemi nierównoległością α osi celowej do płaszczyzny głównej. Ponieważ w założeniu odległości niwelatora do obydwu łat są jednakowe i równe d,



Rys. 460.

przeto

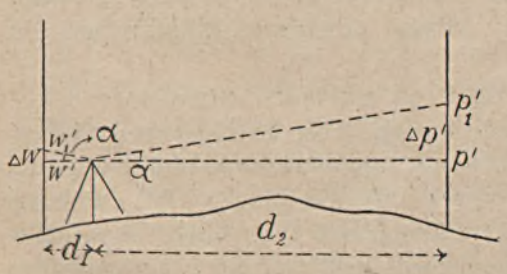
$$\triangle w = \triangle p = d \operatorname{tg} \alpha$$

więc

$$w_1 - p_1 = w + \triangle w - (p + \triangle p) = w - p = h.$$

Stąd ważny wniosek: przy niwelacji ze środka błąd nierównoległości osi celowej do płaszczyzny głównej nie ma wpływu na różnicę wysokości (jest to jeszcze jedna bardzo ważna zaleta niwelacji ze środka).

Nie poruszając łat, przestawimy niwelator ku jednej z łat na odległość do 6 *m* i, sprowadzając bańkę libeli do środka, celujemy znów do obydwu łat.



Rys. 461.

Gdyby oś celowa była równoległa do płaszczyzny głównej, otrzymalibyśmy pewne odczyty w' i p', których różnica powinna się równać

$$w' - p' = w - p = h$$

Jeżeli jednak oś celowa nie jest ∥-a do płaszczyzny głównej libeli, odchylając się o kąt α,

wówczas zamiast odczytów w' i p', leżących w jednym poziomie, otrzymamy pewne odczyty w_1' i p_1', różniące się od właściwych o wielkości:

$$\triangle w_1' = d_1 \, tg \, \alpha$$

$$\triangle p_1' = d_2 \, tg \, \alpha$$

Ponieważ d_1 jest bliskie 6 m, d_2 zaś około 94 m, przeto $\triangle w_1'$ jest o tyle mniejsze od $\triangle p_1'$, iż można go nie brać pod uwagę, wskutek czego przyjmujemy, że

$$\triangle w_1' = o,$$

więc

$$w_1' = w'$$

a skoro

$$p' = w' - h$$

co określiliśmy z niwelacji ze środka, to

$$p' = w' - h$$

jest właśnie tym odczytem, który winniśmy otrzymać przy zachowaniu warunku równoległości osi celowej do płaszczyzny głównej libeli.

Kierujemy, działając odpowiednio śrubą elewacyjną, oś celową lunety na odczyt p' na łacie; wówczas oś celowa znajdzie się w poziomie, lecz bańka libeli wychyli się od środka; należy więc teraz spoziomować oś libeli, co uskutecznimy, działając śrubkami rektyfikacyjnemi libeli, dopóki bańka nie przesunie się do głównego punktu (zajmie właściwe położenie).

Ponieważ tak oś libeli, jak oś celowa, są poziome, więc oś celowa jest równoległa do płaszczyzny głównej libeli.

Przy tem samem stanowisku niwelatora ponawiamy odczyty do obydwu łat, znów obliczamy właściwy odczyt i pozostający drobny błąd usuwamy śrubkami rektyfikacyjnemi.

II. Aby sprawdzić, czy oś libeli niwelacyjnej jest prostopadła do osi niwelatora, obracamy lunetę do równoległości z jednem ramieniem spodarki i sprowadzamy jej śrubą bańkę libeli do właściwego położenia; to samo uskutecznimy w stosunku do drugiej śruby nastawowej, poczem odwracamy lunetę o 180°; jeżeli bańka libeli nie dozna wychylenia, warunek jest zachowany; jeżeli zajdzie wychylenie bańki, wówczas jedną połowę wychylenia usuwamy śrubą nastawową, drugą — elewacyjną.

Takie postępowanie nie narusza równoległości płaszczyzny głównej libeli do osi celowej. Sprawdzenie to należy powtórzyć kilkakrotnie dla obywu śrub nastawowych.

III. Sprawdzenia krzyżowych libeli na alhidadzie niwelatora dokonamy zapomocą ustawienia jednej libeli w linji $\parallel$-ej do obydwu śrub nastawowych. Działając śrubami nastawowemi, sprowadzamy bańki obydwu libeli do punktów głównych, poczem odwracamy alhidadę o 180°. Połowę wychyleń baniek usuwamy śrubkami rektyfikacyjnemi tych libeli, drugą połowę — śrubami nastawowemi. To postępowanie powtarzamy również kilkakrotnie. Tak samo postępujemy w wypadku użycia libeli pudełkowej.

IV. Prostopadłość poziomej nitki do osi niwelatora sprawdzimy w następujący sposób:

Spoziomujemy oś celową niwelatora w dwu przecinających się kierunkach (w kierunkach dwu śrub nastawowych); działając temi śrubami przy każdem z obydwu położeń lunety, sprowadzimy bańkę libeli do punktu głównego, poczem skierujemy oś celową na wyraźny punkt i ostatecznie spoziomujemy oś libeli.

Po dokręceniu zacisku alhidady działamy leniwką alhidady; jeżeli nitka pozioma przy przesuwaniu się krzyża nitek pozostaje na obserwowanym punkcie, warunek jest zachowany. Jeżeli jednak przy przesuwaniu krzyża nitka pozioma odsuwa się od punktu, wówczas należy odpowiednio przesunąć (obrócić) pierścień siatki.

Prostopadłość nitki pionowej do poziomej może być sprawdzona wówczas zapomocą pionu; ewentualny błąd można poprawić przy nitkach pajęczynowych, przesuwając odpowiednio pionową nić po wyjęciu z rury okularu pierścienia siatki. Ze względu na pewną trudność należy tę czynność polecać mechanikowi.

§ 213. Sprawdzenie niwelatora ze stałą lunetą bez śruby elewacyjnej.

W tego rodzaju niwelatorze libela połączona jest z alhidadą lub z dźwigarkami, niezależnie od lunety, na stałe. Dzięki takiej konstrukcji osie libeli i celowa oś lunety—mogą się jednocześnie przesuwać, nie zmieniając wzajemnego położenia, tylko przy działaniu śrub nastawowych, a więc jednocześnie ze zmianą położenia osi samego niwelatora. Jest to zasadniczo odmienne od niwelatora ze stałą lunetą, w którym, przy niezmiennem położeniu osi niwelatora, śruba elewacyjna umożliwiała jednoczesne odchylanie od tej osi—osi libeli i osi celowej.

W niwelatorach bez śruby elewacyjnej ze stałą lunetą zmiana położenia osi celowej w stosunku do osi pionowej niwelatora może być uzyskana wyłącznie zapomocą przesunięcia krzyża nitek lunety. Stąd rektyfikacja takiego przyrządu odbywa się w następującej kolejności:

I. Rektyfikujemy libelę. Ażeby uzyskać prostopadłość osi libeli do osi niwelatora, ustawiamy oś libeli do poziomu w pewnym kierunku, obracamy alhidadę o 180° i połowę wychylenia usuwamy śrubkami rektyfikacyjnemi libeli, drugą połowę — śrubą nastawową. Czynności te powtarzamy kilkakrotnie do czasu, gdy po odwróceniu lunety o 180° uzyskamy niezmienne położenie bańki libeli.

Odwracanie ściśle o 180° ułatwiamy sobie, tycząc trzy punkty na prostej i ustawiając niwelator w środkowym punkcie.

Cele do obydwu końców prostej różnić się wtedy będą o 180°. Przy niwelatorze z kołem poziomem obrót alhidady o 180° wskaże nonjusz.

II. Rektyfikujemy oś celową; mianowicie, jak w poprzednim §-ie, ustalamy różnicę wysokości h dwu punktów zapomocą niwelacji ze środka oraz, ustawiając niwelator o kilka metrów od jednej z łat na prostej, łączącej je w terenie, określamy na dalszej łacie ten odczyt p', który winniśmy uzyskać przy równoległości osi celowej do osi libeli. Jeżeli oś celo-

wa nie odpowiada temu odczytowi, wówczas sprowadzamy ją na niego odpowiedniem przesunięciem krzyża nitek pionowemi śrubkami.

Rektyfikację osi celowej powtarzamy kilkakrotnie.

III. Prostopadłość nici poziomej siatki do pionowej osi niwelatora sprawdzamy, jak w niwelatorze ze śrubą elewacyjną.

UWAGA. Dotychczas rozpatrzonych reftyfikacyj należy dokonywać po przejazdach, a w czasie prac polowych pożądane jest codzienne sprawdzanie niwelatora. Instrument, wychodzący z fabryki, może nawet tam nie być zrektyfikowany, to też należy go przed użyciem sprawdzić. Ujawnione błędy układu osiowego nie stanowią jeszcze o niezdatności niwelatora. Natomiast bezwzględnie prawidłowo winna działać kremoljera, gdyż bez mechanika poprawić jej nie możemy.

Sprawdzenia prawidłowości działania kremoljery dokonywać należy w następujący sposób: na prawie poziomej prostej w terenie co 20 metrów wbijamy pale w ten sposób, by ich wierzchołki leżały mniej więcej w poziomie. Po wypalikowaniu w ten sposób 100 metrów, na prostopadłej do wytyczonej prostej, w odległości od niej, równej około 70 *m*, ustawiamy niwelator o sprawdzonej libeli i osi celowej i, ustawiwszy lunetę na drugą od końca prostej łatę, odczytujemy łaty, ustawione na palikach, nie poruszając więcej kremoljery. Odczyt największy odpowie wierzchołkowi najniżej położonego palika. Pozostałe paliki wbijamy o tyle głębiej, aby można było uzyskać ze wszystkich łat jednakowy odczyt. Wówczas prosta, łącząca wierzchołki pali, będzie pozioma.

Następnie ustawiamy niwelator na przedłużeniu prostej w odległości 20 *m* od ostatniego palika i znów wynotujemy odczyty ze wszystkich łat na palach. Oczywiście teraz, wobec bardzo znacznych różnic w odległościach od niwelatora do łat, wypadnie przesuwać w rurze objektywu rurkę siatkową. Jeżeli wszystkie odczyty będą jednakowe — kremoljera działa prawidłowo; jeżeli odczyty na palach, w miarę oddalania się od niwelatora, zmieniają się w jednym kierunku (stale się zwiększają, lub zmniejszają) o tę samą wielkość, a więc są kolejno równe

$$a,\ a + m,\ a + 2m,\ a + 3m \text{ i t. d.},$$

to także nie można nic zarzucić kremoljerze; jeżeli jednak odczyty łat, w miarę notowania ich z coraz bardziej odledłych od niwelatora pali, zmieniają się nieregularnie (nie są równe, ani też nie tworzą postępu arytmetycznego), przytem odbiegają od wyrazów postępu arytmetycznego o wielkości, niewspółmierne z dokładnością odczytu, wówczas kremoljerę należy poprawić, co uskutecznić może fabryka przyrządów geodezyjnych.

Praca z niwelatorem o wadliwej kremoljerze może dawać dobre wyniki tylko wówczas, gdy raz na zawsze ustalonego położenia rurki siatkowej zmieniać nie będziemy.

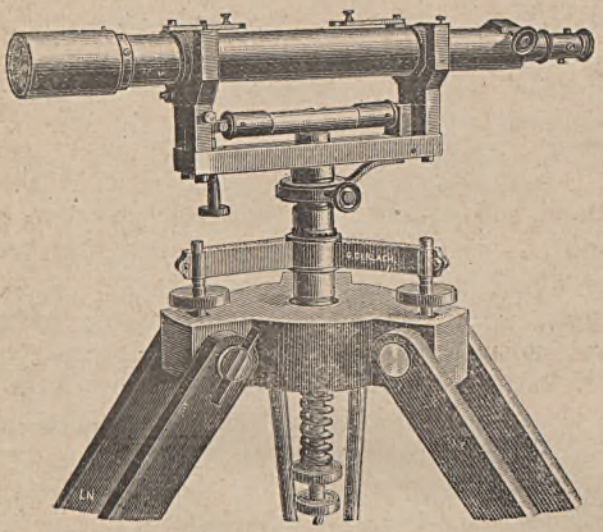
§ 214. Niwelatory z przekładaną lunetą.

Rozpatrzmy trzy zasadnicze typy niwelatorów z przekładaną lunetą:

1) typ francuski Egault'a o przekładanej lunecie i stałej libeli na alhidadzie,

2) typ szwajcarski Kerna o przekładanej lunecie i nasadkowej libeli,
3) typ niemiecki o lunecie z połączoną z nią na stałe libelą.

Niwelator francuski.



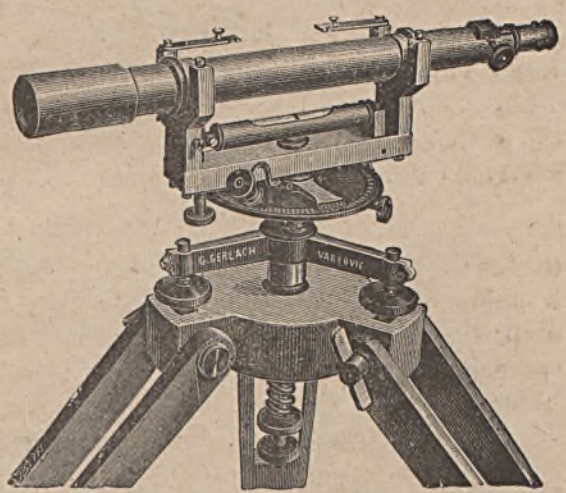
Rys. 462.

Rysunek 462 przedstawia niwelater francuski wyrobu firmy Gerlach. Luneta układa się walcowo wytoczonemi pierścieniami na rozwidlonych ku górze dźwigarkach. Same rozwidlenia nazywamy łożyskami lunety.

Rysunek 462a przedstawia niwelator tego samego typu z kołem poziomem.

Na alhidadzie ustawiona jest libela w ten sposób, że jedna jej podstawka jest nieruchoma, druga zaś może być opuszczona lub podnoszona, razem z połączonym z nią końcem libeli, zapomocą śruby rektyfikacyjnej, przechodzącej przez alhidadę wdół.

Jeden dźwigarek lunety jest trwale połączony z alhidadą, drugi może być nieco przesuwany w kierunku prostopadłym do alhidady zapomocą śrub, przechodzących przez alhidadę i ten dźwigarek. Ponieważ za wysokość dźwigarka przyjmujemy odległość od alhidady do pierścienia lunety, przeto zmianę wysokości dźwigarka umożliwia również konstrukcja, podana na rys. Nr. 463; mianowicie wkręcanie śrubki podnosi lunetę, a więc i jej pierścień, wykręcanie — opuszcza lunetę.

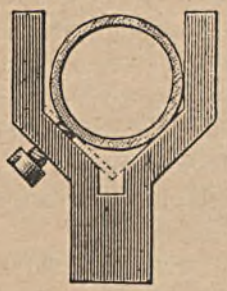


Rys. 462a.

Obrót alhidady z lunetą dokoła osi pionowej niwelatora może być przerwany zaciskiem, obrót mikrometryczny — umożliwia leniwka, umieszczona zboku alhidady.

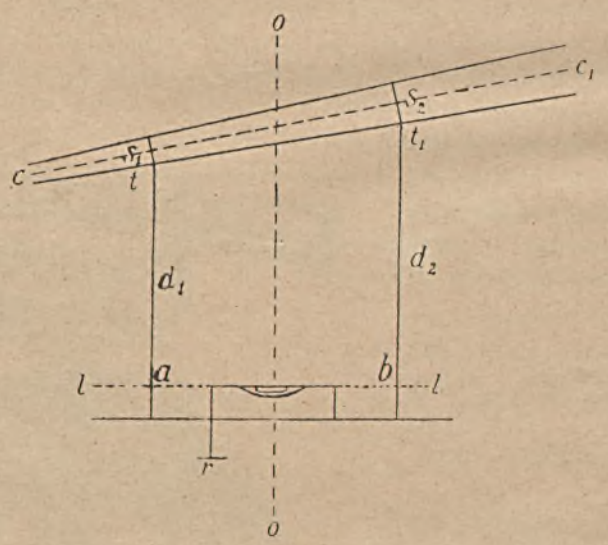
Ponieważ w tym niwelatorze luneta może być obracana w łożyskach dokoła osi geometrycznej, przeto nitki mogą mieć niewłaściwe położenie; ażeby ułożenie lunety w łożyskach z jednoczesnem sprowadzeniem nici poziomej do prostopadłości z pionową osią niwelatora nie sprawiało trudności, luneta posiada przy samych łożyskach sztyft o kierunku, mniej więcej równoległym do nitki pionowej. Sztyft ten obrotem lunety dokoła os

geometrycznej sprowadza się do styku z poziomą śrubką, równolegle do dźwigarka przymocowaną; przy zetknięciu się sztyftu z tą śrubką nić pozioma jest ⊥-a do osi pionowej niwelatoru. Ewentualny błąd w tej prostopadłości może być usunięty wkręcaniem poziomej śrubki o tyle, aby przy styku sztyftu ze śrubką uzyskana została prostopadłość nici poziomej do osi obrotu niwelatora. Ponieważ w tym niwelatorze luneta obraca się dokoła osi geometrycznej, więc obrotowi ulega również oś celowa; koniecznym jest przeto warunkiem, by oś celowa była identyczna z osią geometryczną, gdyż tylko w tym wypadku, przy obrocie lunety dokoła osi geometrycznej, oś celowa nie będzie zmieniać swego położenia. Wtedy tylko możemy przystępować do sprowadzenia osi celowej do prostopadłości z osią obrotu niwelatora.



Rys. 463.

Luneta jest przekładana: przełożenie lunety ma na celu odwrócenie osi geometrycznej o 180°; stąd wynika, że oś celowa (identyczna z geometryczną) w I-em położeniu lunety i oś celowa w II położeniu lunety (po przełożeniu), przy unieruchomionych alhidadzie i łożyskach lunety, winny tworzyć tę samą prostą. Może to jednak mieć miejsce tylko wówczas, gdy



Rys. 464.

pierścienie lunety mają jednakową średnicę, a więc leżą na powierzchni walca, którego oś jest osią geometryczną lunety, a średnica równa się średnicy pierścieni.

Zasadniczy warunek, któremu winien odpowiadać ten niwelator, sprowadza się do prostopadłości osi celowej cc_1 i płaszczyzny głównej *ll* libeli do osi obrotu *oo* niwelatora (rys. 464).

Rektyfikacja niwelatora tego typu ma następujący przebieg:

1) rektyfikujemy libelę, sprowadzając płaszczyznę główną *ll* libeli do prostopadłości z osią *oo* obrotu niwelatora,

2) sprowadzamy oś celową lunety na oś geometryczną,

3) sprowadzamy tworzącą *tt* pierścieni lunety do równoległości z płaszczyzną główną *ll* libeli,

4) sprawdzamy równość średnic s_1 i s_2 pierścieni,

5) sprowadzamy poziomą nić do prostopadłości z osią obrotu niwelatora.

I. Sprowadzenie płaszczyzny głównej *ll* libeli do prostopadłości z osią obrotu *oo* niwelatora wymaga:

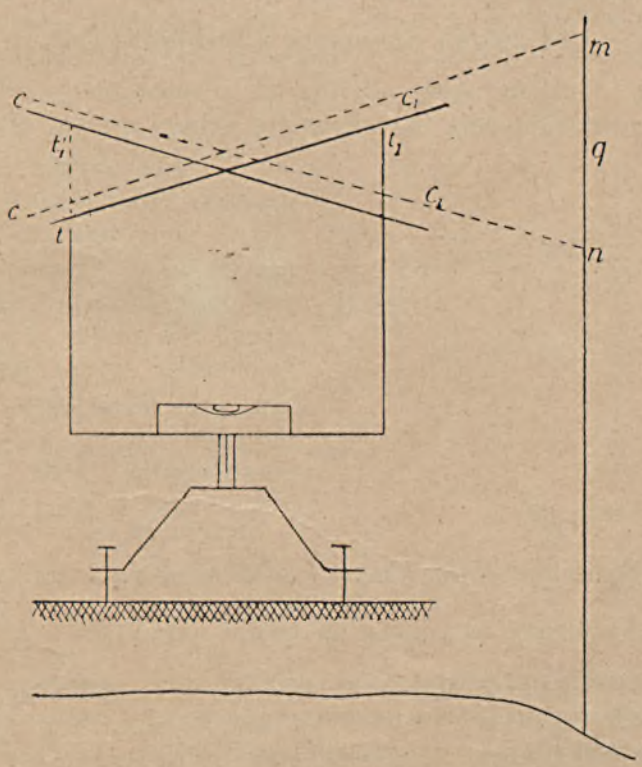
a) skierowania osi celowej nad jedną ze śrub nastawowych na dowolny punkt;

b) sprowadzenia bańki libeli obrotem śrubą nastawową do właściwego położenia;

c) przełożenia lunety pierścieniami w łożyskach i skierowania osi celowej znów na ten sam punkt obrotem alhidady dokoła osi pionowej, co odpowiada przestawieniu libeli o 180°.

d) usunięcia połowy ewentualnego wychylenia bańki śrubką rektyfikacyjną *r* i drugiej połowy—śrubką nastawową;

e) powtórzenie punktów *c* i *d* kilkakrotnie, aż wreszcie, po odwróceniu libeli o 180°, bańka libeli znów zajmie właściwe położenie.



Rys. 465.

II. Sprowadzenie osi celowej na geometryczną wymaga:

a) skierowania lunety na dowolny punkt i, po dokręceniu zacisku alhidady, obrócenia lunety w łożyskach o 180° dokoła osi geometrycznej;

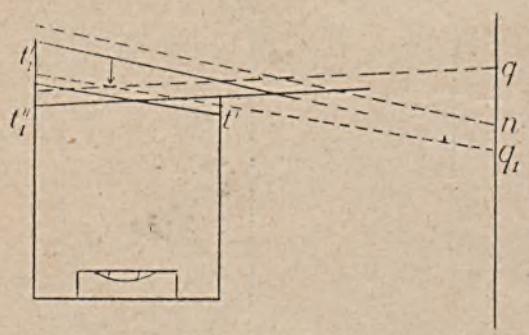
b) przesunięcia krzyża nitek zapomocą śrubek diafragmy siatki ku obserwowanemu punktowi o połowę wychylenia;

c) sprowadzenia osi celowej na ten sam punkt zapomocą śrub nastawowych i leniwki alhidady i powtórzenia punktów *b* i *c*.

III. Sprowadzenie tworzącej tt_1 pierścieni lunety do równoległości z płaszczyzną główną libeli wymaga wyrównania wysokości dźwigarków, liczonej od przecięcia się płaszczyzny głównej z dźwigarkami (rys. 464).

Tworząca tt_1 będzie $\parallel$-a do płaszczyzny głównej *ll* libeli, gdy wysokości dźwigarków nad płaszczyzną główną, t. j. *at* i *bt*, będą równe.

a) Po spoziomowaniu osi sprawdzonej libeli kierujemy oś celową lunety do łaty, ustawionej pionowo w odległości około 40 *m* od niwelatora, i dokonywamy z krzyża nitek odczytu *m*; następnie podnosimy lunetę nad łożyskami i, utrzymując objektyw skierowany ku łacie, obracamy pod lunetą alhidadę o 180°, poczem opuszczamy lunetę pierścieniami w łożyska i znów kierujemy oś celową na łatę. W ten sposób w stosunku do łaty pierścienie lunety nie zmieniły położenia, dźwigarki zaś zmieniły się miejscami. Wskutek tego przy niejednakowej wysokości dźwigarków odczytamy na łacie *n*. Gdyby obydwa dźwigarki mogły zmieniać swą wysokość (miały odpowiednie śruby rektyfikacyjne), wówczas obliczylibyśmy średni odczyt $q = \frac{m+n}{2}$ i oś celową od punktu *n* podnieślibyśmy ku górze o połowę odcinka *nq*, obniżając lewy dźwigarek, a następnie, podnosząc prawy dźwigarek, sprowadzilibyśmy oś celową do punktu *q* (rys. 465).



Rys. 466.

Ale śrubki rektyfikacyjne posiada tylko jeden dźwigarek (lewy t'_1 przy celu do *n*). Opuszczając go do *t''*, sprowadzimy oś celową do *q*, pozostawiając bez zmiany drugi dźwigarek. Błąd nierówności podstawek został tylko zmniejszony, lecz równoległości tworzącej *tt* do płaszczyzny głównej nie uzyskaliśmy (rys. 466).

Jeżeli teraz pod podniesioną lunetą obrócimy o 180° alhidadę i lunetę znów opuścimy w łożyska, to uzyskamy odczyt q_1 na łacie; podnosząc dźwigarek, sprowadzimy oś celową na średni odczyt $q_2 = \frac{q + q_1}{2}$, dzięki czemu błąd nierówności dźwigarków zostanie znów zmniejszony. Następna zmiana dźwigarków pod lunetą da nowy odczyt q_3 i konieczność opuszczenia dźwigarka (następnie — podniesienia) i t. d.

Po kilku takich zmianach wielkości dźwigarka, błąd nierówności dźwigarków sprowadzimy do tak nieznacznej wielkości, że wpływ jego nie będzie przekraczał 1 do 2 *mm*, co dla potrzeb niwelacji technicznej nie przedstawia niebezpieczeństwa i może nie być brane pod uwagę, gdyż dokładność odczytu również waha się w tych granicach.

IV. Sprawdzenia równości średnic pierścieni dokonamy zapomocą dwukrotnej niwelacji dwu punktów końcowych odcinka ze środka i końca.

Niwelacja ze środka daje odczyty w i p, a więc różnicą wysokości jest

$$h = w - p$$

Niwelacja wprzód tego samego odcinka i w tym samym kierunku daje wysokość i niwelatora oraz odczyt wprzód p_1.

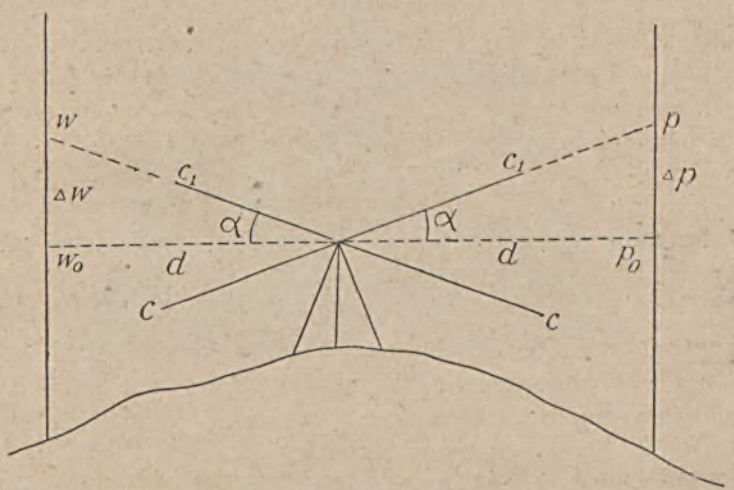
Powinno być

$$w - p = i - p_1$$

Jeżeli wyrazy po obydwu stronach równania różnią się więcej, niż o dwukrotną dokładność odczytu, wówczas, ponieważ a) płaszczyzna główna libeli jest $\perp$-a do osi obrotu niwelatora, b) oś geometryczna jest identyczna z osią celową, c) tworząca pierścieni jest $\parallel$-a do płaszczyzny głównej libeli — więc jedyną przyczyną niezgodności wyrazów $w - p$ i $i - p_1$ jest nierówność pierścieni lunety.

Poprawić pierścień może tylko fabryka narzędzi geodezyjnych.

Niwelator z przekładaną lunetą o nierównych średnicach pierścieni może być jednakże używany albo 1) wyłącznie przy niwelacji ze środka, albo 2) gdy przekształcimy ten niwelator w niwelator o stałej lunecie, układając zawsze lunetę, np., objektywem na dźwigarek, mający śrubę rektyfikacyjną. W ostatnim wypadku niwelator ten należy zrektyfikować w sposób, wskazany dla niwelatora ze stałą lunetą bez śruby elewacyjnej;



Rys. 467.

Przy niwelacji ze środka błąd nierównoległości osi celowej do płaszczyzny głównej libeli przy jednakowej odległości zniekształca jednakowo z tym samym znakiem odczyty wstecz i wprzód o wielkości

$$\triangle w = \triangle p = d\,tg\,\alpha$$

Zamiast więc odczytów w_0 i p_0 i różnicy ich $w_0 - p_0$, uzyskujemy faktyczne odczyty

$$w = w_0 + d\,tg\,\alpha$$

i

$$p = p_0 + d\,tg\,\alpha$$

czyli

$$w - p = w_0 - p_0$$

Konstatujemy zatem jeszcze jedną zaletę niwelacji ze środka, a mianowicie: wyniki niwelacji (różnice wysokości) przy niwelacji ze środka są wolne od wpływu błędu nierównoległości osi celowej do głównej płaszczyzny libeli.

V. Prostopadłość poziomej nitki do osi obrotu niwelatora sprawdzimy w następujący sposób:

a) spoziomujemy oś libeli w kierunku dwu śrub,

b) skierujemy oś celową na wyraźny punkt (przy styku sztyftu lunety ze śrubką przy dźwigarku),

c) odsuniemy leniwką alhidady krzyż nitek od punktu ku krańcowi pola widzenia: gdy punkt pozostaje na nici, warunek jest zachowany, gdy zaś punkt odsunął się od poziomej nitki, wówczas wkręcamy lub wykręcamy śrubkę przy dźwigarku, utrzymując jej styk ze sztyftem lunety, i obracamy w ten sposób lunetę dokoła osi geometrycznej, dopóki obserwowany punkt nie znajdzie się znów na poziomej nici.

Zaletą niwelatora z przekładaną lunetą wobec niwelatora o stałej lunecie jest możność dokonywania przy każdym celu dwu odczytów: pierwszego przy dowolnem położeniu lunety, drugiego — po przełożeniu lunety w łożyskach i skierowaniu osi celowej na ten sam punkt.

§ 215. Niwelator typu niemieckiego o śrubie elewacyjnej i libeli, połączonej z lunetą przekładaną.

Rozpatrzmy ten typ niwelatora wyrobu firmy Gerlach.

Do lunety o powiększeniu około 36 przymocowana jest libela dziesięciosekundowa, zaopatrzona zboku w lusterko, umożliwiające obserwowanie stanu bańki libeli od strony okularu.

Przy osi obrotu niwelatora znajduje się libela pudełkowa.

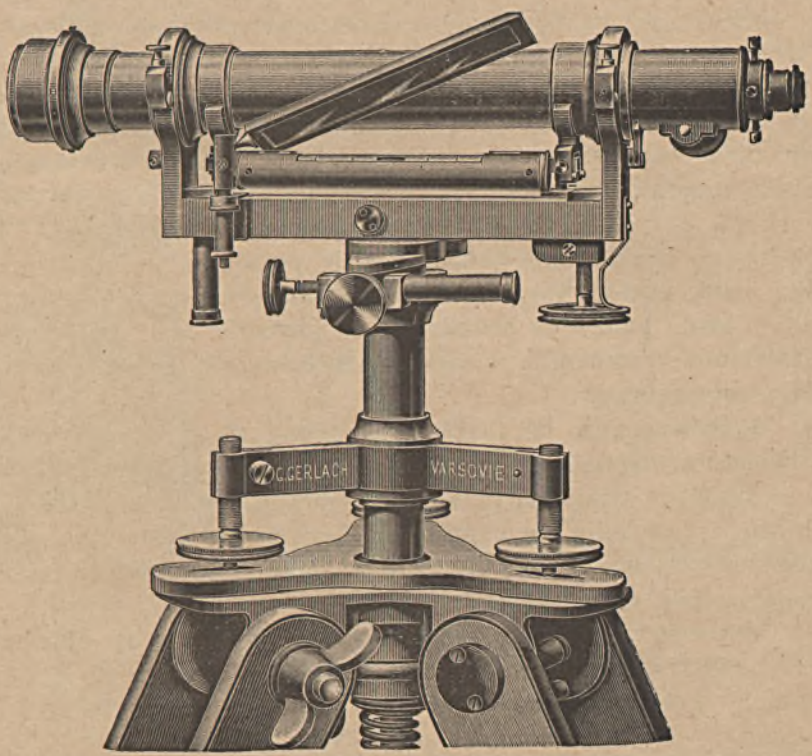
Przy działaniu śrubą elewacyjną, której krok wynosi około 0,3 *mm*, górna część niwelatora razem z dźwigarkami obraca się dokoła poziomej osi, przechodzącej przez środek alhidady prostopadle do niej i do pionowej osi niwelatora. Na drugim końcu alhidady znajduje się pionowa rurka z umieszczoną w niej sprężyną, działającą na wysunięty z rurki pręcik metalowy z kulistą główką. Pręcik ten podtrzymuje opierający się na jego główce dźwigarek lunety. Ponieważ alhidada (w postaci sztaby metalowej, umieszczonej wewnątrz ramy, łączącej dźwigarki) w stosunku do górnej części niwelatora, a więc dźwigarków i łączącej je ramy (mogącej się podnosić i opuszczać), pozostaje nieruchoma, przeto obrót śruby elewacyjnej

przesuwa nad alhidadą jeden dźwigarek z końcem ramy, która obraca się na osi poziomej, przechodzącej przez środek ramy i umieszczonej wewnątrz niej alhidady; wobec tego drugi dźwigarek opuszcza się, podtrzymywany pręcikiem, znajdującym się pod działaniem sprężyny. Rektyfikacja tego typu niwelatora polega na następującem postępowaniu:

a) oś celową sprowadzamy na oś geometryczną, jak w niwelatorze poprzedniego typu;

b) sprawdzamy libelę pudełkową (patrz dział o libelach),

c) sprowadzamy oś celową do równoległości z osią libeli; mianowicie ustawiamy zapomocą libeli pudełkowej oś obrotu niwelatora do położe-



Rys. 467a.

nia pionowego, poczem obrotem lunety w łożyskach układamy libelę pod lunetą; sprzęgając alhidadę zapomocą zacisku, sprowadzamy oś libeli do poziomu śrubą elewacyjną. Obracamy lunetę dokoła osi geometrycznej (nie wyjmując z łożysk) o 180° (libela ułoży się nad lunetą). Połowę ewentualnego wychylenia bańki usuwamy zapomocą śruby elewacyjnej, drugą połowę — zapomocą śrubek rektyfikacyjnych. Następnie znów obracamy lunetę o 180° dokoła osi geometrycznej i połowę powstałego znów wychylenia bańki usuwamy zapomocą śruby elewacyjnej, drugą połowę zapomocą śrubek rektyfikacyjnych.

Po powtórzeniu tego postępowania kilkakrotnie, sprowadzimy płaszczyznę główną libeli do równoległości z osią celową. Ażeby zaś sprowa-

dzić do równoległości z osią celową samą oś libeli, obracać będziemy lunetę dokoła osi geometrycznej o kąt bliski 20° — 30° w obydwu kierunkach od osi pionowej niwelatora.

Jeżeli przy takiem odsuwaniu libeli od pionowej osi niwelatora (w lewo i w prawo) bańka libeli przesuwać się będzie od środka ku końcowi libeli, a po przesunięciu nad pionową osią niwelatora przesuwać się zacznie ku drugiemu końcowi libeli, świadczyć to będzie, że oś libeli nie leży w jednej płaszczyźnie z osią geometryczną lunety. Wychyloną od środka bańkę libeli sprowadzamy do właściwego położenia zapomocą bocznych rektyfikacyjnych śrubek libeli.

Ponieważ libela w tym niwelatorze jest rewersyjna, a więc posiada dwie osie, przeto rektyfikacja dla uzyskania równoległości osi celowej do osi libeli możliwa jest wtedy, kiedy obydwie osie libeli są do siebie równoległe. Jeżeli to nie ma miejsca, wówczas sprowadzenie obydwu osi do równoległości z osią celową jest niemożliwe. Aby sprawdzić, czy obydwie osie libeli są do siebie równoległe, niwelujemy odcinek ze środka; ustawiając później niwelator przy końcu odcinka (patrz niwelator ze śrubą elewacyjną i stałą lunetą), obliczamy ten odczyt na łacie, ustawionej na drugim końcu odcinka, przy którym oś celowa znajdzie się w poziomie. Kierując oś celową na ten odczyt, sprowadzimy ją do poziomu. Jeżeli jednak wówczas bańka libeli wychyli się ze środka (gdy dotychczas opisana rektyfikacja została dokonana), będzie to świadczyć, że obydwie osie libeli rewersyjnej nie są wzajemnie równoległe, a więc nie możemy ich doprowadzić do równoległości z osią celową;

d) doprowadzamy oś libeli rewersyjnej do prostopadłości do osi obrotu niwelatora, ustawiając lunetę nad śrubą nastawową, i sprowadzamy tą śrubą oś libeli do poziomu; poczem odwracamy alhidadę o 180° i połowę ewentualnego wychylenia się bańki usuwamy śrubą nastawową, drugą połowę-śrubą elewacyjną. Sprawdzenia tego dokonamy kilkakrotnie kolejno w stosunku do dwu śrub nastawowych;

e) sprawdzamy prostopadłość poziomej nitki do osi obrotu niwelatora (patrz niwelator typu francuskiego Egault).

§ 216. Niwelator szwajcarski z przekładaną lunetą i libelą nasadkową, ze śrubą elewacyjną firmy Kerna (rys. 468).

Niwelator ten ma trójramienną spodarkę, śrubę zaciskową i leniwkę, śrubę elewacyjną, libelę pudełkową na alhidadzie, przekładaną lunetę i libelę nasadkową, ustawianą nóżkami na pierścieniach lunety. Statyw typu francuskiego. Rektyfikacja tego niwelatora składa się z następujących czynności:

a) sprawdzamy libelę pudełkową;

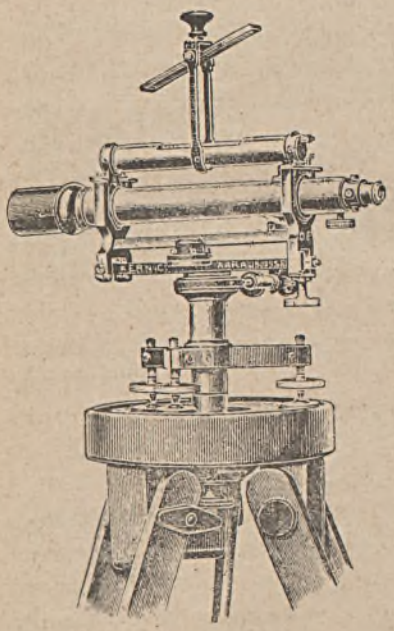
b) sprowadzamy oś celową na oś geometryczną lunety, obracając lunetę w łożyskach przy celu do wyraźnego punktu (patrz niwelator francuski);

c) sprawdzamy oś nasadkowej libeli *ll*, kontrolując równoległość jej płaszczyzny głównej do tworzącej pierścieni lunety; mianowicie ustawiamy lunetę nad śrubą nastawową i zapomocą obrotu tą śrubą sprowadzamy

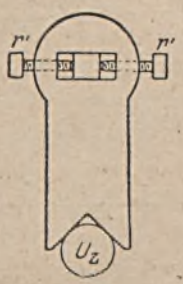
bańkę libeli nasadkowej do właściwego położenia; następnie, nie poruszając lunety, przestawiamy na pierścieniach libelę i połowę ewentualnego wychylenia bańki usuwamy zapomocą śrubek rektyfikacyjnych r, drugą połowę śrubą elewacyjną (rys. 469).

Czynność tę powtórzymy kilkakrotnie.

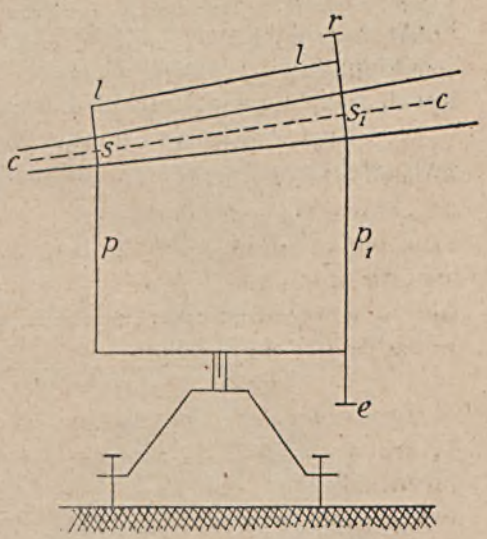
Równoległość osi libeli do osi geometrycznej lunety (a więc i tworzącej pierścieni) sprawdzimy, obracając libelę na pierścieniach w kierunku, poprzecznym do lunety. Wychylenia bańki ku różnym końcom libeli przy przesuwaniu jej przez oś obrotu niwelatora wskazują na konieczność przesunięcia osi libeli zapomocą bocznych śrubek r' libeli (468a);



Rys. 468.



468a.



Rys. 469.

d) sprawdzamy równość pierścieni lunety, mianowicie, po sprowadzeniu bańki libeli do właściwego położenia, zaciskamy alhidadę, podnosimy libelę i pod nią przekładamy w łożyskach lunetę. Libelę ustawiamy znów na pierścieniach, bacząc, by koniec libeli, skierowany poprzednio ku objektywowi, i teraz był skierowany w tę samą stronę, a więc ku okularowi — po przełożeniu lunety. Jeżeli teraz bańka libeli zajęła właściwe położenie, wówczas średnice pierścieni są jednakowe; jeżeli się bańka wychyli — średnice są różne i należy lunetę odesłać do fabryki dla zeszlifowania jednego z pierścieni.

Gdy ustaliliśmy równość średnic pierścieni, równoległość osi libeli do tworzącej pierścieni i równoległość, względnie identyczność, osi geometrycznej z osią celową lunety, wówczas tem samem zachowanie warunku równoległości osi celowej do osi libeli jest ustalone;

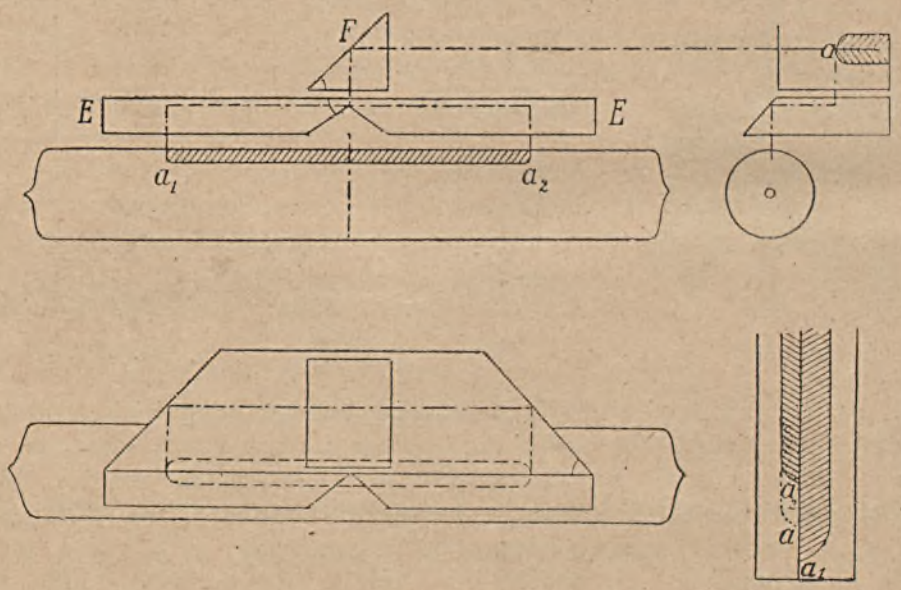
e) sprowadzamy oś libeli do prostopadłości do osi obrotu niwelatora; mianowicie, śrubą nastawową sprowadzamy oś libeli do poziomu, odwracamy o 180° alhidadę i połowę wychylenia bańki usuwamy zapomocą śruby elewacyjnej, drugą połowę — zapomocą nastawowej.

§ 217. Niwelator Wilda.

Firma Zeiss wyrabia niwelatory pomysłu Wilda, różniące się od rozpatrzonych typów. Odsyłając czytelnika, pragnącego dokładniej poznać ten i inne typy, do „Niwelacji Geometrycznej“ prof. Warchałowskiego, rozpatrzymy szczegóły konstrukcyjne Wilda, niespotykane w opisanych tutaj niwelatorach (rys. 471).

Luneta nie jest przekładana, lecz może się obracać dokoła osi geometrycznej o 180° po zwolnieniu zatrzasku pod lunetą. Rurka okularowa nie ma kremoljery i nie przesuwa się przy celowaniu; ustawienia dla obserwacji dokonamy przesunięciem soczewki, znajdującej się wewnątrz rury objektywu pomiędzy nim a okularem. Objektyw może być umieszczony w miejscu okularu i odwrotnie, tak więc luneta posiada dwie osie celowe. Długość lunety jest stała. Libela nie jest zaopatrzona w podziałkę; nad libelą w oddzielnym futerale znajdują się dwa pryzmaty, stykające się nad środkiem libeli. Nad linją zetknięcia się tych pryzmatów znajduje się trzeci, odsyłający odbite promienie do oka (rys. 470).

Ruch bańki oko ujmuje przez górny pryzmat, jako przesuwanie się dwu pęcherzyków wzdłuż jednej prostej. Końce tych pęcherzyków zejdą



Rys. 470.

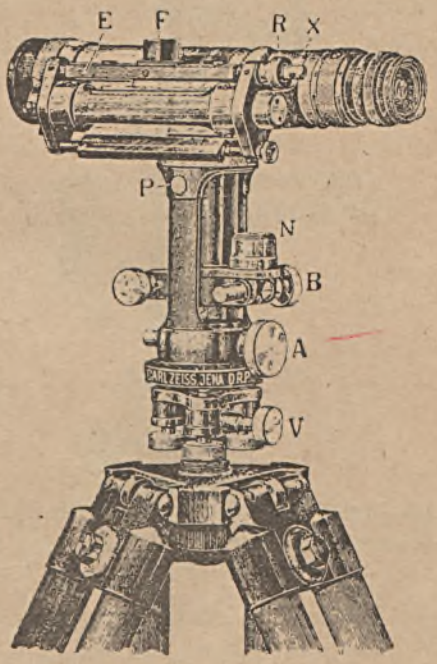
się wówczas, gdy oś libeli jest spoziomowana. Przy takiem położeniu obrazów obydwu połówek bańki można więc dokonywać odczytów. Układ pryzmatów posiada śrubę, przesuwającą go wzdłuż osi libeli, co służy do właściwego ustawienia układu.

Wielką zaletą tego niwelatora jest ta właściwość wewnętrznej soczewki, że przesunięcie jej w poprzecznym ku osi optycznej kierunku powoduje pięć razy mniejsze przesunięcie obrazu w stosunku do jego właściwego położenia. Pod tym względem zwykłe niwelatory z wysuwaną rurką siatkową stoją niżej, gdyż zachodzące w nich przy przesuwaniu rurki po-

przeczne wychylenia przesuwają krzyż nitek w stosunku do obrazu o całkowitą wielkość tego wychylenia. Ta właściwość niwelatora Zeiss-Wilda tłumaczy się stosunkiem odległości między płaszczyzną obrazu a przesuwaną soczewką do ogniskowej tej soczewki, równym 0,2. Wewnętrzną soczewkę przesuwamy zapomocą obrotu pierścienia przy rurce okularu.

Krzyż nitek i nitki dalekomiercze (skrajne) są nacięte na płytce szklanej, przyczem nić środkowa przecina całe pole widzenia, skrajne zaś są krótkiemi cdcinkami, przecinającemi rysę pionową. Jest to zaletą, gdyż przy każdem oświetleniu nić środkowa odróżnia się od skrajnych, co uniemożliwia dokonanie odczytów z niewłaściwych nitek.

Niwelator osadza się tuleją na walcowym czopie statywu. Zacisk *v* służy do unieruchomienia niwelatora na czopie, leniwka *B* przesuwa lunetę w poziomie. Luneta może pochylać się dokoła poziomej osi *P* zapomocą obrotu śruby *A*.



Rys. 471.

Śrubami nastawowemi sprowadzamy oś pionową niwelatora do poziomu, posiłkując się libelą pudełkową *N*.

Obrót śruby *X*, po zwolnieniu nakrętki *R*, przesuwa układ pryzmatów *E* nad libelą.

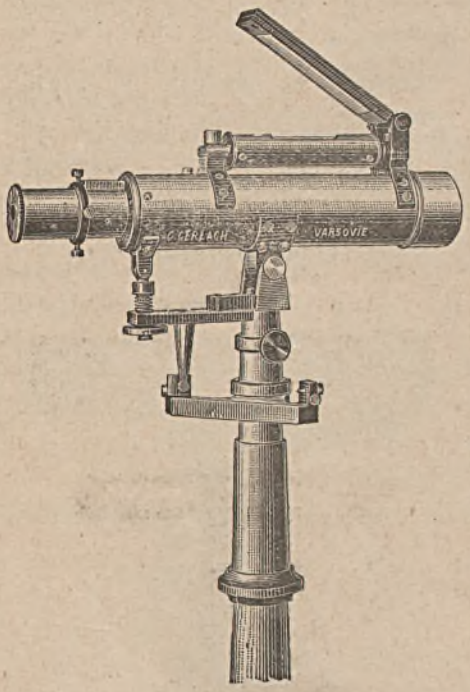
Pryzmat *F*, odsyłający promienie do oka, obraca się dokoła osi.

Rektyfikacja tego niwelatora ma następujący przebieg: kierujemy oś celową na łatę, zapomocą obrotu śrubą *A* sprowadzamy do styku końce obserwowanych przez pryzmat *F* pęcherzyków. W chwili zetknięcia się ich końcow odczytujemy łatę. Obracamy lunetę dokoła osi geometrycznej o 180° i, znów sprowadzając śrubą *A* oś libeli do poziomu, notujemy odczyt z łaty. To samo powtarzamy po zmianie miejsc okularu i objektywu. Oś celową ustawiamy na średnią arytmetyczną otrzymanych czterech odczytów na łacie i wówczas śrubą *X* przesuwamy układ pryzmatów do czasu, gdy obserwowane przez pryzmat *F* pęcherzyki zleją się w jeden. Ten sam efekt uzyskać możemy, działając pionowemi śrubkami rektyfikacyjnemi libeli.

§ 218. Niwelatory kieszonkowe.

Dla mniej dokładnych prac niwelacyjnych na niewielkich objektach, lub dla podrzędnych prac na większych objektach, a wszędzie tam, gdzie w określeniu wysokości kilka centymetrów nie gra roli—używamy niwelatorów kieszonkowych. Niwelatory te są najczęściej konstruowane w założeniu, że osi pionowej niwelatora niema potrzeby ustawiać prostopadle do poziomu;

wystarczy, gdy oś celowa będzie spoziomowana. Na rysunku 472 przedstawiony jest niwelator kieszonkowy firmy Gerlach.



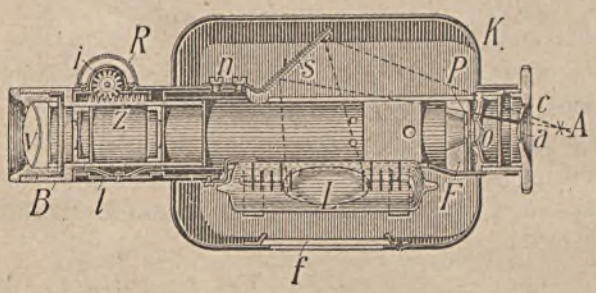
Rys. 472.

Niwelator ten posiada 15-centymetrową lunetę o 12-krotnem powiększeniu; nad lunetą znajduje się zwierciadełko, w którem odbijają się wahania libeli. Luneta ustawia się zapomocą jednej śruby.

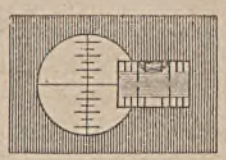
Jedyną rektyfikacją tego niwelatora jest usunięcie nierównoległości płaszczyzny głównej libeli, osadzonej na lunecie, do osi celowej. Wykonywa się, jak następuje: określamy różnice wysokości dwu punktów, na których stoją łaty, niwelując ze środka; przenosimy następnie niwelator na miejsce jednej z łat, ustawiamy go przy tym punkcie tak, by luneta dotknąć mogła pionowo ustawionej na nim łaty, i notujemy z łaty odczyt i, odpowiadający wysokości środka okularu przy spoziomowanej libeli. Wówczas odczyt

$$p = i - h$$

odpowie temu odczytowi na drugą łatę, przy celu do którego oś celowa będzie pozioma. Kierujemy śrubą elewacyjną krzyż nitek na odczyt p i sprowadzamy wówczas śrubką rektyfikacyjną libeli bańkę do właściwego położenia.



Rys. 473.



Rys. 474.

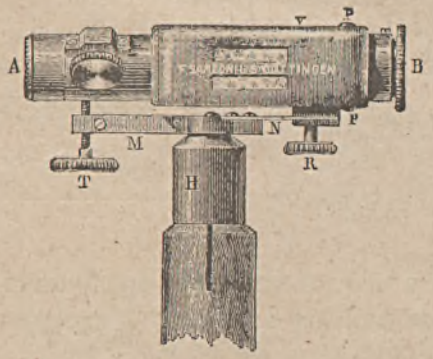
Rys. 473 daje przekrój poziomy kieszonkowego niwelatora Wagnera. Oś libeli rewersyjnej jest równoległa do osi celowej. Naprzeciwko libeli, z drugiej strony lunety znajduje się pochylone lusterko. Obok zewnętrznej

soczewki *a* okularu znajduje się płaskowypukła soczewka *c* zwaną soczewką libeli.

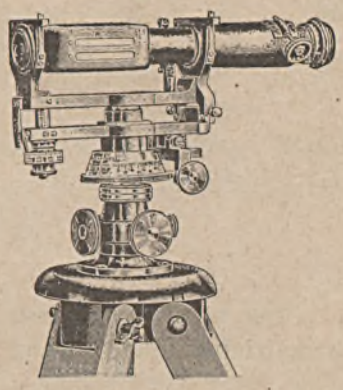
W ściankach lunety i rurki okularowej wycięte są otwory, przez które promienie światła przechodzą od libeli do lusterka *s* i soczewki *o*.

Oko przy obserwacji umieszczamy w punkcie *A* przecięcia się osi optycznej lunety z osią soczewki *c* libeli; widzimy wówczas w polu widzenia lunety równocześnie z krzyżem nitek powiększony obraz bańki i podziału libeli. Możemy więc w chwili, gdy bańka zajmie właściwe położenie, dokonać odczytu z łaty. Luneta i libela częściowo znajdują się wewnątrz futerału *K*, chroniącego niwelator od kurzu i uszkodzeń. W ściankach futerału są okienka szklane *f*.

Libele do poziomu sprowadzamy śrubką *T* (patrz rys. 475). Na statywie osadzamy niwelator tuleją *H*. Możemy także niwelować, trzymając przyrząd w ręku; wówczas jednak dokładność niwelacji nie będzie wyższa od $\frac{1}{500}$ odległości od łaty.



Rys. 475.



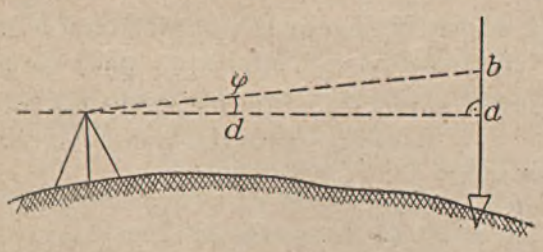
Rys. 476.

Dokładniejszy typ niwelatora Wagnera przedstawia rys. 476. Luneta jest przekładana na dźwigarkach, z których jeden jest zaopatrzony w śrubę elewacyjną. Przyrząd posiada limbus, jest więc i kątomierzem.

§ 219. Przewaga libeli.

Przewagą libeli nazywamy wartość kątową jednej podziałki libeli.

Ustalenie tej wartości dla libeli niwelacyjnych nie wymaga specjalnego przyrządu, wystarcza łata niwelacyjna.



Rys. 477.

Mianowicie w odległości *d*, równej 40 *m*, od niwelatora, odmierzonej taśmą, ustawiamy na trwałym punkcie łatę ściśle pionowo.

Sprowadzamy oś libeli do poziomu i odczytujemy *a* z łaty po skierowaniu na nią osi celowej.

Następnie zapomocą śruby elewacyjnej, lub nastawowej, wychylamy bańkę libeli od punktu głównego o n (2 — 3) podziałek libeli.

Oczywiście, odchyli się wówczas i oś celowa lunety od poprzedniego położenia, wskutek czego na łacie odczytamy b.

Różnica

$$a - b = h$$

oraz odległość d umożliwiają obliczenie z △-a prostokątnego wielkości kąta φ wychylenia osi, mianowicie:

$$tg\,\varphi = \frac{h}{d}$$

Przyrównawszy $tg\,\varphi$ do $\sin\varphi$, gdyż kąt φ jest mały: otrzymamy

$$tg\,\varphi = \sin\varphi = \varphi \sin 1'' = \frac{h}{d}$$

a stąd

$$\varphi'' = \frac{h}{d \sin 1''} = 206265\,\frac{h}{d}$$

ponieważ wychylenie φ odpowiada n podziałkom libeli, więc wartość podziałki τ libeli wyniesie:

$$\tau = \frac{\varphi''}{n} = 206265\,\frac{h}{nd}$$

Tak np. przypuśćmy, że przy $d = 50$ m, przy wychyleniu bańki o 1,5 podziałek libeli, odczyt z łaty zmienił się o 5 mm. Wówczas

$$\tau = 206265\,\frac{5}{50000 \times 1{,}5} = 14''$$

Im mniejsza jest przewaga libeli, tem dokładniejszy jest niwelator. Tak więc najmniejsze niwelatory posiadają libele o przewadze 30″ do 50″, niwelatory, używane do niwelacji dla celów technicznych, posiadają libele o przewadze około 20″, a lepsze nawet i 10″—20″, libele zaś niwelatorów ścisłych około 5″.

§ 220. Przewaga libeli niwelatora, a powiększenie lunety.

Istnieje określona zależność między przewagą libeli niwelatora, a powiększeniem lunety. Zachowanie tej zależności jest konieczne, gdyż niema wartości niwelator o silnej lunecie przy znacznej przewadze libeli, jak również nie jest zaletą ze względów praktycznych zaopatrzenie niwelatora o bardzo słabej lunecie w libelę dokładną o małej przewadze.

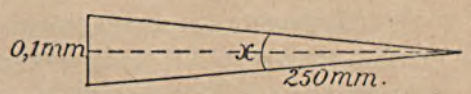
W pierwszym wypadku (silna luneta — duża przewaga libeli), gdy libela jest mało dokładna, luneta da możność zauważyć drobne przesunięcie nitki poziomej na łacie przy odpowiedniem pochyleniu lunety; jeżeli

zaś bańka libeli nie ulegnie przesunięciu, wówczas libela nie jest dostosowana do silnej lunety, gdyż przy tem samem położeniu bańki libeli możemy nieznacznie pochylać oś celową, a więc dokonać kilku różnych odczytów (zresztą wzajemnie bliskich), jako odpowiadających spoziomowanej osi celowej. Nie możemy więc wykorzystać zalet lunety, a prócz tego wprowadzamy dowolność w odczytach.

W drugim wypadku (słaba luneta, a bardzo wrażliwa libela) będziemy wychylać oś celową od poziomu o tyle, żeby bańka libeli odchyliła się od pierwszego położenia o kilka dziesiątych podziałki.

Jeżeli wówczas nie zauważymy przesunięcia nitki na łacie, t. j. odczyt pozostanie bez zmiany, będzie to oznaczało, że dla danej lunety libela jest zbyt dokładna. Nie jest to wadą niwelatora, ale strata czasu na spoziomowanie osi libeli nie odpowiada dokładności odczytu, gdyż tę samą dokładność uzyskać można przy mniej wrażliwej libeli, dającej się szybciej sprowadzać do poziomu.

Zasady uzgodnienia siły lunety z wrażliwością, a więc i przewagą libeli, uzyskano z doświadczenia. Normalny wzrok rozróżnia 0,1 *mm*, jeszcze na odległość 25 *cm*. Najmniejszym więc kątem widzenia jest określany z równania:



Rys. 478.

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{0{,}1}{2.250}$$

stąd

$$x = 206265 \frac{0{,}2}{500} = 80''$$

Zapomocą lunety o powiększeniu p uzyskujemy najmniejszy kąt widzenia, równy $\frac{80''}{p}$. Znaczy to, że wychylenie osi celowej niwelatora o ten kąt wpływa już na zmianę odczytu, a więc takie wychylenie lunety w płaszczyźnie pionowej winno być potwierdzone zmianą w położeniu bańki libeli, przytem taką zmianą, która łatwo może być przez nas zauważona. Za takie przesunięcie bańki libeli uważać będziemy dwie dziesiąte jej podziałki.

Oznaczając literą τ przewagę libeli, powyżej powiedziane ujmiemy w równaniu

$$\frac{80''}{p} = 0{,}2\,\tau$$

Stąd

$$\tau = \frac{400''}{p}$$

A więc:

a) powiększeniu lunety:

$$p_1 = 15 \quad p_2 = 30$$

b) odpowiadać winna libela o przewadze:

$$\tau_1 = 25'' \quad \tau_2 = 13''$$

Zależność ta jest przestrzegana w przybliżeniu w niwelatorach, używanych do niwelacji technicznej. Nieco dokładniejsze libele spotykamy w niwelatorach precyzyjnych.

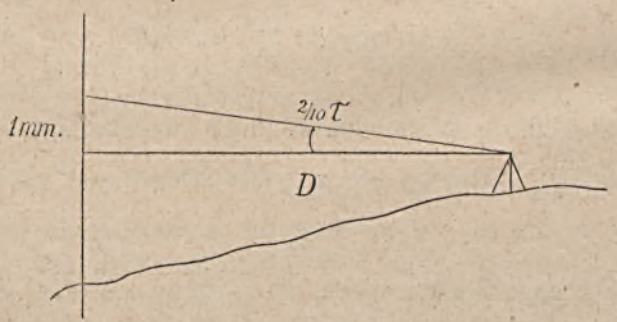
§ 221. Odległość od niwelatora do łaty.

Obserwując łaty, rozstawione w różnej odległości od niwelatora, łatwo zauważymy, że na bliższych odległościach uzyskujemy dokładniejsze odczyty niż na dalszych. Tak więc spostrzeżemy, że przy łatach, podzielonych na centymetry, możemy szacować odczyty do milimetra na odległości kilkudziesięciu metrów, co będzie niemożliwe przy dwustometrowem oddaleniu łaty.

Pomijając wpływ kulistości ziemi, sięgający 1 *mm*, w odległości 113 *m*, oraz wpływy innych czynników, rozpatrzmy wpływ na odczyt błędu spoziomowania osi celowej, w zależności od odległości.

Sformułujemy zagadnienie w sposób następujący: do niwelacji technicznej używamy łat, podzielonych na centymetry, przy których dokładność odczytu sięga 1 *mm*; określmy, przy jakiej odległości od niwelatora do łaty wychylenie bańki libeli o $\frac{2}{10}$ podziałki zmieni odczyt o wielkość, równą jego dokładności. t. j. o 1 *mm*.

Z △-a prostokątnego, gdzie określana D jest odległością od łaty,



Rys. 479.

na której oś celowa przesuwa się o 1 *mm* przy wychyleniu bańki o $\frac{2}{10}\tau$, wynika po przyrównaniu tangensa małego kąta do sinusa:

$$D = \frac{1\ mm}{\sin \frac{2}{10}\tau} = \frac{5 \times 206265}{\tau}\ mm;$$

A stąd dla $\tau = 20''$ otrzymujemy 50 *m*.

Dla innych τ uzyskamy inne wyniki. Wszelako za normalną odległość od łaty przy niwelacjach przekrojów podłużnych przyjmujemy 50 *m*, niezależnie od wartości podziałki libeli; odległość tę możemy zwiększać we wszystkich wypadkach, kiedy dokładność odczytu na łacie może być zmniejszana bez szkody dla ostatecznych celów niwelacji.

Tak, np., przy budowie dróg wystarczy najzupełniej, jeżeli różnice wysokości poszczególnych punktów będą określone z dokładnością do 1 *cm*, gdyż roboty ziemne wykonane będą nie z większą dokładnością.

§ 222. Niwelacja wprzód a niwelacja ze środka.

Jak poprzednio zostało wyjaśnione, przy niwelacji ze środka, gdy odległości łat od niwelatora są ściśle jednakowe, wzajemnie się likwidują błędy, wynikające z nieuwzględnienia kulistości ziemi, refrakcji oraz z nierównoległości osi celowej do osi libeli.

Pozatem, przy tej samej odległości od łaty, niwelacja ze środka z jednem ustawieniem niwelatora określi różnicę wysokości na odcinku dwukrotnie większym, niż niwelacja wprzód. Określmy, z jaką dokładnością należy przy niwelacji ze środka wyznaczać miejsce dla ustawienia niwelatora. Dla niwelacji technicznej używamy niwelatorów o przewadze libeli około 20″.

Jeżeli błąd nierównoległości osi celowej do osi libeli wynosi φ, wówczas, przy odległościach d_1 i d_2 od łat, błędy odczytów wyniosą

$$a = d_1 \, tg \, \varphi$$

$$b = d_2 \, tg \, \varphi$$

i różnica wysokości h będzie równa:

$$h = (w + a) - (p + b) = (w - p) + (a - b)$$

lub

$$h = (w - p) + (d_1 - d_2) \, tg \, \varphi$$

Stąd przy

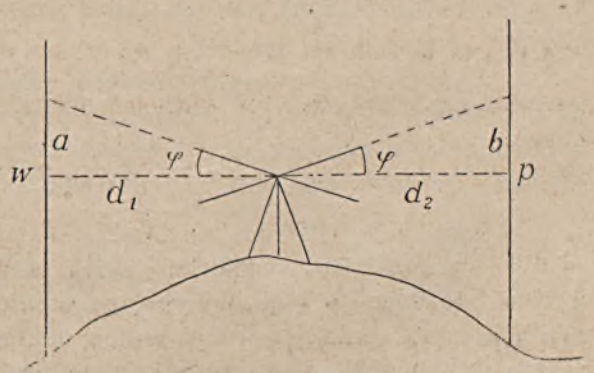
$$d_1 = d_2$$

będzie

$$(d_1 - d_2) \, tg \, \varphi = o,$$

t. j. przy ustawieniu niwelatora ściśle w środku odcinka, wpływ nierównoległości osi celowej do osi libeli na odczyt jest dzięki metodzie pomiaru całkowicie usunięty.

Przypuśćmy jednak, że chcemy wiedzieć, przy jakiej wartości różnicy $d_1 - d_2$ wpływ błędu φ nie przekroczy wielkości, nie mającej przy niwelacji technicznej praktycznego znaczenia. Za taką wielkość przy dokładności odczytu, równej 1 *mm*, możemy przyjąć pewną, np., $\frac{1}{5}$, część milimetra.



Rys. 480.

Za wielkość błędu φ przyjmijmy również $^1/_5$ część

wartości podziałki libeli, gdyż dokładniejsze zrektyfikowanie niwelatora jest możliwe tylko na krótki czas. Przy założeniu takich danych liczbowych obliczymy równania:

$$(d_1 - d_2)\ tg\varphi = \frac{1}{5}\ mm$$

przyjmując

$$\varphi = 5''\ \text{i}\ tg\varphi = \frac{5}{206265}$$

otrzymamy wielkość

$$\underline{d_1 - d_2 = 8\ m}$$

Ponieważ wychylenie stanowiska o 4 metry od środka odcinka długości 50 metrów wynosi $\pm \frac{1}{12}$ długości odcinka, przeto wielkość tę (50 *m*) odmierzyć można krokami, jeżeli nie mamy ściślej wyznaczonego środka.

Ze względu na fakt, że w czasie prac polowych błąd φ zmienia się, należy, dla uniknięcia konieczności częstego sprawdzania niwelatora, stosować niwelację ze środka, ściślej go wyznaczając.

Dla niwelatorów o przekładanych lunetach podwójna niwelacja przed i po a) przełożeniu lunety w łożyskach, b) obróceniu jej dokoła osi geometrycznej o 180°, daje dwa wyniki: pierwszy, obciążony błędem $+\varphi$ nierównoległości osi geometrycznej (przy równych średnicach pierścieni) lunety do osi libeli i osi geometrycznej do osi celowej, drugi — błędem $-\varphi$.

Pierwszy wynik jest zniekształcony o wielkość

$$(d_1 - d_2)\ tg\varphi.$$

drugi o wielkość

$$(d_1 - d_2)\ tg\ (-\varphi) = (d_2 - d_1)\ tg\varphi$$

Średnia arytmetyczna obydwu wyników jest wolna od błędu nierównoległości osi celowej do osi libeli (przy jednakowych średnicach pierścieni).

Stąd wniosek: przekładanie w łożyskach i obracanie lunety dokoła jej osi geometrycznej jest konieczne przy niwelacji ze środka niwelatorem odpowiedniego typu, gdyż 1) dwukrotny pomiar zabezpiecza od grubych błędów, 2) usuwa się wpływ błędów układu osiowego przyrządu.

Niwelację wprzód możemy stosować tylko w pewnych wypadkach: 1) dla wyznaczenia wysokości takich punktów, od których niwelacja nie posuwa się dalej, a więc błędy wyznaczenia wysokości takich punktów nie przenoszą się dalej, 2) przy mniej dokładnem określaniu różnic wysokości, 3) przy przejściu przez większe naturalne przeszkody, jak błota, rzeczki i t. p.

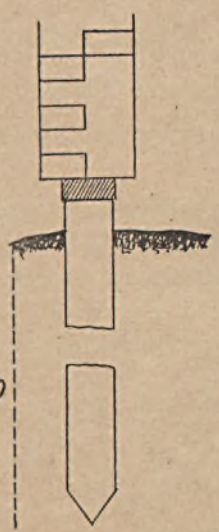
§ 223. Punkty niwelacyjne.

Pomiary niwelacyjne mają na celu określenie wysokości poszczególnych punktów. Punkty te mogą być punktami, rozrzuconemi w terenie, mogą też leżeć na określonych linjach — o ile chodzi o cele techniczne.

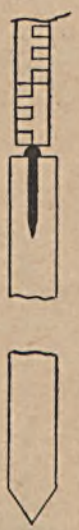
Wśród punktów tych są punkty podstawowe i szczegółowe; na pierwszych opieramy niwelację pozostałych.

Ponieważ punkty podstawowe winny być tak pod względem położenia, jak i wysokości, zupełnie ściśle oznaczone, przeto w celu uniknięcia dowolności w określaniu ich położenia, nadajemy tym punktom trwałą postać, gwarantującą zachowanie ich przez czas dłuższy. Tak położone punkty niwelacyjne nazywamy r e p e r a m i.

Mogą to być specjalnie przygotowane znaki, mogą niemi być przedmioty już istniejące, nie ulegające przesunięciom, jak np. cokoły domów murowanych, bolce żelazne, osadzone w murach, a wystające nazewnątrz, i t. p. Punkt taki winien być wyraźnie naznaczony dla odróżnienia go od innych podobnego kształtu. Na punktach tych (reperach) przy niwelacji ustawia się lub zawiesza łaty, zależnie od szczegółów konstrukcji danego typu. Najprostszym typem reperu przy niwelacjach technicznych jest pal o średnicy około 15 *cm.* z osadzoną na nim trwale żelazną obrączką. Pal taki nieco wystaje nad powierzchnią ziemi (10—15 *cm.*), będąc wbity głęboko do ziemi. Wbijamy go w takich miejscach, gdzieby był ukryty przed okiem przechodniów, mogących próbować wyciągnąć go lub wbić głębiej, coby zmieniło wysokość reperu. Odmianą tego typu jest pal z wbitym w jego wierzchołek gwoździem o dużej półkulistej główce, na której ustawia się łatę. Są to najprostsze typy, stosowane przy niwelacjach dla celów meljoracyj rolnych i t. p. pracach.



Rys. 481.


Rys. 482.

Solidniejszym typem reperu jest bolec żelazny z zazębieniami, skierowanemi ku główce reperu, wystającej ze ściany, reper ten umocowujemy cementem w ścianie budynku.

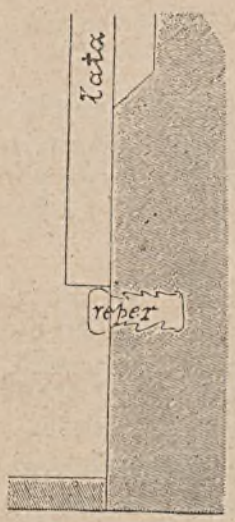
Sposób ustawiania łaty uwidoczniono na rysunku 483.

Przy pomiarach miejskich i przy państwowej niwelacji ścisłej stosują się repery, które są punktem zawieszania łat, służących tylko do nawiązywania niwelacji do takich reperów. W reperach tych są poziome otwory, których środek jest właściwym punktem niwelacyjnym (rys. 484)

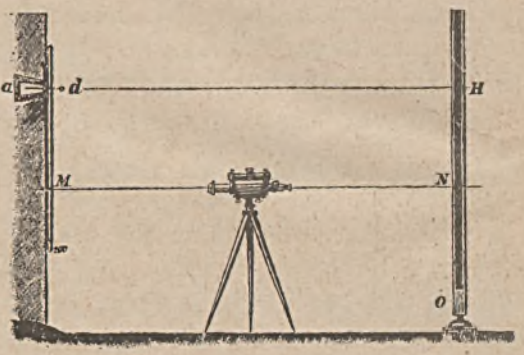
W otwór ten wsuwa się poziomy pręt, na którym zawieszona jest krótka i lekka łata niwelacyjna, zaopatrzona w krążek metalowy z otworem o średnicy równej średnicy poziomego pręta.

Za reper można przyjąć punkt na cokole budowli, nie ulegającej osadzeniu, lub na murowanej studni, dużym głazie i t. d. Punkt, obrany za reper, oznacza się umówionym znakiem, np., krzyżem, na którym przy niwelacji ustawiać należy łatę.

Repery niwelacji państwowej mają obliczoną wysokość nad poziomem morza; na ziemiach Polski niwelacja ścisła w każdym z zaborów była odniesiona do własnego poziomu morza, tak więc repery Małopol-



Rys. 483.

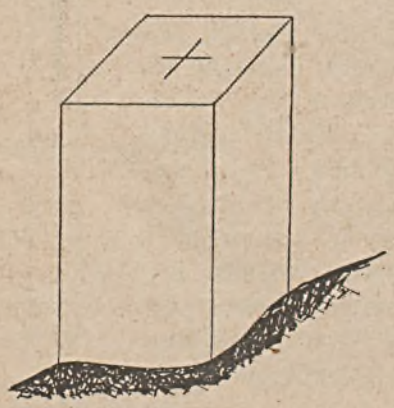


Rys. 484.

ski odniesione są do poziomu Adriatyku, w b. zaborze pruskim — do poziomu Morza Północnego, w b. zaborze rosyjskim — do poziomu Bałtyku.

Poza reperami mamy punkty niwelacyjne drugorzędne

Niema potrzeby, aby punkty te były bardzo trwałe, z tego względu są one wyznaczane mało dokładnie zapomocą palików, wbijanych równo z ziemią. Poza tem cały szereg niwelowanych punktów terenu nie oznacza się zupełnie w terenie. Wysokość tych punktów wyznacza się znacznie dokładniej, niż ich położenie sytuacyjne.



Rys. 485.

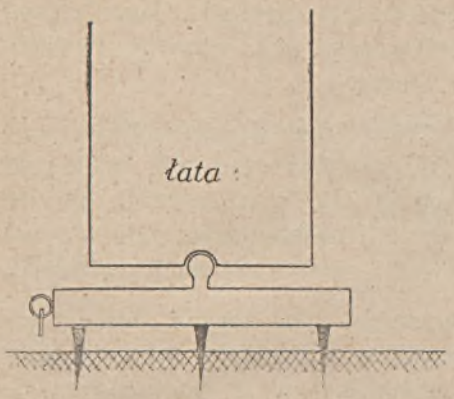
Do takich punktów między innemi zaliczamy t. zw. punkty zagubione. Punkty te służą do powiązania niwelacji reperów. Są to metalowe podstawki pod łaty, ustawione trwale w terenie, ale tylko na czas pomiaru, po skończeniu którego punkty te (zwane często ząbkami) przenoszą się dalej.

Rysunek 486 wskazuje typ takiej podstawki.

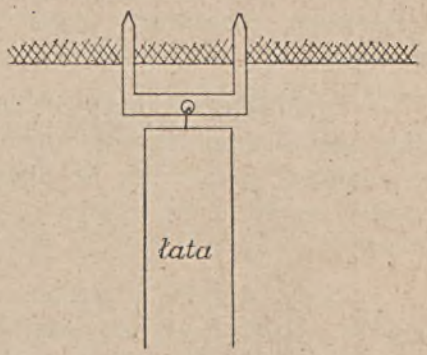
Pewną odmianą punktów niwelacyjnych są punkty niwelacyjne, osadzone w postaci klamer w sufitach korytarzy górniczych (rys. 487).

Klamry te posiadają otwory, dla zawieszania w nich łat, na których podział biegnie od punktu zawieszenia ku dołowi.

Obliczenie różnicy wysokości takich punktów tem się różni od zwy-



Rys. 486.



Rys. 487.

kłej niwelacji, że odczyty od tych punktów liczymy wdół, a więc traktujemy je jako ujemne.

Będzie zatem

$$(-w) - (-p) = p - w.$$

Różnicą więc wysokości poprzedniego i następnego punktu jest tutaj odczyt wprzód mniej odczyt wstecz.

§ 224. Prace niwelacyjne.

Zagadnienia praktyczne, wymagające stosowania prac niwelacyjnych, dają się podzielić na kilka kategoryj, mianowicie:

1) każde państwo dąży do założenia na swem terytorjum całego systemu punktów, których wysokość, odniesiona do wspólnego poziomu (najczęściej poziomu morza), winna być wyznaczona z najwyższą dokładnością, jaką można osięgnąć; prace niwelacyjne, wykonywane w tym celu, wchodzą w zakres t. zw. niwelacji precyzyjnej, mającej zresztą zastosowanie wszędzie tam, gdzie wymagania, dotyczące określania wysokości punktów, są wysokie, jak np. przy niwelacji większych miast;

2) cały szereg prac technicznych, jak: budowa kolei żelaznych, dróg bitych, kanałów, urządzeń meljoracyjnych, regulacje rzek i t. p., możemy we właściwy sposób wykonać tylko wówczas, gdy za podstawę projektów technicznych brane są plany, odtwarzające charakter wysokościowy terenu, przeznaczonego pod budowę odpowiednich urządzeń. We wszystkich tych pracach dokładność niwelacyj dostosowuje się do potrzeb czysto praktycznych, a więc zawsze w tych wypadkach ograniczamy się do dostatecznej dla danego typu prac dokładności. Ze względów oszczędnościowych, szybkość wykonania winna tutaj iść w parze z przepisaną dokładnością.

Niwelacja, stosowana przy pracach technicznych, nosi nazwę niwealcji topograficznej lub technicznej, przytem, jeżeli ma na celu określenie

wysokości szeregu punktów, położonych w terenie na pewnej linji, nosi nazwę niwelacji podłużnej; jeżeli ma na celu określenie wysokości punktów, położonych w terenie na pewnym obszarze, a to dla ustalenia jego wysokościowego charakteru (rzeźby terenu), wówczas nosi nazwę niwelacji terenowej.

Ponieważ w niwelacji, jak we wszystkich pracach geodezyjnych, ma stałe zastosowanie zasada, ujmowana w utartym zwrocie: „od ogółu do szczegółów", przeto tak w niwelacji podłużnej, jak w terenowej, pewne punkty są określane z większą od pozostałych dokładnością. Główne dla niwelacji terenowej punkty określają się również metodą niwelacji podłużnej.

Gdy niwelacja terenowa obejmuje wąski pas terenu, leżący po obydwu stronach osi przyszłej budowy, wówczas niwelacja takiego pasa nosi nazwę n i w e l a c j i p o p r z e c z n e j (nierozłącznej z podłużną niwelacją osi).

Rozpatrzymy przedewszystkiem niwelację podłużną oraz poprzeczną: ponieważ niwelacja ta najczęściej jest połączona z projektowaną drogą kanałem, czy t. p., a więc z objektem, nieistniejącym narazie w terenie, przeto należy rozpatrzeć przedewszystkiem wytyczenie trasy w terenie i utrwalenie jej zapomocą znaków niezbędnych, dla dokonania niwelacji.

§ 225. Tyczenie trasy.

W zwykłych warunkach trasa jest połączeniem prostych i łuków, leżących w osi projektowanej budowy, mianowicie z tego względu, że dla potrzeb komunikacji przejście między prostemi *AB* i *BC* trasy winno być złagodzone przez odpowiednie łuki. Promienie tych łuków są zgóry dane; wielkości ich zależą od typu danej linji komunikacyjnej, tak więc na kolejach mamy do czynienia z łukami o promieniach kilkuset i więcej metrowych, na drogach bitych — kilkunasto i kilkudziesięciometrowych. Położenie środkow tych łuków nigdy nie jest wyznaczane ani na planach, ani w terenie; wytyczanie łuków rozpatrzymy szczegółowo w tym dziale.

Najdoskonalszą postacią trasy byłby kierunek, łączący prostemi te punkty, które mają znaczenie dla projektowanej linji komunikacyjnej, a więc pewne osiedla. Ze względu jednak na miejscowe przeszkody, jak również na zbyt wielkie spadki, wytyczamy trasę w taki sposób, aby te przeszkody (wpływające na podniesienie kosztów robót) zostały ominięte w przebiegu trasy; stąd wypływają ustawiczne zmiany kierunku, oraz konieczność łączenia odcinków trasy łukami (rys. 449).

Niwelacja podłużna ma na celu określenie wysokości charakterystycznych pod względem wysokościowym punktów trasy. Tak więc, jeżeli rysunek daje przekrój pionowy terenu osi trasy, wówczas za punkty charakterystyczne uważać będziemy punkty przekroju, łączące końce odcinków o stałym spadzie, a więc *a b c .... u w z* (rys. 448).

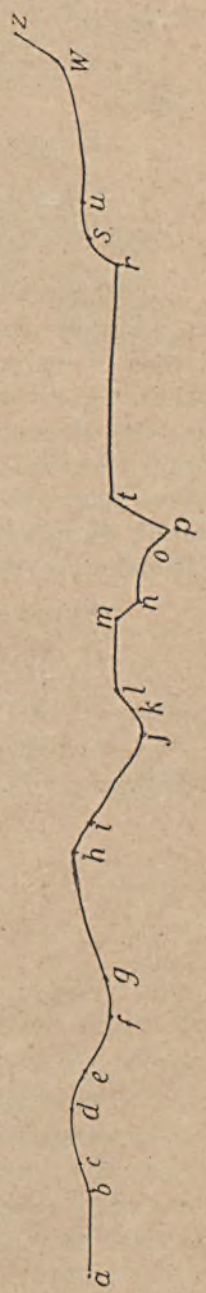
Ponieważ jednak ustaliliśmy, że przy niwelacji ze środka przyjmujemy jednakową (za wyjątkiem niesprzyjających okoliczności) odległość



Rys. 488.

od niwelatora do łat wstecz i wprzód i ponieważ mogą się spotykać dość długie odcinki o stałym spadzie, a zatem o znacznej odległości między charakterystycznemi punktami, przeto w celu systematyzowania pracy, prócz punktów charakterystycznych, wytyczamy w linji przekroju cały szereg punktów zwanych pikietami,—co 100 *m*. Pikiety są ustalane w terenie w postaci palików wbitych równo z ziemią, obok których w charakterze świadków, ułatwiających odnalezienie pikietów, stoją wbitę do połowy 40 centymetrowe paliki z wypisanemi numerami pikietów. Ściśle pośrodku między pikietami wbija się palik, wystający nad ziemią, z napisem 50. Numeracja pikietów jest albo zwykła (bieżąca) w kolejności pikietów (1,2 .... 15 .... 130), licząc od początku trasy, albo podwójna, w postaci ułamka (np. $\frac{12}{6}$), którego licznik oznacza liczbę całkowitych kilometrów (12), oddzielających dany pikiet od początku trasy, mianownik zaś oznacza numer pikietu na bieżącym kilometrze (6-y pikiet na 13-ym kilometrze od początku trasy).

Punkty załamania terenu w linji przekroju (punkty charakterystyczne) wyznaczamy w osi trasy palikami, wbitemi do połowy, oznaczonemi numerem poprzedzającego je pikietu, więcej odległość od niego do danego punktu. Tak, np. $\frac{6}{+45}$ oznacza punkt, odległy w kierunku trasy o 45 *m* od 6-go pikietu. Punkty charakterystyczne nazywamy zwykle pośredniemi. Obok świad-



Rys. 489

ków są wbite równo z ziemią paliki (warunek ten nie zawsze jest przestrzegany) (rys. 490).



Rys. 490

Pozatem, ponieważ dla szczegółowego projektu i obliczeń robót ziemnych niezbędne są przekroje poprzeczne, przeto na prostopadłych do osi w punktach charakterystycznych przegięć terenu w poprzecznym do osi kierunku wytyczamy t. zw. punkty poprzeczne, zapomocą wbicia palików z wypisanemi literami *l* (w lewo do osi) lub *p* (w prawo od kierunku osi, liczonego od jej początku) oraz z wypisanemi pod literami liczbami, oznaczającemi odległość danego punktu od osi (długość prostopadłej, spuszczonej z punktu na oś). Tak, np. $\frac{p}{4,5}$ oznacza w stosunku do najbliżej położonego pośredniego punktu osi punkt poprzeczny, leżący w prawo od osi w odległości 4,5 *m*.

Wreszcie na samej trasie, lub w pobliżu trasy, co kilka kilometrów są zakładane repery (najprostszego typu, o ile odpowiednich punktów brak, a więc w danym wypadku pale kilku (około 8-centymetrowej średnicy), okute u góry grubą obręczką żelazną, długości około 70 *cm*, wbite w ziemię na taką głębokość, że nad powierzchnią wystają na 5 *cm*. Zamiast tego rodzaju reperów, jako odpowiednie punkty stałe obieramy często leżące wpobliżu trasy wielkie głazy (oznaczając na nich zapomocą wycięcia krzyża punkt dla ustawienia łaty), ocembrowania studni, cokoły budynków i t. p. przedmioty stałe.

Wytyczenie trasy składa się więc z następujących głównych czynności:

1) wytyczenia odcinków prostych trasy;

2) wytyczenia łuków;

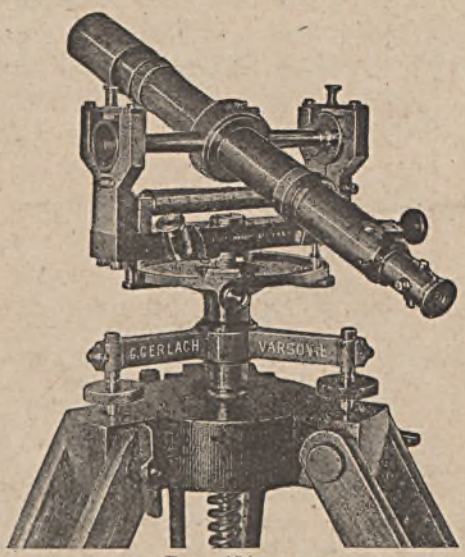
3) utrwalenia w terenie reperów, pikietów, punktów pośrednich i poprzecznych.

§ 226. Wytyczenie prostych odcinków osi trasy.

Wytyczenie tych odcinków różni się tem tylko od zwykłego tyczenia przed siebie, że długość poszczególnych prostych odcinków osi trasy wynosi często po kilka kilometrów.

Niezbędną rzeczą jest więc użycie przyrządu o silnej lunecie z powiększeniem około 30 — 40. Ponieważ lunety niwelatorów mają duże powiększenie, przeto niwelatory byłyby odpowiedniemi przyrządami, gdyby ich lunety mogły pochylać się w płaszczyźnie pionowej. W tym celu firma Gerlach skonstruowała przyrząd, będący zwykłym niwelatorem jej wyrobu, uzupełnionym limbusem i trzeciem pierścieniem na lunecie, na którym osadza się oddzielna oś pozioma obrotu lunety, zaopatrzona w takie same pierścienie, jak luneta, położone w tej samej wzajemnej odległości, jak pierścienie lunety. Gdy luneta swemi pierścieniami leży w łożyskach, wówczas

przyrząd jest niwelatorem; skoro wyjmiemy lunetę z łożysk, obrócimy w poziomie o 90° i osadzimy na niej oś obrotu lunety, wówczas możemy pierścienie osi poziomej obrotu lunety opuścić w łożyska i luneta wówczas może obracać się w płaszczyźnie pionowej — cały zaś przyrząd gra wtedy rolę teodolitu. Powiększenie lunety niwelatora — teodolitu wynosi około 36. Luneta może odchylać się od poziomu o 40°.



Rys. 491.

Dokładność odczytu z koła poziomego wynosi 1'. Przekładanie osi obrotu lunety w łożyskach daje możność ustawiania przyrządu między końcami odcinka ściśle na linji. Zapomocą tego przyrządu można określać wielkości kątów poziomych z dokładnością do 1', wobec czego może on zastępować zwykły teodolit minutowy.

Przy tyczeniu długiej prostej należy ustawić przyrząd na jej początku, skierować oś celową lunety na punkt końcowy i ustawiać tyczki, poczynając od najbardziej oddalonych. Rozstawiać pomocnicze tyki należy co $^1/_2$ *km*; później dopiero zagęszczamy wytyczenie, przestawiając stopniowo teodolit na pomocnicze tyczki.

Niekiedy stosuje się inna metoda wytyczenia: ustawiamy 1-ą pomocniczą tykę ściśle w linji w odległości 1 *km* od przyrządu, ustawionego na początku prostej; następnie przenosimy teodolit na miejsce 1-ej tyki i ustawiamy 2-ą w odległości 1 *km* od pierwszej na linji; przenosimy przyrząd na miejsce 2-ej tyki i ustawiamy w linji trzecią i t. d. Pomiędzy punktami, w ten sposób wyznaczonemi, możemy łatwo wytyczać cały szereg dodatkowych punktów.

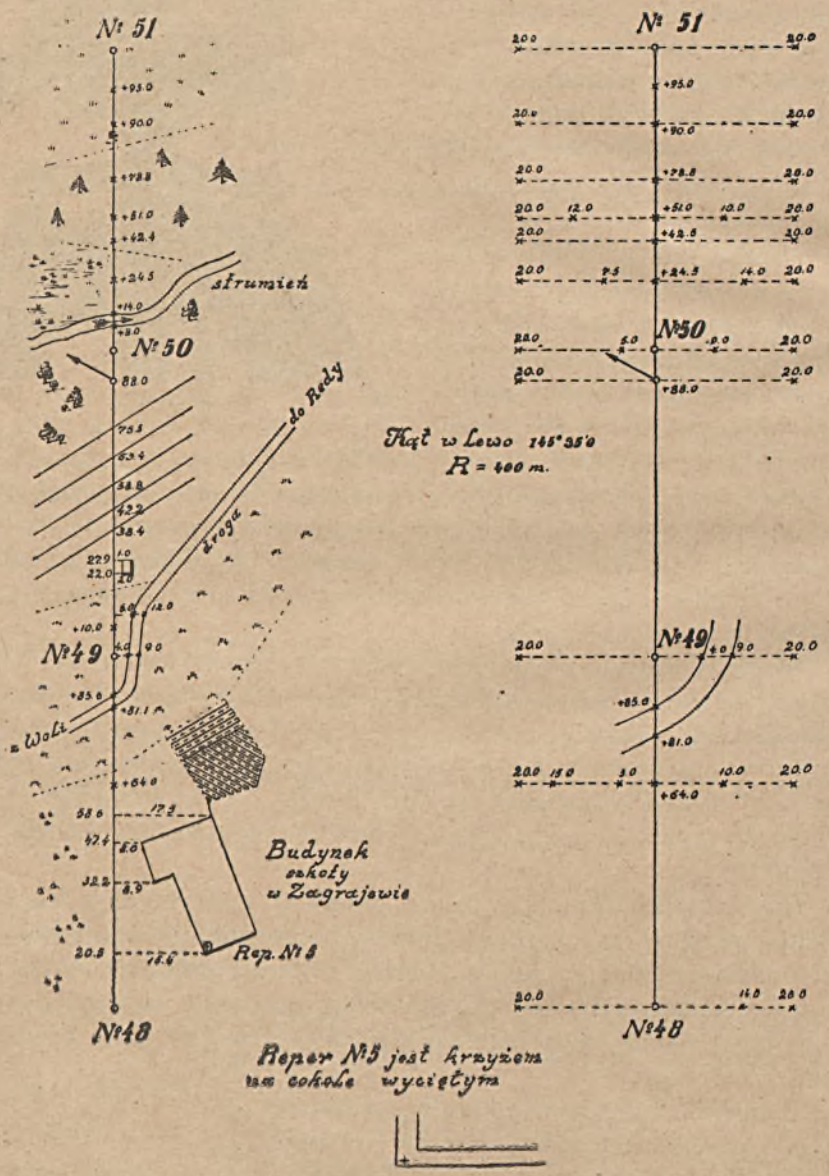
Gdy wytyczane punkty leżą z punktem końcowym w linji o stałem pochyleniu, przetyczenia każdego pomocniczego punktu można dokonać przy jednem położeniu lunety; jeżeli jednak zachodzi potrzeba opuszczania lub podnoszenia lunety, wówczas za ostateczne położenie wytyczanego punktu przyjmujemy średnie dwu jego położeń, wytyczonych przy każdem z obydwu położeń lunety.

Ustalenia położenia pikietów, punktów pośrednich i poprzecznych dokonamy, przetyczając odcinki trasy i odmierzając taśmą 100-metrowe odcinki. Kąty załamań osi trasy mierzymy teodolitem w trzech serjach.

§ 227. Dziennik pomiarowy trasy.

Przy pomiarze taśmą trasy równocześnie z określaniem pikietów i punktów pośrednich, zwykle zapomocą węgielnicy tyczymy punkty poprzeczne; prócz tego szkicujemy szczegóły sytuacyjne, przecina-

jące trasę lub położone w pobliżu trasy, a nawet i te dalsze szczegóły, które mają dla niwelacji znaczenie, jak, np., domy, lub studnie, z osadzonemi w nich reperami. Pozatem wynotowane być winny zmiany kierunku osi trasy, oraz wielkości kątów, o które trasa zmienia kierunek.



Rys. 492 *).

*) Szkice polowe (rys. 492) częstokroć zawierają dane, na podstawie których można odnaleść punkty, położone ściśle na trasie; tak np. na lewej połowie rysunku można było podać długość przedłużenia jednej ściany budynku, liczoną od jego rogu do przecięcia się z trasą.

W tym celu sporządzają się szkice polowe trasy i dziennik pomiaru kątów. Na szkicu trasy niezależnie od tego, czy są łuki, czy ich niema, wykreśla się ją w postaci prostej. Dogodnie jest używać papieru milimetrowego. W wypadku zbyt wielkiego skupienia szczegółów, oddzielnie szkicujemy oś i szczegóły sytuacyjne, oddzielnie zaś punkty poprzeczne i pośrednie. Ze szczegółów szkicujemy: drogi, domy, miedze, granice użytków, rzeczki i t. p.

Zmianę kierunku osi oznaczamy strzałką na początku krzywej, skierowaną w lewo lub w prawo.

Oczywiście, wierzchołek kąta znajduje się na przedłużeniu prostej Nr. 49 — Nr. 49 + 88,0 w odległości, równej długości stycznej od punktu Nr. 49 + 88,0. Koniec łuku znaczymy strzałką, skierowaną ku poprzedniej. Przy przedwstępnych studjach na łukach wytyczamy tylko pikiety, jeżeli zależy na pośpiechu.

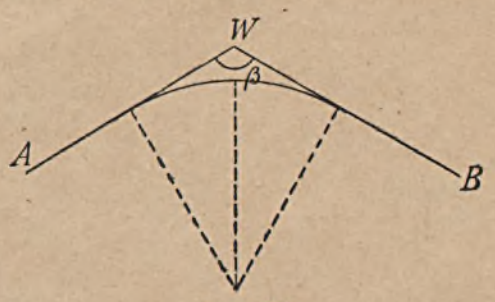
Liczby przy punktach przekrojów poprzecznych oznaczają odległości od osi mierzone wzdłuż odpowiednich prostopadłych.

Ponieważ wierzchołki kątów przy zmianie kierunku osi utrwalamy zapomocą znaków podziemnych (butelki lub rurki drenarskie zakopane na 70 *cm.* pod powierzchnią, a powyżej nich o 20 *cm.* układa się często cegła) i nadziemnego pala, przeto odpowiedni rysunek (dotyczy to i reperów) powinien być sporządzany w postaci opisu topograficznego.

Dziennik kątowy sporządza się według ustalonych wzorów.

§ 228. Tyczenie łuków.

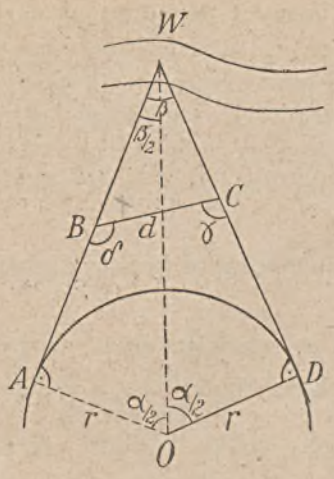
Gdy trasa zmienia kierunek (np. z AW na WB), wówczas między ramiona utworzonego kąta W wplata się łuk koła o danym promieniu. Wielkość promienia r zależy od celu, w którym prowadzimy trasę, tak więc dla kolei, będących magistralami, długość promienia łuku wynosi powyżej 300 m., dla kolei drugorzędnych od 180 m.



Rys. 493.

Dla wytyczenia łuku prócz promienia należy mieć wielkość kąta β zmiany kierunku trasy; natomiast zupełnie niema potrzeby znać położenia środka łuku w terenie.

Mogą zachodzić (rys. 494) wypadki, gdy niema możności pomierzenia kąta β między kierunkami AW i WD trasy. Wówczas obieramy punkty B na AW i C na WD tak, by pomiar prostej $BC = d$ był możliwy i aby obydwa te punkty były wzajemnie widoczne. Mierzymy $BC = d$ i kąty $ABC = \delta$ i $BCD = \gamma$.



Rys. 494.

Wówczas:

$$\gamma = 180^0 - \delta + \beta$$

skąd

$$\underline{\beta = \gamma + \delta - 180^0}$$

Dla ustalenia początku i końca łuku należy obliczyć długość stycznej

$$t = AW = WD$$

Gdy wierzchołek W połączymy ze środkiem O łuku, wówczas

$$\sphericalangle AWO = \sphericalangle DWO = \frac{\beta}{2}$$

$$\text{i} \quad \sphericalangle AOW = \sphericalangle WOD = \frac{\alpha}{2} = 90^0 - \frac{\beta}{2}$$

Długość stycznych AW i WD będzie równa:

$$t = r\,tg\,\frac{\alpha}{2}$$

Ponieważ zaś

$$BW = d\,\frac{\sin\,\gamma}{\sin\,\beta}$$

$$\text{i} \quad WC = d\,\frac{\sin\,\delta}{\sin\,\beta}$$

przeto

$$AB = t - BW$$

$$\text{i} \quad CD = t - WC$$

A więc, korzystając z punktów B i C na obydwu kierunkach trasy, odetniemy w terenie długości BA i CD i ustalimy w taki sposób początek A i koniec D łuku.

Jeżeli na prostych AW i WC przy niedostępnym punkcie W niema dwu wzajemnie widocznych punktów C i D, wtedy zakładamy poligon pomocniczy.

W poligonie tym mierzymy dwukrotnie boki i kąty.

Przyjmując kierunek PA za oś odciętych, ustalimy wielkości kątów kierunkowych

$$(AB) = 180^0 - \gamma$$

$$(BC) = (AB) + 180^0 - \delta$$

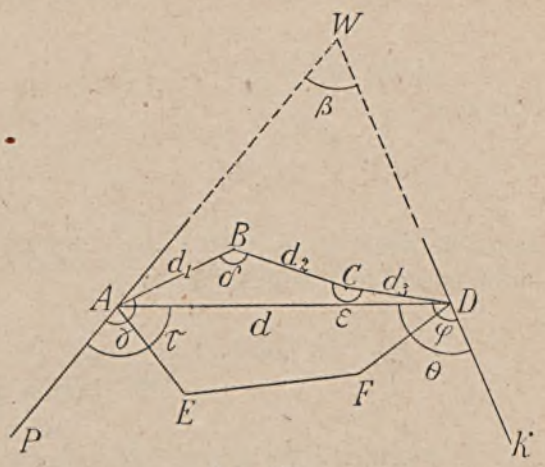
$$(CD) = (BC) + 180^0 - \varepsilon$$

Obliczenia tego dokonamy dwuktotnie, sprawdzając następnie, czy zachodzą równania:

$$\gamma = (AP) - AB$$

$$\delta = (BA) - (BC)$$

$$\varepsilon = (CB) - CD$$



Rys. 495.

Praktyczniejsze byłoby wyznaczenie jeszcze jednego poligonu $AEFD$, gdyż wówczas mielibyśmy kontrolę sumy kątów i kontrolę sumy przyrostów, które w obydwu poligonach $ABCD$ i $AEFD$ powinny dać odchyłkę dopuszczalną.

Po obliczeniu

$$\triangle x_{AB} = d_1 \cos (AB) \qquad \triangle y_{AB} = d_1 \sin (AB)$$

$$\triangle x_{BC} = d_2 \cos (BC) \qquad \triangle y_{BC} = d_2 \sin (BC)$$

$$\triangle x_{CD} = d_3 \cos (CD) \qquad \triangle y_{CD} = d_3 \sin (CD)$$

z sum przyrostów obliczymy kąt kierunkowy (AD) ze wzoru:

$$tg\ (AD) = \frac{[\triangle y]}{[\triangle x]}$$

i

$$AD = d = \frac{[\triangle y]}{\sin (AD)} = \frac{[\triangle x]}{\cos (AD)};$$

a stąd

$$\tau = 180^0 - (AD)$$

$$\Theta = (DA) - (DK) = (DA) - (DC) + \varphi$$

więc

$$\beta = \tau + \Theta - 180^0$$

i

$$AW = d\ \frac{\sin \Theta}{\sin \beta}$$

oraz

$$DW = D \frac{\sin \tau}{\sin \beta}$$

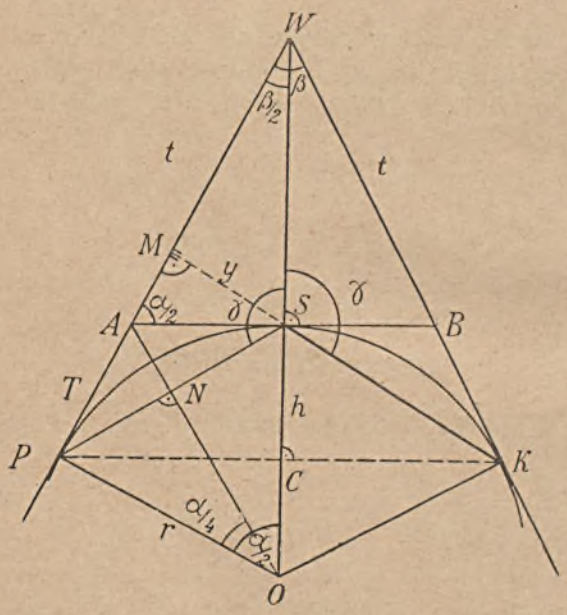
Mając zaś r i p,
obliczymy

$$t = r \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$$

oraz wielkości $(t - AW)$ i $(t - DW)$, które odłożymy w terenie dla ustalenia początku i końca łuku.

§ 229. Punkty główne łuku.

Punktami głównemi łuku nazywamy początek, środek i koniec łuku. Środek łuku leży na dwusiecznej WO kąta β.



Rys. 496.

Początek i koniec łuku ustala się z długości stycznych WP i WK, równych

$$t = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Środek łuku wytyczymy:
1) zapomocą stycznej $A\,S\,B$, której odcinki

$$AS = SB = AP = BK = T$$

przyczem

$$T = r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$$

Od punktów P i K na kierunkach ku W odmierzymy T i następnie od punktu A ku B i od B ku A odmierzymy odcinek T. Otrzymamy dwa punkty bliskie; środek utworzonego przez nie odcinka jest punktem S;

2) zapomocą kąta $\frac{\beta}{2}$ i odcinka WS

z $\triangle$-a $A\,S\,W$:

$$WS = AS \operatorname{tg} WAS$$

lecz

$$\triangle\ WA\,S = 90^0 - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

zaś

$$AS = T$$

więc

$$\underline{WS = r\,tg\,\frac{\alpha}{4}\,tg\,\frac{\alpha}{2}}$$

3) zapomocą odcinka PC i strzałki $h = SC$

$$PC = r \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$h = r - OC = r - r\cos\frac{\alpha}{2} = 2\,r\sin^2\frac{\alpha}{4}$$

4) zapomocą kąta WPS i odcinka $PS = 2\,PN$

$$\sphericalangle\, WPS = \frac{\alpha}{4}$$

gdyż, jako kąt między styczną i sieczną, równa się połowie kąta centralnego $POS = \frac{\alpha}{2}$

$$PS = 2\,PN = 2\,r\sin\frac{\alpha}{4}$$

5) zapomocą odciętej $x = PM$ i rzędnej $y = MS$.

W $\triangle$-ach PMS i PCS mamy:

$\sphericalangle\, M = \sphericalangle\, C = 90^0$ $\sphericalangle\, MPS = \sphericalangle\, SPC = \frac{\alpha}{4}$ i wspólny bok PS;

wskutek tego:

$$x = PM = PC = r\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$y = MS = SC = h = 2\,r\sin^2\frac{\alpha}{4}$$

Wreszcie określmy cięciwę $PK = 2\,PC = 2\,r\sin\frac{\alpha}{2}$, oraz długość łuku

$$PSK = \smile PK = \tau$$

z proporcji

$$\frac{\smile PK}{2\,\pi\,r} = \frac{\alpha}{360^0}$$

mamy:

$$\tau = \smile PK = \frac{\alpha\,r}{\rho''}$$

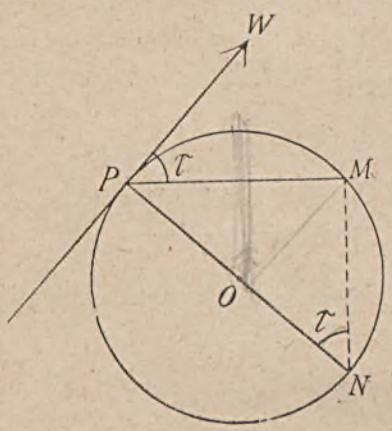
Dokładność wyznaczenia punktu S kontrolujemy zapomocą pomiaru kątów WSP i WSK, równych γ, przyczem

$$\gamma = 90^0 + \sphericalangle ASP = 90^0 + \sphericalangle SPA = 90^0 + \frac{\alpha}{4}.$$

§ 230. Tyczenie punktów pośrednich na łuku.

Jeżeli przez początek łuku poprowadzimy pod kątem τ do kierunku stycznej prostą, to prosta ta przetnie łuk koła w punkcie M w odległości do P, równej

$$PM = 2\,r \sin \tau$$



Rys. 497.

gdyż $PN = 2\,r$ jest średnicą, kąt zaś PNM mierzy się, jak i τ, połową łuku PM. Zmieniając τ i obliczając odpowiednie cięciwy, moglibyśmy otrzymać na łuku cały szereg punktów pośrednich. Nie zawsze jednak w terenie obliczone cięciwy dadzą się odmierzyć, względnie wytyczyć, a następnie, przy większych cięciwach, dwa blisko położone punkty na łuku niedość ściśle byłyby wyznaczone. Z tych powodów najczęściej stosujemy inne metody tyczenia. Rozpatrzmy je kolejno.

§ 231. Tyczenie od stycznych.

Przyjmując za oś odciętych styczną PW, możemy na niej odmierzyć szereg odciętych na prostej PW (rys. 498) i obliczyć rzędne punktów, leżących na łuku, a odpowiadających tym odciętym.

Obliczmy rzędną punktu R o założonej odciętej x; PW odpowiada kierunkowi stycznej przez początek P łuku, O jest środkiem łuku, $PF = x$ jest założoną odciętą, FR rzędną, $RG \perp OP$:

$$y = PG = OP - OG = r - \sqrt{r^2 - x^2}$$

jest to wzór dokładny na wielkość rzędnej.

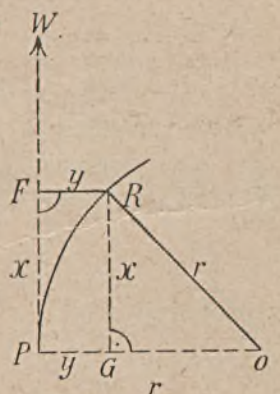
Dla otrzymania wzoru dogodnego, aczkolwiek przybliżonego, napiszemy:

lub

$$OG^2 + GR^2 = r^2$$

skąd

$$(r - y)^2 + x^2 = r^2,$$



Rys. 498.

$$r - y = (r^2 - x^2)^{1/2} = \left[r^2\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)\right]^{1/2} = r\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)^{1/2} = r\left(1 - \frac{x^2}{2r^2} - \frac{1x^4}{8r^4} \cdots\right),$$

więc

$$r - y = r - \frac{x^2}{2r} - \frac{1}{8}\frac{x^4}{r^3} \ldots$$

zatem

$$\underline{y = \frac{x^2}{2r} + \frac{1}{8}\frac{x^4}{r^3}}$$

Drugi wyraz przy mniejszych odciętych odrzucamy, powodując błąd

$$f = \frac{1}{8}\frac{x^4}{r^3}$$

który przy

$$x = \frac{1}{6}r$$

wyniesie zaledwie

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{r^4}{6^4 r^3} = \frac{1}{10000} r$$

Jeżeli oznaczymy

$$\frac{x^2}{2r} = y_1$$

wówczas

$$\underline{y = y_1 + \frac{y_1^2}{2r}}$$

Do odciętych, nieprzekraczających $\frac{1}{8}r$, stosujemy wzór $y = \frac{x^2}{2r}$

W celu ułatwienia postępowania, odmierzamy odcięte, wzrastające o wielkość pierwszej, a więc x, $2x$, $3x$, $4x$.... Wówczas dla odciętych otrzymujemy rzędne:

x	$y_1 = \frac{1}{2}\frac{x^2}{r}$
$2x$	$y_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x^2}{r} = 4\frac{x^2}{2r} = 2^2 y_1$
$3x$	$y_3 = \frac{1}{2}\frac{9x^2}{r} = 9\frac{x^2}{2r} = 3^2 y_1$
—	— — — — —
—	— — — — —
—	— — — — —
$n\,x$	$y_n = \frac{1}{2}\frac{n^2 x^2}{r} = n^2 y_1$

stąd wnioskujemy, że rzędne wzrastają proporcjonalnie do kwadratu numeru odciętej.

Rzędne budujemy zapomocą węgielnicy.

Prócz tyczenia łuku z różnych odciętych, stosuje się również i metoda tyczenia punktów pośrednich łuku od stycznych z równych łuków (rys. 499).

Mianowicie: zakładając, że punkty M, N, R .... znajdują się na łuku w równych odległościach od najbliższych sąsiednich oraz, że łuk, łączący dwa obok siebie położone punkty, odpowiada założonemu kątowi γ, otrzymamy rzędne i odcięte kolejnych punktów M, N, R, poczynając od głównego punktu p styczności:

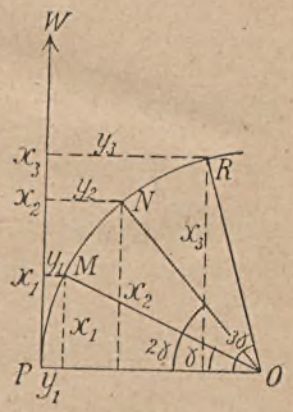
$$x_1 = r \sin \gamma \qquad y_1 = r - r \cos \gamma = 2 r \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

$$x_2 = r \sin 2\gamma \qquad y_2 = r - r \cos 2\gamma = 2 r \sin^2 2 \frac{\gamma}{2}$$

$$x_3 = r \sin 3\gamma \qquad y_3 = r - r \cos 3\gamma = 2 r \sin^2 3 \frac{\gamma}{2}$$

— — — — — — — — — — — —

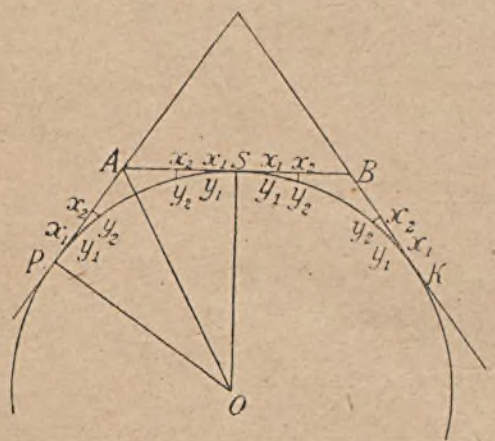
— — — — — — — — — — — —



Rys. 499.

Zaletą tej metody jest to, że każdy punkt oblicza się oddzielnie od innych, wskutek czego błąd obliczenia zostaje w każdym wypadku umiejscowiony.

Aby uniknąć tyczenia dłuższych rzędnych, wytyczamy przez punkt środkowy S styczną $A\ B$. Wówczas tyczymy odcięte $x_1\ x_2\ x_3$ . . . . . i obliczone rzędne $y_1\ y_2\ y_3$ . . . . . (rys. 500):



Rys. 500.

1) od stycznej $P\ A$, poczynając od punktu P,
2) od stycznej $S\ A$, poczynając od punktu S,
3) od stycznej $S\ B$, poczynając od punktu S,
4) od stycznej $K\ B$, poczynając od punktu K,

i wytyczone punkty będą leżeć na łuku koła,

gdyż

$$\Delta\ ASO = \Delta\ APO = \Delta\ BSO = \Delta\ BOK,$$

więc każdy z tych Δ-ów może być ułożony na drugim wraz z zawartemi w nim łukami.

Tyczenie od stycznych jest możliwe wówczas, gdy w terenie nazewnątrz łuku niema przeszkód lokalnych; gdy te przeszkody tam zachodzą, należy tyczyć łuk od wewnątrz.

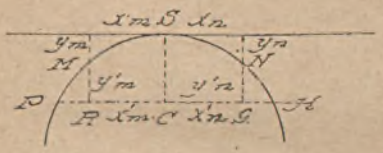
Tyczenia od stycznych możemy dokonywać zapomocą tablic krzywych.

§ 232. Tyczenie od cięciwy.

Stosuje się w wypadku, gdy zewnątrz krzywej niema swobody ruchów, natomiast ze strony wewnętrznej niema przeszkód.

Posługujemy się przy tyczeniu od cięciwy spółrzędnemi prostokątnemi.

Osią odciętych jest cięciwa, łącząca początek P i koniec K łuku. Środek C cięciwy jest początkiem układu. Jeżeli teraz wyobrazimy sobie styczną, poprowadzoną przez środek łuku S, wówczas w stosunku do tej stycznej punkt N na łuku wyznaczy się z rzędnej x_n i odciętej y_n.



Rys. 501.

Oznaczmy strzałkę $SC = h = 2r \sin^2 \frac{\alpha}{4}$.

Wielkość jej jest znana, względnie otrzymamy ją z tablic, czy też obliczymy.

Spółrzędne punktu N w odniesieniu do osi PK odciętych będą:

$$x'_n = CG = x_n$$

$$y'_n = NG = h - y_n$$

Analogicznie otrzymamy spółrzędne innych punktów. Mając spółrzędne punktów, leżących na łuku SK, możemy otrzymać symetryczne punkty na łuku SP, odmierzając te same odcięte od punktu C w kierunku przeciwnym i budując tej samej wielkości rzędne.

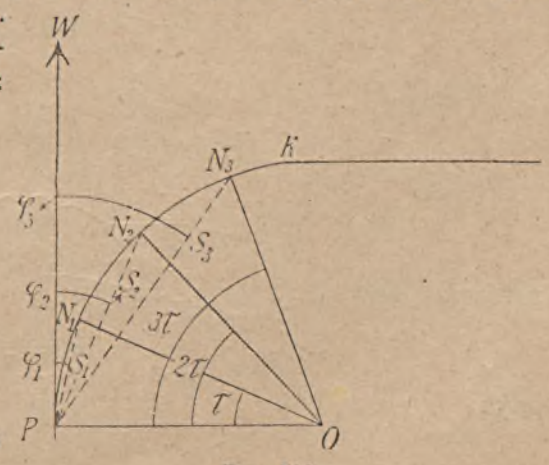
§ 233. Tyczenie łuku metodą biegunową.

Kąt centralny α podzielony jest na n równych części, którym odpowiadają punkty $N_1\ N_2\ N_3$ ... łuku. Każdy z tych punktów leży na prostej, tworzącej ze styczną PW kąt:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\tau$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}2\tau = \tau$$

$$\varphi_3 = \frac{3}{2}\tau \text{ i t. d.}$$



Rys. 502.

długości zaś promieni wodzących są odpowiednio równe:

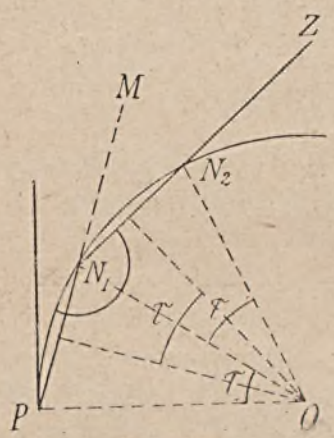
$$S_1 = PN_1 = 2\ r\ \sin\frac{\tau}{2}$$

$$S_2 = PN_2 = 2\ r\ \sin\tau$$

$$S_3 = PN_3 = 2\ r\ \sin\frac{3\tau}{2}\ \text{i t. d.}$$

Samo tyczenie wymaga ustawienia teodolitu nad punktem P, skierowania osi lunety wzdłuż stycznej AW, dokonania odczytu O z limbusu i przesunięcia alhidady na odczyt $\varphi_1 + O$; wytyczamy na przedłużeniu osi celowej lunety kierunek ku N_1 i, odmierzając na nim S_1, otrzymujemy punkt N_1. Kierując oś celową lunety tak, by odczyt z limbusu był $O+\varphi_2$, i odmierzając w tyczonym kierunku S_2, otrzymamy punkt N_2 i t. d.

Gdy miejscowe przeszkody uniemożliwiają tyczenie dłuższych promieni wodzących, wówczas w punkcie N_1 ustawiamy teodolit i budujemy kąt $N_2 N_1 P = 180^0 - \tau$, z tego względu, że skoro $N_1 M$ jest przedłużeniem PN_1, to $\sphericalangle M N_1 N_2 = \tau$, jako kąt, równy zawartemu między prostopadłemi do cięciw PN_1 i $N_1 N_2$, poprowadzonemi przez środek O łuku.



Rys. 503.

Na wytyczonej pod kątem $180^0 - \tau$ od kierunku $N_1 P$, lub pod kątem τ od kierunku $N_1 M$, prostej odmierzamy $N_1 N_2 = PN_1 = S$.

Sposób ten skraca odmierzanie cięciw, natomiast wymaga przestawiania teodolitu.

Jeżeli wypadnie tyczyć łuk, gdy dana jest długość łuku $ł$, łączącego dwa sąsiednie wytyczane punkty, wówczas obliczymy

$$\tau = \frac{ł}{r}$$

i przy niewielkiem $\frac{ł}{r}$ obliczać będziemy S nieco inaczej, niż poprzednio: ze wzoru (rys. 502):

$$S = 2\ r\ \sin\frac{\tau}{2} = 2\ r \sin\varphi$$

rozwijając

$$\sin\varphi_1 = \varphi_1 - \frac{\varphi_1^3}{6}\quad \text{dla małych } \varphi,$$

otrzymamy

$$S = 2\ r\ \varphi_1 - \frac{2\ r\ \varphi_1^3}{6} = 2\ r\ \varphi_1 - \frac{r\ \varphi_1^3}{3};$$

ponieważ zaś

$$\varphi_1 = \frac{ł}{2\ r}$$

gdyż

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2}$$

więc

$$S = \ell - \frac{r\,\ell^3}{24\,r^3} = \ell - \frac{\ell}{24}\left(\frac{\ell}{r}\right)^2 .$$

Dalsze postępowanie niczem się nie różni od poprzedniego.

§ 234. Tyczenie łuków metodą angielską (siecznych).

I. Załóżmy, że długość siecznej jest s.

Wówczas

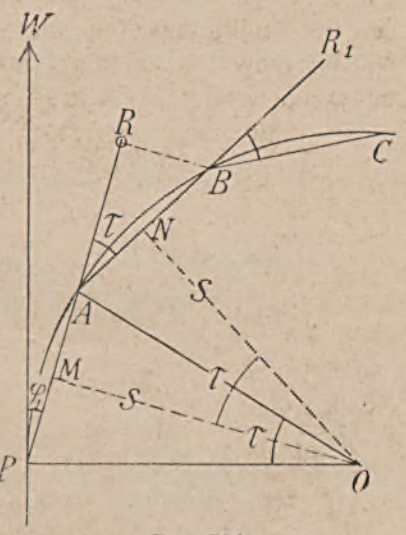
$$s = 2\,r\,\sin\frac{\tau}{2},$$

skąd

$$\sin\frac{\tau}{2} = \frac{s}{2\,r}$$

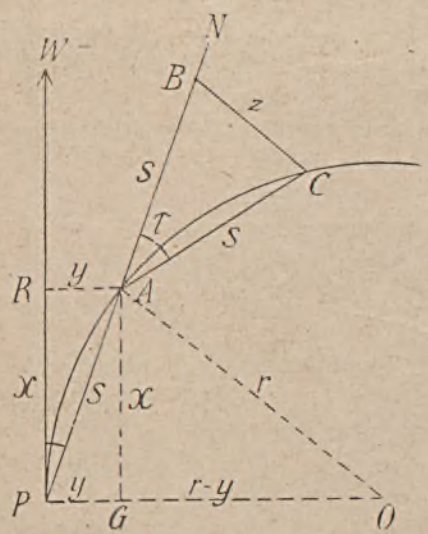
obliczymy więc

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2}$$



Rys. 504.

Ustawiając teodolit w punkcie P, tyczymy kierunek PAR pod kątem $WPS = \varphi_1$ i odmierzamy $PA = s$. Jeżeli $AB = s$, to $\sphericalangle RAB = \tau$, gdyż $AB \perp ON$ i $PR \perp OM$. Tyczymy więc ABR_1 pod kątem τ do AR i znów odcinamy $AB = S$. Analogicznie pod kątem $R_1BC = \tau$ do BR_1 odmierzamy $BC = S$ i t. d.



Rys. 505.

II. Przy tyczeniu ze stałej siecznej możemy stosować postępowanie, nie wymagające teodolitu, mianowicie:

Przypuśćmy, że

$$PA = S, \quad AR \perp PW$$

$$AG^2 + GO^2 = r^2$$

$$AG = x, \quad GO = r - y$$

więc

$$x^2 + (r - y^2) = r^2$$

$$x^2 + r^2 - 2\,r\,y + y^2 = r^2$$

lecz

$$x^2 + y^2 = s^2$$

więc

$$s^2 - 2\,r\,y = o$$

$$y = \frac{s^2}{2\,r}$$

Odłóżmy na przedłużeniu PA odcinek $AB = s$.

Jeżeli połączymy koniec C siecznej $AC = s$ z punktem B:

to

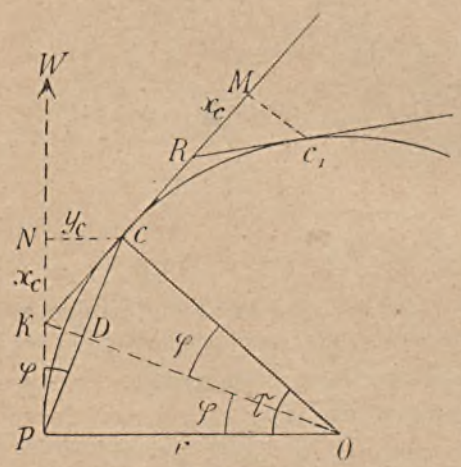
$$z = BC = 2s \sin \frac{\tau}{2} = 2s \frac{s}{2r} = 2 \frac{s^2}{2r} = \underline{2y}$$

A więc, gdy w terenie z punktu B naciągać będziemy odcinek z taśmy płóciennej, z punktu zaś A odcinek S taśmy, wówczas, przesuwając obydwa naciągnięte odcinki, końce ich doprowadzimy do zetknięcia się w punkcie C, leżącym na łuku.

W punkcie C postępujemy zupełnie w ten sam sposób, jak w A i otrzymujemy następny punkt na łuku i t. d.

§ 235. Tyczenie łuku metodą stałych spółrzędnych.

Przypuśćmy, że punkty na łuku mają być ułożone w jednakowych wzajemnych odległościach, odpowiadających równym centralnym kątom.



Rys. 506.

Oznaczmy początek łuku literą P, pierwszy zaś punkt na łuku literą C

$$\sphericalangle POC = \tau = 2\varphi;$$

$$\sphericalangle WPC = \varphi = \frac{\tau}{2};$$

Prostopadła do cięciwy PC, spuszczona ze środka koła, przetnie PW w punkcie K.

$$CK = r\ tg\ \varphi$$

Prosta KC będzie styczna do łuku w punkcie C.

Położenie punktu C ustalimy zapomocą spółrzędnych x_c i y_c:

$$x_c = PN = PC \cos \varphi = 2r \sin \varphi \cos \varphi = r \sin \tau$$

$$y_c = NC = PC \sin \varphi = 2r \sin^2 \varphi = 2r \sin^2 \frac{\tau}{2};$$

Odcinając na PW—x_c i wznosząc $\perp$-ą y_c, otrzymamy punkt C.

Na przedłużeniu stycznej KC — odcinamy $x_c = CM$ i z punktu M budujemy $\perp$-ą o długości y_c; otrzymujemy drugi punkt łuku C_1.

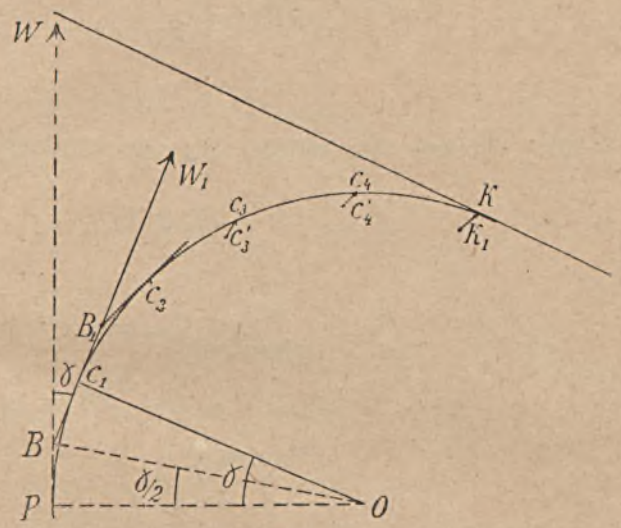
Dla zbudowania trzeciego, odkładamy na stycznej CM odcinek

$$CR = PK$$

przedłużamy RC_1 i znów zapomocą x_c i y_c, zbudujemy C_2 i t. d.

§ 236. Tyczenie łuku metodą opisanego poligonu.

Jeżeli mamy wytyczyć między początkowym i ostatnim punktem łuku n punktów, leżących w jednakowych odległościach jeden od drugiego,



Rys. 507.

wówczas obliczamy wielkość γ kąta centralnego, odpowiadającego łukowi, łączącemu dwa sąsiednie punkty.

$$\gamma = \frac{\alpha}{n+1}$$

Przypuśćmy, że P jest początkiem, punkt C_1 — pierwszym punktem łuku. Jeżeli promień środka łuku PC_1 przedłużymy do przecięcia się ze styczną PW w punkcie B, wówczas

$$PB = r\ tg\ \frac{\gamma}{2} = BC_1$$

$$\sphericalangle\ WBC_1 = \gamma$$

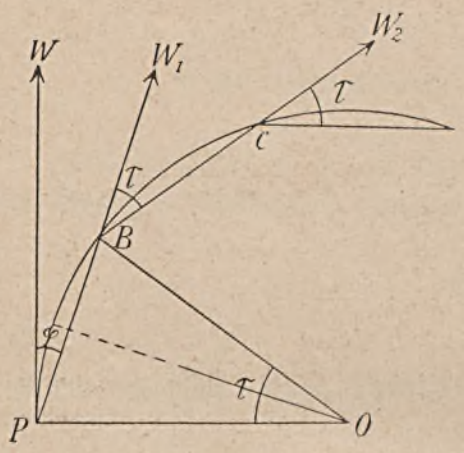
Stąd wynika postępowanie: 1) na stycznej PW odcinamy $PB = r\ tg\ \frac{\gamma}{2}$; 2) ustawiamy w punkcie B teodolit i wytyczamy kierunek BW_1, tworzący z BW kąt γ, 3) na prostej BW_1 odcinamy długość $BC_1 = PB$, otrzymując w ten sposób punkt C_1 4) odcinamy $C_1 B_1 = C_1 B$, w punkcie B_1 ustawiamy teodolit i postępujemy dalej tak samo, jak to miało miejsce w stosunku do punktu B.

Gdy, wytyczając na łuku kolejne punkty, dojdziemy do punktu końcowego K łuku, wówczas dzięki błędom tyczenia kierunków i pomiaru długości ostatni punkt, wytyczony z poligonu, odchyli się od punktu K do położenia K_1. Mierzymy azymut magnetyczny prostej $K\ K_1$ i pod tym azymu-

tem rozrzucamy odchyłkę KK_1, przesuwając wytyczone punkty, jak, np., C'_3 C'_4 do C_3 i C_4, o odcinki, równe iloczynowi KK_1 przez stosunek numeru tyczonego punktu (licząc od punktu P) do ilości wytyczonych punktów, łącznie z punktem K_1 tak np.:

$$C'_3\ C_3 = KK_1\ \frac{3}{n+1}$$

§ 237. Tyczenie łuku metodą wpisanego poligonu.



Rys. 508.

Z założonego

$$\tau = \frac{\alpha}{n}$$

obliczamy

$$d = PB = 2\ r\ \sin\frac{\tau}{2}$$

Ponieważ

$$\sphericalangle\ WPW_1 = \varphi = \frac{\tau}{2},$$

więc pod kątem φ do PW w punkcie P wytyczamy PW_1 i odmierzamy na niej d. Otrzymujemy punkt B, w którym pod kątem τ do BW_1 tyczymy BW_2 i odmierzamy $BC = d$. Analogicznie postępujemy dalej i otrzymaną w końcu łuku odchyłkę rozrzucamy, jak w wypadku opisanego poligonu.

Ostatnie dwie metody mają zastosowanie w łukach tunelowych; przy niewielkich $d = BP = BC\ldots$ należy możliwie dokładnie wytyczyć przedłużenia i ustawiać teodolit.

§ 238. Zagadnienia.

a). Wznowić (wytyczyć) łuk na zasadzie trzech punktów A, B i C, leżących na łuku. Zagadnienie rozwiążemy jedną z poprzednich metod, gdy odnajdziemy kąt centralny, odpowiadający łukowi $A\ B\ C$, oraz promień łuku.

Mierzymy kąt $\varepsilon = A\ B\ C$ (rys. 509).

Obliczamy:

$$\alpha + \varphi = \smile A\ B\ C = 360^0 - 2\ \varepsilon,$$

gdyż α jest dwa razy większy od kąta wpisanego, opartego o łuk $A\ B\ C$, równego $180^0 - \varepsilon$. Jeżeli $d = A\ C$ nie może być bezpośrednio pomierzone, wtedy mierzymy $d_1 = A\ B$ i $d_2 = B\ C$.

Obliczymy:

$$d = A\,C = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2\,d_1\,d_2\cos\varepsilon}$$

oraz

$$r = \frac{d}{2\sin\frac{\alpha+\varphi}{2}}$$

Pozostaje w punkcie A wytyczyć styczną $A\,M$ do łuku.

Kąt

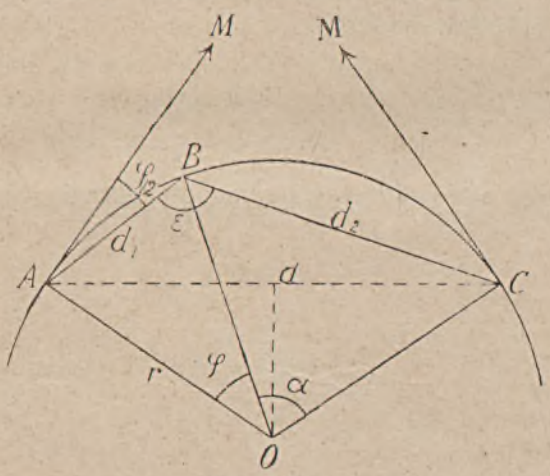
$$B\,A\,M = \frac{1}{2} \sphericalangle\, A\,O\,B = \frac{1}{2}\varphi$$

zaś $\frac{1}{2}\varphi$ określimy z równania $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{d_1}{2r}$

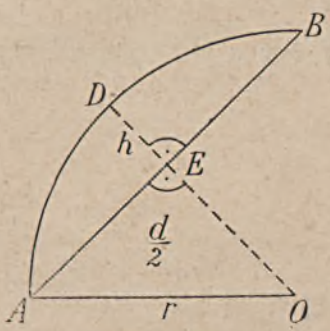
Po obliczeniu kąta $\frac{\varphi}{2}$ wytyczamy w lewo od $A\,B$ kąt $B\,A\,M = \frac{\varphi}{2}$; prosta $A\,M$ będzie styczną do koła.

Podobnie możemy wytyczyć drugą styczną $C\,M$.

Mamy więc teraz wszystkie podstawy do wytyczenia dowolnej ilości punktów pośrednich łuku zapomocą jednej z powyższych metod. Zagadnienie to możemy rozwiązać zapomocą arkografu, to jest przyrządu, służącego



Rys. 509.



Rys. 510.

do tyczenia kątów stałych, składającego się z dwu pryzmatów lub lusterek, urządzonych w ten sposób, że gdy arkograf jest ustawiony na wierzchołku kąta B, możemy pryzmaty obrócić o taki kąt, że ujrzymy w nich nad sobą obrazy tyczek, ustawionych na ramionach kąta $B\,A$ i $B\,C$. Po ustawieniu arkografu, przesuwamy się w terenie prostopadle do łuku, znajdując jego punkty zapomocą obserwacji obrazów w arkografie, zupełnie tak samo, jak określamy punkty obwodu koła, mając końce jednej jego średnicy, zapomo-

cą węgielnicy. Dla udogodnienia, należy proste $A\,B$ i $B\,C$ przetyczyć i szukać punktów łuku, odsuwając się od prostych $A\,B$ i $B\,C$ nazewnątrz środka łuku.

b) Określić promień łuku kolejowego (rys. 510).

Obieramy dwa punkty A i B na szynie kolejowej na łuku, mierzymy $d = AB$, oraz w odległości $\frac{d}{2}$ od A mierzymy zapomocą węgielnicy i tasiemki strzałkę $h = DE$.

Z równania △-a AOE.

mamy

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (r - h)^2 = r^2$$

skąd

$$\frac{d^2}{4} + r^2 - 2rh + h^2 = r^2$$

$$r = \frac{d^2 + 4h^2}{8h};$$

§ 239. Wytyczenie pikietów na krzywej i punktów poprzecznych na łukach.

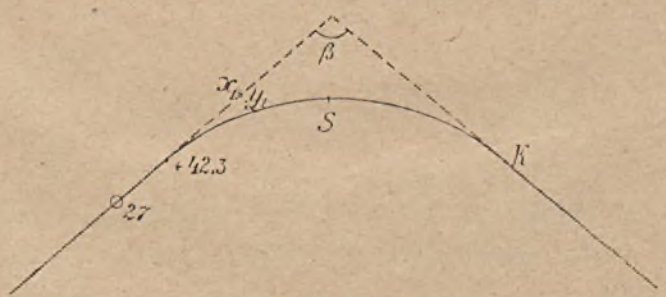
Przypuśćmy, że początek łuku odpowiada pikietowi Nr. 27 + 42.3. Kąt β zmiany kierunku trasy jest znany, jak również promień r łuku.

Należy ustalić położenie pikietów na łuku.

Długość łuku wynosi

$$l = r\,\frac{\alpha}{\rho}$$

przyczem α jest kątem środkowym, odpowiadającym danemu łukowi.



Rys. 511.

Punkt K (koniec łuku) wypadnie zatem od początku trasy na pikiecie Nr. 27 + 42,3 m + l, tak więc, gdy, np. l = 348,5 m, wówczas punkt K będzie odpowiadać Nr. 30 + 90,8 m.

Pikiety Nr. Nr. 28, 29 i 30 znajdą się na łuku w odległościach, liczonych po obwodzie łuku, równych 57,7 m i 157,7 m i 257,7 m.

Należy określić, jakim kątom centralnym α_1 i α_2 odpowiadają łuki o długościach 57,7 i 100 *m*.

$$\alpha_1 = \frac{57{,}7}{r}\,\rho$$

$$\alpha_2 = \frac{100}{r}\,\rho$$

Pikiet Nr. 28 wytyczymy od stycznej punktu początkowego *P* łuku metodą tyczenia punktu z równych łuków od stycznej, zapomocą odciętej i rzędnej

$$x_1 = r \sin \alpha_1$$

$$y_1 = 2r \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}$$

Pikiet Nr. 29 należy wytyczyć od stycznej środkowego punktu łuku; odległość kątowa tego pikietu od punktu *S* jest równa

$$\alpha_{28} = \alpha_1 + \alpha_2 - \frac{\alpha}{2}$$

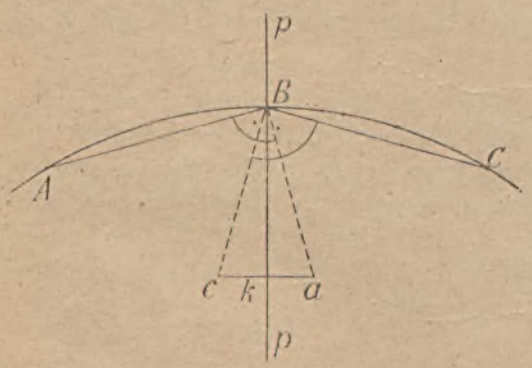
przyczem znak + wskaże, że pikiet Nr. 28 znajduje się w prawo od punktu *S*, znak — wskaże, że pikiet znajduje się w lewo od *S*.

Pikiet Nr. 30 wytyczymy od punktu *K* z kąta, odpowiadającego łukowi 30 — *K*, t. j.

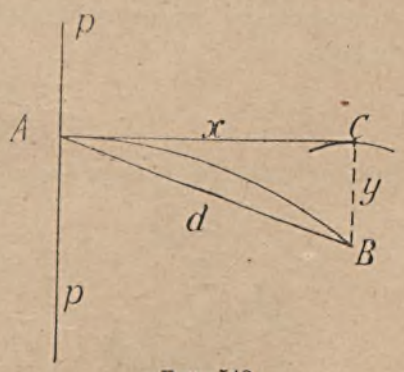
$$\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha$$

Oczywiście nietylko metoda tyczenia od stycznej może mieć w danym wypadku zastosowanie. Obieramy najbardziej dogodną.

Przekroje poprzeczne zawsze wytyczamy prostopadle do trasy; jeżeli więc oś przechodzi w łuk, przekroje idą wzdłuż normali do łuku, a zatem w kierunku promienia łuku.



Rys. 512.



Rys. 513.

Gdy na łuku wytyczamy szereg punktów, leżących w równych odległościach od siebie (tyczenie z równych łuków), wówczas wytyczenie kierunku promienia w dowolnym punkcie *B* łuku wymaga ustawienia na są-

siednich punktach A i C ($AB = BC$) tyczek i wytyczenia zapomocą węgielnicy $Ba \perp BA$ i $Bc \perp BC$ (rys. 512).

Ponieważ przekrój poprzeczny pp leży na promieniu punktu B, przeto położenie przekroju ustala dwusieczna kąta ABC, a więc tem samem dwusieczna kąta cBa. Na kierunkach Bc i Ba odmierzymy zatem po $20\,m$ i końce a i c otrzymanych odcinków łączymy prostą ac, której środek k leży na promieniu łuku. Prosta pp, przechodząca przez Bk, jest tedy kierunkiem przekroju.

Oczywiście pp będzie prostopadłą do cięciwy AC, co daje w wypadku łuków o nieznacznych promieniach podstawę do wytyczenia przekroju pp jako prostopadłej do AC, spuszczonej z B.

Gdy zaś punkty na łuku nie leżą w równych odległościach od siebie, wówczas punkt A łuku, przez który winien przechodzić przekrój poprzeczny, łączymy z B cięciwą o długości d (rys. 513)

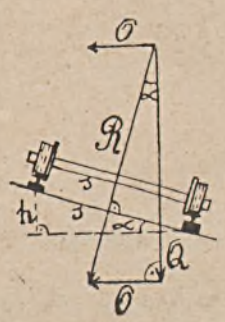
Jak wiemy (patrz metoda angielska), odległość punktu B od stycznej punktu A wynosi $y = \frac{d^2}{2r}$

Po obliczeniu y na podstawie d i r, będziemy, utrzymując koniec ruletki w B przesuwać się po łuku, zatoczonym promieniem y (trzymajac w ręku koniec odcinka y ruletki), do czasu, gdy zapomocą węgielnicy odnajdziemy taki punkt C, że $AC \perp CB$.

Wówczas w C ustawimy tyczkę i poprowadzimy do stycznej AC w punkcie A prostopadłą pp, która będzie kierunkiem przekroju poprzecznego dla A.

§ 240. Krzywa przejściowa. Tabele dla tyczenia tras.

Wyobraźmy sobie, że tor kolejowy ułożony został w ten sposób, że odcinki proste trasy połączone są łukami kołowemi. Pociąg, posuwający się ze znaczną szybkością, doznaje tem większego uderzenia przy przejściu z prostej na łuk, im większy jest kąt pomiędzy styczną do łuku w punkcie, w którym rąbek koła zewnętrznego (w stosunku do środka łuku) uderzy w zewnętrzną szynę, a kierunkiem odcinka, po którym dotychczas biegło koło.



Rys. 513a.

Ażeby na łuku zmniejszyć nierównomierne obciążenie obydwu szyn, podnieść należy zewnętrzną szynę o tyle wyżej w stosunku do wewnętrznej, aby wypadkowa R siły ciężkości Q i odśrodkowej O działała na oś toru. Kąt pochylenia poprzecznego toru α określi się z równania:

$$tg\alpha = \frac{O}{Q}$$

lecz siła odśrodkowa w zależności od masy M i szybkości v, oraz promienia łuku r jest równą:

$$O = \frac{Mv^2}{r}$$

zaś

$$M = \frac{Q}{g}$$

gdzie $g = 9{,}81$ jest przyspieszeniem siły ciężkości.

Stąd

$$tg\,\alpha = \frac{Q\,v^2}{g\,r} \cdot \frac{1}{Q} = \frac{v^2}{gr}$$

że zaś przechyłka h zewnętrznej szyny przy odstępie s między szynami jest równą

$$h = s \sin \alpha$$

a w danym razie wobec niewielkiego h możemy przyjąć, że

$$\sin \alpha = tg\,\alpha$$

więc

$$h = s\,tg\,\alpha$$

a stąd

$$h = \frac{s\,v^2}{gr} \qquad (1)$$

Wielkość h ma być utrzymaną na całym łuku, a więc i na jego początku; stąd szyna zewnętrzna powinna mieć na pewnym odcinku prostej, w miarę oddalania się od łuku, zmniejszające się h do zera, co znaczy, że pewien odcinek zewnętrznej szyny mieć będzie na długości x spad

$$1 : i = h : x. \qquad (2)$$

Aby tego uniknąć, łączymy łuk koła z prostą krzywą przejściową, przytem taką, by jej przechyłka odpowiadała równaniu (1)-emu, jej spad — (2)-emu.

Wówczas:

$$h = \frac{x}{i} = \frac{s\,v^2}{gr}$$

a stąd promień krzywizny r krzywej przejściowej wyrazi się przez równanie:

$$r = \frac{isv^2}{gx};$$

Oznaczając

$$\frac{isv^2}{g} = C$$

otrzymamy

$$r = \frac{C}{x}$$

Rzędna y każdego punktu krzywej przejściowej, w stosunku do jej stycznej w początku krzywizny jest pewną funkcją przechyłki h, a więc

$$y = f(h)$$

a stąd promień krzywizny określi się z równania:

$$\frac{1}{r} = \frac{f''(h)}{\{1 + [f'(h)]^2\}^{3/2}}$$

Ponieważ kąt τ, tworzony przez styczną do krzywej przejściowej, a prostolinjowym kierunkiem trasy jest niewielkim, więc tangens tego kąta, a więc $f'(h)$ jest temsamem wielkością nieznaczną, skąd wynika, że tembardziej $[f'(h)]^2$ jest wyrazem o tyle nieznacznym, że może być odrzucony.

A stąd

$$\frac{1}{r} = f''(h) = \frac{x}{C} \quad (3)$$

Jest to równanie różniczkowe krzywej przejściowej.

Całkując równanie

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{x}{C}$$

otrzymujemy:

$$\frac{dy}{dx} = tg\,\tau = \frac{x}{2C} \quad (4)$$

zaś całkując po raz drugi, otrzymamy:

$$y = \frac{x^3}{6C}$$

jest to równanie paraboli trzeciego rzędu krzywej przejściowej.

Ponieważ dla $x = o$ jest $tg\tau = o$ oraz $y = o$, więc obydwie stałe całkowania są zerami.

Rzut l długości krzywej przejściowej na prostolinjowy kierunek trasy otrzymamy, skoro przyrównamy promień krzywej do promienia łuku kołowego, w który krzywa przejściowa przechodzi w końcu swej długości; będzie więc z (3)-go równania

$$\frac{1}{r} = \frac{l}{C}$$

a stąd

$$l = \frac{C}{r}$$

Długość krzywej przejściowej waha się od 20 m dla promienia łuku równego 1000 m, do 50 m dla łuku o promieniu 300 m.

Wytyczenia krzywej przejściowej dokonamy z odciętych, wzrastających w postępie arytmetycznym, i rzędnych.

Mianowicie:

dla

$$x_1 = \frac{l}{n}$$

$$x_2 = 2\,\frac{l}{n}$$

$$x_3 = 3\,\frac{l}{n}$$

— — —

— — —

$$x_n = l$$

będzie

$$y_1 = \frac{l^3}{6\,n^3\,C} = \frac{l^2}{6\,n^3\,r}$$

$$y_2 = 2^3\,y_1$$

$$y_3 = 3^3\,y_1$$

— — —

$$y_n = n^3\,y_1 = \frac{l^2}{6\,r}\,.$$

Po wytyczeniu ostatniego punktu krzywej przejściowej, t. j. 1-ego punktu łuku kołowego, należy wytyczyć styczną do łuku, i punkty na łuku koła tyczyć metodą rzędnych i odciętych.

Rzędna ostatniego punktu krzywej i początkowego punktu łuku jest równą:

$$y_n = \frac{l^2}{6\,r}$$

że zaś

$$x = l$$

więc dla paraboli III-ego rzędu

$$y_n = \frac{x^3}{6\,l\,r}\,.$$

a stąd tangens kąta α między styczną, a osią x-ów jest równy:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\,\alpha = \frac{3\,x^2}{6\,l\,r} = \frac{l^2}{2\,l\,r} = \frac{l}{2\,r}$$

zaś odcinek osi odciętych między spodkiem rzędnej a styczną wyniesie:

$$k = y_n\,ctg\,\alpha = \frac{l^2}{6\,r}\cdot\frac{2\,r}{l} = \frac{l}{3}$$

więc przecięcie osi x-ów ze styczną odpowiada odciętej

$$x_0 = l - \frac{l}{3} = \frac{2}{3}\,l.$$

Mając punkt x_0 oraz (l, y_n) możemy wytyczyć styczną; punkt (l, y_n) tej stycznej jest początkiem łuku kołowego. Dalsze tyczenie łuku kołowego nie nasuwa trudności.

Bardziej płynne połączenie krzywej przejściowej z łukiem koła patrz „Tyczenie tras“ prof. inż. K. Skibińskiego, cz. I-a, oraz tablice cz. II-a „Tyczenie łuków i krzywych przejściowych“.

Tabele dla tyczenia tras.

Inż. K. Skibiński, honorowy prof. Lwowskiej Politechniki, wydał tabele dla tyczenia tras.

Tabela I-a podaje długości łuków dla stopni i minut przy promieniu = 1; tak więc dla promienia r należy mnożyć liczby tej tabeli przez r.

Tabela II-a służy dla wyznaczenia głównych punktów łuku kołowego, a więc początku, środka i końca łuku, strzałki h, długości cięciwy i stycznej punktu środkowego łuku.

Nad każdą stronicą tabeli podany jest kąt centralny α i $\frac{\alpha}{2}$, u dołu — kąt zmiany kierunku trasy β.

Tabela jest ułożoną dla α od 0^0 do 180^0.

Rozpatrzmy wyciąg z tabeli na str. 110.

W tabeli tej odstęp $S\,W$ oznacza odległość od środka łuku do wierzchołka kąta.

$$\alpha = 110^0, \quad \frac{\alpha}{2} = 55^0$$

Minuty dla α	Minuty dla $\frac{\alpha}{2}$	Styczna $P\,W = t$	Odstęp $S\,W$	Połowa cięciwy $P\,T = P\,U = a$	Strzałka $S\,T = S\,U = h$	Minuty dla β
		$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$	$\sec \frac{\alpha}{2} - 1$	$\sin \frac{\alpha}{2}$	$1 - \cos \frac{\alpha}{2}$	
0	0	1,428138	0,743447	0,819152	0,426424	60
2	1	9033	4171	319	662	58
4	2	9918	4897	486	900	56
6	3	1,430804	5653	652	0,427139	54
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—

$$\beta = 69^0$$

Tabela III służy dla tyczenia łuków kołowych rzędnemi od stycznej dla promienia od 10 do 100 co 5 m, od 100 do 300 co 10 m, od 300 do 400 co 20 m, dalej do 1000 co 50 m, do 3000 co 100 m i dalej do 6500 co 500 m.

Odcięte x są podane w kolumnie x. Rozpatrzmy wyciąg ze str. 194.

x	Rzędne y dla promienia						x
	280	290	300	320	340	350	
5	0,045	0,043	0,042	0,039	0,037	0,036	5
10	0,179	0,172	0,167	0,156	0,147	0,143	10

Tabela IV służy do tyczenia w równych odstępach d punktów łuków kołowych metodą biegunową. Ułożona dla promieni od 10 do 7000.

Z tabeli otrzymujemy kąty (patrz § 233), zapomocą których tyczymy z początku łuku kierunki do kolejnych punktów łuku. Punkty te otrzymamy z przecięcia się przetyczonych kierunków z cięciwą d.

Wyciąg z tabeli IV-ej str. 200.

Długość łuku	$r = 50$			$r = 55$			$r = 60$			$r = 65$			Długość łuku
	kąt obwodowy												
	°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″	
0,1		3	26		3	8		2	52		2	39	0,1
1		34	23		31	15		28	39		26	27	1
2	1	8	45	1	2	30		57	18		52	53	2

Tabela V służy do tyczenia łuków parabolicznych, VI — do tyczenia krzywej przejściowej.

Wszystkich tabel książka zawiera 12.

Przy użyciu tabel odpadają obliczenia, praca więc polowa posuwa się szybko.

Należy wymienić jeszcze zbiór tabel Petrlika, wydany w Pradze w r. 1903 i Kröhnke, wydanie lipskie r. 1896.

§ 241. Przebieg niwelacji podłużnej i poprzecznej.

Po ustaleniu w terenie pikietów, punktów pośrednich i poprzecznych oraz reperów, przystępujemy do właściwej niwelacji.

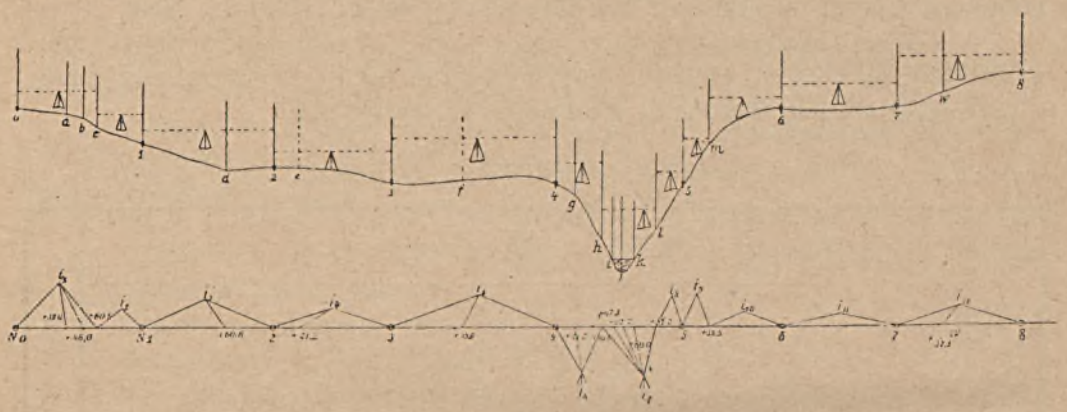
Rozpatrzmy przebieg niwelacji podłużnej i poprzecznej (na rysunku 514 nie są wykreślone punkty poprzeczne).

Rysunek u góry przedstawia przekrój terenu, u dołu—plan. Pikiety są oznaczone numerami 0, 1, 2 .... 7, 8, punkty pośrednie w planie odpo-

wiedniemi plusami, w przekroju zaś te same punkty są oznaczone literami *a, b, c ..... m, n.*

Kolejne stanowiska niwelatora są w planie oznaczone literami i_1 i_2 .... i_n, w przekroju—przez rysunek niwelatora.

Punktami, wiążącemi niwelację na poszczególnych stanowiskach, są w zasadzie pikiety; wobec jednak zbyt wielkich różnic wysokości między poszczególnemi pikietami, niwelator musiał być kilkakrotnie przenoszony: między 0 a 1, 4 a 5, 5 a 6 pikietami, gdyż oś celowa lunety niwelatora, skierowana ku następnemu pikietowi, przecina, zamiast łaty, ustawionej na pikiecie, teren, jak, np., w i_8, zamiast łaty, ustawionej na pikie-



Rys. 514.

cie 6-ym. Z tego względu na rysunku mamy, prócz pikiet, następujące wiążące punkty: *c, h, l, m.* Odczyty z łat, ustawionych na punktach wiążących, brane są przy obydwu stanowiskach niwelatora po obydwu stronach punktu wiążącego.

Przebieg niwelacji jest następujący:

Skoro przy paliku + 50 (średni palik między pikietami 0 i 1) upewnimy się, że spoziomowana oś celowa niwelatora przecina teren, zamiast jednej z łat, ustawionych na pikietach, lub przechodzi nad jedną z łat, wówczas należy obrać jeden z punktów pośrednich jako punkt wiążący, a w braku ich, należy wbić specjalny palik, oznaczony literą *W*, gdy wystarcza jeden wiążący punkt. Przy większej między dwoma pikietami liczbie wiążących punktów, oznaczamy je literami W_1, W_2 ...

Jeżeli spód łaty, ustawionej na poprzednim pikiecie, znajduje się wyżej w stosunku do osi celowej niwelatora, ustawionego na paliku + 50, to przenosimy niwelator ku poprzedzającemu pikietowi o tyle, aby, po ponownem ustawieniu niwelatora, oś celowa przecięła łatę na zerowym paliku niezbyt blisko (50 *cm*) od ziemi. Zajdzie to w punkcie i_1, który znajdować się może poza trasą, byleby tylko odległości od obydwu łat były jednakowe. W danym wypadku, przy punktach pośrednich, ustawiliśmy niwelator pośrodku między pikietem № 0, a punktem pośrednim + 60,5 (*c*).

Po spoziomowaniu niwelatora celujemy do łaty wstecz (№ 0), notujemy odczyt, odpowiadający poziomej nitce, i obracamy lunetę, kierując ją

na punkt *c*, notując odczyt w kolumnie wprzód (patrz dziennik niwelacji). Ponieważ jedno spostrzeżenie nie daje pewności, że wynik jest prawidłowy, powtarzamy obserwację, 1) zmieniając wysokość niwelatora, przez głębsze wciśnięcie jego nóżek w ziemię, albo 2) używamy łat rewersyjnych z uzupełnieniem dekadycznem.

Gdy pracujemy z niwelatorem typu Egault (z lunetą przekładaną), przed drugą obserwacją przełożymy lunetę w łożyskach i obrócimy ją dokoła osi geometrycznej o 180°.

Odrazu po ukończeniu obserwacji na punkty wiążące, obliczamy z obydwu par odczytów różnice wysokości (przy łatach rewersyjnych), lub przy zwykłych łatach wyprowadzamy średnie arytmetyczne obydwu odczytów na każdej łacie i od średniej wstecz odejmujemy średnią wprzód.

Robotnik z łatą przechodzi od pikietu zerowego w prawo od osi, do punktów poprzecznych pikietu № 0 i ustawia kolejno na nich łatę, oczekując za każdym razem na odręczny sygnał od strony niwelatora, wskazujący, że należy przechodzić do punktu następnego (po zanotowaniu odczytu w kolumnie „odczyty pośrednie“).

Następnie powtarza się to samo na punktach poprzecznych pikietu № 0, leżących w lewo od osi, poczem robotnik posuwa się po osi w kierunku najbliższego punktu pośredniego, ustawia na nim łatę i, po sygnale, przechodzi do prawych, później do lewych punktów poprzecznych punktu pośredniego *a*; jeżeli zaś przy punkcie *a* poprzeczne punkty nie były wytyczone, przechodzi odrazu do następnego punktu pośredniego *b*.

Gdy wszystkie punkty (tak pośrednie, jak poprzeczne), poprzedzające punkt wiążący *c*, zostały zanotowane, przenosimy niwelator na drugie stanowisko i_2.

Robotnik, stojący z łatą w punkcie wiążącym *c*, pozostaje na miejscu, zaś drugi robotnik (poprzednio ustawiany na pikiecie № 0) przechodzi do pikietu № 1, jako do następnego punktu wiążącego i ustawia na nim łatę.

Znów dwukrotnie obserwujemy obydwie łaty, notujemy, jak poprzednie, odczyty na stanowisku drugiem i znów robotnik z poprzedniego wiążącego punktu przechodzi do pośrednich i poprzecznych punktów.

W taki sposób posuwa się niwelacja coraz dalej.

Gdy niwelator jest ustawiony nad jednym z punktów osi, wówczas, zamiast odczytu, w tej samej rubryce wpisujemy wysokość osi celowej nad palikiem, zmierzoną czy to zapomocą ustawienia na paliku łaty przy samej lunecie, czy to zapomocą spuszczenia specjalnego typu ruletki (ruletka tego typu przy spuszczeniu rozwija się do chwili, gdy oprze się o palik).

Przy ustawianiu łaty na dnie strumieni, notujemy z łaty odpowiedni odczyt, w kolumnie zaś „Uwagi“ zapisujemy odczytaną z łaty głębokość, skąd nie będzie trudno obliczyć wysokość lustra wody.

Przy nawiązaniu pikietów do reperów, notować będziemy odczyty tylko na punkty wiążące, gdyż nawiązanie w linji: pikiet *N* — reper ma na celu przeniesienie wysokości z pikietu na reper, lub odwrotnie (gdy dana jest wysokość reperu w odniesieniu do poziomu morza), a nie niwelowanie linji terenu pikiet *N* — reper.

Zwykle, po ukończeniu niwelacji, ten sam niwelator wraca wzdłuż osi, niwelując tylko punkty wiążące; często jednak niwelację wykonywa się odrazu dwoma niwelatorami, z których pierwszy niweluje tylko wiążące punkty, drugi — wszystkie.

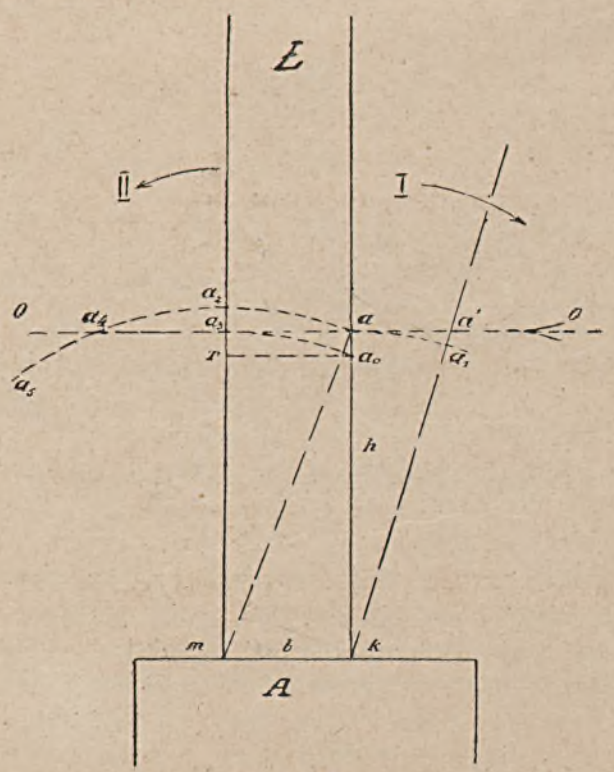
Szybkość niwelacji można znacznie zwiększyć w równym terenie, jeżeli za punkty wiążące nie będziemy przyjmować wszystkich pikietów; zajdzie to wówczas, gdy długość celowej przyjmiemy dla wiążących punktów, za równą nie 50 *m*, lecz 100 *m*; wtedy punktami wiążącemi będą, np. pikiety № № 0, 2, 4, 6 i t. d. Niwelator w tym wypadku należy ustawiać ściśle w połowie odległości między punktami wiążącemi, ponieważ prócz zmniejszenia dokładności odczytów, w grę wchodzi wpływ nierównoległości osi libeli do osi celowej, co przy znacznej różnicy odległości od niwelatora do tych punktów mogłoby wywierać na odczyty wpływy niepożądane.

Odczyty na punkty wiążące notujemy z dokładnością do 0,001 *m*, jakkolwiek nie ma to na celu określania ostatecznych wysokości punktów z tą samą dokładnością, bowiem wysokości punktów trasy dla obliczeń robót ziemnych podają się często z dokładnością do 0,01 *m*.

Szybkość niwelacji punktów wiążących wynosi około 1 *km* na godzinę.

§ 242. Wskazówki praktyczne.

Codziennie przed rozpoczęciem pracy niwelator należy sprawdzić, i w razie potrzeby zrektyfikować.



Rys. 515.

Należy pouczyć robotników, w jaki sposób mają ustawiać pionowo łatę na palikach, w wypadku, gdy łata jest zaopatrzona w pion lub libelę pudełkową. Gdy zaś łaty nie posiadają tych urządzeń, robotnicy powinni wahać łatami, posuwając ich wierzchołek w linji osi tam i zpowrotem, utrzymując spód łaty stale na paliku, o ile celowa nie przecina zbyt nisko łat.

Przypuśćmy, że rysunek 515 przedstawia łatę *Ł*, ustawioną na paliku *A*. *OO* jest przedłużeniem poziomej osi celowej niwelatora, przecinającej łatę, ustawioną pionowo, w punkcie *a*. Gdy łatę pochylimy dokoła punktu *k* ku niwelatorowi (zwrot I-y), wówczas punkt *a* przesunie się po łuku aa_1, oś celowa przetnie łatę w punkcie, bardziej niż *a* oddalonym od podstawy, i otrzymamy większy odczyt, niż *a*.

Gdy łatę wychylimy w kierunku od niwelatora, to punkt *a* przesunie się teraz po łuku, zatoczonym nie promieniem *ka*, lecz *ma*. Kreska *a* łaty opisze łuk $a\,a_2\,a_4\,a_5$, przytem w czasie przejścia po łuku $a\,a_2\,a_4$ oś celowa lunety przecinać będzie łatę w punktach bliższych, niż *a* od podstawy (odczyty będą mniejsze), i dopiero na $a_4\,a_5$ odczyty zaczną wzrastać. Najmniejszym więc odczytem, zaobserwowanym przy wahaniu, będzie a_0 po przejściu ma_0 do ma_3. Biorąc najmniejszy z obserwowanych odczytów, popełniamy błąd $a_0\,a$ tem większy, im bliżej podstawy *A* oś celowa przecina łatę.

Określmy wielkość tego błędu dla *ka*, równego 10 *cm*, 100 *cm* i 300 *cm*, przy grubości łaty $mk = 3$ *cm*.

Prostopadła $a_0\,r = b$ do $m\,a_3$ jest prostopadłą do promienia $ma_3 = ka = h$;

oznaczając

$$aa_0 = a_3r = x$$

otrzymamy

$$b^2 = x\,(2h - x)$$

a stąd

$$x^2 - 2hx + b^2 = 0$$

i

$$x = h - \sqrt{h^2 - b^2}$$

lub

$$x = h - (h^2 - b^2)^{1/2} = h - \left[h^2\left(1 - \frac{b^2}{h^2}\right)\right]^{1/2} = h - h\left(1 - \frac{b^2}{h^2}\right)^{1/2}$$

a stąd

$$x = h - h\left(1 - \frac{b^2}{2h^2} - \frac{b^4}{8h^4} \ldots .\right)$$

i wreszcie

$$x = \frac{b^2}{2h} + \frac{b^4}{8h^3}$$

Ponieważ w terenie oś celowa przecina łatę w najgorszym razie o 1 *dcm* nad ziemią (ze względu na roślinność), przeto, zakładając

$$h = 10\ cm = 3\ b,$$

otrzymamy

$$\frac{b^4}{8\ h^3} = \frac{b^4}{8.27\ b^3} = \frac{b}{200};$$

co przy b, równem 3 *cm*, wynosi 0.7 *mm*, zaś już przy $h = 4\ b$ wyraz $\frac{b^4}{8\ h^3}$ wynosi 0.06 *mm*.

Skąd dla x przyjmujemy wielkość

$$x = \frac{b^2}{2\ h}$$

Przy $b = 3$ *cm*, oraz

dla $h = 15$ *cm* mamy $x = 3$ *mm*
$h = 50$ *cm* „ $x = 0{,}9$ *mm*
$h = 150$ *cm* „ $x = 0{,}3$ *mm*

Jeżeli więc tolerować będziemy błąd, równy 1 *mm*, wówczas pochylanie łaty przy odczytach, większych od 50 *cm*, nie będzie szkodliwe; natomiast bezwzględnie unikać należy wahania łatą przy odczytach, mniejszych od 50 *cm*.

Ponieważ zaś łata bez libeli i pionu może być ustawiona pionowo tylko w przybliżeniu, co znów może wprowadzić błędy takiej samej, jak omówione, wielkości, przeto należy: albo ustawiać niwelator w takich punktach terenu i w taki sposób, ażeby celowa przecinała łaty na wiążących punktach na odległości powyżej 50 *cm*, licząc od ziemi, albo też nie należy wcale używać łat bez pudełkowej libeli lub pionu.

W czasie silnego działania promieni słonecznych nad niwelatorem należy utrzymywać parasol (duży typ), oraz unikać (przy niwelacji podłużnej) długich (ponad 50 *m*) celowych, ze względu na falowanie powietrza.

§ 243. Dziennik niwelacji.

Dziennik niniejszy obejmuje przebieg i rachunek niwelacji, wykonanej jeden raz z nawiązaniem do specjalnie obranych reperów. Ponieważ nie było punktu o danej wysokości, przeto przyjęto wysokość I-ego reperu za 200.00 *m*. Punkty wiążące niwelowano dwukrotnie (w dwu położeniach lunety); pozostałe odczyty wzięto przy drugiem położeniu lunety. Z odczytów wstecz i wprzód wpisano średnie do odpowiedniej kolumny. Na każdem stanowisku obliczono poziom niwelatora, dodając do wysokości punktu wiążącego wstecz odczyt, odpowiadający temu punktowi przy II-em położeniu lu-

Stanowisko	№ w polu	Odczyty z łaty wstecz	Odczyty z łaty pośrednie i poprzeczne	Odczyty z łaty wprzód	Odczyty średnie wstecz	Odczyty średnie wprzód	Poziom niwelatora	Różnice wysokości Δ h +	Różnice wysokości Δ h −	Wysokości	Uwagi
A		724									
	Reper I	722			723					200,00	Wysokość I reperu przyjęto za 200 *m*.
			1,112								
	0		1,114			1,113			0,390	199,610	
		650			651						
	0	652								199,610	
	p. 3,8		420				250,262			199,842	
	p. 9,6		650							199,612	
	l. 6,0		740							199,522	
	l. 10,0		1,100							199,162	
	+ 38,0		960							199,302	
	+ 46,0		1,286							198,976	
	p. 10,0		465							199,797	
	l. 10,0		945							199,317	
				1,945							
	+ 60,5			1,947		1,946			1,295	198,315	
	№ 0	842			842		199,157				
	+ 60,5	842								198,315	
	p. 5,4		660							198,897	
	p. 10,0		970							198,187	
	l. 10		1,220							197,937	
				1,540							
	1			1,541		1,5405			0,6985	197,6165	
											Sprawdzenie
		840			839					197,6165	$h_n = 197{,}738_5$
	1	838					198,455				
										197,625	$h_a = 200$
	p. 10		830								
	l. 10		810							197,645	$h_n - h_a = -2{,}261_5$
	+ 60,6		1,640								$\Sigma(+\Delta h) = 0{,}122$
								0,122		196,915	$\Sigma(-\Delta h) = -2{,}383_5$
	p. 10		1,240								
										197,215	$\Sigma \Delta h = -2{,}261_5$
	l. 10		1,580								
										196,875	$\Sigma w = 3{,}055$
				718							$\Sigma p = 5{,}316_5$
	2			716		717				197,738$_5$	$\Sigma w - \Sigma p = -2{,}261_5$
					3,055	5,3165		0,122	2,3835		

nety; wysokości zaś punktów wiążących obliczono uprzednio, po obliczeniu na każdem stanowisku różnic wysokości, odpowiednio równych różnicom średnich odczytów.

Od obliczonych poziomów niwelatora na każdem stanowisku odjęto odczyty, odpowiadające punktom pośrednim i poprzecznym, wpisując wyniki do kolumny wysokości.

Na każdej stronicy rachunek zamknięto, wyprowadzając różnice pomiędzy wysokością ostatniego a pierwszego wiążącego punktu danej stronicy, np.:

$$197{,}738_5 - 200{,}00 = -\ 2{,}261_5$$

i wynik z sumą różnic wysokości:

+	—
0,122	0,390
	1,295
	$0{,}698_5$
	$-\ 2{,}383_5$

$$-\ 2{,}383_5 + 0{,}122 = -\ 2{,}261_5$$

co powinno dać wyniki identyczne.

Ponieważ *suma odczytów wstecz mniej suma odczytów wprzód równa się różnicy wysokości punktów skrajnych*, gdyż, dodając szereg równań, w których w oznaczają odczyty wstecz, p zaś — wprzód, oraz h — wysokości tych punktów:

$$\begin{aligned}
h_b - h_a &= w_a - p_b \\
h_c - h_b &= w_b - p_c \\
h_d - h_c &= w_c - p_c \\
(+)\quad &— \quad — \quad — \quad — \quad — \\
&— \quad — \quad — \quad — \quad — \\
h_{n-1} - h_{n-2} &= w_{n-2} - p_{n-1} \\
h_n - h_{n-1} &= w_{n-1} - p_n
\end{aligned}$$

przeto otrzymamy

$$h_n - h_a = \Sigma w - \Sigma p$$

co w zastosowaniu do naszego przykładu winno dać:

$$-\ 2{,}261_{15} = \Sigma w - \Sigma p$$

sprawdźmy to:

$$\begin{aligned}
\Sigma w &= 3{,}054 \\
\Sigma p &= 5{,}316_5 \\
\Sigma w - \Sigma p &= -\ 2{,}261_5
\end{aligned}$$

A więc przypuszczać należy, że przy wyprowadzeniu średnich niema w obliczeniu błędów.

§ 244. Zastosowanie łat z dekadycznem *) uzupełnieniem.

Różnica wysokości dwu zaobserwowanych zapomocą niwelatora punktów ujmuje się we wzór:

$$h = w - p,$$

w którym w jest odczytem wstecz, p — wprzód.

Wyobraźmy sobie, że na stanowiskach wprzód ustawiać będziemy łatę o dekadycznem uzupełnieniu; wówczas zamiast p odczytamy na łacie pewne $\times p_o$, oznaczające ściśle

$$\times p_o = 10 - p$$

wobec czego

$$h = w - p = w + p_o - 10$$

tak np.

$$\begin{array}{rl} w = & 1.197 \\ \times p_o = & \times\ 9.375 \\ \hline h = & 10.572 - 10 = 0.572 \end{array}$$

a więc do odczytu wstecz dodać należy dekadyczne uzupełnienie wprzód i sumę zmniejszyć o 10.

Dziennik niwelacji miałby wówczas następujący wygląd:

№ № punktów	ODCZYTY		ŚREDNIA		Różnice wysokości	Wysokość	UWAGI
	Wstecz	Wprzód	Wstecz	Wprzód			
Reper № 1	2,674		2,675			246,552	Dana jest wysokość I-go reperu nad poziomem morza $H = 246.552$
	2,676				0,259		
		× 8,584					
0		× 8,584		× 8,584			
0	1,572		1,571			246,811	
	1,570				× 8,741		
		× 7,169					
1		× 7,171		× 7,170			
1	1,568		1,568			245,552	
	1,568				× 9,691		
		× 8,122					
2		× 8,124		× 8,123		245,243	

*) patrz § 24 — 26.

Przy niwelacji z użyciem łaty o dekadycznem uzupełnieniu, znajdującej się stale na przodzie, unikamy tworzenia różnic i stale mamy do czynienia tylko z dodawaniem, co w każdym bądź razie nieco upraszcza rachunek.

Znacznie większą wartość ma zastosowanie dekadycznego uzupełnienia w łatach rewersyjnych.

Jeżeli opis podziału na jednej stronie łaty jest uzupełnieniem dekadycznem podziału na odwrotnej stronie łaty, wówczas suma odczytów, wziętych z obydwu podziałów (przy odwracaniu łaty dokoła jej osi o 180°) przy tem samem położeniu osi celowej, winna dawać zero. Daje to wartościową kontrolę odczytów w każdym punkcie. Ze względu jednak na możność popełnienia tego samego błędu w obydwu odczytach, dekadyczne uzupełnienie przesuwa się zwykle na łacie rewersyjnej w stosunku do drugostronnego podziału na łacie o pewną „Stałą łaty“, która nie jest liczbą okrągłą. Ta stała może być dla obydwu łat jednakowa — wówczas wszystkie 4 odczyty, wzięte w dwu parach (dwukrotnie wstecz — wprzód), dają podstawę do obliczenia różnic wysokości.

Punkt	Wstecz	Wprzód	Sprawdzenie	Różnica wysokości	Wysokości	Uwagi
	1,675		× 8,874		275,455	
1	× 7,199			— 0,750		
		2,425	× 8,873			
2		× 6,448			274,705	

Górne zapisy wstecz i wprzód odpowiadają podziałom łat od zera u dołu — ku górze; dolne — odpowiadają dekadycznemu uzupełnieniu, przesuniętemu o tę samą wielkość i w tym samym kierunku na odwrotnych stronach obydwu łat. Sprawdzenie polega na porównaniu sum × 8.874 i × 8.873 obydwu odczytów z każdej łaty; gdy błędu w odczytach niema, sumy powinny się różnić w granicach dokładności odczytu; gdy suma odczytów z jednej łaty stale się różni od sumy odczytów na drugiej łacie o tę samą wielkość z tym samym znakiem, będzie to dowodem, że stałe łat nie są zupełnie jednakowe.

Łaty takie jednak nadają się do użycia, należy tylko zwracać uwagę na to, czy liczby w kolumnie „sprawdzenie“ różnią się stale o tę samą wielkość. Obarcza to dodatkową pracą. Do rubryki „różnica wysokości“ wpisujemy różnicę algebraiczną odczytów, odpowiadających zwykłym podziałom, np. 1.875 — 2.425 = — 0.750.

Często używane są pary łat, z których jedna ma zwykły dwustronny podział, przesunięty o stałą łaty na odwrotnej jej stronie, druga zaś na obydwu stronach łaty ma podział, opisany zapomocą uzupełnienia dziesiętnego; przytem podział na odwrotnej stronie zasadniczego (przy ziemi 0, × 9, × 8 ....) jest w stosunku do niego przesunięty o tę samą stałą, co i na I-ej łacie.

Łata ze zwykłym podziałem ustawia się zawsze w punkcie, odpowiadającym przy danem stanowisku niwelatora odczytowi wstecz; łata zaś o podziale z uzupełnieniem dziesiętnem ustawia się zawsze naprzód, w kierunku niwelacji. Dzięki temu przy wyprowadzeniu różnic wysokości mamy do czynienia z dodawaniem, zamiast odejmowania, co trochę upraszcza rachunek, gdyż wszystkie działania są przytem jednakowe.

Typ dziennika niwelacji z takiemi łatami jest następujący:

№ № punktów	Wstecz 2,025	Wprzód × 7,975	Sprawdzenie		Różnice wysokości	Wysokości i średnie różnice	Uwagi
Reper № 1	1,248						Wysokość reperu № 1 jest daną
	3,272		— 1			194,675	
1	1,010	× 9,073			0,321	$0,320_5$	
	3,034	× 7,048	— 1	0	0,320	$194,995_5$	
2	0,765	× 8,322			× 9,332	× 9,332	
	2,790	× 6,298	0	+ 1	× 9,332	$194,327_5$	
3		× 8,679			× 9,444	× $9,444_5$	
		× 6,656			× 9,445	193,772	
	12,119	× 46,075			× 8,194		
		12,119			× 9,097		
		8,194					

W dzienniku tym odczyty zgrupowane są według punktów w wierszach; tak więc przy punkcie I-ym odczyt 1,010 odpowiada stanowisku 2-mu, zaś × 9,073 stanowisku pierwszemu; pary odczytów wstecz wprzód dla każdego stanowiska idą ukośnie od góry w prawo wdół np. $\frac{1,248 \times 9,073}{3,272 \times 7,048}$ odczytom wstecz $\frac{1,010}{3,034}$ odpowiadają odczyty wprzód $\frac{\times 8,322}{\times 6,298}$.

Pod tytułami „wstecz" i „wprzód" wypisane są stałe łat 2,025 i × 7,975.

Każdą parę odczytów, jak, np., $\frac{1,248}{3,272}$, należy skontrolować zapomocą dodania pierwszego odczytu 1,248 do stałej łaty 2,025, co dać winno 3,273, zbliżone do drugiego odczytu 3,272; różnica liczb 3,272 — 3,273 = — 1 wypisuje się w tym samym wierszu w kolumnie „sprawdzenie". Różnice wysokości obliczają się z obydwu par odczytów, np.

$$1,248 + \times 9,073 = 0,321$$
$$\text{i } 3,272 + \times 7,048 = 0,320.$$

Dla sprawdzenia rachunku u dołu obliczamy sumę wszystkich odczytów 12.119 wstecz i wprzód × 46.075; sumy te, dodane do siebie, dają wielkość × 8.194, która powinna ściśle odpowiadać sumie wszystkich różnic wysokości.

Dla obliczenia wysokości wypisujemy wysokość I-ego reperu, pod nią średnią różnicę wysokości, dodajemy, otrzymując wysokość 1-ego punktu. Analogicznie dojdziemy do wysokości ostatniego punktu.

Ostatniem sprawdzeniem rachunku jest dodanie do wysokości 1-ego reperu 194,675 połowy sumy różnic, t. j. × 9,097; w sumie winniśmy uzyskać wysokość ostatniego punktu.

Łaty z uzupełnieniem dziesiętnem mają zastosowanie tylko przy punktach wiążących.

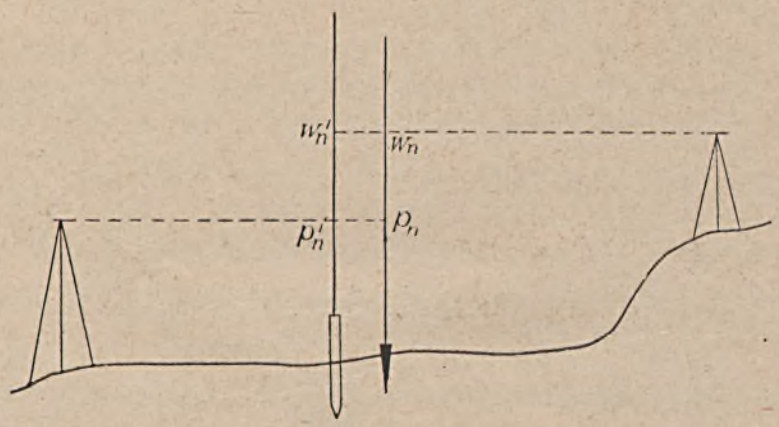
§ 245. Kontrole odczytów z jednostronnych łat.

Pewności, że niwelacja danego stanowiska jest właściwie wykonana, nie możemy uzyskać dzięki zwykłemu powtórzeniu odczytów; to też bardzo często po pierwszej parze odczytów w_1 p_1 (wstecz — wprzód) zmieniamy wysokość niwelatora, wciskając głębiej jego nóżki w ziemię, i notujemy drugą parę odczytów w_2 p_2. Oczywiście powinno być:

$$w_1 - p_1 = w_2 - p_2$$

w granicach dokładności niwelacji.

Poza tem, gdy siatka nitek posiada trzy poziome nitki i skrajne są jednakowo odległe od środkowej, wówczas, notując z każdej łaty trzy odczyty a, b, c, powinniśmy sprawdzać, czy zachowany jest dla środkowego odczytu warunek:



Rys. 516.

$$b = \frac{a + c}{2}$$

Wreszcie stosuje się metoda sprawdzania odczytów zapomocą t. zw. krzyżowych odczytów, co przy niwelacji podłużnej polega na ustawianiu

łat na punktach wiążących i ich świadkach, przy niwelacji reperów — na obydwu trzpieniach podstawek łat.

Jeżeli odczytami dla danej łaty z dwu kolejnych stanowisk niwelatora są p_n, p'_n i w_n, w'_n, gdzie p_n i w_n odpowiadają odczytom z łaty na punkcie wiążącym p'_n i w'_n — na świadku, wówczas powinno zachodzić:

$$p_n - p'_n = w_n - w'_n$$

a stąd:

$$p_n + w'_n = w_n + p'_n$$

Np., na stanowisku I zapisano w kolumnie wprzód $\begin{matrix}1{,}530\\1{,}340\end{matrix}$, na II-iem zaś w kolumnie odczytów wstecz zapisano $\begin{matrix}2{,}240\\2{,}051\end{matrix}$, sprawdzeniem będzie porównanie:

$$1{,}530 + 2{,}051 = 1{,}340 + 2{,}240$$

Oczywiście, jako I-e odczyty zanotujemy te, które odpowiadają samym punktom, jako II-e te, co odpowiadają łatom na świadkach.

§ 246. Odchyłka w niwelacji.

Gdy niwelujemy dwukrotnie linję w danym kierunku, lub raz tam, drugi zpowrotem, lub też gdy nawiązujemy niwelację do dwu reperów o danej wysokości, względnie, gdy zamykamy ciąg niwelacyjny (postaci zamkniętego wieloboku), należy ustalać, czy wielkość odchyłki jest dopuszczalna.

Przypuśćmy, że średni błąd odczytu z łaty wynosi m; wówczas średni błąd różnicy wysokości, określanej ze wzoru

$$h = w - p$$

będzie równy

$$m_h = \pm \sqrt{m_o^2 + m_o^2} = \pm m\sqrt{2}$$

Zaś błąd całej niwelacji, t. j. sumy wszystkich różnic wysokości wyniesie:

$$M = \pm \sqrt{m_h^2 + m_h^2 + \ldots m_h^2} = \pm m_h\sqrt{n} = \pm m_o\sqrt{2\,n}$$

w którym to równaniu n oznacza liczbę stanowisk.

Za wielkość granicznego (dopuszczalnego) błędu przyjmujemy

$$G = \pm 3\,M = \pm 3\,m_o\sqrt{2\,n}$$

przyrównywając zaś m_o do 2 mm, otrzymamy

$$G = \pm 8.4\sqrt{n}\ mm$$

lub, zaokrąglając dla niwelacji technicznej, mamy:

$$G = \pm 10 \sqrt{n}\ mm$$

Tak więc, np. niwelacja podwójna ciągu niwelacyjnego o 50 stanowiskach (za każdym razem) niwelatora daje dwa wyniki, mogące różnić się o

$$10 \sqrt{2 \times 50}\ mm = 100\ mm = 10\ cm$$

Odchyłka zaś takiego samego zamkniętego ciągu niwelacyjnego, lub ciągu między dwoma reperami o danych wysokościach, powinna dać różnicę w wyniku, nie przekraczającą

$$10 \sqrt{50}\ mm = 70\ mm = 7\ cm$$

Wyniki, otrzymywane w praktyce, zwykle są lepsze i bardzo rzadko możemy się zetknąć z niwelacją o błędzie, bliskim granicznego.

§ 247. Suma różnic wysokości w zamkniętym ciągu niwelacyjnym.

Jak wiemy, różnica pomiędzy wysokością ostatniego i pierwszego punktu w niwelacji ciągu wynosi wielkość różnicy pomiędzy sumami odczytów wstecz i wprzód, t. j.

$$\triangle h = \Sigma w - \Sigma p$$

ponieważ jednak w ciągu zamkniętym pierwszy i ostatni punkt jest ten sam. przeto

$$\Delta h = 0$$

zatem i

$$\Sigma w - \Sigma p = 0$$

t. j.

$$\Sigma w = \Sigma p$$

a więc w zamkniętym ciągu niwelacyjnym suma odczytów wstecz równa jest sumie odczytów wprzód.

§ 248. Wyrównywanie ciągów niwelacyjnych.

I. Wyrównywanie ciągu rozwartego między dwoma reperami o danej wysokości i ciągu zamkniętego jest jednakowe, ze względu na fakt, że w ciągu zamkniętym wysokość ostatniego punktu równa się wysokości pierwszego, a zatem obydwie są dane.

Wielkość odchyłki w takich ciągach rozrzucamy na różnicę wysokości między wiążącemi punktami, odpowiednio je zaokrąglając.

Rozpatrzmy przykład dla ciągu zamkniętego.

Od punktu do punktu	Rożnice wysokości obliczone				Różnice wysokości poprawione	
	+	poprawka	—	poprawka	+	—
1 — 2	1,155		0,6405	0,0005	1,155	0,640
2 — 3			0,319	0,001		0,318
3 — 4			0,9215	0,0005		0,921
4 — 5			1,2445	0,0005		1,244
5 — 6						
6 — 7	0,942	0,001			0,943	
7 — 8	0,245				0,245	
8 — 1	0,779	0,001			0,780	
	3,121	0,002	3,1255	0,0025	3,123	3,123

Jak stąd wynika, odchyłka wynosi $3{,}121 - 2{,}1255 = -0{,}0045 < 10\sqrt{9}$ *mm.*; należy tedy dodatnie różnice wysokości zwiększyć, ujemne — zmniejszyć, każdą o $1/9\ (0{,}0045) = 0{,}0005$, lub po zaokrągleniu do całych milimetrów tych różnic wysokości, które są podane z 4-ym znakiem, pozostałość podzielić na inne.

II. W ciągu podłużnym, dwukrotnie niwelowanym, na każdem stanowisku mamy dwukrotnie obliczoną różnicę wysokości, przytem, jeżeli niwelowano tam i zpowrotem, to znaki różnic na wspólnych stanowiskach będą odwrotne. Przy drugiej niwelacji należy w terenie porównywać wzajemne odchylenia poszczególnych różnic na tych samych stanowiskach; odchylenia te nie powinny przekraczać podwójnej dokładności odczytu, a więc około 3 — 4 *mm.* w niwelacji technicznej. Większe odchylenia wskazują na zmianę wysokości palików w czasie między dwoma niwelowaniami, co można wykryć, gdyż wówczas dwie sąsiednie różnice wysokości w obydwu niwelacjach różnić się będą na jednem stanowisku o pewien błąd z plusem, na drugiem — o ten sam błąd z minusem. Gdy jednak jest inaczej, przypuszczać należy istnienie błędu w jednej z niwelacyj i zapomocą powtórzenia jej między wątpliwemi punktami, błąd ten zostaje usunięty.

Gdy w całej niwelacji wszystkie różnice są porównane i niedozwolone błędy usunięte, wtedy wyrównanie niwelacji sprowadza się do obliczenia średnich różnic z obydwu niwelacyj na każdem stanowisku i obliczenia na ich podstawie wysokości wszystkich punktów.

Obliczenia pośrednich i poprzecznych punktów dokonywać należy po wyrównaniu niwelacji.

§ 249. Wykreślanie profilów.

Rozpatrzmy, jakie dane winny być uwzględnione przy wykreśleniu przekrojów podłużnych i poprzecznych, t. j. t. zw. profilów.

Zachodzą w praktyce dwa wypadki: 1) profil ma dać rysunek przekroju o tyle szczegółowy, aby zmiany wysokościowe wyraźnie się uwydatniały, i na tem się kończy nasze zadanie, lub 2) odpowiadający powyższym warunkom profil jest podstawą szczegółowego projektu pewnej budowli, wykreślanej na tym samym profilu w postaci niwelety, t. j. projektowanej przyszłej linji terenowej.

W obydwu wypadkach rysunek musi przedstawiać:

a) sam profil terenu,

b) plan trasy, a więc proste i łuki,

c) plan otaczających trasę w najbliższej odległości szczegółów,

d) dane liczbowe, a zatem rzędne (wysokości) punktów, odległości między punktami, numery pikietów, elementy łuków (kąt zmiany kierunku trasy, promień łuku, długość łuku, długość stycznej) długości prostych między łukami, kolejne kilometry trasy, opis szczegółów i położenie reperów. Gdy zaś prócz profilu wykreśla się i niweletę, wówczas powyższe dane uzupełniają się przez rzędne niwelety, wysokości czy głębokości robót ziemnych, spady niwelety i długości odcinków niwelety o stałych spadach.

Ze względu na obfitość tych danych, budowa rysunku przybiera swoisty charakter, mianowicie: sam rysunek profilu i niwelety układa się u góry, pod nim zaś w poszczególnych wierszach wypisują się i wykreślają kolejno ku dołowi:

1) wysokość podstawy profilu;

2) wysokości nasypów i głębokości wykopów;

3) rzędne punktów niwelety;

4) rzędne punktów terenu;

5) spady odcinków niwelety i ich długości w postaci ułamka, którego licznik daje wielkość spadu odcinka niwelety, mianownik długość tego odcinka, kreska zaś wskazuje pochylenie, gdy jej prawy koniec jest niższy, wzniesienie, gdy jest wyższy, poziom — gdy kreska jest równoległa do podstawy profilu: np., $\frac{1 : 800}{540}$ oznacza pochylenie niwelety od lewej ręki ku prawej w stosunku 1 metr wysokości na 800 długości na odcinku 540 *m* długości;

6) plan prostych i łuków;

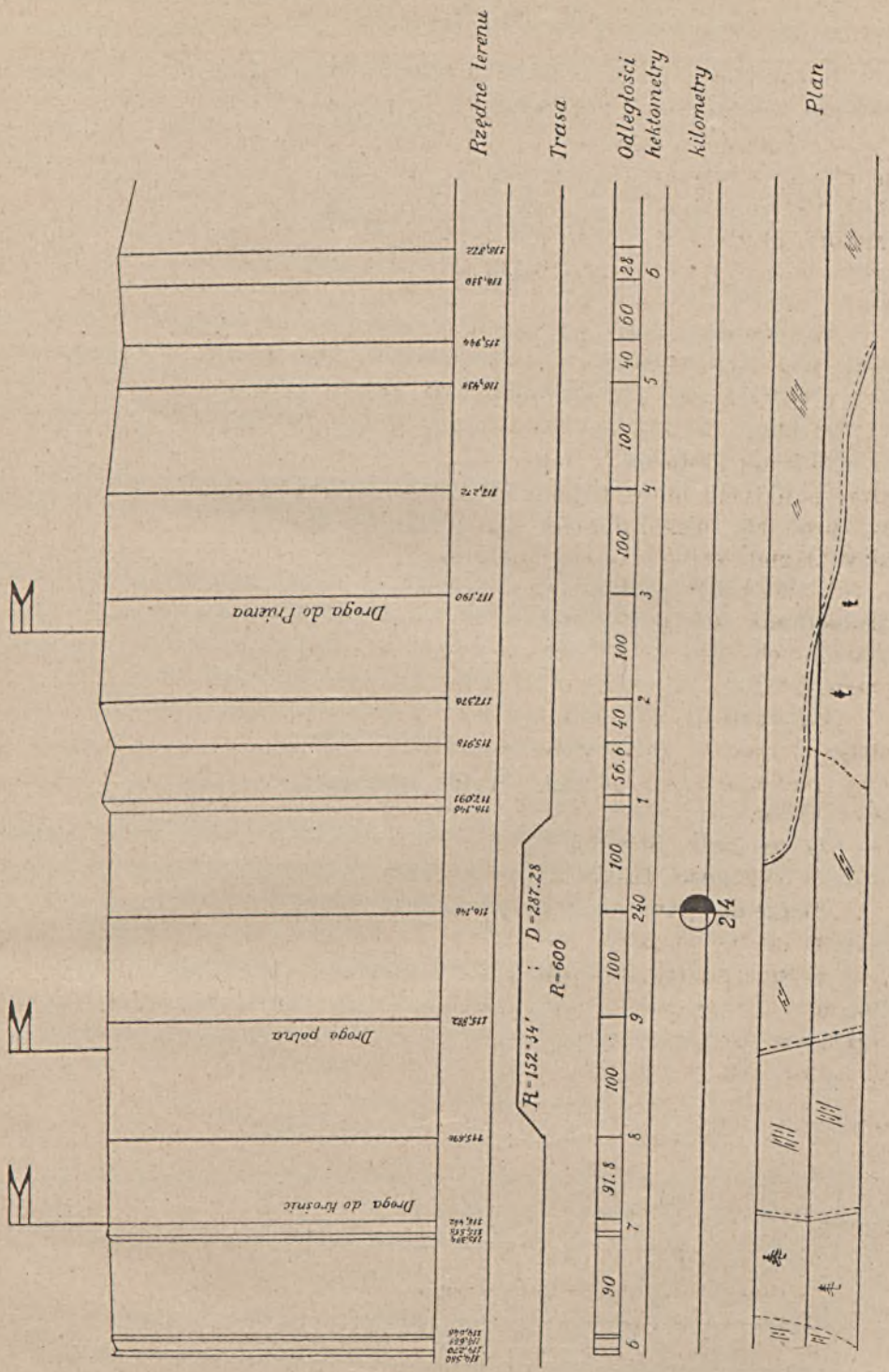
7) odległości między punktami i numery pikietów;

8) bieżące kilometry i hektometry

9) plan trasy i otaczających ją szczegółów.

Podstawie profilu przypisujemy taką wysokość, aby wszystkie punkty profilu i niwelety znajdowały się zawsze nad nią; wysokość ta winna być mniejsza od wszystkich rzędnych, ale o tyle tylko niższa, aby profil trasy i niwelety umieściły się na danym arkuszu.

Wykreślamy profil na papierze milimetrowym.


Rzędne terenu
Trasa
Odległości hektometry
kilometry
Plan
Droga do Fiuetra
Droga polna
Droga do Krośnic
R=152°34' ; D=287.28
R=600
214
90
91.8
100
56.6
40
60
28

Rys. 517.

Skala wysokości zwykle jest 10 razy większa, od skali długości; stosowane są następujące połączenia skal:

dla długości:	wysokości:
1 : 5000	1 : 500
1 : 2000	1 : 200
1 : 1000	1 : 100
1 : 500	1 : 50

Zwiększanie skali wysokości w stosunku do długości ma na celu podniesienie przejrzystości w oznaczeniu charakteru wysokościowego trasy i niwelety, gdyż zachowanie tych samych skal dla długości i wysokości nie dałoby możności uchwycić na profilu mniejszych różnic wysokości poszczególnych punktów.

W wierszu na odległości rachunek zamykamy między pikietami, t. j. suma odległości między sąsiedniemi punktami w granicach dwu pikietów powinna wynosić sto.

Zmiany kierunku osi uwidaczniamy w planie prostych i łuków; zmiana kierunku w prawo odpowiada łukowi, zwróconemu ku górze, w lewo — łukowi zwróconemu ku dołowi.

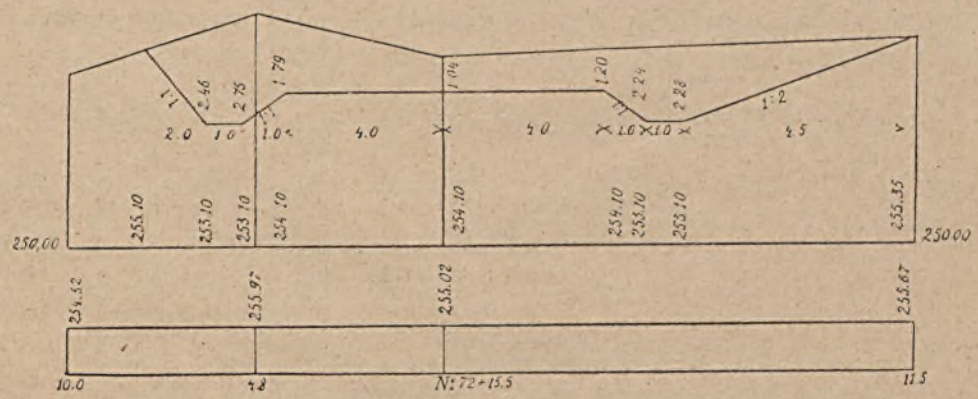
Wysokości punktów wypisują się z zaokrągieniem do 1 *cm.*

Rysunek Nr. 517 daje typ profilu podłużnego bez niwelety.

§ 250. Profile poprzeczne.

Wykreślają się na papierze milimetrowym w tej samej skali dla wysokości i długości (ułatwienie przy rachunku powierzchni przekroju).

Skalą profilów poprzecznych jest 1 : 100 lub 1 : 200; wypisujemy na profilu:
roboty ziemne, skarpy, odcinki, poziom porównawczy, rzędne projektu i terenu.



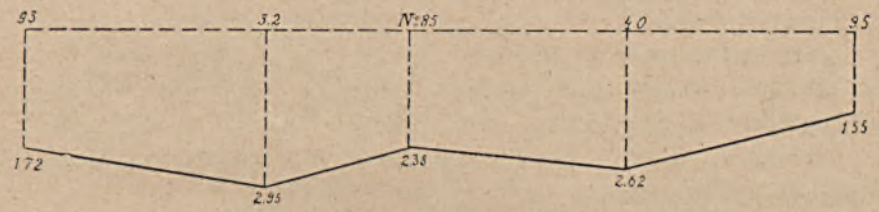
Rys. 518.

Rysujemy profile, jak są widoczne w terenie w kierunku liczenia odległości. Profil poprzeczny winien obejmować ten punkt trasy, na któ-

rym profil został wzięty, numer tego punktu, np., Nr. 72 + 15.5, odległości punktów poprzecznych od osi, wysokości tych punktów, a w wypadku, gdy należy wykonać projektowanie przyszłej budowli, na profilu poprzecznym wykreślamy jej przekrój poprzeczny, wymiary i skarpy, oraz wypisujemy rzędne projektowanego przekroju, wysokości nasypów i głębokości wykopów.

Prócz tego typu przekrojów poprzecznych, dla wykreślanych w polu przekrojów terenu za podstawę profilu możemy obierać poziom niwelatora, od którego wdół odkładamy odczyty z łat.

Szkic tego rodzaju można nakreślić szybko i dokładnie.



Rys. 519.

U góry wypisuje się numer punktu trasy odległości punktów poprzecznych od osi, u dołu — odczyty z łat.

§ 251. Projektowanie niwelety.

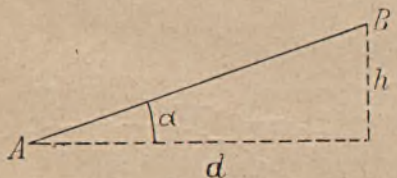
Przy projektowaniu należy przestrzegać dwu zasadniczych warunków: 1) ilość robót ziemnych łącznie z transportem mas z wykopów na nasypy powinna być możliwie mała, 2) spady niwelety nie powinny przekraczać maksymalnych spadów, dla danej budowy przewidzianych.

Spadem prostej nazywa się stosunek różnicy wysokości dwu punktów do rzutu poziomego łączącej je prostej.

Oznaczając różnicę wysokości punktów A i B literą h, rzut poziomy AB literą d, spad prostej literą p i kąt pochylenia α, możemy napisać:

$$p = \frac{h}{d} = tg\,\alpha$$

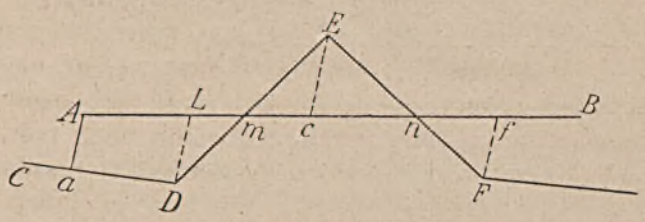
Jak widzimy, spad odpowiada tangensowi kąta pochylenia prostej. Dla dróg żelaznych stosujemy spady w terenach równych do 0,005, w falistych do 0,01 w górskich do 0,025, dla dróg bitych do 0,08, dla kanałów około 3 do 6 dziesięciotysięcznych, dla rowów odpływowych od 0,0002 do 0,001.



Rys. 520.

Odpowiednie zaprojektowanie niwelety ułatwia możliwość dobierania spadów w granicach od $-p$ do $+p$. Projektowanie zaczyna się od przybliżonego szkicowania niwelety, porównywania wartości jej warjantów pod względem ilości robót ziemnych i wielkości spadów.

Próbne szkicowanie niwelety uskuteczniamy zapomocą układania linjału wzdłuż przekroju terenu i takiego jego przesuwania, przy którem linjał będzie przecinać poprzedni odcinek niwelety i leżeć będzie wzdłuż przekroju terenu, jeżeli spad nie przekracza założonej granicy. Gdy wynikiem dążenia zachowania dłuższych odcinków o stałych spadach jest powiększanie się wymiarów wykopów lub nasypów, wówczas w odpowiedniem miejscu należy załamać niweletę, zmieniając jej spad o tyle, aby ją odpowiednio utrzymywać blisko terenu. Po zaprojektowaniu graficznem niwelety, należy ustalić wysokości jej punktów w miejscach, gdzie znajdują się punkty pośrednie i pikiety. Przypuśćmy, że załamanie niwelety zaczyna się w A, spadem jest p. Przekrój terenu odpowiada łamanej $CDEF$. Należy ustalić wysokości punktów A L f niwelety, wysokość punktu a profilu pod punktem A niwelety, oraz położenie punktów m i n przecięcia się niwelety z terenem. Położenie punktu A trasy daje znana odległość punktu A od poprzedzającego pikietu. Dane są zatem również odległości od A (w rzucie poziomym) do D, a więc i L, do E, a więc i c, F, a więc i f.



Rys. 521.

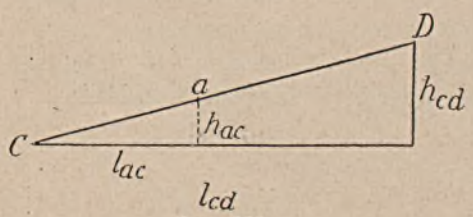
Ze wzoru na spad

$$p = \frac{h}{d}$$

wynika

$$h = pd$$

gdze h jest różnicą wysokości na odcinku d.



Rys. 522.

Oznaczając tedy odległości punktów L, c, f od A literami l_d, l_c, l_f, otrzymamy różnicę wysokości (rys. 521):

$$h_{AL} = l_d\, p$$

$$h_{AC} = l_c\, p$$

$$h_{Af} = l_f\, p$$

i wysokości punktów L, c i f, jako równe

$$H_L = H_A + p\, l_d$$

$$H_c = H_A + p\, l_c$$

$$H_f = H_A + p\, l_f$$

Oczywiście wysokości nasypów w punktach D i F będą odpowiednio równe wielkościom różnic $H_L - H_D$, $H_f - H_F$, głębokość zaś wykopu w E określi różnica $H_E - H_c$.

Obliczone analitycznie wielkości sprawdzimy graficznie na profilu.

Co się tyczy wysokości punktu a, obliczymy ją z różnicy wysokości a i C, mianowicie

$$h_{ac} = \frac{h_{cd}}{l_{cd}} l_{ac}$$

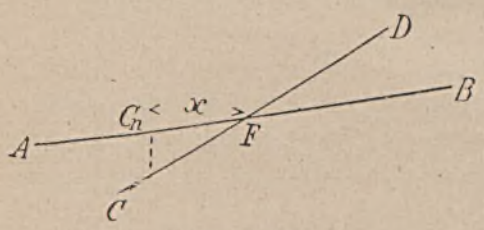
skąd

$$H_a = H_C + h_{ac}$$

i wysokość nasypu w A będzie równa $H_A - H_a$.

§ 252. Przecięcie się niwelety z terenem.

Określenie punktu przecięcia się niwelety z terenem ma znaczenie dla wyznaczania niwelety w terenie. Obliczmy położenie tego przecięcia, zwanego zerem robót (rzędna niwelety tego punktu, równa rzędnej terenu, wypisuje się nie czerwonym, a niebieskim tuszem).



Rys. 523.

Na rysunku AB jest niweletą, CD linją profilu. Odległości AC, CD są dane, jak również H_A, H_C, H_D i spad niwelety p_n.

Ustalić należy rzut poziomy odległości $CF = x$.

Oznaczmy AC literą l, spad zaś prostej CD zapomocą p_t, obliczanego ze wzoru

$$p_t = \frac{H_D - H_c}{l_{CD}}$$

Wysokość punktu F przecięcia się niwelety z terenem, obliczona z niwelety, jest równa:

$$H_F = H_A + p_n (x + l)$$

wysokość zaś tego samego punktu, obliczanego na CD, wyniesie:

$$H_F = H_c + p_t x$$

stąd

$$H_A + p_n x + p_n l = H_c + p_t x$$

$$(p_n - p_t) x = H_c - H_A - p_n l$$

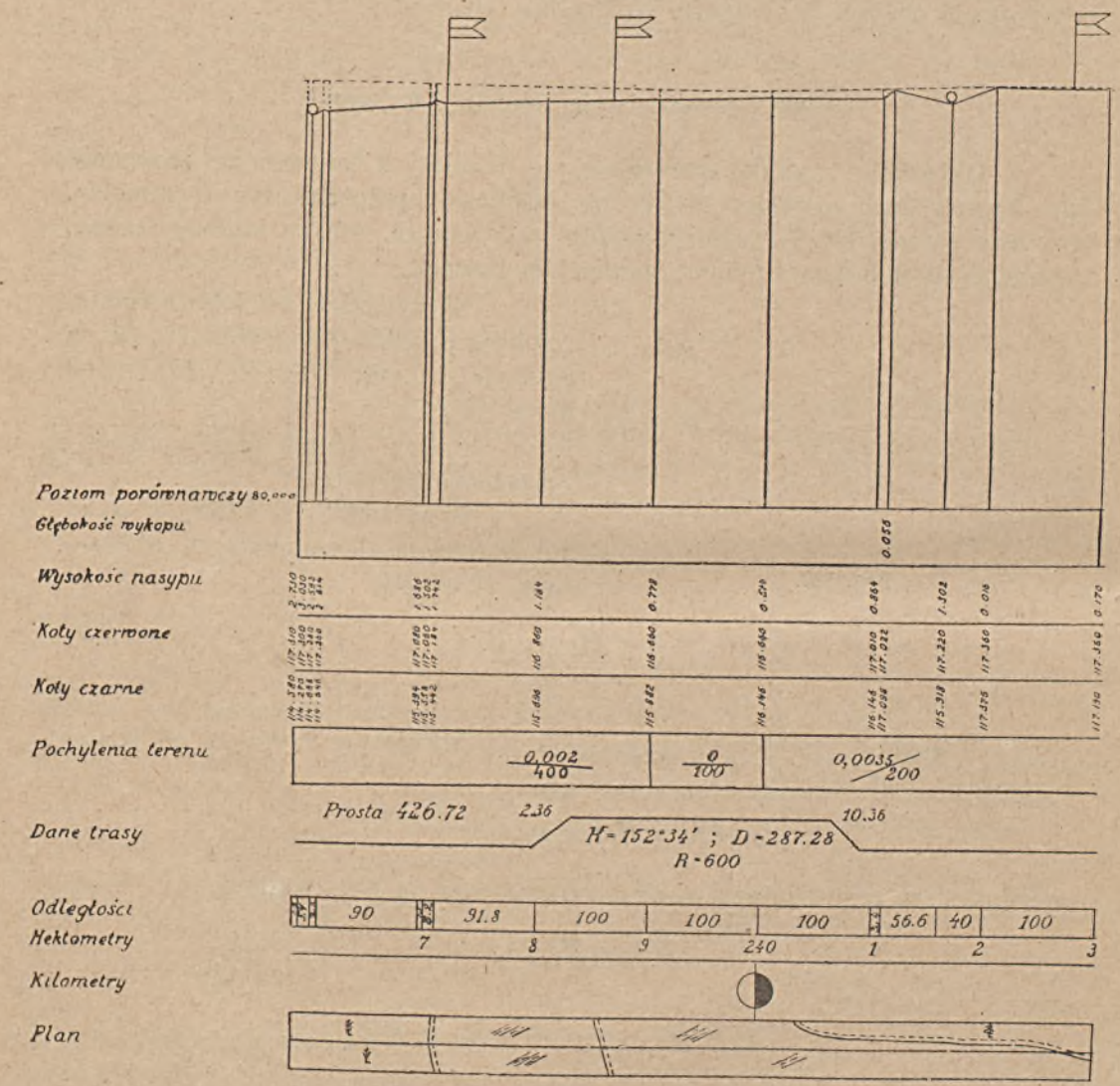
$$x = \frac{H_c - (H_A + p_n l)}{p_n - p_t}$$

lecz $H_A + p_n l$ oznacza rzędną punktu niwelety, leżącego na niej w odległości $l = AC$ od punktu A; będzie to więc rzędna punktu C_n niwelety, leżącego na pionie punktu C; skąd

$$x = \frac{H_c - H_{Cn}}{p_n - p_t}$$

Wchodzące do wzoru wielkości p_n i p_t mogą być tak dodatnie, jak ujemne; należy uwzględniać znaki spadów przy obliczeniu.

Wielkość, wynikającą z obliczenia x, odmierzyć możemy w terenie na prostej CD od punktu C; w punkcie F wbijamy palik *zera robót*.

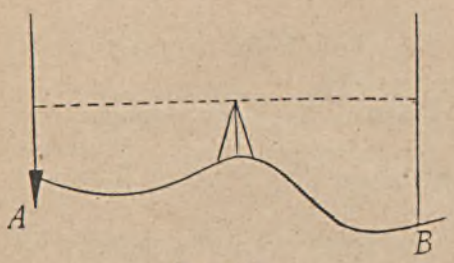


Na załączonym profilu niweleta jest wykreślona linją kreskowaną. Zwykle niweleta kreśli się tuszem czerwonym; tak samo wypisujemy wysokości (koty) punktów niwelety. Głębokości wykopów i wysokości nasypów wpisujemy niebieskim tuszem. Wykopy kolorujemy żółtą, nasypy — czerwoną farbą.

§ 253. Tyczenie punktów o danej wysokości i profilów.

Rozpatrzmy szereg praktycznych zagadnień, z któremi mamy do czynienia przy robotach ziemnych.

I. W danym punkcie wbić pal w taki sposób, by jego wierzchołek miał określoną wysokość x nad poziomem odniesienia danej niwelacji.



Rys. 524.

W środku odcinka między określanym punktem B a punktem A (pikietem, lub pośrednim) o podanej wysokości ustawiamy niwelator i po spoziomowaniu przyrządu, notujemy odczyt w wstecz na łatę punktu A oraz wprzód p do łaty B. Ponieważ H_A jest dane, więc określimy:

$$H_B = H_A + w - p$$

Gdy $H_B > x$, wówczas przy b kopiemy dół o pionowej ściance przy łacie, o głębokości, nieco większej od

$$H_B - x,$$

poczem wbijamy pal, sprawdzając od czasu do czasu zapomocą ustawienia na nim łaty, czy jest wbity dostatecznie głęboko, co zajdzie wówczas, gdy odczytamy z łaty takie p_0, przy którem

$$x + p_0 = H_A + w,$$

skąd

$$p_0 = H_A + w - x$$

Jeżeli odczyty są mniejsze od p_0, wbijamy pal dalej, dopóki nie uzyskamy wymaganego odczytu p_0.

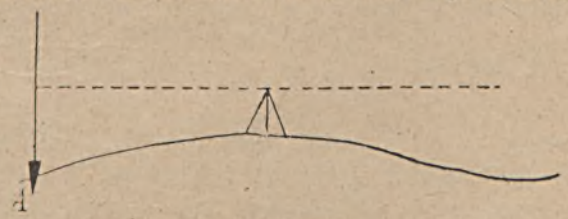
Gdy $x > H_B$, wówczas ustawiamy pal przy samej łacie i wbijamy go tak głęboko, aż jego wysokość, liczona z łaty od ziemi, wyniesie:

$$x - H_B$$

II. Znaleźć punkt terenu o wysokości x, gdy wpobliżu mamy punkt A o znanej wysokości H.

Odczyt na łatę A przy danem ustawieniu niwelatora wynosi W; wysokością poziomu niwelatora jest więc $P = H + W$. Gdy znajdziemy punkt o wysokości x, wówczas po ustawieniu na nim łaty powinniśmy odczytać na niej

$$p = P - x.$$



Rys. 525.

Przesuwamy w terenie łatę, dopóki przy pionowem ustawieniu łaty na ziemi nie odczytamy p. Taki punkt będzie punktem o wysokości x. Kiedy w ten sam sposób odnajdzie-

my w terenie szereg bliskich punktów, linja, łącząca te punkty, będzie linją o stałej wysokości x.

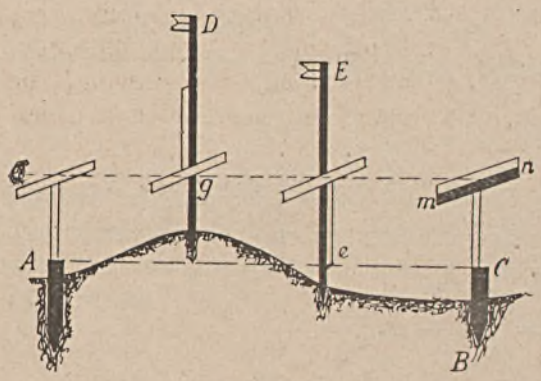
Zagadnienie komplikuje się, jeżeli różnica wysokości $x - H$ jest tak znaczna, że zapomocą jednego ustawienia niwelatora nie uzyskamy rozwiązania.

Niwelując od A w pożądanym kierunku, wytyczymy punkt o takiej wysokości, że wystarczy następnie jedno ustawienie niwelatora dla rozwiązania zagadnienia.

III. Wytyczyć szereg pali tak, aby ich wierzchołki tworzyły prostą o danym spadzie p, przechodzącą przez dany punkt.

Przypuśćmy, że punkt A ma być początkiem tyczonego spadu.

Położenie tego punktu wyznacza wierzchołek pala A. W pewnej odległości D mamy w kierunku spadu wbity drugi pal, którego wysokość (jeżeli nie jest dana) określimy z niwelacji.



Rys. 526.

Jeżeli wysokość pala A wynosi H_A, wysokość pala B wynosi H_B, to obliczymy wysokość niwelety w punkcie B, t. j.

$$H'_B = H_A + pD$$

i, gdy

$$H'_B > H_B$$

przyczem

$$H'_B - H_B = r,$$

wówczas przy samym paliku B wbijamy pomocniczy pal o tyle, by jego wierzchołek C znajdował się wyżej od wierzchołka pala B o r.

Na paliku A ustawiamy krzyż drewniany wysokości 1.0 m, na C zaś drugi krzyż, na którego przecznicy mamy granicę czarnego i białego koloru, odległą również o 1 m od spodu krzyża.

Następnie ustawimy kilka tyczek D E ... w linji AB; stojąc za krzyżem A, patrzymy na prostą $m\,m$ ostatniego krzyża, utrzymywanego pionowo przez robotnika; przesuwamy po najdalszej tyczce krzyż o wymiarach takich, jak w A, do chwili, gdy na linji celu spostrzeżemy jego wierzchołek.

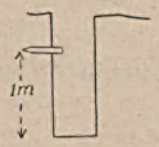
Podstawa e krzyża leży wówczas w linji AC o danym spadzie. Oznaczymy punkt e na tyczce i wbijemy przy niej pal tak, aby jego wierzchołek znalazł się w punkcie e. Tak samo postępujemy w innych punktach, gdy zaś, jak np. w D, teren nie pozwala na odpowiednie opuszczenie krzyża, wówczas odwrócimy go podstawą ku górze i oznaczymy na tyczce punkt g, od którego wdół należy odmierzyć 1 metr dla otrzymania punktu w linji spadu. Przy spodzie tyczki D wykopiemy dołek, w który wbijemy pal do takiej głębokości, aby wierzchołek pala znalazł się o 1 m poniżej punktu g tyczki.

Wierzchołki wbitych pali dają linję niwelety w terenie. Przy robotach ziemnych pale te wbijamy w takiej odległości, aby można było między niemi (rys. 527) przeciągnąć sznurek, wskazujący wysokość nasypu.

Przy kopaniu głębszych od 1 *m* rowków drenarskich wbija się w ściankę rowu, częściowo wykopanego, cienki palik na wysokości metra



Rys. 527.



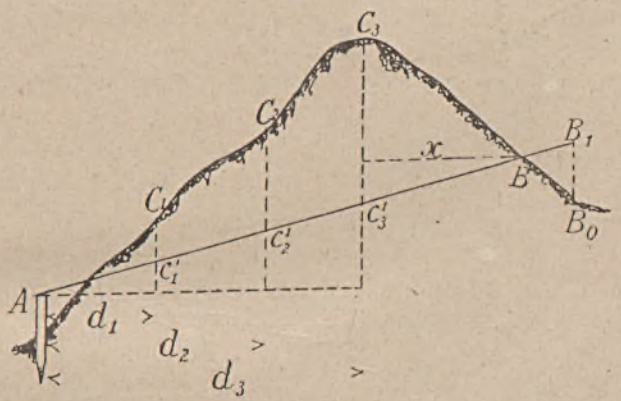
Rys. 527a.

nad dnem, a więc niżej terenu o różnicę między głębokością rowka a metrem (rys. 527 a).

Na te boczne paliki naciągamy sznurek, od którego robotnicy przy kopaniu sami odmierzają wdół oznaczony na szpadlu (licząc od jego spodu) metr, otrzymując tym sposobem dno rowu na pożądanej głębokości.

Gdy chodzi o wytyczenie prostej poziomej w danym kierunku, przy danym punkcie początkowym, wbijemy na linji pal tak, by jego wysokość równa była danej (co sprawdzimy zapomocą odczytu z łaty, ustawionej na palu), i zapomocą krzyżów wytyczymy cały szereg pali pośrednich o wierzchołkach, leżących w założonym poziomie.

IV. Określić punkt, w którym prosta (przechodząca przez *A*) o danym kierunku i spadzie *p* przecina teren.



Rys. 528.

Przypuśćmy, że dana prosta przecina teren w pewnym punkcie *B*. Aby go odnaleźć w terenie, należy przeniwelować teren w danym kierunku; odmierzając jednocześnie odległości punktów ustawienia łat od *A*.

W ten sposób uzyskujemy szereg punktów C_1, C_2 i C_3, odległych od *A* o d_1, d_2, d_3.

Z niwelacji uzyskujemy wysokości H_1, H_2 i H_3 punktów C_1, C_2, C_3.

Obliczając przyrosty wysokości $p\,d$ na $A\,B$, uzyskujemy wysokości h_1, h_2, h_3 punktów C_1', C_2', C_3', leżących na projektowanej prostej $A\,B$, mianowicie:

$$h_1 = H_A + pd_1$$

$$h_2 = H_A + pd_2$$

— — — — —

gdy uzyskamy wreszcie

$$h_3 = H_A + pd_3$$

bliskie H_3, wówczas zapomocą dwukrotnego przybliżenia uzyskamy rozwiązanie, mianowicie z równania

$$d = \frac{h}{p}$$

obliczymy dla

$$h = H_3 - h_3$$

$$d = \frac{H_3 - h_3}{p}$$

odmierzymy odpowiednio d i uzyskamy punkt B_0, którego wysokość h_0, określana niwelacją, będzie mniejsza od

$$h_3 + pd = h_{B1}$$

to jest od wysokości punktu B_1. Wobec małej różnicy wysokości H_3 i h_3, możemy przyjąć, że $C_3\ B_0$ ma stały spad, i wtedy określimy punkt B, jako punkt przecięcia się prostych $C_3\ B_0$ i $C_3'\ B_1$.

Oznaczając rzut

$$C_3\ B = x \qquad B\ B_0 = d - x,$$

mamy:

$$\frac{d - x}{x} = \frac{h_{B1} - h_0}{H_3 - h_3}$$

a stąd

$$\frac{d}{x} = \frac{h_{B1} - h_0 + H_3 - h_3}{H_3 - h_3}$$

$$x = \frac{d\ (H_3 - h_3)}{h_{B1} - h_0 + H_3 - h_3}$$

Po odmierzeniu x od punktu C_3, sprawdzimy zapomocą odczytu z łaty, czy wysokość otrzymanego punktu równa się

$$H_A + p\ (d_3 + x)$$



Rys. 529.

V. Określić, na jakiej wysokości x nad prostą o spadzie p, przechodzącą przez A, znajduje się punkt B.

Na rysunku prostą o spadzie p oznacza $A\ K$. Z niwelacji określimy różnicę wysokości h_0 między

punktami B i A oraz odległość $AB = d$ i obliczymy $h_1 = p\,d$, równe wielkości spadu prostej $A\,K$ na odcinku d.

Gdy $H_B > H_A$ i znak p jest ujemny, wówczas

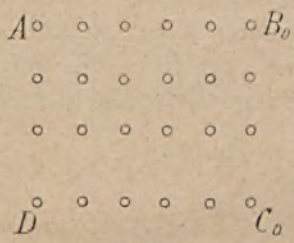
$$x = h_0 - p\,d$$

Gdy $H_B > H_A$ i p jest dodatnie, wówczas

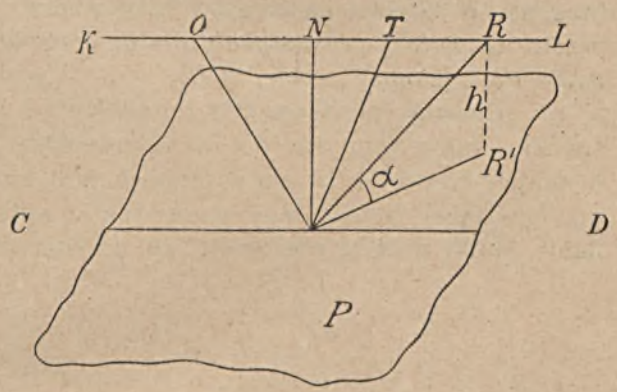
$$x = h_0 - p\,d \text{ i t. p.}$$

VI. Wytyczyć w terenie poziomą płaszczyznę o danej wysokości.

Zapomocą niwelatora i łat wyznaczymy wysokości narożników czworoboku $A\,B_0\,C_0\,D$, zbliżonego do prostokąta. Znając wielkość różnicy pomiędzy wysokością projektowanej płaszczyzny a wysokościami punktów $A\,B_0\,C_0$ i D, wbijemy w tych punktach pale do takiej głębokości, aby wierzchołki pali leżały na żądanej wysokości. Następnie zapomocą krzyżów wytyczamy na dwu bliższych prostych, np. AB_0 i DC_0, szereg punktów, wbijając pale, których wierzchołki leżeć będą w poziomie wierzchołków pali AB_0 i CD_0, poczem w taki sam sposób rozmieścimy na prostych, łączących poszczególne



Rys. 530.



Rys. 531.

pale AB_0 z palami C_0D, dowolną ilość pali o wierzchołkach, znajdujących się na takiej samej wysokości (rys. 530).

VII. Wytyczyć płaszczyznę, przechodzącą przez dany punkt, o spadzie p w danym kierunku (rys. 531).

Na takiej płaszczyźnie możemy poprowadzić dowolną liczbę prostych o różnych spadach w granicach $+p$ do $-p$; spadem zaś płaszczyzny nazywamy największy spad, jaki mogą mieć proste, leżące na danej płaszczyźnie.

Przypuśćmy, że daną płaszczyznę o spadzie p przecina dowolna pozioma płaszczyzna P, oczywiście wzdłuż pewnej prostej, np. CD. Wysokości wszystkich punktów tej prostej, jako leżących w poziomej płaszczyźnie, są równe.

W danej płaszczyźnie poprowadźmy $KL \parallel CD$. Wszystkie punkty prostej KL są odległe o tę samą wielkość h od poziomej płaszczyzny P, przechodzącej przez CD.

Rozpatrzmy kąty pochylenia prostych, łączących dowolny punkt M na CD z punktami prostej KL (rys. 531: dopisz M przy wierzchołku kąta α).

Jeżeli kątami pochylenia prostych *MR*, *MT*, *MN* i t. d. są kąty α, β, γ..., wówczas

$$\sin \alpha = \frac{h}{MR}$$

$$\sin \beta = \frac{h}{MT}$$

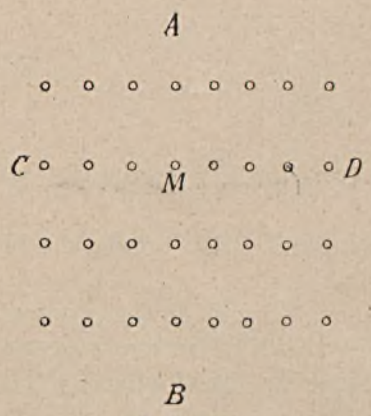
$$\sin \gamma = \frac{h}{MN}$$

— — — — —

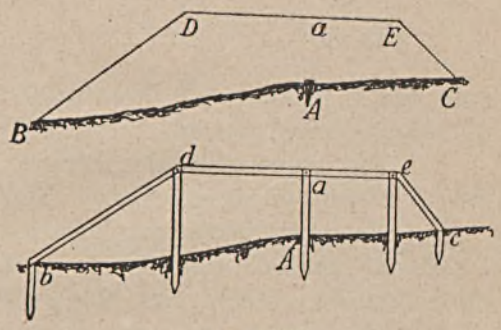
— — — — —

Największy z kątów odpowiada najmniejszemu mianownikowi ułamków, gdyż liczniki są wielkością stałą *h*. Najmniejszy zaś mianownik odpowiada najkrótszej odległości *M* od *KL*, a więc prostopadłej do *KL*, a tem samem do *CD*. Ponieważ zaś największemu z kątów odpowiada największy tangens, a zatem i spad, gdyż kąty pochylenia zawarte są w I-ej ćwiartce, przeto *w każdej płaszczyźnie prosta największego spadu* (*MN*) *jest prostopadła do poziomej prostej* (*CD*).

Rozwiązanie (rys. 532) zagadnienia o wytyczeniu płaszczyzny o danym spadzie sprowadza się do: a) poprowadzenia w danym punkcie *M* prostej o danym kierunku, b) wytyczenia w tym kierunku prostej *AB* o spadzie *p*, przechodzącej przez dany punkt (patrz zadanie III-e), c) wytyczenia przez dany punkt prostej poziomej *CD*, prostopadle do danego kierunku (koniec



Rys. 532.



Rys. 533.

III zadania) i d) wytyczenia prostopadle do *AB* szeregu prostych poziomych, przechodzących przez punkty, wytyczone na spadzie *AB*. Wierzchołki pali, ustawionych w taki sposób, leżą w projektowanej płaszczyźnie.

VIII. Wytyczyć poprzeczny przekrój zaprojektowanego nasypu.

Wytyczenie przekroju poprzecznego ma na celu ustawienie w terenie szkieletu przyszłej budowy. Zagadnienie rozwiążemy zapomocą ustawienia w terenie we właściwych punktach pali, których wierzchołki będą wy-

znaczać punkty *B D E C* przekroju. W punkcie *A* osi wbijamy pal, dopóki jego wierzchołek nie znajdzie się nad punktem *A* profilu na wysokości, równej wysokości *aA* na profilu poprzecznym (odległości poszczególnych punktów profilu i różnice wysokości są na profilu poprzecznym podane). Odmierzając odpowiednio w prawo i w lewo odcinki *aE* i *aD*, wbijemy w terenie pale do wysokości, równej wysokości pala *A*. Uskutecznimy to albo:

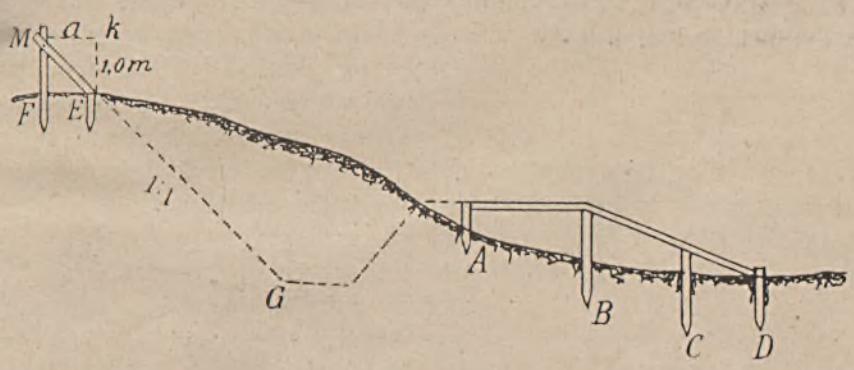
1) ustawiając niwelator i biorąc odczyt z łaty, ustawionej na palu *A*, a następnie wbijamy pale *D* i *E* do czasu, gdy łata, na nich ustawiana, wskaże taki sam odczyt, albo

2) korzystając z łaty poziomej z libelą, ułożonej na palu *A*, której położenie wskaże, do jakiej głębokości wbijać należy pale, by ich wierzchołki leżały w poziomie *a*. Następnie w punkcie *B* i *C*, wytyczonych w terenie, wbijamy paliki *b* i *c*, korzystając z niwelatora, do pożądanej wysokości, lub też na palu *d* układamy łatę poziomą i, po doprowadzeniu jej do właściwego położenia, od łaty wdół nad punktem *B* odmierzamy odczytaną z profilu wysokość; otrzymamy więc położenie wierzchołka *b* i podobnież *c*. Do pali przybijamy drewniane listewki, dające szkielet budowy.

Gdy odpowiednie punkty dwu sąsiednich, w ten sposób zbudowanych, przekrojów połączymy naciągniętemi sznurkami, wówczas możemy wbić szereg pośrednich pali, wskazujących wysokość projektowanych nasypów w terenie.

IX. Tyczenie wykopów.

Rozróżniamy wykopy w połączeniu z nasypami i właściwe wykopy. Rozpatrzmy obydwa typy.



Rys. 534.

Wytyczenie profilu I typu polega na ustawieniu w terenie w punkcie *A* pala o odpowiedniej wysokości; ustawiamy podobnież pale *B C* i *D*, wiążąc ich wierzchołki listewkami z drzewa.

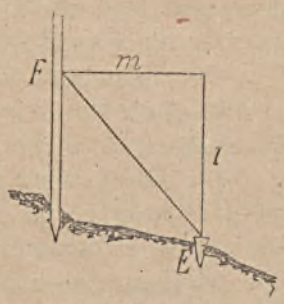
Co się tyczy części w wykopie, należy umożliwić celowe usuwanie ziemi przez wytyczenie kierunku *EG* skarpy o spadku 1 : *a*.

Mając wytyczony punkt *E*, w linji profilu odmierzamy *a* metrów i w otrzymanym punkcie *F* wbijemy pal. Znając spad skarpy *EG* (podany na profilu), np., 1 : *a*, co oznacza, że wzniesienie skarpy o 1 *m*. zachodzi na *a* metrach długości przekroju, odmierzymy 1 *m*. nad punktem *E* na pomocniczej tyczce i odmierzymy *a* metrów w kierunku przekroju od otrzymanego

na tyczce punktu k w poziomie k. Na palu F otrzymamy w ten sposób punkt M. Przymocowując do ME listewkę, na jej przedłużeniu mieć będziemy skarpę. Podobnie dla czystego wykopu wytyczymy tylko kierunek skarp.



Rys. 535.



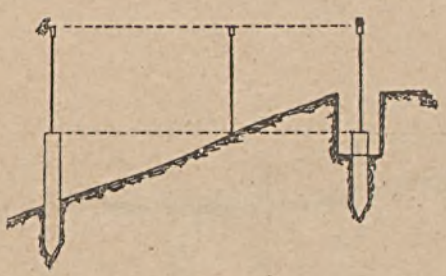
Rys. 536

Przy tyczeniu skarp używane są często t. zw. szablony skarpiarskie w postąci trójkątów prostokątnych, odpowiadających spadowi skarpy $1 : m$.

Ustawiając dany szablon ostrym kątem przy jednostkowej przyprostokątnej w punkcie, przez który przechodzić ma skarpa, cały trójkąt ustawiamy w płaszczyźnie przekroju; sprowadamy przyprostokątną m do poziomu; wówczas kierunek FE przeciwprostokątnej daje kierunek skarpy. Wbijając pionowo przy końcu m pal, oznaczymy na nim punkt F i wzdłuż FE przytwierdzimy listewkę (rys. 536).

X. Znaleźć linje przecięcia się terenu z daną płaszczyzną.

Po wytyczeniu szeregu punktów, leżących w danej płaszczyźnie, metodą, podaną w zagadnieniu VII-em, należy zapomocą krzyżów określić położenie punktów terenu, leżących w danej płaszczyźnie. Ustawiamy krzyże skrajne na takich dwu sąsiednich palach, aby wierzchołek jednego był ponad terenem, drugiego — poniżej terenu. Średni krzyż przesuwamy wzdłuż po linji terenu, przechodzącej przez skrajne krzyże, do czasu, gdy wierzchołek średniego znajdzie się w linji skrajnych krzyżów. Spód średniego krzyża jest punktem terenu, leżącym w danej płaszczyźnie.



Rys. 537.

Wytyczając szereg takich punktów i łącząc sąsiednie, otrzymamy linje przecięcia się terenu z daną płaszczyzną.

§ 254. Niwelacja terenu.

Niwelacja terenu ma na celu określenie wysokości wszystkich charakterystycznych punktów terenu. Ponieważ teren jest powierzchnią bardzo niejednolicie pofałdowaną, i punkty charakterystyczne terenu znajdują się w coraz to innych odległościach od siebie, zaś oko

nie może dostrzec nieznacznych zmian w pochyleniu terenu w poszczególnych kierunkach, przeto uważamy za stosowne w terenach pofałdowanych określać wysokości punktów o tyle gęsto rozłożonych, by przeciętna odległość między sąsiedniemi punktami wynosiła 40 *m*. W terenach wybitnie płaskich punkty takie obieramy odpowiednio rzadziej.

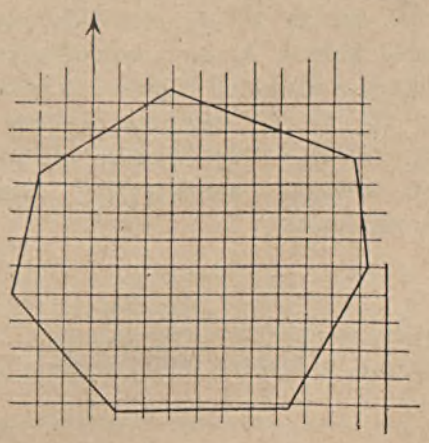
Stosujemy trzy zasadnicze metody niwelacyjnego zdjęcia terenu: siatkową, metodę punktów rozproszonych i metodę profilów podłużnych i poprzecznych. Siatkowa metoda polega na wytyczeniu w terenie sieci kwadratów o bokach 40-metrowych. Metoda punktów rozproszonych polega na połączeniu metody biegunowej, stosowanej przy pomiarach poziomych, z niwelacją, mającą na celu określanie wysokości punktów, których położenie ustalamy metodą biegunową. I wreszcie metoda profilów podłużnych i poprzecznych polega na ułożeniu w terenie systemu poligonów, które niwelujemy metodą niwelacji podłużnej, teren zaś, okalający ciągi poligonowe—metodą niwelacji poprzecznej. Rozpatrzmy szczegółowo te metody.

A. *Metoda siatkowa* (rys. 538,9) stosuje się na równinach. Wytyczenie sieci kwadratów polega przy małych objektach na wytyczeniu prostej



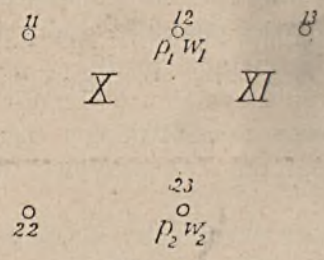
Rys. 538.

przez środek figury w kierunku jej wydłużenia, wbiciu w ziemię co 40 *m* palików i zbudowaniu w skrajnych punktach ⊥-ych, w braku teodolitu zapomocą konstrukcji linjowej, a przy nieznacznej szerokości pasa, podlegającego niwelacji—nawet węgielnicą. Przy użyciu węgielnicy w punkcie *B* dwukrotnie budujemy prostopadłą $B M_1 \perp$ do *B A* i $B M_2$ prostopadle do przedłużenia *B K* prostej *A B*. Punkt średni *M* wyznacza ostateczny kierunek prostopadłej. Na prostopadłych odmierzamy odcinki po 40 *m*, a następnie na prostych *cc*, dd_1, *ee*, ff_1 znów odmierzamy po 40 *m*. Przy dużych objektach należy założyć na granicach lub w ich pobliżu poligon, nanieść na plan, zaprojektować (rys. 539) sieć kwadratów i wówczas przenieść ją na teren, wytyczając na poszczególnych bokach poli-



Rys. 539.

gonu punkty przecięcia się prostych projektowanych, łącząc odpowiednio te punkty prostemi i odmierzając na nich odcinki, odpowiadające położeniu poszczególnych palików. Samą niwelację wykonamy, gdy wytyczenie i zanumerowanie narożników kwadratów jest skończone; wówczas dla stanowisk niwelatora obierzemy punkty, leżące wewnątrz poszczególnych kwadratów (oznaczone na rysunku krzyżykami) we wszystkich zewnętrznych (końcowych) kwadratach, oraz w co drugiej kolumnie wewnętrznych. Punkty, dla których, jako pojedyńczych, nie opłaci się ustawiać oddzielnie niwelatora, włączają się do najbliższego stanowiska.



Rys. 540.

Dla palików, wspólnych dla dwu sąsiednich kwadratów, przy niwelacji mieć będziemy kontrolę odczytów, mianowicie: ponieważ przy ustawieniu niwelatora wewnątrz każdego kwadratu notujemy odczyty z łat, ustawionych w każdym narożniku, przeto, np., na stanowiskach X i XI punkty 12 i 23 będą punktami wiążącemi; oznaczmy odczyty z X-go stanowiska na te punkty literami p_1 i p_2, z XI-go literami w_1 i w_2, wobec tego, że

$$p_1 - p_2 = w_1 - w_2,$$

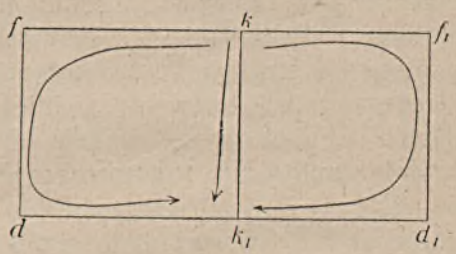
przeto

$$p_1 + w_2 = p_2 + w_1$$

t. j. sumy krzyżowych odczytów powinny być równe.

Takiego sprawdzenia należy dokonać przed każdorazowem przeniesieniem.

Obliczenie niwelacji polega na ustaleniu wysokości przedewszystkiem punktów głównych, za które uważamy punkty, leżące na zewnętrznym obwodzie $ff_1\ d_1\ d$ sieci kwadratów (rys. 541).



Rys. 541.

Przyjmując wysokość punktu K (gdy niwelacja nie może być nawiązana do punktów, odniesionych do poziomu morza), np. za 100,00 m, obliczamy wysokość punktu K_1 na przeciwległym końcu figury z niwelacji ciągów: 1) $kfdk_1$, 2) kk_1 3) $kf_1\ d_1\ k_1$. Otrzymamy trzy wyniki h_1, h_2, h_3. Gdy wyniki nie odbiegają od średniej artmetycznej więcej niż o wielkości:

$$\sqrt{n}\ cm,$$

gdzie n oznacza ilość ustawień niwelatora w każdym ciągu, średnia arytmetyczna, a jeszcze lepiej średnia wag

$$h_{K_1} = \frac{p_1 h_1 + p_2 h_2 + p_3 h_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

(w której za wagi obieramy:

$$p_1 = \frac{1}{n_1},\ p_2 = \frac{1}{n_2}\ p_3 = \frac{1}{n_3}\Big)$$

określi wyrównaną wysokość punktu k_1.

Niwelację wszystkich trzech ciągów wyrównamy między wysokościami punktów k i k_1.

W ten sposób uzyskaliśmy na obwodzie figury szereg punktów o wyrównanych wysokościach.

Wysokości pozostałych punktów siatki obliczymy w ciągach, łączących skrajne punkty, tak np. wysokości punktów 33, 34 i 35 obliczymy w ciągu rr_1, gdyż wysokości punktów r i r_1 już poprzednio zostały ustalone.

Niezbędne dla obliczenia odczyty z łat wpiszemy do dziennika obliczeń z dziennika polowego, np.

Stanowisko	Numer pala	ODCZYTY		WYSOKOŚCI	OBLICZENIA
		Wstecz	Wprzód		
	r	1,135		103,15	
		—5		+ 1,130	Dane:
3				— 1,210	h_r = 103,15
	33	1,150	1,210	103,070	h_{r1} = 102,70
				+ 1,150	$h_r - h_{r1} = -0,45$
25				— 0,920	$\Sigma_w - \Sigma_p = -0,435$
	34	1,320	0,920	103,300	odchyłka $\varepsilon = -0,015$
				+ 1,320	należy zmniejszyć odczyty wstecz, lub zwiększyć wprzód. Poprawki wpisujemy pod odczytami.
26				— 1,550	
	35	1,240	1,540	103,070	
				+ 1,240	
20					
			1,610	— 1,610	
	r_1		+ 10	102,700	
	ε	4,845	5,280		

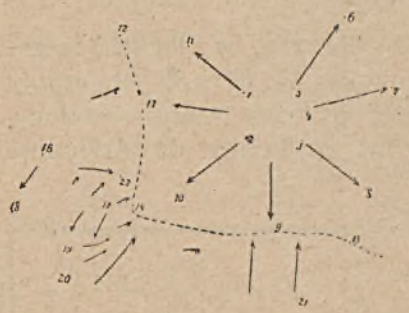
Wszystkie obliczone wysokości wypiszemy tuszem czarnym przy odpowiednich punktach planu, wykreślonego w skali $\frac{1}{2000}$.

UWAGA. Gdyby wewnątrz jednego z kwadratów znajdował się wybitnie charakterystyczny punkt (cypel górki, zagłębienie), wówczas taki punkt powinien być zniwelowany i sytuacyjnie określony z wymiarów odległości do najbliższych narożników.

Przy większych siatkach dla przyśpieszenia pracy łączymy po cztery kwadraty przy jednem stanowisku niwelatora.

B. *Niwelacja punktów rozproszonych.*

Poprzednia metoda ma tę wadę, że punkty charakterystyczne terenu nawet przy niewielkich bokach kwadratów nie odpowiadają narożnikom i winny być mierzone oddzielnie; pozatem samo tyczenie sieci jest uciążliwe; stosowanie tej metody wywołane jest głównie brakiem odpowiednich przyrządów.



Rys. 542.

Natomiast, gdy mamy do dyspozycji niwelator z kołem poziomem i siatką dalekomierczą, wtedy znakomicie upraszcza i przyśpiesza pracę połączenie niwelacji z metodą biegunową zdjęcia.

Przypuśćmy, że zdjęciu podlega obszar o tyle mały, że końcowe jego punkty są oddalone o 100 *m* przeciętnie od środka obszaru. Wystarczy więc jedno ustawienie niwelatora dla zdjęcia danego terenu.

Głównem zadaniem niwelacji rozproszonej jest obranie dla łat odpowiednich punktów; ma to być wykonane z takiem wyrachowaniem, aby przy minimalnej ilości punktów wszystkie charakterystyczne pofałdowania terenu były uchwycone.

Tak, np., jeżeli strzałki na rysunku dają kierunek spadów w terenie, wówczas wystarczy, jeżeli ścięty szczyt wzgórza ustalą punkty 1, 2, 3, 4, 5, podnóże góry 8, 9, 10, 11, dolinę — 12, 13, 14, 9, 15, grzbiet — 16, 17, podnóże grzbietu przez punkty 22, 18 i 19 i wreszcie linje zbocza dają punkty 20 i 21.

Odpowiednie obranie punktów dla ustawienia łaty wymaga wyczucia rzeźby terenu; szkic punktów z wykreślonemi w postaci strzałek spadami ma bardzo ważne znaczenie przy opracowaniu planów warstwicowych. Szkic taki nosi nazwę „croguis“.

Najczęściej niwelację rozproszoną wykonywamy po wskazaniu robotnikom położenia poszczególnych punktów; niejednokrotnie jednak rozstawianiem łat kieruje technik, sporządzający croguis, podczas gdy drugi niweluje.

Na danem stanowisku należy zmierzyć:

1) wysokość niwelatora nad punktem, obranym za stanowisko,

2) kierunek orjentacyjny, odpowiadający punktowi o znanem położeniu (np., kierunek boku poligonowego, łączącego stanowisko z innym punktem poligonowym).

Następnie, przy obserwacji zapomocą spoziomowanej lunety rozproszonych punktów, przy celu do każdego notujemy:

1) trzy odczyty, odpowiadające trzem nitkom na łacie, a w ostateczności odczyty, odpowiadające środkowej i jednej ze skrajnych nitek,

2) odczyt z koła poziomego.

Zapis uskuteczniamy w dzienniku niwelacji terenu.

Dziennik niwelacji terenu.

Stanowisko	№№ punktów	Odczyt z limbusu	Odczyt z łat	Odległości w metrach	Poziom niwelatora P i wysokości punktów	Uwagi i obliczenia
	B	133° 10′			$P = 102.80$	Wysokość stanowiska
						$h_A = 101.50$
			15		— 0.62	
			62			wysokość
	1	135° 5′	109	94.5	102.18	niwelatora 1.30
						$P = 102.80$
			68		— 1.20	
			120			
	2	150° 14′	172	104.5	101.60	Kierunek orjentacyjny do B.
			34		— 1.11	
			111			
A	3	176° 20′	189	155.5	101.69	przy drodze
			—		— 0.35	
			35			
	4	185° 30′	120	170.5	102.45	brzeg strumienia

i t. d.

Rubryka odległości wypełnia się różnicą odczytów z łat ze skrajnych nitek, zwiększoną o stałą dalekomierza, w danym wypadku zaokrągloną do 50 *cm*. W wypadku (punkt 4 y) gdy jedna z nitek przechodzi poza łatą, podwajamy różnicę między środkową a odczytaną skrajną.

Wysokość poszczególnych punktów wyprowadzamy, odejmując odczyt ze środkowej nici od poziomu niwelatora, wypisanego u góry w kolumnie wysokości.

W uwagach wypisujemy od czasu do czasu sytuacyjne położenie punktów.

Naniesienia na plan pomierzonych punktów dokonamy po naniesieniu stanowiska i wykreśleniu kierunku zerowego (odpowiadającego odczytowi zero na kole poziomem) metodą biegunową.

Przy określonych punktach wypiszemy ich wysokości.

Jeżeli zaś zdjęciu podlega większy obszar, tak że wypadnie założyć całą sieć stanowisk, ażeby za ich pośrednictwem zdjąć, jak poprzednio, cały teren, wówczas należy:

1) obrać jako stanowiska opowiednie punkty terenu i

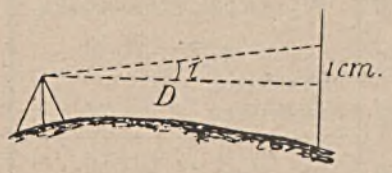
2) powiązać wzajemnie stanowiska, mianowicie w ten sposób, aby ich wysokość w odniesieniu do wspólnego poziomu była określona i aby wszystkie stanowiska mogły być naniesione na plan.

Przy ustalaniu liczby stanowisk zakładamy, że z każdego z nich obejmować będziemy niwelacją wprzód teren o pewnym promieniu r. Wielkość tego promienia uzależniamy od wielkości wpływu tych błędów instrumentu, których zapomocą rektyfikacji nie usunięto; załóżmy, że wpływ pozosta-

łości tych błędów nie powinien przekraczać błędu, odpowiadającego wychyleniu libeli o jedną podziałkę.

Przyjmujemy, że wynikający stąd błąd, równy 1 *cm*, w wysokości poszczególnych punktów może być przez nas tolerowany, jako dostatecznie mały.

Określmy, przy jakiej odległości od łaty zajdzie ten błąd.



Rys. 543.

Przyjmując, że wartość podziałki niwelatora jest τ, otrzymujemy

$$D = \frac{1\ cm}{tg\ \tau''} = \frac{206265}{\tau}\ cm$$

co, np., przy

$$\tau = 12'',$$

wyniesie

$$D = 170\ m.$$

W niwelatorach zaś w mniej dokładnych D odpowiednio zmniejszy się

Przyjmując, iż na danem stanowisku objąć możemy niwelacją obszar, równy $q = \pi D^2$, przy powierzchni Q całego obszaru, otrzymamy, że minimalną ilością stanowisk będzie

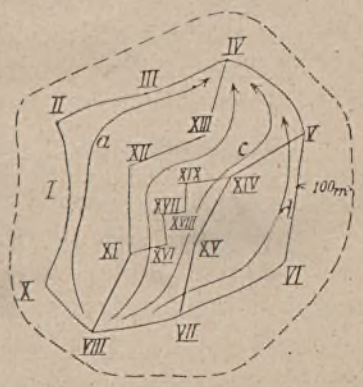
$$n = \frac{Q}{q}.$$

Ze względu jednak na nierówności terenu, nie pozwalające celować wszędzie na stałą odległość, ilość stanowisk będzie większa.

Co się tyczy obioru punktów stanowisk, to ze względu na kilkakrotnie przekraczające wysokość niwelatora wymiary łaty, należy za takowe obierać punkty na wyższych miejscach.

Powiązanie wysokościowe stanowisk, oznaczonych w terenie palikami, wbitemi równo z ziemią, z zanumerowanemi świadkami, wykonany zapomocą niwelacji podłużnej metodą niwelacji ze środka.

Rysunek przedstawia stanowiska, połączone ciągami poligonowemi i niwelacyjnemi. Zewnętrzny pierścień stanowisk leży w odległości około 100 *m* od kropkowanej granicy obszaru, gdyż ze stanowisk skrajnych pomierzyć możemy pas terenu z włączeniem i samej granicy; natomiast obieranie stanowisk na samej granicy spowoduje jedynie powiększenie ich liczby, nie dając wzamian nic konkretnego, gdyż ścisłe ustalenie położenia granic nie jest celem pomiaru niwelacyjnego.



Rys. 544.

Wyrównanie ciągów niwelacyjnych możemy oprzeć na wyrównaniu niwelacji zewnętrznego koła stanowisk.

Do dokładniejszych wyników dojdziemy, skoro uwzględnimy związkowe ciągi niwelacyjne i ich wagi.

Oznaczmy średni błąd niwelacji dwu wiążących punktów literą m; przypuśćmy, że przy niwelacji ze środka wiążące punkty rozstawione zostały w jednakowej odległości we wszystkich ciągach, tak że między punktami węzłowemi VIII i IV biegną ciągi a, w których przy podłużnej niwelacji było n_1 ustawień niwelatora, b o n_2 ustawieniach, c o n_3 i d o n_4 ustawieniach. Średniemi błędami sumy różnic wysokości wiążących punktów w każdym ciągu będą

$$m_a = \pm \sqrt{m^2 + m^2 + \ldots + m^2} = \pm m \sqrt{n_1}$$

$$m_b = \pm m \sqrt{n_2}$$

$$m_c = \pm m \sqrt{n_3}$$

$$m_d = \pm m \sqrt{n_4}$$

Ponieważ stosunek wag odpowiada stosunkowi odwrotności średnich błędów, przeto

$$p_a : p_b : p_c : p_d = \frac{1}{m_a^2} : \frac{1}{m_b^2} : \frac{1}{m_c^2} : \frac{1}{m_d^2} = \frac{1}{m^2 n_1} : \frac{1}{m^2 n_2} : \frac{1}{m^2 n_3} : \frac{1}{m^2 n_4}$$

lub

$$p_a : p_b : p_c : p_d = \frac{1}{n_1} : \frac{1}{n_2} : \frac{1}{n_3} : \frac{1}{n_4};$$

a więc za wagi ciągów niwelacyjnych obieramy odwrotności ilości ustawień niwelatora, powiększone 10 lub 100 razy (byleby stosunek wag był zachowany), lub inaczej jeszcze: ze względu na proporcjonalność długości ciągów do liczby ustawień niwelatora, za wagi przyjąć możemy odwrotności długości poszczególnych ciągów (zwiększone, np., 1000 razy).

Mając z każdego ciągu obliczoną różnicę wysokości między temi samemi dla każdego ciągu punktami VIII i IV, a mianowicie h_a , h_b , h_c , h_d , obliczymy najprawdopodobniejszą z nich

$$h = \frac{p_a h_a + p_b h_b + p_c h_c + p_d h_d}{p_a + p_b + p_c + p_d};$$

Skąd, przyjmując wysokość punktu VIII, np., za 100,00 m., otrzymamy dla wysokości punktu IV-ego:

$$H_{IV} = 100{,}00 \text{ m.} + h.$$

Niwelację każdego ciągu wyrównamy oddzielnie pomiędzy punktami VIII i IV-ym.

Obliczenie niwelacji pozostałych stanowisk, jak np. XVI — XIX, nawiążemy do wyrównanych punktów XI i XIV-ego.

Co się tyczy wzajemnego sytuacyjnego powiązania stanowisk, to wykonamy je za pośrednictwem poligonów, których wierzchołkami będą punkty, obrane jako stanowiska niwelatora. Długości boków pomierzymy dwukrotnie: raz taśmą, raz dalekomierzem, a przy mniej dokładnych zdjęciach — dwukrotnie dalekomierzem, ustawiając przyrząd w środku prostej, łączącej stanowiska. Kąty pomierzymy przy dwu położeniach lunety. Do tych zdjęć może być użyty niwelator — teodolit firmy Gerlach, jako uniwersalny. Wyrównania poligonów można dokonać łącznie z rachunkiem spółrzędnych, jakkolwiek bardzo często ograniczają się do graficznego naniesienia tych poligonów.

Po naniesieniu na plan stanowisk niwelatora i po obliczeniu ich wysokości, na każdem stanowisku wykonamy pomiar łącznie ze sporządzeniem croguis i dziennika niwelacji terenowej, notując na każdem stanowisku wysokość niwelatora i odczyt z koła poziomego, odpowiadający celowi na jedno z najbliższych stanowisk.

Przy rozpoczęciu pracy na każdem stanowisku pierwszy odczyt powinien być wzięty z łaty, ustawionej w odległości 100 lub więcej metrów od niwelatora na jednym z palików, stanowiących związkowy punkt przy niwelacji stanowisk. Gdy oznaczymy literą H wysokość stanowiska, literą h wysokość związkowego punktu, na którym ustawiliśmy łatę, literą i wysokość osi celowej niwelatora nad palikiem, wyznaczającym położenie danego stanowiska, i litera p odczyt, wzięty z łaty, wówczas winno zachodzić równanie:

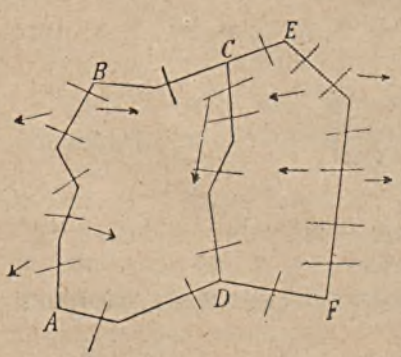
$$H + i = h + p$$

Jeżeli różnica nie przekracza 2 *cm*, wówczas możemy uważać, że dla celów niwelacji terenowej niwelator nie wymaga rektyfikacji.

Tego rodzaju sprawdzenie na każdem stanowisku gwarantuje właściwe wykonanie niwelacji terenu; ponieważ nie powoduje dodatkowej pracy, przeto jest stale stosowane.

§ 255. Metoda profilów podłużnych i poprzecznych.

Stosuje się w wypadku gdy niwelator nie posiada koła poziomego i gdy mamy w terenie kilka poligonów, wzajemnie powiązanych. Poligony te winny biec wzdłuż najwyższych i najniższych linij terenu, winny więc łączyć wyniosłości terenu, przechodzić dolinami, wąwozami i t. p.



Rys. 545.

Rysunek daje poligony AB i EF na wododziałach i poligon DC w dolinie.

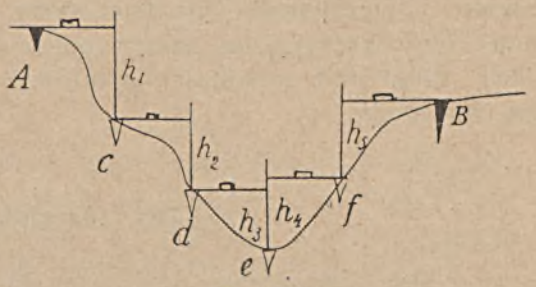
Niwelacja podłużna poligonów wykonywana jest łącznie z niwelacją poprzeczną z wyjątkiem wypadków, gdy spotykamy urwiska o znacznych spadach. Stosujemy wówczas niwelację schodkami.

Niwelację obliczamy po wyrównaniu niwelacji podłużnej.

§ 256 Niwelacja schodkami.

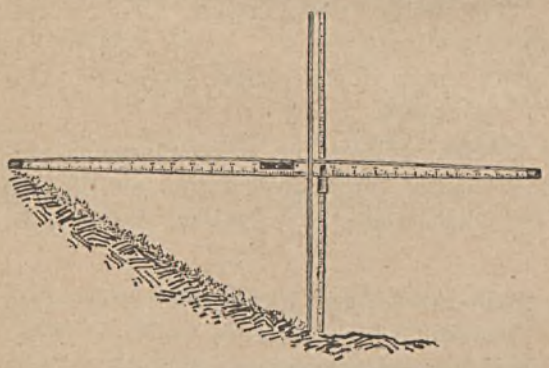
Przy niwelacji bardzo spadzistych (często zarośniętych) przekrojów stosuje się niwelacja schodkowa — w niwelacji podłużnej niwelatorem, poprzecznej — łatami z libelą, lub niwelatorem.

Niwelacja schodkowa, wykonywana niwelatorem, tem jedynie się różni od zwykłej niwelacji podłużnej, że co kilka metrów należy przestawiać niwelator, dzięki znacznym spadom; wyznacza się więc na każdym odcinku między pikietami znaczna ilość punktów, wiążących poszczególne ustawienia niwelatora.



Rys. 546.

Niwelacja łatą poziomą przekroju AB wykonywa się zapomocą jednej łaty pionowej. Łatę poziomą z libelą układamy na paliku A, poziomujemy i koniec jej dosuwamy do pionowej łaty na paliku c, notując odczyt h_1; obydwie łaty przenosimy niżej, poziomą na c, pionową na d, a ustawiając, jak poprzednio, notujemy h_2 i na następnym odcinku h_3. Ponieważ na $e\,f\,B$ teren się wznosi, łata pionowa zostaje ztyłu na c, poziomą zaś układamy na f, notując odczyt h_4 i dalej—h_5. Odczyty h_1, h_2 i h_3 odejmujemy odpowiednio od wysokości punktów A, c, d, a odczyty h_4, h_5 dodajemy do wysokości punktów e i f.


Rys. 546 a.

Odległości między kolejnemi punktami równają się długości poziomej łaty, w ten bowiem sposób wytyczamy punkty schodkowego przekroju.

Dokładność takiej niwelacji dla przekrojów poprzecznych na stromych zboczach jest zupełnie wystarczająca.

Rys. 546a przedstawia łaty profilowe firmy Gerlach, używane przy tej niwelacji.

§ 257. Niwelacja terenu na podstawie planu sytuacyjnego.

Gdy teren, podlegający niwelacji, pocięty jest gęsto linjami sytuacyjnemi, jak drogi, rowy, miedze, granice użytków i t. p., naniesionemi na plan, wówczas, mając niwelator bez koła poziomego, z łatwością dokonamy niwelacji terenu. Mianowicie, na linjach sytuacyjnych wyznaczymy odpowiednio punkty, które będą podlegać niwelacji, wypalikujemy je w terenie, korzystając z planu; poza tem w polu, niezależnie od poprzednich, wy-

palikujemy punkty charakterystyczne terenu, nawiązując je z domiarów, czy też w inny sposób, do tych linij sytuacyjnych, które są naniesione na plan. Wypalikowane punkty są zanumerowane odpowiednio jednakowo w polu i na samym planie, lub jego odrysie. Po założeniu w terenie sieci stanowisk niwelatora, powiązanych niwelacją podłużną, której wyniki obliczymy i wyrównamy, przystępujemy do niwelowania wypalikowanych punktów, oznaczając na szkicu polowym strzałkami linje o stałych spadach. Obliczenie wysokości punktów i naniesienie ich na plan nie wymaga omawiania.

§ 258. Warstwice (izohypsy).

Plan niwelacyjny, na którym są opisane wysokości poszczególnych punktów, ma tę wadę, że nie jest przejrzysty, gdyż określanie form terenu połączone jest z badaniem położenia wysokościowego całego szeregu punktów, co na większych objektach nie prowadzi do celu; obserwując poszczególne punkty, wytwarzamy sobie obraz oddzielnych form terenu i z najwyższą trudnością przechodzimy do obrazu całości. Tego rodzaju badanie nie może być odrazu przyswojone przez nową osobę, która te same studja nad planem musi powtarzać od początku.

W celu uwydatnienia rzeźby terenu wykreślane są na planach i mapach krzywe, zwane izohypsami (warstwicami). Każda warstwica jest planem rzutu krzywej terenu, posiadającej tę właściwość, że wysokość wszystkich jej punktów jest jednakowa.

Możemy określić warstwice nieco inaczej, niż poprzednio: warstwicą nazywamy plan rzutu poziomego krzywej*) przecięcia się terenu z powierzchnią poziomową (na małych objektach z płaszczyzną poziomą) o określonej wysokości.

Jeżeli więc wyobrazimy sobie cały szereg poziomowych powierzchni, poprowadzonych w stałych odstępach, np. co 1 m (lub 5 m, lub 0,5 m i t. d.), to każda z tych powierzchni przecinać będzie teren wzdłuż innej krzywej.

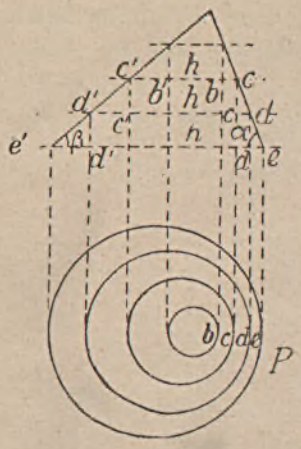
Gdy wykreślimy na planie zespół rzutów poziomych tych krzywych, wówczas plan będzie planem warstwicowym.

Rozpatrzmy najprostsze formy terenu, odpowiadające bryłom geometrycznym. Do takich form zaliczamy: płaszczyzny, kotliny i wzgórza kształtu kulistego, pagórki stożkowate, grzbiety i t. p.

Wyobraźmy sobie pochyły stożek, którego podstawa jest kołem, równoległem do płaszczyzny poziomu. Poprowadźmy kilka poziomych jednakowo odległych od siebie o h płaszczyzn, przecinających powierzchnię stożka. Przecięcia będą kołami, jak również ich rzuty na płaszczyznę poziomą P. Odległości między warstwicami w planie P są równe

$$de = h \operatorname{ctg} \alpha = cd = bc$$

*) Tę krzywą nazywamy również warstwicą.



Rys. 547.

jeżeli

$$\alpha > \beta$$

wówczas

$$ctg\ \alpha < ctg\ \beta$$

podobnie na poziomych prostych u góry rys.:

$$d'\,e' = h\ ctg\ \beta = d'\,c' = b'\,c'$$

i

$$d\,e < d'\,e',$$

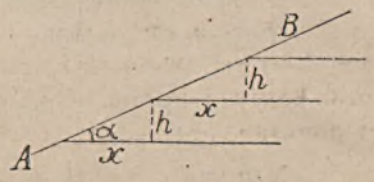
a więc na bardziej pochylonych prostych odległości między warstwicami są mniejsze, niż na małopochyłych prostych. Inaczej: ilość warstwic, przecinających na planie daną prostą, jest w prostym stosunku do stopnia pochylenia tej prostej w terenie.

W wypadku prostego stożka o poziomej podstawie rzuty przecięć powierzchni stożka poziomemi płaszczyznami będą koncentrycznemi kołami, w przeciwieństwie do stożka pochyłego.

Gdy mamy do czynienia z płaskim terenem (płaszczyzną), pochylonym do poziomu, wówczas same warstwice, jako linje przecięcia się danej płaszczyzny z poziomemi płaszczyznami, będą prostemi równoległemi i równoodległemi, gdyż (rys. 548):

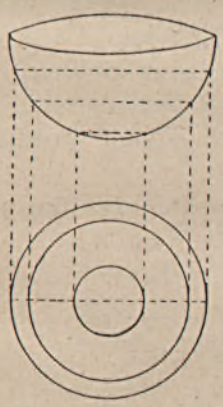
$$x = h\ ctg\ \alpha,$$

α i h zaś są stałemi dla danej płaszczyzny AB (rysunek daje przekrój danej płaszczyzny wzdłuż prostej największego spadu).

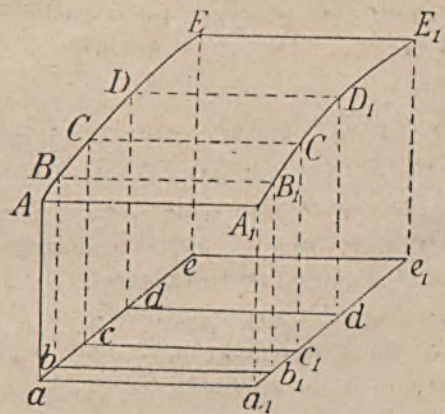


Rys. 548

Kotlina kształtu kulistego daje warstwice, których rzuty poziome są kołami współśrodkowemi, coraz mniej wzajemnie odległemi, w miarę



Rys. 549.



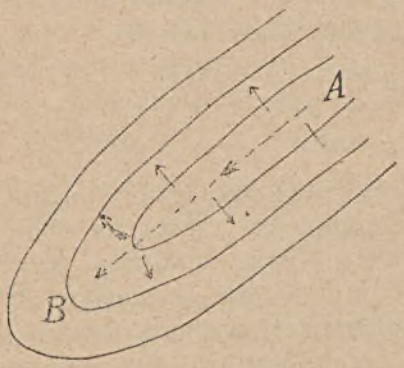
Rys. 550.

oddalania się od dna kotliny (rys. 549). Zupełnie analogicznie ułożą się rzuty warstwic w wypadku wzgórza półkulistego.

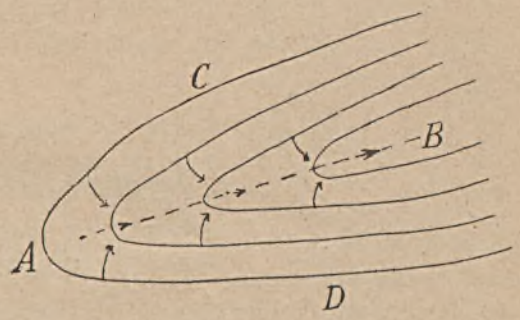
Jak stąd widzimy, trudno jest wnioskować w podobnych wypadkach o formie terenu z samych tylko warstwic.

Warstwice powierzchni walcowej $A\,E\,E_1\,A_1$ dadzą na planie proste aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, ee_1, których odległości zwiększają się w miarę zmniejszania się pochylenia powierzchni walcowej.

Wyobraźmy sobie, że prosta AB ma mały spad, spady zaś w kie-



Rys. 551.

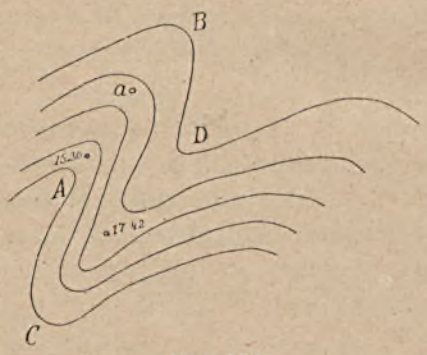


Rys. 552.

runku, prostopadłym do AB, w obydwie strony od AB (oznaczone krótkiemi strzałkami), są większe (rys. 551).

Rozpatrywany kształt terenu nazywamy grzbietem.

Odległości między warstwicami na zboczach będą mniejsze, niż w linji AB grzbietu, gdyż zbocza mają większe spadki. Jeżeli jednak wyobrazimy sobie formę terenu o wprost odwrotnym kierunku spadów (rys. 552): spady biegną od C i D ku AB, strzałka zaś AB wskazuje na AB kierunek spadu, wówczas warstwice wykreślone zostaną analogicznie do poprzedniego wypadku (grzbiet), jakkolwiek rozpatrywana forma terenu jest doliną. Bardzo często grzbiety przechodzą w doliny; linje AB i CD (rys. 553) dają połączenie grzbietu z doliną; z samych jednak warstwic trudno osądzić, czy AB jest doliną, czy grzbietem.



Rys. 553.

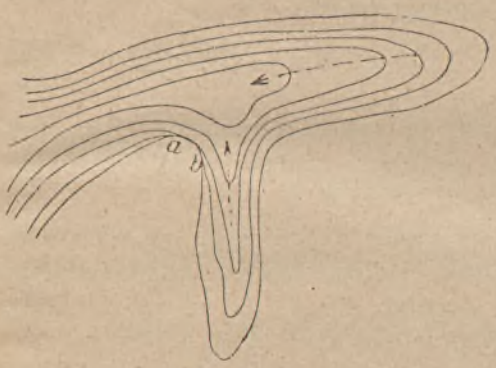
Trudności tej nie będzie, gdy podane są wysokości kilku punktów. Tak, np., punkty 15,30 i 17,42 wskazują, że punkt a na AB, jako leżący między temi samemi warstwicami, co 17,42, ma wysokość bliską 17,40; w linji BA kierunek spadu idzie wzdłuż BA; ponieważ zaś $17{,}42 > 15{,}30$, więc 17,42, leży na grzbiecie, 15,30 leży w dolinie. Spad DC pod względem kierunku odpowiada spadowi BA.

Strome wąwozy oznaczane są bardzo gęstemi na zboczach warstwicami, zlewającemi się w jedną na pionowych ścianach.

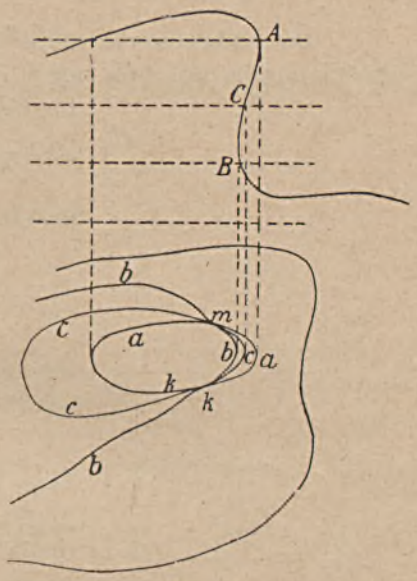
O ile styczność warstwic jest zjawiskiem niezbyt rzadkiem, o tyle przecięcie się warstwic jest zjawiskiem, odpowiadającem niezwykle rzadkiemu układowi falistości terenu nawet w górach. Zdarza się to w takich wypadkach, jak przedstawiony na rys. 555, gdzie AB jest ścianą wklęsłą,

przechodzącą na zboczach około m i k (w rzucie) na ścianę pionową, a dalej na normalne zbocza wzgórza. Warstwice więc punktów A, B i C będą się przecinać na rzucie pionowych ścianek k i m.

Do stosunkowo często napotykanych form (rys. 556) zaliczamy t. zw. siodło. Jest to forma, utworzona dwoma wzgórzami o zbiegających

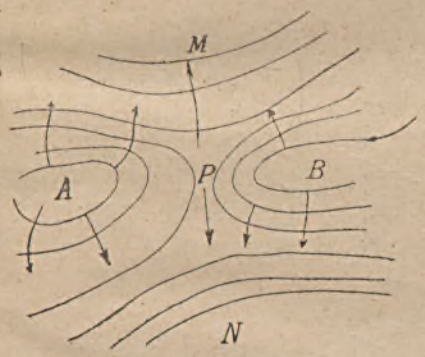


Rys. 554.

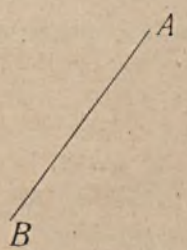


Rys. 555.

się podnóżach, od których teren obniża się w kierunkach prostopadłych do linij, łączących wspólne podnoże z wierzchołkami wzgórz. Rysunek daje:



Rys. 556.



Rys. 557.

wzgórza A i B, podnóże P; spady biegną w kierunku strzałek; zasadnicze spady odpowiadają kierunkom AP, BP, PM i PN.

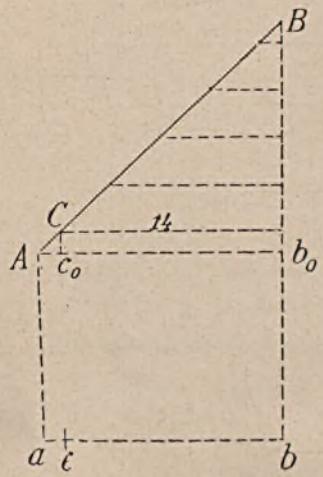
Linje dolinowe i grzbietowe nazywamy linjami szkieletowemi terenu; linje grzbietowe tworzą wododziały.

Linje dolinowe mają tę własność, że biegną doliną w kierunku największego spadu, a więc są prostopadłe do poziomych (warstwic) przecięcia się terenu z płaszczyznami poziomemi; linje grzbietowe są również

prostopadłe do warstwic. Dla właściwego uwydatnienia biegu warstwic należy więc odpowiednio ściśle określać w terenie i na planie kierunek i położenie linij szkieletowych. Linje szkieletowe oznaczamy na planie kreskowanemi linjami (rys. 554).

§ 259. Wykreślanie warstwic.

Do wykreślania warstwic przystępujemy po opisaniu na planie wysokości poszczególnych punktów. Określamy punkty przecięcia się warstwic na planie z odcinkami o stałych spadach, łączących punkty o znanych wysokościach.



Rys. 558.

Przypuśćmy, że ab jest rzutem poziomym prostej AB o stałym spadzie;

$$H_B = 18{,}20\ m,\ H_A = 13{,}50\ m,$$

Warstwice są wykreślane co np. 1 m, więc między danemi punktami przejdą warstwice o wysokości: 14, 15, 16, 17 i 18 m.

Określmy punkt c przecięcia się warstwicy 14-ej z ab. Punkt c jest rzutem odpowiedniego punktu C na prostej AB, $H_c = 14\ m$. Z podobieństwa $\triangle$-ów prostokątnych ACc_o i ABb_o mamy

$$Ac_o : Ab_o = Cc_o : Bb_o$$

a stąd

$$Ac_o = \frac{Ab_o}{Bb_o}\, Cc_o$$

ponieważ

$$Ab_o = d,$$

t. j. rzutowi poziomemu odcinka AB,

$$Bb_o = \triangle H = H_B - H_A$$

i $$Cc_o = \triangle h = H_C - H_A,$$

przeto

$$ac = Ac_o = x$$

będzie równe

$$x = \frac{d}{\triangle H}\, \triangle h$$

W danym wypadku

$$d = 40\ m$$

$$\triangle H = 4{,}7$$

$$\triangle h = 0{,}5$$

obliczymy, zaokrąglając:

$$x_{14} = \frac{40}{4,7}\ 0,5 = 8,5 \times 0,5 = 4,2$$

Odstępy y między kolejnemi warstwicami obliczymy, zakładając, że

$$\triangle h = 1\ m$$

$$y = 8,5 \times 1 = 8,5$$

Dla skontrolowania rachunku obliczymy położenie ostatniej (18-ej) warstwicy, przyjmując

$$\triangle h_{18} = 18 - 13,50 = 4,5$$

$$x_{18} = 8,5 \times 4,5 = 38$$

powinno zachodzić

$$x_{18} = x_{14} + (18 - 14)\ y$$

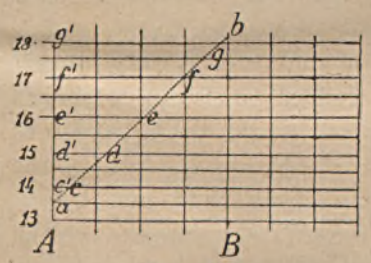
sprawdzamy:

$$38,2 = 4,2 + (4 \times 8,5)$$

Tak więc kolejne warstwice przetną ab w odległościach od a, równych

1) 4,2, 2) 4,2 + 8,5 = 13,7, 3) 13,7 + 8,5 = 22,2 i t. d.

Ze względu na zbyt wielkie przeciążenie obliczeniami tego typu, oraz najzupełniej wystarczającą dokładność graficznego określenia punktów przecięcia się warstwic z odcinkami o danych wysokościach końcowych punktów, stosujemy jedną z następujących metod postępowania.



Rys. 559.

Na papierze profilowym w stałym odstępie, oznaczamy kolejnemi metrami równoległe, np., 13, 14, ... 18, jeżeli podobne wielkości są podane dla wysokości punktów.

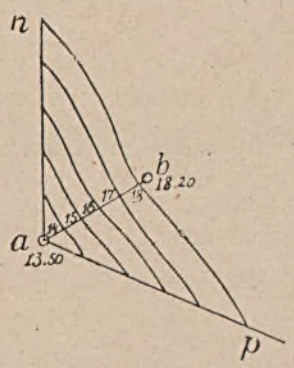
Od wyraźnej kreski pionowej A odcinamy odległość $A\,B$ w skali planu i na kresce 13,50 wyznaczymy nad A punkt a, nad B — punkt b na wysokości 18,20 (rys. 559).

Kreślimy ołówkiem prostą ab. Położenie punktów przecięcia się warstwic z prostą ab na planie wskazują odległości punktów $c\ d\ e\ f\ g$ przecięcia się numerowanych poziomych prostych na papierze profilowym z ab, mianowicie cc', dd', ee' i t. d. Odcinki te przeniesiemy na plan, odkładając je od a na ab, i końce tych odcinków opatrzymy w numery kolejnych warstwic 14, 15, 16, 17 i 18.

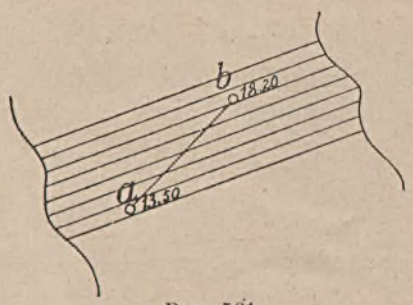
Jeżeli podobną interpolację wykonamy na odcinkach an i ap, wówczas, łącząc punkty o jednakowych numerach zaokrąglonemi odpowiednio krzywemi, otrzymamy na planie warstwice (rys. 560).

Zamiast papieru profilowego, używać możemy kalki z wykreśloną na niej harfą linij równoległych o stałym odstępie (rys. 561).

Tak przygotowaną kalkę obracamy dokoła prostej *ab*, do chwili, aż 1) pomiędzy *a* i *b* znajdzie się taka liczba równoległych, która jest równa liczbie przecinających *ab* warstwic i 2) skrajne punkty będą tak rozłożone między sąsiedniemi równoległemi, że wypadną na odległościach od nich,



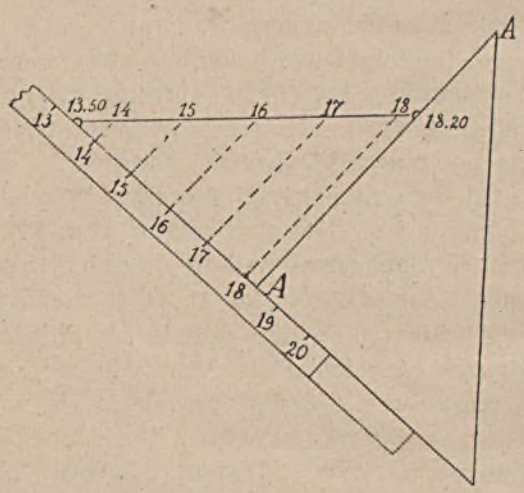
Rys. 560.



Rys. 561.

proporcjonalnych do różnic wysokości tych punktów i sąsiednich warstwic. W danym przykładzie między *a* i *b* leży pięć równoległych, przytem 13,50 leży dokładnie w środku między równoległemi, 18,20 zaś w odległości $\frac{1}{5}$ odstępu od piątej równoległej.

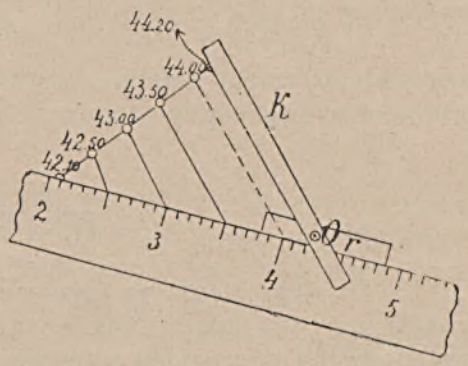
Po takiem ułożeniu kalki na planie, nakłuwamy punkty przecięcia się kalki z *ab* i po odsunięciu kalki wypisujemy na *ab* numery otrzymanych warstwic.



Rys. 562.

W inny jeszcze sposób możemy dość szybko oznaczyć na danym odcinku warstwice. Mianowicie: układamy linjał, podzielony na centymetry, przy punkcie 13,50 kreską 13,50 *cm.* i przysuwamy do linjału trójkąt przyprostokątną tak, aby kąt prosty znalazł się przy 18,20 *cm.* linjału. Następnie, utrzymując trójkąt stycznie do linjału, obracamy linjał dokoła 13,50 na planie, bacząc, aby przy tym punkcie stale znajdowała się kreska 13,50 linjału. W ten sposób obracamy linjał z △-em do chwili, gdy przyprostokątna *A A* zetknie się z punktem 18,20. Wówczas naciskamy linjał i wzdłuż jego krawędzi przesuwamy trójkąt krawędzią *A A* do podziałek: 18, 17, 16, 15 i 14 linjału, znacząc ołówkiem przy zetknięciu się z prostą 13,50 — 18,20. Otrzymane na tej prostej kreski, oznaczone ołówkiem, zaopatrzymy w kolejne numery warstwic, wypisane również ołówkiem.

Znaczne uproszczenie tego sposobu daje przyrząd inż. Sikorskiego, w którym trójkąt jest zastąpiony linjałem r z obracającem się dokoła o ramieniem k, które może być przy odpowiedniem pochyleniu sprzęgnięte z linjałem r, przesuwanym wzdłuż linjału, podzielonego na centymetry. Rysunek przedstawia interpolację warstwic pomiędzy punktami 42,10 i 44,20.

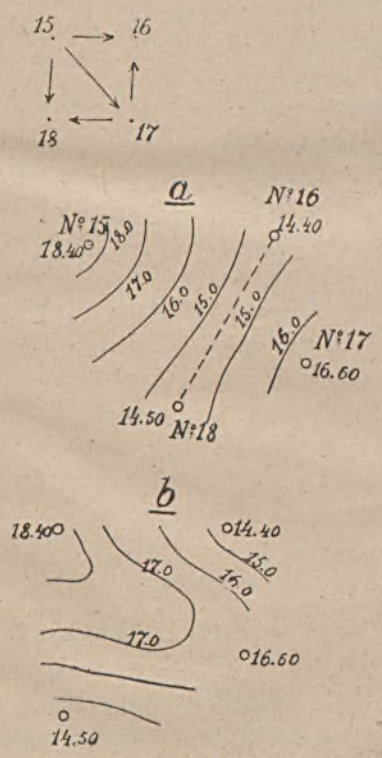


Rys. 563.

Przesunięcie r wzdłuż linjału o podziałce centymetrowej wyznaczy warstwice 42,50, 43,0, 43,50, 44,0 na danym odcinku.

Jednym z powyższych sposobów posługujemy się dla określenia położenia warstwic na poszczególnych odcinkach, łączących sąsiednie punkty o danych wysokościach na planie niwelacyjnym. Przy łączeniu warstwic należy posługiwać się szkicem polowym, gdyż inaczej możemy poprowadzić warstwice w niewłaściwy sposób; np. przypuśćmy, że nie wzięliśmy pod uwagę szkicu polowego, na którym oznaczono strzałkami spady między punktami 15, 16, 17 i 18 o obliczonych następnie wysokościach 18,40, 14,40, 16,60 i 14,50 (rys. 564).

Jeżeli więc, nie uwzględniając croguis, będziemy kreślić warstwicy na podstawie tylko planu, możemy przyspuszczać z pewnem prawdopodobieństwem, że przekątną o stałym spadzie jest Nr. 18 — Nr. 16, i wówczas otrzymamy warstwice a, gdyby zaś przyjąć pod uwagę szkic polowy, to otrzymalibyśmy zupełnie inny układ warstwic (patrz rys. b).



Rys. 564.

Przykład ten wyraźnie podkreśla znaczenie właściwego sporządzania croguis.

Gęstość warstwic powinna odpowiadać stopniowi nierówności terenu i skali planu. W mocno pofałdowanych terenach prowadzimy warstwice co 1 — 2 m., podczas gdy dla terenów więcej płaskich, wykreślanych w tej samej skali, wypadnie prowadzić warstwice co 0,5 m. a często i co 0,25 m. Gdy teren jest częściowo pofałdowany, częściowo płaski, wówczas linjami ciągłemi kreślimy warstwice co 1 m. lub 0,5 m, przerywanemi zaś w płaskiej części co 0,5 m. lub 0,25 m.

Do wykreślania warstwić używamy tuszu koloru bronzowego lub brunatnego. Na mapach topograficznych nie opisuje się, jak na planach, wysokości punktów rozproszo-

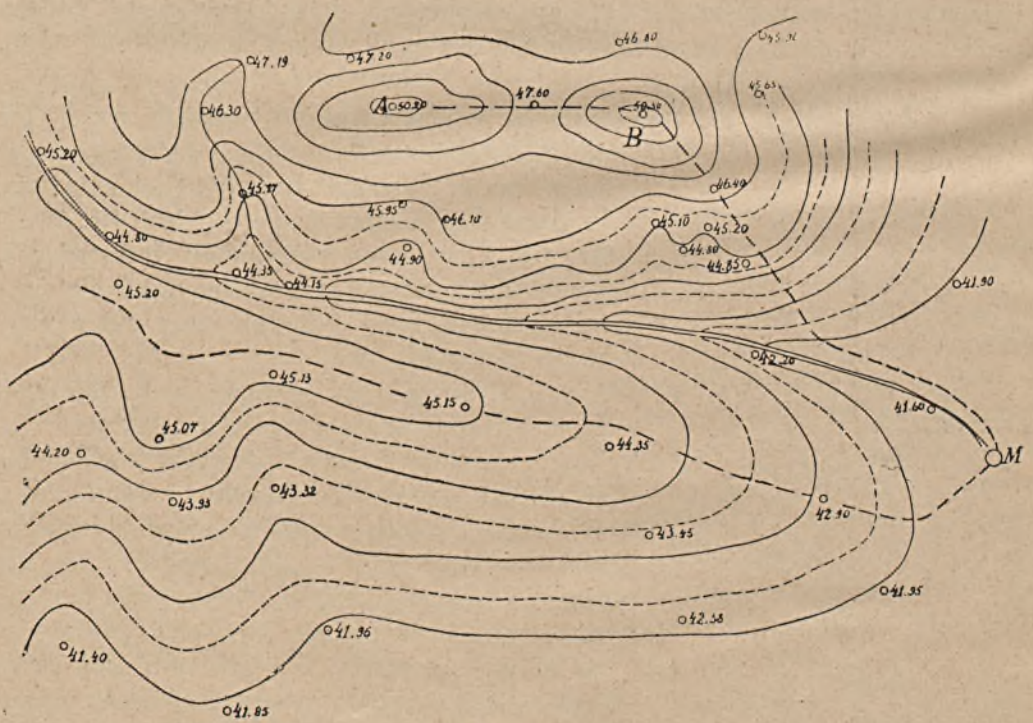
nych, wykreśla się te punkty na zdjęciach oryginalnych ołówkiem i na ich podstawie prowadzi się i wykreśla tuszem tylko warstwice. Z powodu drobnej skali warstwice wykreśla się rzadziej.

Na planach w dużej skali, np. $\frac{1}{2000}$, $\frac{1}{1000}$, w płaskich terenach, dla uwypuklenia rzeźby terenu warstwice otoczone są niekiedy obwódką z rozwodnionego bronzowego tuszu.

§ 260. Plan warstwicowy.

Po wykreśleniu na planie punktów niwelacyjnych, opisaniu czarnym tuszem ich wysokości i naszkicowaniu ołówkiem linij szkieletowych, przystępujemy do interpolacji warstwic pomiędzy punktami, leżącemi na odcinkach o stałych spadach, i łączymy określone dla poszczególnych warstwic punkty krzywemi o łagodnej krzywiźnie, w przejściach zaś przez linje szkieletowe — prostopadle do nich. Po wykreśleniu tuszem brunatnym warstwic 10 i 5-metrowych, kreślimy pozostałe tuszem bronzowym.

Załączony rysunek przedstawia plan warstwicowy.



Rys. 565.

Półmetrowe warstwice wykreślono na części planu kreskowanemi linjami.

Linja *ABM* i t. d. jest wododziałem na terenie rysunku. Biegnie ona wzdłuż grzbietów, przechodzi przez siodło *AB*. Wpobliżu *M* w braku warstwic, linję wododziału poprowadzono w przybliżeniu.

§ 261. Skala pochyłości.

Gdy dany jest rzut d prostej AB i różnica wysokości h punktów A i B, wówczas kąt pochylenia α określimy ze wzoru (rys. 566a):

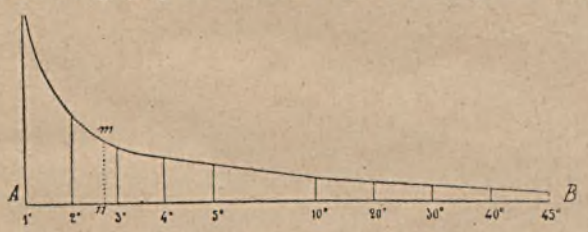
$$ctg\,\alpha = \frac{d}{h}$$

Zakładając kolejno $\alpha = 1^0, 2^0$.. i t. d., obliczymy dla założonego h odpowiednie d. Zwykle jako h obieramy tę wielkość, która została przyjęta za odstęp wysokościowy między warstwicami, a więc 1 m, 2 m i t. p. Tak, np., dla $h = 1$ m otrzymujemy tabelkę pochyłości:

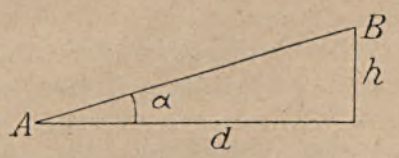
α	d mtr
1^0	57.3
2^0	28.7
3^0	19.1
4^0	14.3
5^0	11.5
7^0	8.1
10^0	5.7
15^0	3.8
20^0	2.8
25^0	2.2
35^0	1.5
45^0	1.0

Jeżeli więc mamy na planie warstwice, poprowadzone co 1 m, to, mając dwa punkty na sąsiednich, różniących się o 1 m warstwicach, łatwo określimy kąt pochylenia prostej, łączącej dane dwa punkty, skoro określimy cyrklem w podziałce planu odległość między temi punktami (np., 10,0) i odnajdziemy w kolumnie d te liczby, między któremi leży otrzymana długość. Oczywiście, kąt pochylenia badanej prostej leży między kątami α, odpowiadającemi tym liczbom: np., 10,0 m, odpowiadają liczby kolumny d: 11,5 i 8,1, więc i kąt pochylenia naszego odcinka zawarty jest między 5^0 i 7^0 i z dokładnością do $^1/_2{}^0$ możemy go przyrównać do 6^0.

Tablicę pochyłości zastępuje odpowiedni wykres. Aby go zbudować, należy na dowolnej prostej odłożyć szereg równych odcinków, wystawić z ich końców prostopadłe do danej prostej i odciąć na nich kolejno wzięte z tabelki wielkości d w skali planu, łącząc ich końce krzywą i opisując je przy danej prostej odpowiedniemi kątami pochylenia. Gdy, mając ten wykres, określić chcemy kąt pochylenia odcinka, łączącego dwa punkty, na sąsiednich warstwicach położone, wówczas, biorąc w cyrkiel ten odcinek, przesuwamy go wzdłuż wykresu równolegle do rzędnych do chwili, gdy jedno ostrze cyrkla znajdzie się na krzywej wykresu, drugie



Rys. 566.



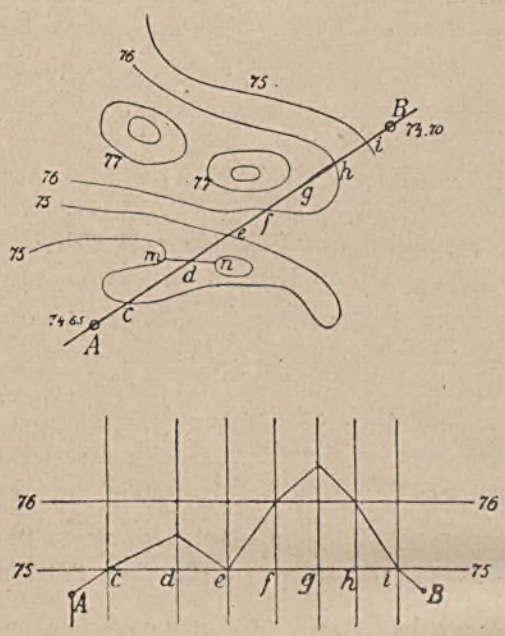
Rys. 566a.

zaś leżeć będzie na AB. Jeżeli zajdzie to, np., w położeniu $m\,n$, to kąt pochylenia danego odcinka wyniesie $2\,^3/_4{}^0$ (rys. 566).

§ 262. Wykreślanie profilu na podstawie planu warstwicowego.

Przypuśćmy, że mamy wykreślić profil terenu wzdłuż prostej AB na podstawie planu warstwicowego.

Wykreślamy prostą 75-75 (lepiej na papierze profilowym) i od rzutu punktu A odkładamy odcinki Ac, ce, ef, fh i hi, wzięte z planu warstwicowego.



Rys. 567.

W otrzymanych punktach budujemy rzędne, na których odłożymy wysokości c, e, f, h, A i B, zmniejszone o 75.

Ponieważ jednak prosta AB między punktami c i e oraz f i h ma punkty o różnej wysokości, przeto obieramy na niej jeszcze punkt d, którego wysokością jest 75,5 (leży w środku odcinka mn, łączącego warstwice 75 i 76), i punkt g, za wysokość którego przyjmujemy 76,7.

Łącząc odpowiednie punkty rzędnych, otrzymujemy profil AB

Przy wykreślaniu takiego profilu należy korzystać z punktów na planie, mających podaną wysokość, jeżeli leżą na AB lub w najbliższem sąsiedztwie.

Projektowanie linji określonego spadu na planie warstwicowym.

Zagadnienie to ma zastosowanie przy przedwstępnem projektowaniu dróg, rowów i t. p. W tych wypadkach zawsze jest dany pewien spad graniczny p, którego nie wolno przekraczać; dla dróg spad ten może być dodatni lub ujemny, co znaczy, że wolno projektować odcinki drogi o spadach, zawartych między $+ p$ i $- p$, dla rowów zaś i t. p. spad ten ma w kierunku odpływu znak —, przyczem wartość jego zawierać się może między dwiema skrajnemi wartościami — największą i najmniejszą, pierwszą — uzależnioną od trwałości dna, drugą — gwarantującą odpływ wody. Tak, np., mamy następujące normy: dla rowów odwadniających od 0,0002 do 0,001, dla sączków drenarskich od 0,003 do 0,09, dla zbieraczów o średnicy 10 *cm.*: od 0,0006 do 0,029, dla zbieraczów o średnicy 20 *cm.*: od 0,00034 do 0,01.

Szczegółowe dane patrz: „Nauka meljoracji" prof. Cz. Skotnickiego.

Inne graniczne spady wynoszą:

tramwajowe . . . . . — do 0,1,
kolejki robocze i elektryczne . . . — do 0,07,
koleje górskie pierwszorzędne . . . — do 0,025,
koleje pierwszorzędne na równinach . — do 0,005.

W celu poprowadzenia danej linji określonego spadu, wychodzącej z danego na planie warstwicowym punktu, spad, dany w postaci ułamka, wyrażamy jako kąt pochylenia i stosujemy skalę pochyłości, lub też wobec

$$p = tg\ \alpha = \frac{h}{d} = \frac{1}{\frac{d}{h}}$$

zamieniając dany spad procentowy na ułamek o liczniku, równym jedności, otrzymujemy

$$p = \frac{1}{n} = \frac{1}{\frac{d}{h}},$$

a stąd

$$\frac{d}{h} = n$$

i $d = hn$. Mając więc odstęp h wysokościowy między warstwicami, równy, np., 2 m, obliczamy długość tego odcinka d, łączącego dwa punkty, na sąsiednich warstwicach położone, którego spad równy jest $\frac{1}{n}$.

Oczywiście odcinki, łączące dwie sąsiednie warstwice, dłuższe od określonego d, mieć będą spady, mniejsze od $\frac{1}{n}$ i odwrotnie; tak więc przy prowizorycznem projektowaniu drogi odcinki dłuższe od d między warstwicami odpowadają warunkom projektu, któtsze — są niedopuszczalne.

Tak przy

$$h = 2\ m$$

i

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{15}$$

obliczymy

$$d = hn = 30\ m.$$

Gdy więc dana linja ma być poprowadzona przez punkt A, bierzemy w cyrkiel 30 m w skali planu i odcinamy $AB = 30\ m$ (rys. 568).

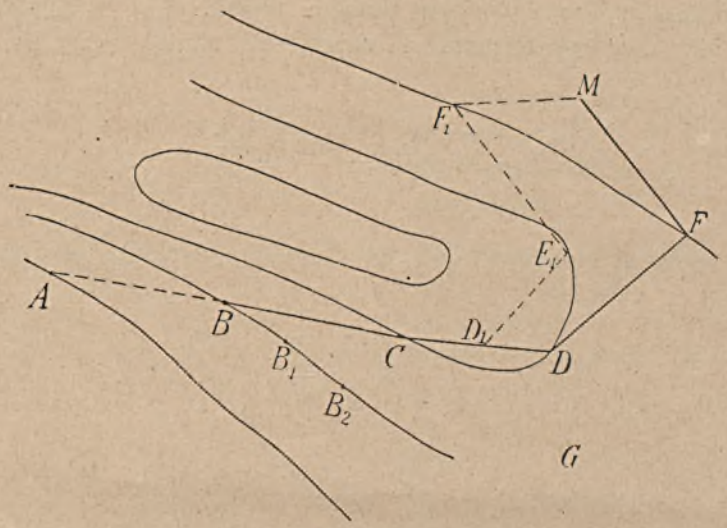
Kierunki AB_1 AB_2 i t. d. dają zatem spady mniejsze.

Podobnie określamy następny odcinek BC, przyczem trzymamy się linji ABC granicznego spadu w wypadku, gdy skraca to odległość do następnego punktu M linji projektu. Gdyby kierunkiem dalszym był kierunek do G, wówczas zamiast B obralibyśmy, np, punkt B_1 jako leżący na kierunku AG i mający spad, mniejszy od granicznego.

Powodując się względami tego rodzaju, prowadzimy linję odcinkami

ABCDFM, starając się odcinki między sąsiedniemi warstwicami brać większe niż *d*. Ze wszelkich możliwych warjantów należy wybierać takie, przy których linja *AM* będzie najkrótsza i będzie mieć możliwie mało załamań. z tego, np., względu warjant D_1 E_1 F_1 M jest gorszy, niż D_1 D F M.

Droga, projektowana na podstawie linji stałego spadku, zawsze bę-



Rys. 568.

dzie od tej linji krótsza, ze względu na fakt, że łuk, łączący ramiona kąta, jest krótszy od sumy stycznych.

Wkreślanie łuków nie jest trudne, gdy będziemy się posiłkować kalką z nakreślonemi koncentrycznemi kołami (o używanych przy projektowaniu drogi promieniach), wykreślonemi w skali planu warstwicowego.

§ 263. Określenie wododziałów.

Przypuśćmy, że na planie (rys. Nr. 565) określić mamy granicę, obejmującą teren, z którego woda spływa przez p. *M*.

W tym celu punkt *M* najkrótszemi odcinkami łączymy z najbliższemi grzbietami, które są właśnie linjami wododziałów. Do utworzonego basenu włączamy wszystkie doliny o wodach, spływających przez p. *M*, oraz tereny, po których woda spływa do tych wododziałów, aż do takich grzbietów, od których woda ma zupełnie inne odpływy lub też spływa do doliny punktu *M*, poniżej tego punktu. Fragmentem takiej linji jest *A B M* i t. d.

§ 264. Przecięcie się projektowanej płaszczyzny z terenem.

Przy robotach ziemnych zachodzi niekiedy potrzeba wyznaczenia w terenie płaszczyzny danej albo przez punkt, kierunek największego spadu i jego wielkość, czy też przez trzy punkty.

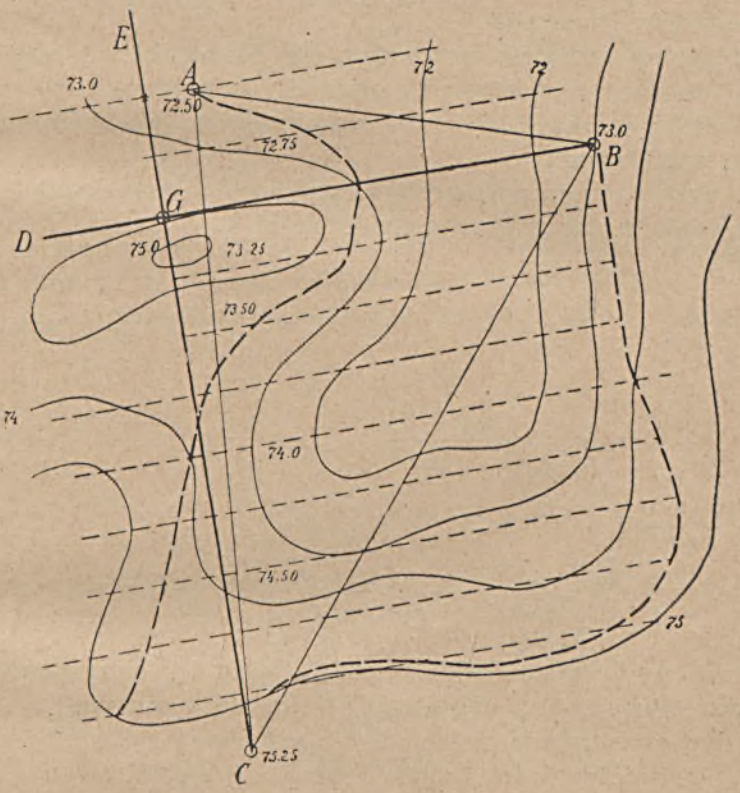
Dla obliczenia ilości robót ziemnych należy określić na planie t. zw.

linję zerową robót ziemnych, t. j. linję przecięcia się projektowanej płaszczyzny z terenem.

Przypuśćmy, że projektowana płaszczyzna ma przejść przez dane trzy punkty A B i C o danych wysokościach.

Ponieważ linje, prostopadłe do kierunku największego spadu na płaszczyźnie, są poziome, przeto odnajdziemy prostą poziomą XX w danej płaszczyźnie, 2) wykreślimy do tej prostej $\perp$-ą yy, na której 3) określimy wysokość kilku punktów, i 4) wykreślimy przez nie, prostopadle do yy, proste poziome o znanych wysokościach.

Odnajdując przecięcia się tych prostych z terenem, połączymy otrzymane punkty krzywą, co będzie rozwiązaniem.



Rys. 569.

Ponieważ $h_A = 72{,}50$; $h_B = 73{,}00$; $h_C = 75{,}25$, przeto najszybciej określimy poziomą prostą, przechodzącą przez B, gdyż wystarczy na boku AC odnaleźć punkt o wysokości h_B, odległy od A o odcinek:

$$x = \frac{h_B - h_a}{h_c - h_a} AC = \frac{0{,}5}{2{,}75} AC = \frac{1}{5{,}5} AC$$

Punkt taki leży na AC w przecięciu się z BD.

Prosta BD jest pozioma. Kreślimy linję największego spadu $CGE \perp BD$.

Dzieląc odcinek CG na 9 równych części, otrzymujemy punkty, różniące się co do swej wysokości od sąsiednich o 25 *cm.* $\left(\frac{75{,}25 - 73}{9} = 0{,}25\right)$.

Proste, poprowadzone przez te punkty $\parallel$-e do BD, mają wysokości, równe wysokościom ich punktów na CG.

Odnajdujemy na tych prostych punkty terenu o wspólnej z niemi wysokości. Łącząc kolejno takie punkty, otrzymujemy krzywą przecięcia się.

§ 265. Obliczanie mas.

Przy robotach ziemnych dla zestawienia kosztorysu należy obliczyć objętości wykopów i nasypów.

Przybliżony rachunek sprowadza się do określenia objętości mas, jako graniastosłupów o podstawach, równych średnim arytmetycznym powierzchni sąsiednich przekrojów, i o wysokościach, równych odległościom między temi przekrojami.

Gdy powierzchnie poprzecznych przekrojów oznaczymy literami p_0 $p_1 \ldots p_n$, odległości zaś między niemi literami l_1 l_2 $l_3 \ldots l_n$, wówczas objętością będzie

$$W = \frac{p_0 + p_1}{2} l_1 + \frac{p_1 + p_2}{2} l_2 + \ldots + \frac{p_{n-1} + p_n}{l_n} = \frac{p_0}{2} l_1 + p_1 \frac{l_1 + l_2}{2} +$$

$$+ p_2 \frac{l_2 + l_3}{2} + \ldots + \frac{p_n}{2} l_n$$

zaś przy $l_1 = l_2 = \ldots = l_n = l$

$$W = l \left(\frac{p_0}{2} + p_1 + p_2 + \ldots + \frac{p_n}{2} \right)$$

Wzory te nie są dokładne i zwykle, przy ściślejszym rachunku, stosujemy inne. Pola p_0 p_1 ... obliczamy planimetrem, lub graficznie, jako różnice pomiędzy przekrojami terenu a projektowanym przekrojem, t. j. jako pole figury, ograniczonej przekrojami terenu i projektu.

Dla ułatwienia rachunku profile poprzeczne mają tę samą skalę dla wysokości, jak i długości.

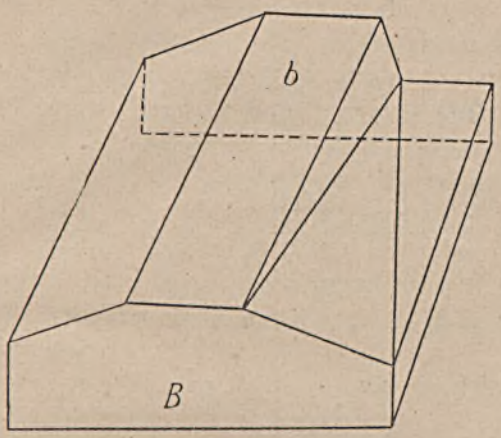
Wzór Simpsona.

Bryłę, utworzoną dwoma poprzecznemi przekrojami, których załamania są wzajemnie połączone, nazywamy pryzmatoidą.

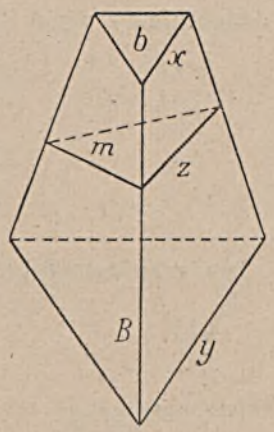
Bryła taka daje się podzielić na graniastosłupy o objętości, ustalanej ze wzoru $v = Bh$, ostrosłupy o objętości $v = \frac{1}{3} Bh$ i ostrosłupy ścięte o objętości

$$v = (B + b + \sqrt{Bb}) \frac{h}{3}$$

Rozpatrzmy ścięty ostrosłup; przekroje jego, równoległe do podstawy, są do niej podobne, a więc mają boki, proporcjonalne do drugich pierwiastków z powierzchni przekrojów.



Rys. 570.



Rys. 571.

Oznaczając powierzchnię podstaw i średniego przekroju ściętego ostrosłupa literami B, b i m, spółczynnik zaś proporcjonalności literą k, oraz boki odpowiednie literami x, y i z, otrzymujemy:

$$x = k\sqrt{b}$$

$$z = k\sqrt{m}$$

$$y = k\sqrt{B}$$

ponieważ zaś z jest, jako bok średniego przekroju, prostą, łączącą nierównoległe boki ściany bocznej, będącej trapezem, przeto:

$$z = \frac{1}{2}(x+y)$$

a stąd

$$k\sqrt{m} = \frac{1}{2}k(\sqrt{B} + \sqrt{b})$$

i

$$\sqrt{m} = \frac{1}{2}(\sqrt{B} + \sqrt{b})$$

Powierzchnią więc średniego przekroju będzie:

$$m = \frac{1}{4}(B + b + 2\sqrt{Bb})$$

a stąd

$$\sqrt{Bb} = \frac{4m - B - b}{2} = 2m - \frac{B+b}{2};$$

Zatem objętość ściętego ostrosłupa będzie równa

$$v = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{Bb})$$

skąd otrzymujemy wzór Simpsona

$$v = \frac{h}{3}\left(2m + \frac{B + b}{2}\right),$$

$$v = \frac{h}{6}(B + b + 4m)$$

Dla graniastosłupa:

$$B = b = m$$

i $V = Bh$

Dla ostrosłupa

$$b = o$$

$$m = \frac{B}{4}$$

$$V = B\frac{h}{3}$$

Oznaczmy kolejne trzy przekroje mas literami p_1 p_2 i p_3; oznaczając odległości między przekrojami literą d, otrzymamy objętość masy, zawartej między przekrojami p_1 i p_3, równą:

$$V_1 = \frac{2d}{6}(p_1 + p_3 + 4p_2) = \frac{d}{3}(p_1 + p_3 + 4p_2),$$

następne zaś dwa przekroje dają masę:

$$V_2 = \frac{d}{3}(p_3 + p_5 + 4p_4)$$

i dalsze dwa:

$$V_3 = \frac{d}{3}(p_5 + p_7 + 4p_6)$$

— — — — — — —

Stąd dla masy o n przekrojach, w równych odległościach położonych, otrzymujemy:

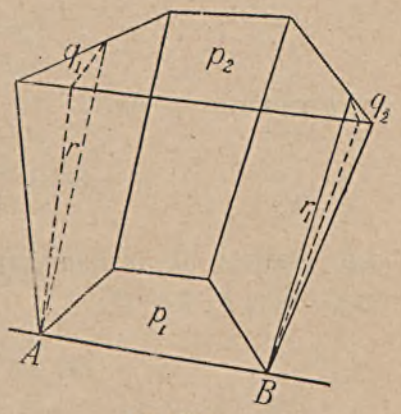
$$V = [V] = \frac{d}{3}(p_1 + 4p_2 + 2p_3 + 4p_4 + 2p_5 + ...)$$

Wzór ten przy stosowaniu daje błędy w miejscach silniejszych wygięć wysokościowych trasy.

Wzór Winklera.

Jeżeli przez punkty A i B jednego przekroju poprowadzimy pionowe płaszczyzny r i r_1, równoległe do trasy, to masa bryły zostanie podzielona na trzy części, z których dwie skrajne będą zbliżone do ostrosłupów, środkowa zaś do pryzmatoidy.

Oznaczmy powierzchnie przekrojów literami p_1 i p_2, podstawy odciętych przez płaszczyzny r i r_1 ostrosłupów literami q_1 i q_2, wówczas: objętość pryzmatoidy, zawartej między płaszczyznami r i r_1, będzie równa V, co, przy oznaczeniu literą d odległości między przekrojami, wyniesie w przybliżeniu:



Rys. 572.

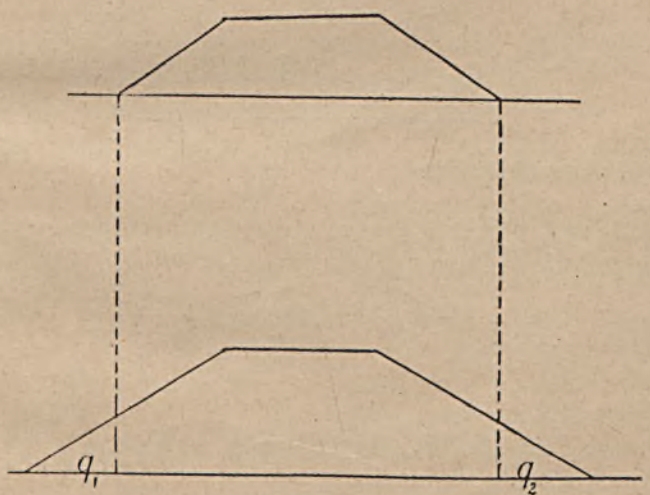
$$v_1 = \frac{p_1 + p_2 - (q_1 + q_2)}{2} d$$

suma zaś objętości obydwu ostrosłupów wyniesie:

$$v_2 + v_3 = (q_1 + q_2) \frac{d}{3}$$

skąd objętość całej bryły będzie równa:

$$W = v_1 + v_2 + v_3 = \frac{p_1 + p_2 - (q_1 + q_2)}{2} d + (q_1 + q_2) \frac{d}{3}$$



Rys. 573.

a stąd

$$W = d \left(\frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{q_1 + q_2}{6} \right)$$

jest to wzór Winklera.

Dla określenia powierzchni q_1 i q_2 należy profile kreślić w taki sposób, by oś trasa leżała na jednym pionie.

Jeżeli wzór Simpsona ($h = d$)

$$W = \frac{d}{6}\,(B + b + 4m)$$

przepiszemy w postaci:

$$W = \left\{\frac{2}{3}\,m + \frac{1}{6}\,(B + b)\right] d$$

oraz zamiast B, b i m wprowadzimy oznaczenia skrajnych i środkowego przekrojów p_1 p_2 i p

$$W = \frac{2}{3}\,pd + \frac{d}{6}\,(p_1 + p_2)$$

i odejmiemy $\frac{1}{3}\,W$ ze wzoru Winklera, t. j.

$$\frac{1}{3}\,W = \frac{d}{3}\,\frac{p_1 + p_2}{2} - \frac{d}{3}\,\frac{q_1 + q_2}{6}$$

wówczas otrzymamy:

$$\frac{2}{3}\,W = \frac{2}{3}\,pd + \frac{d}{3}\left(\frac{q_1 + q_2}{6}\right)$$

skąd

$$\underline{W = pd + \frac{q_1 + q_2}{12}\,d}$$

Jest to wzór Murzego.

Jak widzimy, objętość masy w obydwu wzorach wyraża się iloczynem pd powierzchni średniego przekroju przez odległość między przekrojami, zmienioną o poprawkę $-\frac{q_1 + q_2}{6}$ u Winklera i $\frac{q_1 + q_2}{12}$ u Murzego.

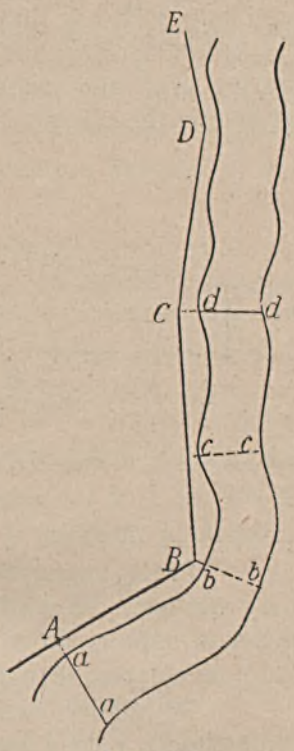
§ 266. Niwelacja rzeki.

Niwelacja rzek ma na celu określenie spadu i przekrojów rzeki łącznie ze sporządzeniem jej planu (rys. 574).

Wzdłuż rzeki zakładamy poligon *ABCDE*, mierzymy boki i kąty, oraz zapomocą dalekomierza i odczytów z koła poziomego teodolitu, ustawionego nad wierzchołkami poligonu, zbieramy punkty, leżące na załamaniach obydwu brzegów. Poza tem określamy położenie par punktów, leżą-

cych w linji danego przekroju rzeki np. *aa*. Punkty te mogą leżeć na jednym lub obydwu brzegach rzeki; ponieważ ich położenie ściśle jest określone w stosunku do poligonu, przeto, po wykreśleniu poligonu, dadzą się i te punkty wykreślić.

Na brzegu rzeki zakładamy cały szereg reperów (co 500 lub 1000), oraz wbijamy pale w dno rzeki tuż przy brzegu w punktach, przez które przejdą przekroje koryta. Pale te winny wystawać ponad poziom wody o 20 — 30 *cm*. Nawiązując wierzchołki tych pali niwelacją do reperów, uzyskujemy, po zniwelowaniu reperów i obliczeniu ich wysokości — wysokości wierzchołków wbitych w rzekę pali.



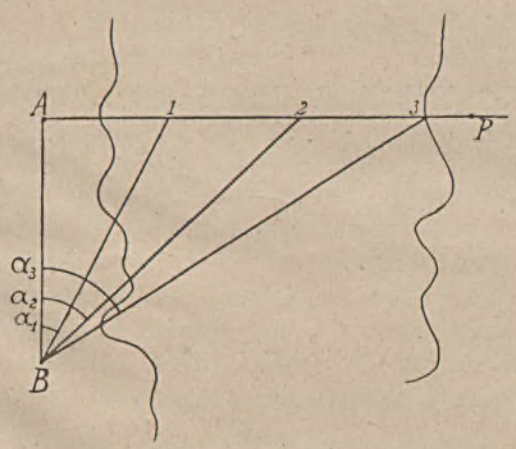
Rys. 574.

Jeżeli teraz posuwać się będziemy od 1-ego pala wdół rzeki z szybkością, równą szybkości prądu, i mierzyć będziemy podziałką wzniesienie wierzchołków pali nad wodą, wówczas, odejmując uzyskane na każdym palu wielkości od wysokości wierzchołków pali, otrzymamy przy każdym palu obliczoną wysokość poziomu wody. Ponieważ zaś odległość między temi palami jest znana, przeto na poszczególnych odcinkach między dwoma palami, przy których wysokości poziomu wody ustaliliśmy na H_1 i H_2, odległość zaś na d, wielkość spadu obliczymy ze wzoru

$$p = \frac{H_2 - H_1}{d}.$$

Do dokładniejszych wyników dojdziemy, gdy określanie wysokości pali nad wodą powtórzymy w powyższy sposób kilkakrotnie.

Można też przymocowywać do pali pomocnicze łaty i notować codziennie odczyty, odpowiadające poziomowi wody; różnice między średniemi tych odczytów a odczytami, odpowiadającemi wierzchołkom pali, dadzą dokładniejsze wyniki dla określenia wzniesienia wierzchołków pali nad wodą.

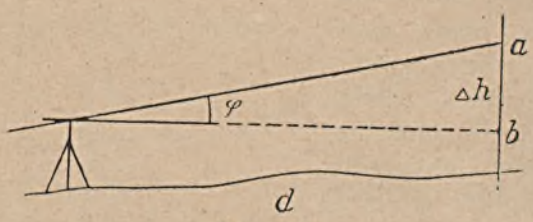


Rys. 575.

Porzeczne przekroje koryta najłatwiej wykonać na zamarzniętej rzece, wyrąbując w kierunku przekroju co kilka metrów przeręble i mierząc głębokości rzeki.

Na węższych rzeczkach posuwamy się wzdłuż przekroju na łódce, mierząc łatą głębokość co pewien stały odstęp, oznaczony na wyciągniętym nad rzeką sznurze węzłami lub zwisającemi skrawkami, umieszczonemi w stałej od siebie odległości.

Na (rys. 575) szerokich rzekach, na każdym brzegu w linji przekroju ustawiamy po dwie tyczki, abyśmy, płynąc łódką wzdłuż przekroju, zanurzali łatę ściśle w linji. Prostopadle do linji przekroju w odległości BA, równej kilkudziesięciu metrom od tyczki A, na brzegu ustawiony jest teodolit; stojący przy nim technik w chwili każdorazowego zanurzenia łaty kieruje oś celową lunety na łatę i notuje odczyt z koła poziomego. Mając zaś odczyt, odpowiadający kierunkowi na A, tworząc odpowiednie różnice, uzyskamy kąty α_1 α_2 α_3.



Rys. 576.

Nanosząc graficznie na plan przy BA kierunki $B1$, $B2$, $B3$, w przecięciu się AP uzyskamy punkty 1, 2, 3, a więc i odległości $A1$, $A2$, $A3$.

Gdy mamy do użycia większą, a więc i stateczniejszą łódź, wystarczy określać odległości z punktów A i P do 1, 2 i 3 zapomocą dalekomierza teodolitu lub niwelatora i łaty, ustawianej na łodzi w miejscu zanurzenia.

Pracę kończymy odczytaniem wysokości wierzchołka pala nad wodą przy brzegu. Na profilu od poziomej prostej, dającej lustro wody, głębokości w odpowiednich odległościach od brzegu określamy wdół i, łącząc kolejno otrzymane punkty, uzyskujemy przekrój koryta.

Wysokość poziomu wody opiszemy, jako różnicę między wysokością wierzchołka pala a jego odległością od wody, mierzoną wzdłuż pala.

§ 267. Ortometryczne wysokości *).

Jak wiemy, niwelacja ze środka nie wymaga wprowadzania poprawek na krzywiznę ziemi dopóty, dopóki powierzchnie, prostopadłe do kierunku pionu (a więc przechodzące przez oś ustawionej poziomo w danym punkcie libeli), we wszystkich punktach powierzchni ziemi można uważać za równoległe.

W rzeczywistości powierzchnie poziomowe nie są równoległe.

Wskutek tego, dwa punkty, położone na tej samej poziomowej powierzchni, mają różną wysokość, liczoną od poziomu morza, gdyż przedłużona pod lądami powierzchnia mórz i oceanów nie jest równoległa do poziomowej powierzchni dwu danych punktów. Gdyby takie punkty związać niwelacją ciągu, biegnącego na poziomowej powierzchni, przechodzącej przez te punkty, wówczas (nie biorąc pod uwagę błędów niwelacji) otrzymalibyśmy jako różnicę wysokości tych punktów wielkość *zero*, jakkolwiek te punkty mogą się znajdować na różnej wysokości nad poziomem morza. Fakt, iż z takiej niwelacji otrzymana zostałaby różnica wysokości, równa zeru, tłumaczy się tem, że na wszystkich stanowiskach niwelatora oś spoziomowanej libeli byłaby styczną do powierzchni poziomowej, a więc

*) W niwelacji geometrycznej prof. Warchałowskiego znajdzie czytelnik szczegółowe rozwinięcie § 267 i § 268.

wpływ krzywizny na odczyty wprzód i wstecz byłby jednakowy, a zatem byłby wyrugowany z wyników.

Możemy wyobrazić sobie inny wypadek: dwa punkty leżą na jednakowej wysokości (liczonej wzdłuż ich pionów) nad przedłużoną pod lądami powierzchnią mórz i oceanów, niwelacja zaś, przypuśćmy dla uproszczenia, biegnie na pewnej powierzchni A, równoległej do powierzchni oceanów.

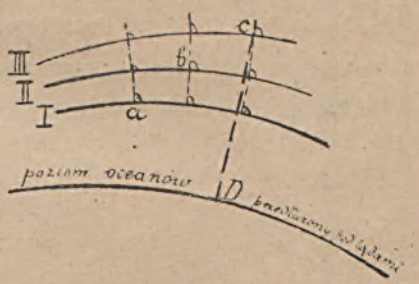
Oczywiście, powierzchnię A przecinają powierzchnie poziomowe poszczególnych punktów, położonych na A (rys. 577).

Ponieważ oś spoziomowanej libeli jest styczną do powierzchni poziomowej pp danego stanowiska niwelatora, przeto tem samem przecina powierzchnię A, zmieniając odczyty na obydwu łatach o wielkość x z różnemi znakami; w konsekwencji do różnicy odczytów wejdzie wielkość $2x$.

Gdy niwelator posuwa się po różnych powierzchniach poziomowych I, II, III, wówczas, wobec nierównoległości tych powierzchni, kierunki pionów punktów a, b, c i ich rzutów na pozostałe powierzchnie poziomowe



Rys. 577.



Rys. 577 a.

ułożą się wzdłuż pewnych krzywych; ponieważ zaś oś libeli układa się ⊥-e do pionu, więc, np., w punktach leżących na I i III pod i nad b, oś libeli utworzy na rysunku trzy nierównoległe położenia 577 a.

Ażeby ustalić należycie określenie różnicy wysokości, w niwelacji precyzyjnej używamy zwrotu: „wysokość ortometryczna punktu“; przez ortometryczną wysokość punktu c rozumiemy długość $c\,D$ normali poprowadzonej przez punkt c, do przedłużonej pod lądami powierzchni mórz i oceanów.

Wyniki niwelacyj podstawowych należy zmieniać o t. zw. poprawkę ortometryczną. Tak np., do otrzymanej różnicy h wysokości dwu punktów A i B o szerokościach geograficznych φ_A i φ_B wprowadzamy poprawkę ortometryczną ε_A^B, równą:

$$\varepsilon_A^B = -2k\int_{\varphi_A}^{\varphi_B} h \sin 2\varphi \, d\varphi.$$

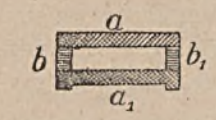
W długich zamkniętych ciągach niwelacyjnych odchyłka w niwelacji równa się otrzymanej różnicy wysokości więcej poprawka ortometryczna. Wielkość $k = 0{,}0026$; wielkość poprawki ortometrycznej sięga kilku cm w długich ciągach niwelacyj państwowych.

§ 268. Niwelacja precyzyjna.

Przy niwelacjach podstawowych, wykonywanych w celu uzyskania całej sieci reperów, których wysokości mają być określone z najwyższą możliwą dokładnością, wszędzie stosuje się niwelacja ze środka.

Niwelatory, używane przy niwelacji ścisłej, posiadają libele o przewadze od 3″ — do 6″, lunety o powiększeniu do 40.

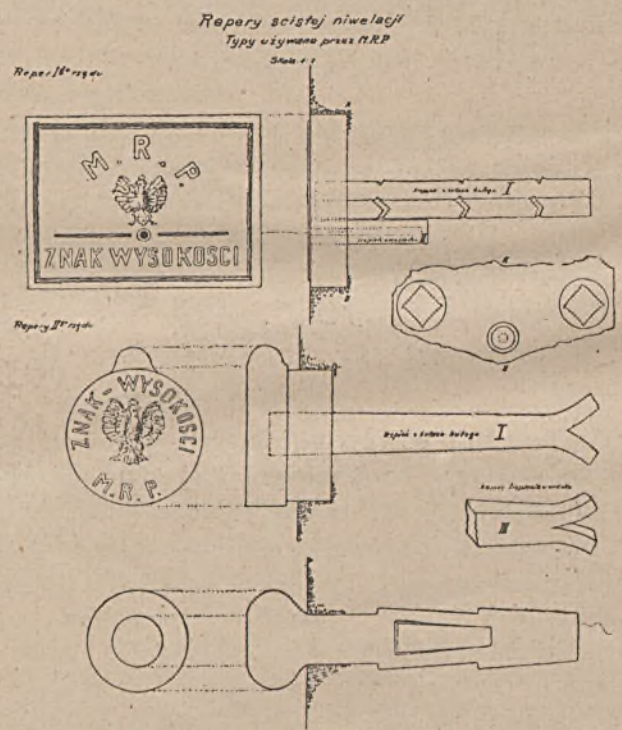
Libele są albo stale połączone z lunetą, albo też, jak np. we Francji, przestawiane na pierścieniach lunety, tworzą oddzielany od lunety przyrząd.



Łaty, stosowane w niwelacji precyzyjnej, są wykonane z dobrego materjału sosnowego, klonowego lub t. p., odpowiednio obrobionego i przygotowanego. Kreski na łatach są nanoszone maszyną podziałową. Niemieckie łaty (przekrój rys. 577 b) składają się z dwu



Rys. 577 b.



Rys. 577c.

łat olszowych a_1 a, połączonych jodłowemi listwami b b. Podział jest naniesiony na łacie a_1. Kreski grubości 1 *mm* co naniesione są 5 *mm*, przytem dziesiąte kreski są najdłuższe, parzyste (centymetrowe) nieco krótsze, a kreski w połowie każdego *cm* — najkrótsze.

Przez środki kresek jest przeciągnięta prosta, oznaczająca oś łaty. Spód łaty posiada stalowe okucie dla ustawienia łaty na metalowych trzpieniach metalowej podstawki. Numeracja podziału jest podwójna: z lewej strony osi łaty zwykła, z prawej — dopełniająca odczyt do 100.

Około kresek 20 i 40 znajdują się na łacie dwa przykręcone do niej krążki metalowe, każdy z wyciętym cienkiemi kreskami krzyżem.

Odległość między środkami krzyżyków wynosi 1 *m*.

Błędy wykonania podziałki na takiej łacie są niewielkie, wahają się około setnych *mm*. Łata precyzyjna komparuje się zapomocą metra normalnego o kwadratowym przekroju 20 × 20 *mm*.

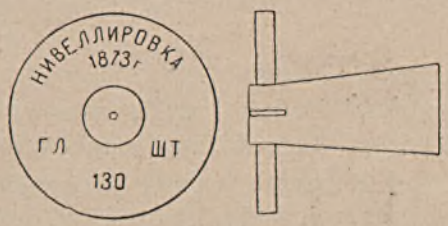
Podziałka naniesiona na jednej ściance tego metra jest centymetrowa, przytem ostatnie kreski są wzajemnie odległe o 0,2 *mm*.

Zapomocą takiego pręta badamy długość odcinków, łączących metrowe płytki, oraz prawidłowość podziałki łaty.

Sprawdzamy łaty przy niwelacji ciągu wprzód i wstecz, a w każdym razie codziennie przy pomiarze.

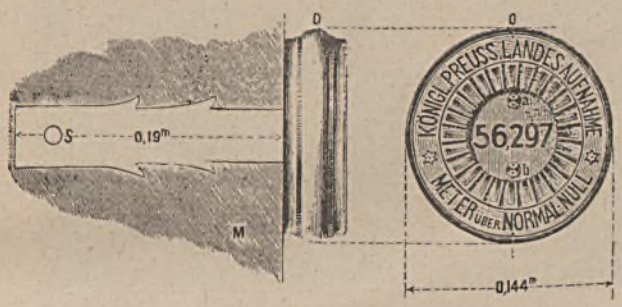
Układa się metr normalny wzdłuż osi łaty tak, by krzyżyki na blaszkach leżały przy drobnych końcowych podziałkach metra.

Zapomocą lupy odczytujemy położenie obydwu krzyżyków, poczem nieco przesuwamy metr, by znów dokonać odczytów na innych miejscach podziałki.



Rys. 577e.

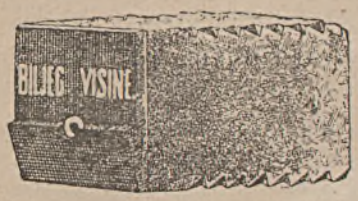
Notujemy średnie odczytów na obydwu blaszkach np. *a* i *b*, przytem odczyty na podziałkach, położonych w lewo od środkowych kresek 0 i 100 są ujemne, w prawo — dodatnie.



Rys. 577f.

Jeżeli długość jednej kreski wynosi 0,2 *mm*, temperatura przy komparacji wynosi *t*, temperatura zaś przy, której długość metra wynosi ściśle metr, jest *to*, wówczas poprawka metra na łacie przy spółczynniku *c* linjowej rozszerzalności stali wyniesie:

$$0{,}2\ (a - b) + c\ (t - to).$$



Rys. 577g.

Prócz tego sprawdzenia określamy długość całej łaty zapomocą metra normalnego, o ile łata uległa wstrząśnieniom.

Repery niwelacji ścisłej podane są na rysynkach: (rys. 577c) przedstawia reper polski I rzędu, oraz reper polski II rzędu, (rys. 577e) reper rosyjski, (rys. 577f) reper pruski, (rys. 577g) reper austrjacki.

Reper austrjacki (rys. 577d) jest graniastosłupem z lanego żelaza, napełnionym wewnątrz gipsem. Tabliczka zewnętrzna pod napisem posiada

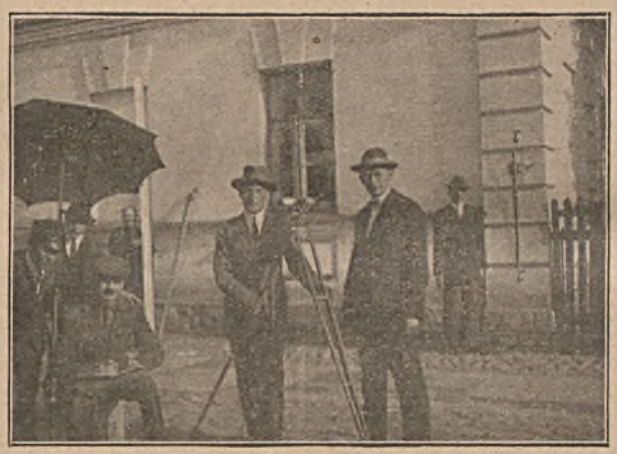
otwór o średnicy 2 *mm*, w którym osadzona jest długa rurka miedziana, zamocowana gipsem. Przy nawiązaniu niwelacji do reperów podobnych typów wstawiamy w rurkę miedzianą reperu *r* szpilkę o średnicy, równej we-



Rys. 577d.

wnętrznej średnicy rurki, i na wystającej części szpilki zawieszamy krótką łatę *łł*, służącą do nawiązania niwelacji (patrz rys. 577k).

Repery pozostałe są trzpieniami zazębionemi, osadzonemi w ścianach starych budynków, zakończonemi tarczami metalowemi z wyborowanym pośrodku otworem.



Rys. 577k.

Repery Ministerstwa Robót Publicznych — patrz rys. 577c.

Rozpatrzmy główne metody, stosowane przy niwelacji precyzyjnej.

Austrjacka niwelacja posługuje się niwelatorem, w którym nić poziomu może być przesuwana zapomocą śruby mikrometrycznej pod okularem. Libela ustawia się ściśle do poziomu, a wówczas poziomą nić mikrometru przesuwamy kolejno na obydwie sąsiednie kreski tego obrazu działki łaty, na którym znalazła się nić. Przy ustawieniu na kreski notujemy odczyty z bębenka mikrometru. Ponieważ wartość podziałki mikrometru jest ustalona, przeto możemy przy danej odległości od łaty obliczyć odległość obydwu kresek od poziomej nici.

Przy pruskiej niwelacji precyzyjnej środek dwu bliskich od siebie nitek poziomych kierujemy na te dwie kreski łaty, które leżą z obydwu stron tych dwu nitek przy spoziomowej lunecie. Przy każdem ustawieniu nitek symetrycznie do kreski łaty notujemy odczyty libeli.

W ten sposób możemy określić kąt pochylenia lunety i obliczyć poprawkę dla każdej odczytanej kreski z łaty.

Przy niwelacji francuskiej lunetę sprowadzamy ściśle do poziomu i notujemy odczyty ze środkowej poziomej nici, oceniając na oko części działki na łacie.

Przy szwajcarskiej metodzie niwelacji poziomujemy lunetę w przybliżeniu i notujemy odczyty z libeli i łaty (ten ostatni odczyt zwykle wyraża położenie krzyża nitek w przypadkowej części działki na łacie.

Metoda Seibta polega na przybliżonem spoziomowaniu lunety i skierowaniu wówczas krzyża nitek na środek tej działki, w granicach której krzyż się znalazł.

Metoda rosyjska polega na możliwie ścisłem spoziomowaniu lunety, odnotowaniu stanu libeli i położenia trzech nitek na łacie.

Przy niwelacji precyzyjnej szybkość pracy wynosi do 3 *km* dziennie. W związku z tem odległość między reperami II-go rzędu wynosi 2 — 3 *km*, repery zaś pierwszorzędne ustawiane są mniej więcej co 10 - 20 *km*.

Przytem zwykle tuż przy reperze I-go rzędu znajduje się reper II rzędu dla nawiązywania niwelacji zwykłej do precyzyjnej.

Przy niwelacji ścisłej:

1) należy niwelować odcinek między reperami w ciągu jednego dnia;

2) każdy odcinek niwelujemy w kierunku prostym i odwrotnym;

3) należy notować na każdem stanowisku odczyty do obydwu łat dwukrotnie w kolejności:

a) wstecz—wprzód

b) wprzód—wstecz;

4) należy ustawiać niwelator na środku odcinka między łatami (ustawianemi na metalowych trzpieniach podstawek) z dokładnością do 1 *m*.;

5) łata wprzód dla danego stanowiska pozostaje na miejscu jako łata wstecz dla stanowiska następnego;

6) obserwacyj należy dokonywać:

a) przy odległości 50 *m* niwelatora od każdej łaty;

b) przy osi celowej, przecinającej łaty wyżej niż $^1/_4$ *m* nad ziemią;

c) przy dwu nóżkach statywu, ustawianych w kierunku niwelacji, trzeciej zaś nóżce — na parzystych stanowiskach, skierowanej w lewo od kierunku posuwania się, na nieparzystych—w prawo;

d) do 9 rano i po 15 godzinie.

Rozpatrzmy nieco szczegółowiej sposób określania poprawki odczytu, dokonanego przy lunecie, spoziomowanej w przybliżeniu. Nazwijmy taką niwelację—niwelacją z wychyleń bańki.

Niwelacja z wychyleń bańki.

Przy niwelacji ścisłej niwelacja z wychyleń bańki ma szerokie zastosowanie. Wypływa to z założenia, że ścisłe spoziomowanie osi libeli o małej przewadze jest żmudne, wobec czego cel do łaty notuje się przy pochylonej o nieznaczny kąt lunecie, wielkość zaś tego kąta oblicza się

z wychylenia bańki od punktu głównego i odpowiednią poprawkę wprowadza się do odczytu z łaty.

Tak więc, gdy łata oddalona jest od $d\ m$ od niwelatora, oś celowa zaś tworzy z poziomem kąt φ, wówczas uzyskany odczyt a należy zmienić z odpowiednim znakiem o $\triangle h$, obliczane z relacji:

$$\Delta h = d\ tg\ \varphi = d\ \frac{\varphi''}{\rho''}$$

Przypuśćmy, że podział na libeli biegnie od zera, zwróconego ku objektywowi, do 50 — ku okularowi. Punktem głównym jest podziałka 25 libeli. Przy osi celowej, skierowanej ku górze od poziomu, średnia odczytów na końcach libeli (Ob przy objektywie i Oc przy okularze) będzie mniejsza od 25, przy osi celowej, skierowanej wdół —

$$\frac{Ob + Oc}{2} > 25$$

Ponieważ przy osi celowej, skierowanej ku górze, odczyt na łacie należy zmniejszyć, przy pochylonej zaś ku dołowi lunecie, odczyt należy zwiększyć, przeto znak wychylenia bańki określać będziemy z wyrazu:

$$\frac{Ob + Oc}{2} - 25,$$

wówczas poprawkę na kąt pochylenia uzyskamy odrazu z odpowiednim znakiem.

Jeżeli przewagę libeli oznaczymy literą τ, to kąt pochylenia

$$\varphi = \tau \left(\frac{Ob + Oc}{2} - 25\right) = \frac{\tau}{2}\ (Ob + Oc - 50)$$

i

$$\Delta h = \frac{d\tau''}{2\rho''}\ (Ob + Oc - 50)$$

Jest to poprawka dla odczytu na łacie; poprawka zaś ΔH dla określanej na stanowisku różnicy wysokości, przy równej odległości od niwelatora do obydwu łat, wyniesie (z oznaczeniem znaczkiem w odczytu z libeli przy celu wstecz i przez p — przy celu wprzód):

$$\Delta H = \frac{d\tau}{2\rho''}\ [(Ob + Oc)_w - (Ob + Oc)_p]$$

Gdy zero podziałki libeli jest jej punktem głównym, t. j. gdy podział libeli jest symetryczny, wówczas dla przyswojenia poprawce na odczyt z łaty odpowiedniego znaku, przez wychylenie bańki będziemy rozumieć połowę różnicy odczytów z jej końców, tworzonej w następujący sposób:

$$\frac{Oc - Ob}{2}$$

wówczas

$$\Delta h = \frac{d\,\tau''}{2\,\rho''}\,(Oc - Ob)$$

Rachunek znacznie zostaje ułatwiony, gdy niwelator ustawia się w jednakowej odległości od łat. Wtedy spółczynnik

$$\frac{d\,\tau''}{2\,\rho''} = k$$

będzie wielkością stałą. Np., przy $\tau = 5''$ i $d = 50\ m$ będzie

$$k = 0{,}61$$

Wzór protokółu niwelacji z wychyleń bańki ma następujący wygląd: ($k = 0{,}61$, podział libeli bieżący)

Odległość od łaty	Cel wstecz wprzód	ODCZYTY Z ŁATY		LIBELA			Poprawka	UWAGI
		wstecz × wprzód	× wstecz wprzód	*Ob*	*Oc*	*Ob* + *Oc*		
50	*w*	2,915	× 7,085	9,3	41,4	50,7		
	p	× 7,373	2,626	8,2	40,3	48,5		
				+ 1,1	+ 1,1	+ 2,2	+ 1,3	
50	*w*	2,650	× 7,349	13,5	45,5	59,0		
	p	× 7,432	2,568	11,0	43,0	54,0		
				+ 2,5	+ 2,5	+ 5,0	+ 3,1	
40	*w*	3,446	× 6,556	7,6	39,8	47,4		
	p	× 7,263	2,736	7,3	39,4	46,7		
				+ 0,3	+ 0,4	+ 0,7	+ 0,4	
		+ 1,079	× 8,920				+ 4,8	
		+ 4,8						
	H =	+ 1083,8						

269

§ 569. Techniczna niwelacja reperów.

Jedną ze stosunkowo dokładnych niwelacyj reperów jest niwelacja łatami rewersyjnemi z dekadycznem uzupełnieniem przy użyciu podstawek metalowych (żabek) o dwu trzpieniach niejednakowej wysokości. Żabki wciskane są dość mocno w ziemię. Po skończeniu niwelacji stanowiska

Niwelacja reperów.

Nazwa punktu	Odległości	Trzpień	Odczyty na łacie		ŚREDNIE				Obliczenie różnicy wysokości	UWAGI
			początkowy	końcowy	wstecz		wprzód			
					I	II	I	II		
			1653		1653	1653				
Rp. I	80		8347							
			1456	1419						
		I	8545	8582	1455,5		1418,5			
	100		1430	1391						
		II	8570	8608		1430		1391,5		
			1074	1380						
		I	8925	8620	1074,5		1380			
	100		1045	1349						
		II	8954	8650		1045,5		1349,5		
			716	1696						
		I	9284	8304	716		1696			
	100		691	1670						
		II	9309	8330		691		1670	10467,0	
									10165,0	
			957	1369					302,0	
		I	9042	8630	957,5		1369,5			
	100		929	1342						
		II	9070	8658		929,5		1342		
			1347	1064						
		I	8652	8937	1347,5		1063,5			
	100		1322	1038						
		II	8676	8961		1323		1038,5		
			1700	1135						
		I	8301	8865	1699,5		1135			
	100		1670	1107						
		II	8330	8892		1670		1107,5		
			1563	1153					10280,0	
		I	8436	8846	1563,5		1153,5		9976,0	
	92,6		1538	1128					304,0	
		II	8462	8872		1538		1128		
				948						
		I		9050			949	949		
Rp. II									$+\frac{302+304}{2}=$	
					10467,0	10280,0	10165,0	9976,0	$=+303$	

łata wprzód pozostaje na miejscu. Każda łata przy każdym celu ustawia się na obydwu trzpieniach, przytem zawsze z początku (dla I-ego odczytu) na niższym, a później na wyższym. Przy ustawieniu łaty na każdym trzpieniu notujemy odczyty z obydwu stron łaty i odrazu sprawdzamy, czy ich suma wynosi 10,000 + dopuszczalna różnica.

Z obydwu odczytów wypisujemy średni w oddzielnych kolumnach dla obydwu trzpieni tak dla celów wstecz, jak wprzód. Zwracać należy uwagę, czy różnice średnich odczytów z łaty na każdym trzpieniu różnią się w granicach + 3 *mm*, t. j. prawie podwójnej dokładności odczytu.

Przy takiej niwelacji otrzymujemy wyniki z każdego trzpienia oddzielnie, w ten więc sposób mamy właściwie dwa ciągi niwelacyjne.

Niwelator ustawiamy w odległości 40 *m* od łat ściśle pośrodku. Ostatni odcinek, większy od 90 *m*, dzielimy na dwa stanowiska i wytyczamy ich środki dla niwelatora; mniejszy od 90 *m* odcinek — dzielimy na połowę. Różnicę wysokości reperów obliczamy z niwelacji każdego trzpienia oddzielnie.

Typy reperów drugorzędnych na gruntach niezabudowanych (według instrukcji Ministerstwa Robót Publicznych) są monolitami na fundamencie; w monolitach osadzony jest na cemencie bolec z wystającą nieco nad wierzchołkiem monolitu główką metalową o średnicy 0,03 *m*, której wierzchołek jest punktem ustawienia łaty. Na solidnych zabudowaniach repery są wmurowanemi trzpieniami z wystającą nazewnątrz półokrągłą główką.

ROZDZIAŁ IX.

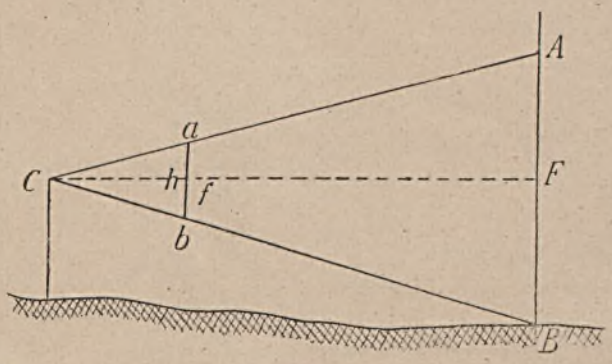
GEOMETRYCZNY, TRYGONOMETRYCZNY i TACHYMETRYCZNY POMIAR WYSOKÓŚCI.

§ 270. Geometryczny pomiar wysokości.

Do kategorji tych pomiarów zaliczamy takie, przy których posługujemy się podstawowemi wiadomościami geometrji i które specjalnie oparte są na podobieństwie △-ów.

Przypuśćmy, że chcemy określić wysokość AB. Jeżeli w dowolnym punkcie C 1) zrealizujemy kierunki do A i B i 2) określimy długość h równoległego do AB odcinka ab, zawartego między celami do A i B, oraz 3) określimy odległości

$$Cf = d \text{ i } CF = D,$$



Rys. 580.

wówczas

$$AB : h = D : d,$$

skąd

$$AB = \frac{h}{d} D.$$

Gdy możemy określić przecięcie się poziomej CF z AB, wówczas, określając zamiast $ab = h$ odcinek af, możemy analogicznie określić AF, t. j. różnicę wysokości A i C. Taka metoda określania wysokości ma duże zastosowanie przy pomiarze wysokości drzew w lasach.

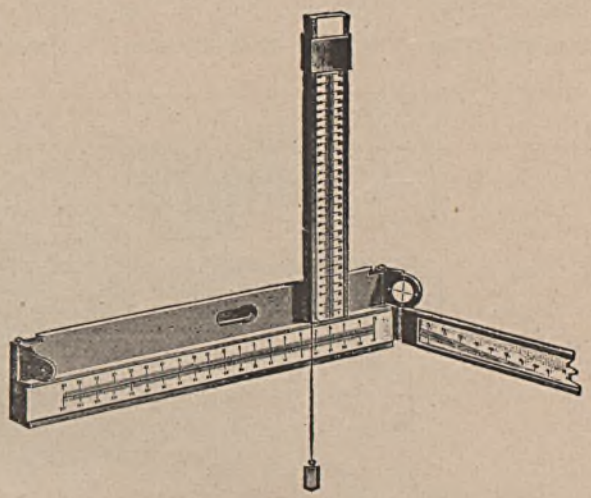
Przyrządy, stosowane przy tych pomiarach, noszą nazwy dendrometrów, klitometrów, hypsometrów i t. p.

Rozpatrzmy hypsometr Faustmana (rys. 581).

Przyrząd posiada przezierniki z równoległą do osi celowej podziałką długości i ⊥-ą do niej podziałką wysokości z pionem.

Obracające się na zawiasach lusterko daje możność odczytywania położenia pionu na podziałce długości, gdy oko znajduje się przy przezierniku.

Określenie różnicy wysokości punktów C i A uskutecznimy, celując w C do A (rys. 582).



Rys. 581.

Przy odczytach h i d, odpowiadających zwisającemu pionowi, z podobieństwa △-ów ACK i abk mamy

$$H : D = h : d,$$

stąd

$$H = \frac{h}{d} D.$$

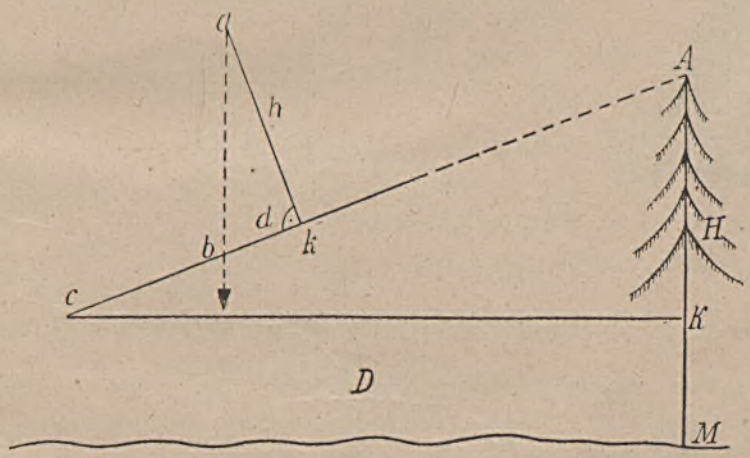
Mając pomierzone D, obliczamy H.

Położenie punktu K określimy przy celu, odpowiadającym położeniu pionu, zwisającego wzdłuż ak.

Wysokość

$$AM = H + MK.$$

H uzyskujemy z obliczenia, MK odmierzymy po ustaleniu położenia puuktu K.



Rys. 582.

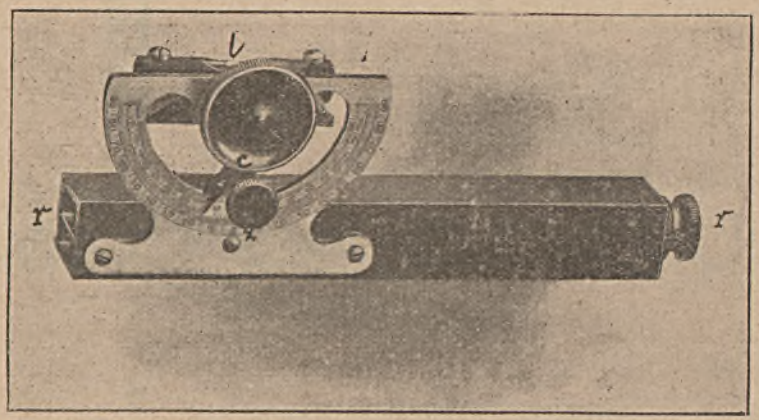
Do określania wysokości stosujemy spadkomierze (rys. 583—583a). Kierujemy oś celową na określony punkt dwukrotnie, podnosząc za drugim razem przyrząd o h np. 1 m. Przy odczytach p_1 i p_2 mamy:

$H_1 = p_1 d$ i $H_2 = p_2 d$ lecz $H_1 - H_2 = d\,(p_1 - p_2) = h$

stąd $d = h : (p_1 - p_2)$ oraz $H_1 = p_1 h : (p_1 - p_2)$.

Ręczny spadkomierz (rys. 583) firmy Rost.

Użycie spadkomierza jest następujące: po ustawieniu okularu zwalniamy zacisk z przy nonjuszu i, utrzymując przyrząd w prawej ręce, lewą ujmujemy śrubkę C. Gdy prawą ręką skierujemy oś celową na przedmiot, lewą obracamy śrubkę C do czasu, gdy w lusterku spostrzeżemy środek bańki libeli l, sprowadzony na nić poziomą, a więc i przedmiot. Wówczas indeks przy nonjuszu wskaże spad w procentach, lub odczytamy kąt pochy-



Rys. 583.

lenia zapomocą nonjuszu. Przypuśćmy, że odczytaliśmy spad $+ p\ ^0/_0$. Jeżeli odległość do przedmiotu wynosi d, to przedmiot znajduje się powyżej oka o wielkość $p\,d$.

Przy określaniu wysokości drzewa obieramy takie stanowisko, aby po sprowadzeniu bańki libeli do środka oś celowa przecięła drzewo. Określamy wtedy spady p_1 i p_2 kierunków na wierzchołek i spód drzewa. Przy odległości d wysokością drzewa będzie

$$(p_1 + p_2)\ d,$$

o ile nie uwzględnimy znaków wyrazów p.



Rys. 583a.

Podobne zastosowanie ma spadkomierz Brandisa (rys. 583a).

271. Trygonometryczny pomiar wysokości.

Pomiary trygonometryczne wysokości, jak z samej nazwy wynika, mają na celu określenie bądź to wysokości pewnych przedmiotów, bądź to różnic wysokości poszczególnych punktów, przy pomocy metod trygonometrycznych. Tak więc do wyników dochodzić będziemy za pośrednictwem elementów długościowych i kątowych, określonych z pomiaru. Kątami będą kąty pochylenia, względnie ich dopełnienia do 90^0, zwane odległościami zenitalnemi.

Trygonometryczny pomiar wysokości, mający na celu określenie różnicy między wysokościami dwu punktów terenu, nazywać będziemy niwelacją trygonometryczną.

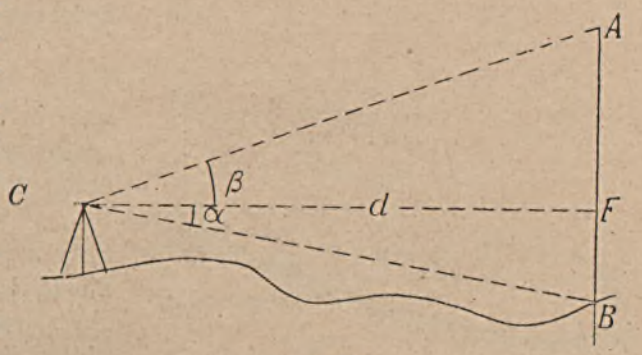
Rozpatrzmy przedewszystkiem trygonometryczny pomiar wysokości pewnych przedmiotów w zastosowaniu do najczęściej spotykanych wypadków.

Określenie wysokości przedmiotu rozpatrzymy w odniesieniu do trzech wypadków:

a) przedmiot jest dostępny i w pewnym kierunku od przedmiotu można pomierzyć długość rzutu odcinka, łączącego punkt, dostatecznie odległy, z danym przedmiotem;

b) przedmiot jest dostępny, lecz bezpośredni pomiar długości jest utrudniony;

c) przedmiot jest niedostępny.



Rys. 584.

A. Przedmiot AB jest dostępny. W punkcie C pomierzono kąty pochylenia β celu do A i α celu do B; pomierzono również odległość d. Obliczymy z Δ-ów CFB i CBA (rys. 584):

$$BC = \frac{d}{\cos \alpha}$$

$$H = AB = BC \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin (90^0 - \beta)} = \frac{d \sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

Gdy C leży poniżej A i B, we wzorze na H wyraz $\sin (\alpha + \beta)$ zmieni się na sin różnicy kątów; wzór uogólnimy, dając kątowi pochylenia znak —; wówczas

$$H = \frac{d \sin (\beta - \alpha)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

B. Przedmiot AB jest dostępny, lecz bezpośredni pomiar odcinka pomocniczego jest utrudniony (rys. 585).

Ustawiamy obok przedmiotu, przy jego podstawie, łatę EF o znanej wysokości l. Na mocy poprzedniego mamy:

$$l = EF = \frac{d \sin (\beta - \alpha)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

skąd

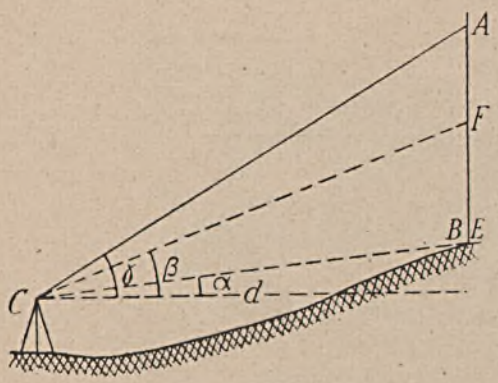
$$d = \frac{l \cos \alpha \cos \beta}{\sin (\beta - \alpha)}$$

lecz podobnie z poprzedniego mamy:

$$H = AB = \frac{d \sin (\gamma - \alpha)}{\cos \alpha \cos \gamma}$$

więc ostatecznie:

$$H = \frac{l \cos \alpha \cos \beta}{\sin (\beta - \alpha)} \cdot \frac{\sin (\gamma - \alpha)}{\cos \alpha \cos \gamma} = \frac{l \cos \beta \sin (\gamma - \alpha)}{\cos \gamma \sin (\beta - \alpha)}$$



Rys. 585.

C. Przedmiot $A\,B$ jest niedostępny (rys. 586).

Obieramy dwa punkty C i C_1, leżące w jednej pionowej płaszczyźnie z AB, przytem tak, by bezpośredni pomiar rzutu poziomego odcinka $C\,C_1$ był możliwy.

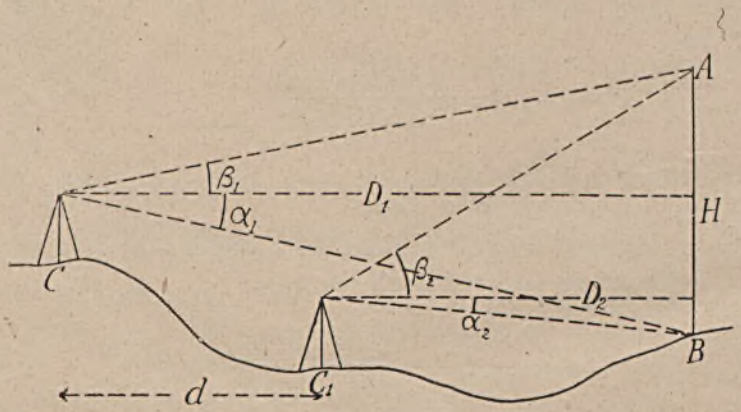
Mierzymy $d = C\,C_1$ oraz kąty α_1, β_1, α_2, β_2. Oznaczając literami D_1 i D_2 odległości od C, C_1 do $A\,B$, oraz traktując kąty pochylenia α_1 i α_2 jako ujemne w odróżnieniu od kątów wzniesienia, otrzymujemy

$$H = \frac{D_1 \sin (\beta_1 - \alpha_1)}{\cos \beta_1 \cos \alpha_1}$$

$$H = \frac{D_2 \sin (\beta_2 - \alpha_2)}{\cos \beta_2 \cos \alpha_2}$$

lecz

$$d = D_1 - D_2 = H \left(\frac{\cos \beta_1 \cos \alpha_1}{\sin (\beta_1 - \alpha_1)} - \frac{\cos \beta_2 \cos \alpha_2}{\sin (\beta_2 - \alpha_2)} \right) = m\,H$$



Rys. 586.

gdzie literą m oznaczamy spółczynnik przy H,

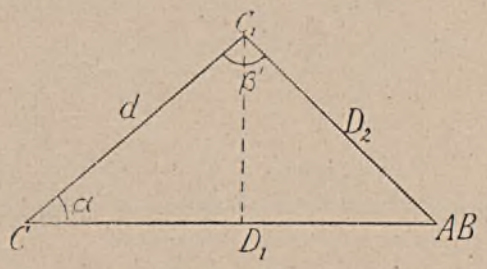
skąd:

$$H = \frac{d}{m}$$

Gdyby nie można było obrać dwu punktów C i C_1 w jednej płaszczyźnie z $A\,B$, wówczas obierzemy C i C_1 dowolnie, z tem jednakże, by odległość między niemi dała się pomierzyć. Mierząc $d = C\,C_1$ i kąty poziome $\alpha' = C_1\,C\,A$ oraz $\beta' = C\,C_1\,A$, obliczymy z Δ-a $C\,C_1\,A$:

$$D_1 = d\,\frac{\sin\beta'}{\sin(\alpha' + \beta')}$$

dzięki czemu sprowadzimy zagadnienie do typu A, zakładając

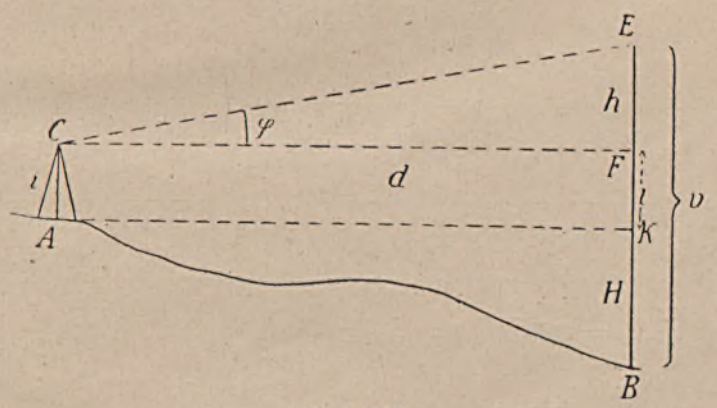


Rys. 587.

$$H = \frac{D_1 \sin(\beta - \alpha)}{\cos\alpha\,\cos\beta} = \frac{d \sin\beta' \sin(\beta - \alpha)}{\sin(\alpha'+\beta')\cos\alpha\,\cos\beta}$$

§ 272. Niwelacja trygonometryczna.

Niwelacja trygonometryczna ma na celu bezpośrednie określenie różnicy wysokości punktów na podstawie: 1) rzutu poziomego odległości między temi punktami i 2) kąta pochylenia, względnie odległości zenitalnej celowej. Rozpatrzmy najprostszy wypadek takiej niwelacji, a więc załóżmy: 1) że odległość d między obydwu punktami nie przekracza 400 — 500 m, 2) że nad jednym z danych punktów ustawiono przyrząd z kołem wierzchołkowem, na drugim zaś — łatę lub sygnał o znanej wysokości v. Po



Rys. 588.

dokonaniu pomiaru kąta pochylenia φ, przy celu na wierzchołek E sygnału o wysokości v, zapomocą kątomierza o wysokości i, na podstawie Δ-a prostokątnego $E\,F\,C$ napiszemy:

$$h = EF = d\,tg\,\varphi$$

oznaczając literą H różnicę wysokości punktów A i B, t. j. zakładając

$$H = H_B - H_A,$$

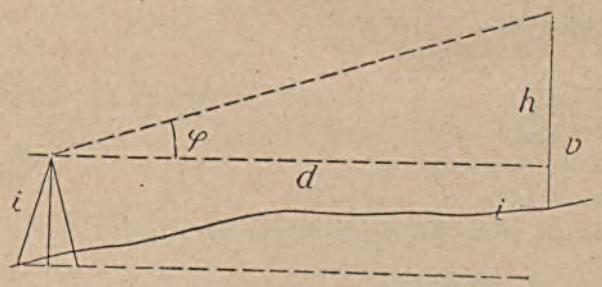
napiszemy równanie

$$i + h - v = H$$

Wartość H, stąd otrzymana, będzie ujemna, gdy B leży poniżej A, i dodatnia, gdy B leży wyżej od A. Ogólny więc wzór na różnicę wysokości, trygonometrycznie określoną, ma postać:

$$H = d\,tg\,\varphi + i - v$$

Wielkości i oraz v daje bezpośredni pomiar; wyraz $h = d\,tg\,\varphi$ otrzymujemy pośrednio; określmy średni błąd m_h tego wyrazu.



Rys. 589.

$$m_h = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial d}\right)^2 m^2_d + \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi}\right)^2 m^2_\varphi}$$

lecz

$$\frac{\partial h}{\partial d} = tg\,\varphi = \frac{h}{d}$$

zaś

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi} = \frac{d}{\cos^2\varphi} = \frac{h}{tg\,\varphi\cos^2\varphi} = \frac{2h}{\sin 2\varphi}$$

stąd

$$m_h = \sqrt{\left(\frac{h}{d}\right)^2 m^2_d + \left(\frac{2h}{\sin 2\varphi}\right)^2 m^2_\varphi} = h\sqrt{\left(\frac{m_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{m_\varphi}{{}^1/_2\sin 2\varphi}\right)^2}.$$

Np., przy $d = 500\ m$, $m_d = \pm 0{,}5\ m$, $\varphi = 5^0$ i $m_\varphi = \pm 20''$ otrzymamy

$$\pm\frac{m_h}{h} = \sqrt{\left(\frac{0{,}5}{500}\right)^2 + \left(\frac{20}{{}^1/_2 \cdot 0.17206265}\right)^2} = \frac{3}{2000}$$

Tak przy trygonometrycznym pomiarze wysokości, jak również przy niwelacji trygonometrycznej, mają zastosowanie łaty ze stałym odstępem między dwoma punktami łaty, utrwalonemi w stały sposób na tarczach, sprzęgniętych z łatami. Końce stałego odstępu są obserwowane przy ustaleniu kątów pochylenia na kole wierzchołkowem, a to w celu pośredniego ustalenia odległości od przyrządu do łaty.

Mamy bowiem:

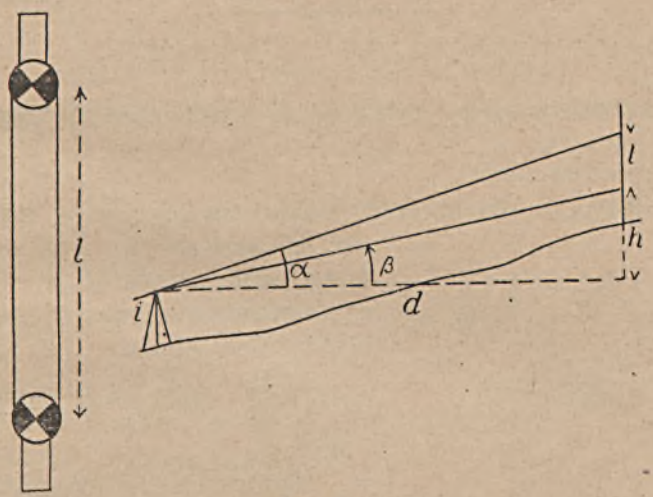
$$\begin{aligned} l + h &= d\,tg\,\alpha \\ (-)\quad h &= d\,tg\,\beta \end{aligned}$$

odejmując

$$l = d\,(tg\,\alpha - tg\,\beta)$$

stąd

$$d = \frac{l}{tg\,\alpha - tg\,\beta}$$



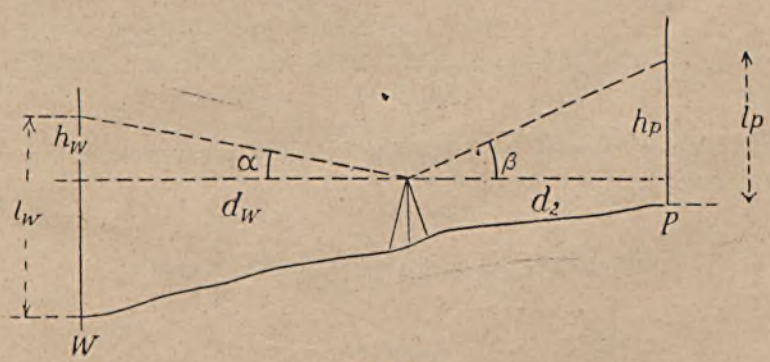
Rys. 590.

co pokrywa się z poprzednio wyprowadzonym wzorem typu:

$$d = \frac{l \cos\alpha \cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$

Mając określone w ten sposób d, ustalamy różnicę wysokości:

$$H = d\,tg\,\beta + i - s = d\,tg\,\alpha + i - l - s$$



Rys. 591.

Gdy kątomierz ustawiony jest między dwoma punktami, dla których ustaliliśmy

$$h_w = d_w\,tg\,\alpha$$

i

$$h_p = d_2 \, tg \, \beta ,$$

to przy wysokości l_w i l_p obserwowanych na łatach punktów różnica wysokości H punktów W i P będzie równa:

$$H = (l_w - h_w) - (l_p - h_p) = l_w - l_p + h_p - h_w .$$

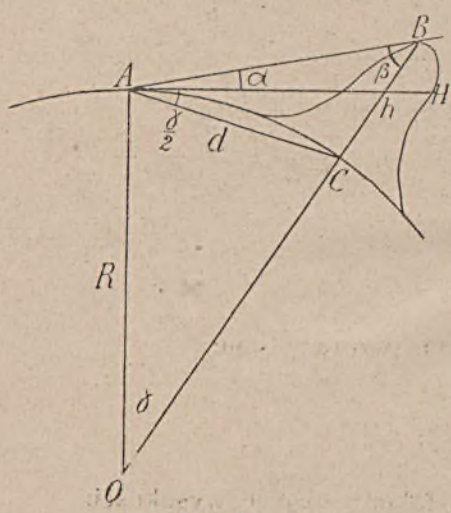
Gdy zaś łaty są jednakowe i $l_w = l_p$, wówczas

$$\underline{H = h_p - h_w .}$$

§ 273. Wpływ krzywizny ziemi i refrakcji na wyniki niwelacji trygonometrycznej.

A. Krzywizna ziemi.

Przypuśćmy, że kątem pochylenia celu AB jest α, rzutem odległości AB jest d. Ze względu na stosunkowo małą wielkość d w porównaniu z promieniem ziemi R, za d możemy przyjąć tak cięciwę, jak i łuk AC; kąt $HAC = \frac{\gamma}{2}$, jako kąt między styczną i sieczną.



Rys. 592.

Ponieważ AH, jako pozioma, jest $\perp$-a do promienia AO, więc z $\triangle$-a ABO wynika

$$\alpha + 90^0 + \gamma + \beta = 180^0$$

skąd

$$\beta = 90^0 - (\alpha + \gamma) .$$

Oznaczając różnicę wysokości BC literą h, napiszemy:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{h}{d} = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin \beta} = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)}{\cos(\alpha + \gamma)}$$

Rozwijając w szereg i odrzucając wyrazy wyższych potęg rozwinięcia, otrzymujemy:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = \sin\alpha + \frac{\gamma}{2}\cos\alpha + \ldots\ldots$$

$$\cos(\alpha + \gamma) = \cos\alpha + \ldots\ldots$$

skąd

$$\frac{h}{d} = \frac{\sin\alpha + \frac{\gamma}{2}\cos\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha + \frac{\gamma}{2}$$

$$h = d\,tg\,\alpha + d\,\frac{\gamma}{2}$$

lecz

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{d}{2R}$$

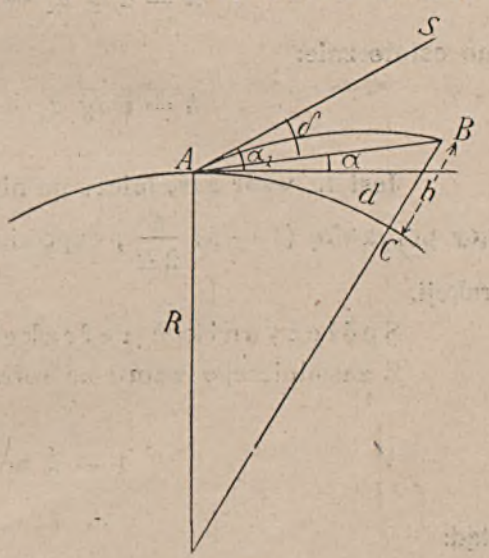
więc

$$h = d\,tg\,\alpha + \frac{d^2}{2R}.$$

B. Refrakcja.

Dotychczas drogę promienia, idącego do oka, uważaliśmy za prostolinjową, co jest słuszne jednak tylko dla niewielkich odległości. Przy większych odległościach w grę wchodzi krzywa refrakcji. Krzywa refrakcyjna jest to droga promienia, załamującego się w warstwach powietrza o niejednakowej gęstości.

Gdybyśmy znali wielkość kąta δ, utworzonego styczną AS do krzywej refrakcyjnej i jej cięciwą AB, łączącą punkt B z A, wówczas moglibyśmy sprowadzić całe zagadnienie do poprzedniego.



Rys. 593.

Krzywą refrakcyjną dla celów miernictwa możemy uważać za krzywą płaską, a w dość ścisłem przybliżeniu za koło, którego promień R_1 różni się od promienia ziemi R kilkakrotnie; związek między temi promieniami wyraża się zależnością

$$R = R_1\,k,$$

gdzie $k = 0{,}13$ (w przybliżeniu).

Zakładając równość łuków AB i AC z odległością d i przyjmując, że łuk AB krzywej refrakcyjnej odpowiada centralnemu kątowi 2δ koła o promieniu R_1, obliczymy:

$$\delta = \frac{1}{2}\,\frac{d}{R_1}$$

wobec tego zaś, że

$$R_1 = \frac{R}{k},$$

więc

$$\delta = k\,\frac{d}{2R}$$

Ponieważ

$$\alpha = \alpha_1 - \delta = \alpha_1 - \frac{1}{2}\,\frac{kd}{R}$$

i ponieważ mierzymy kąt α_1, a nie α, jakby to wypadało, przeto do wzoru (patrz krzywizna ziemi)

$$h = d\,tg\,\alpha + \frac{d^2}{2R}$$

winniśmy podstawiać kąt α_1 nie pomierzony, a obliczony.

W ten sposób:

$$h = d\,tg\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\,\frac{kd}{R}\right) + \frac{d^2}{2R}.$$

$\frac{1}{2}\,\frac{kd}{R}$ jest wielkością nieznaczną, przeto

$$tg\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\,\frac{kd}{R}\right) = tg\,\alpha_1 - \frac{1}{2}\,\frac{kd}{R}$$

zatem:

$$h = d\,tg\,\alpha_1 - \frac{1}{2}\,k\,\frac{d^2}{R} + \frac{d^2}{2R}$$

lub ostatecznie:

$$h = d\,tg\,\alpha_1 + (1 - k)\,\frac{d^2}{2R}.$$

Jest to wzór zasadniczy na niwelację trygonometryczną, uwzględniający poprawkę $(1 - k)\,\frac{d}{2R}$, odpowiadającą wpływom kulistości ziemi i refrakcji.

Spółczynnik k refrakcji.

Z zasadniczego wzoru na refrakcję wynika

$$1 - k = \frac{h - d\,tg\alpha_1}{\frac{d^2}{2R}}$$

stąd:

$$k = 1 - \frac{2R}{d^2}(h - d\,tg\alpha_1)$$

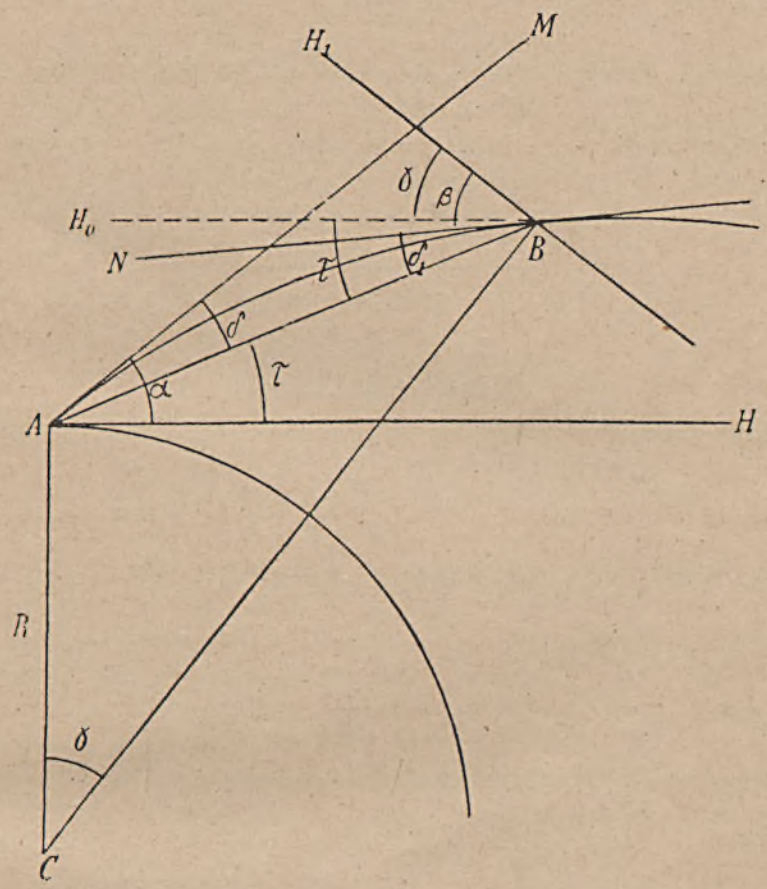
Gdyby więc obrać szereg punktów, których różnice wysokości h zostały ściśle wyznaczone z niwelacji geometrycznej, i z każdego z nich niwelować trygonometrycznie sąsiednie, t. j. pomierzyć odpowiednie d i α_1, wówczas dla takich par wyników niwelacji trygonometrycznej z zestawienia z odpowiedniemi różnicami h, ściśle z niwelacji geometrycznej określonemi, uzyskalibyśmy cały szereg wartości liczbowych dla k, na mocy ostatniego wzoru.

Tę metodę określenia k stosowali Struve na Łotwie, Bauernfeind w Bawarji i Dawidson w Ameryce.

Poza tem stosowana jest metoda wzajemnych i równoczesnych pomiarów kątów pochylenia celowych, łączących dwa punkty obserwacyjne. Równoczesność jest niezbędnym warunkiem uzyskania właściwych wyników, gdyż promienie świetlne, idące z jednego punktu do drugiego i od-

wrotnie, przechodzą przez te same warstwy powietrza, a więc załamują się zupełnie jednakowo.

Promień, idący od punktu B po krzywej refrakcyjnej, wpada do oka, które wytwarza sobie obraz B na przedłużeniu ostatniego elementu krzywej, a zatem na stycznej do niej w punkcie A. Wskutek tego obserwujemy zamiast kąta pochylenia BAH kąt MAH $= \alpha$ oraz zamiast H_1BA



Rys. 594.

kąt $H_1BN = \beta$ między poziomemi AH i BH_1 a stycznemi do krzywej refrakcyjnej. Jeżeli punkt B jest wyższy od A, wówczas $\beta > \alpha$, gdyż:

$$\tau = \sphericalangle BAH = \sphericalangle H_0BA$$

gdzie

$$BH_0 \parallel AH$$

Kąty

$$MAB = \delta \text{ i } NBA = \delta_1$$

są równe przy jednoczesnej obserwacji.

Oznaczając literą γ kąt H_1BH_0, równy kątowi ACB z prostopadłości ramion, ponieważ

$$\alpha = \tau + \delta$$

$$\beta = (\tau - \delta) + \gamma$$

otrzymujemy

$$\beta - \alpha = \gamma - 2\,\delta$$

Wobec tego zaś, że

$$\gamma > 2\,\delta \quad \text{gdyż dla} \smile AB \text{ mamy } R_1 > R,$$

więc

$$\underline{\beta > \alpha}$$

jeżeli β oznacza zaobserwowany na wyższym punkcie prostej AB jej kąt pochylenia.

W Δ-cie ABC:

$$A = 90^0 + \alpha - \delta$$

$$B = 90^0 - \beta - \delta$$

$$A + B = 180^0 - \gamma = 180^0 + (\alpha - \beta) - 2\,\delta$$

stąd

$$2\,\delta = \gamma + \alpha - \beta$$

ponieważ zaś

$$\delta = \frac{d\,k}{2\,R}$$

przeto

$$2\,\delta = \frac{d\,k}{R} = \gamma + \alpha - \beta$$

lecz

$$\gamma = \frac{d}{R}$$

i, zamieniając $\alpha - \beta$ na miarę łukową, otrzymujemy:

$$\frac{d\,k}{R} = \frac{d}{R} + (\alpha - \beta)\frac{1}{\rho}$$

skąd:

$$\underline{k = 1 + \frac{R}{d}\left(\frac{\alpha - \beta}{\rho}\right) = 1 - \frac{R}{d}\left(\frac{\beta - \alpha}{\rho}\right)}$$

Wielkość k nie jest stała; nawet dla tej samej prostej AB, określając k w różnych warunkach (pory roku, dnia), uzyskamy różne rezultaty. Za przeciętną wielkość k przyjmujemy $k = 0{,}13$, jako średnią wielkości k, podanych przez różne instytucje i przez poszczególnych badaczy. Odchylenia od $k = 0{,}13$ mogą być dość znaczne, tak, np., k może mieć w pewnych warunkach (rozpalone słońcem piaski pustyni) wartość ujemną.

Hartl ustala wielkość k, w zależności od pory dnia, jako

$$k = 0{,}104 + 0{,}084\,b^2,$$

gdzie b jest stosunkiem liczby godzin, oddzielających obserwacje od południa, do połowy liczby godzin, oddzielających wschód słońca od zachodu.

Dla celowych, biegnących nad powierzchnią morza, Hartl zmienia swój wzór na:

$$k = 0{,}151 + 0{,}0962\ b^2$$

Spółczynnik k waha się, gdyż załamanie jest największe do 8 rano, prawie zaś niezmienne i przytem najmniejsze jest między 10 rano a 3 po południu. Prócz tego spółczynnik załamania jest mniejszy dla promieni, biegnących wysoko nad ziemią, niż przy powierzchni.

Ponieważ w dniach, gdy niema raptownych zmian temperatury, spółczynnik załamania najmniej się waha około południa i jest wtedy najmniejszy, przeto pomiarów kątów pochylenia najdogodniej jest dokonywać w tym czasie (o ile celowe nie przechodzą nad samą ziemią, gdyż wtedy spółczynnik załamania stale się zmienia, przyjmując wartości już to ujemne, już dodatnie, powodując t. zw. wibrację).

§ 274. Redukcje celowych.

Wzór na różnicę wysokości przy niwelacji trygonometrycznej

$$h = d\ tg\ \alpha_1 + (1 - k)\ \frac{d^2}{2R}$$

wyprowadzony został w założeniu, że promień światła biegł od jednego do drugiego punktu.

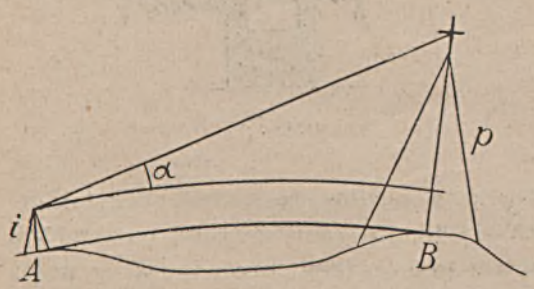
W praktyce niwelacji trygonometrycznej, wykonywanej przy triangulacjach, rzecz się przedstawia inaczej:

1) oś celowa teodolitu z kołem wierzchołkowem znajduje się na wysokości i nad właściwym punktem trygonometrycznym;

2) celujemy nie na sam punkt trygonometryczny, a na wierzchołek piramidy, względnie umówiony na niej sygnał, znajdujący się na pewnej wysokości p nad właściwym punktem trygonometrycznym (krzyż na kamieniu, zakopanym pod piramidą lub t. p.).

Z tego względu obliczoną różnicę wysokości dla jednostronnego celu należy zmniejszyć o różnicę $p - i$, wskutek czego

$$h = d\ tg\ \alpha_1 + (1 - k)\ \frac{d^2}{2R} - (p - i)$$



Rys. 595.

Wyraz $\frac{1-k}{2R}$ wymaga określenia R; wystarczy w tym celu określić z mapy szerokość geograficzną środka AB i wypisać odpowiadający tej szerokości promień R z geodezyjnych tablic, a nawet wystarczy brać wprost znaczenie wyrazu $\frac{1-k}{2R}$ z tablicy № VII załączonej na końcu.

Przy triangulacjach pierwszorzędnych i drugorzędnych niwelacja trygonometryczna wykonywa się w ten sposób, że obserwacje są obustronne, wskutek czego wzory zasadnicze ulegają odpowiednim zmianom.

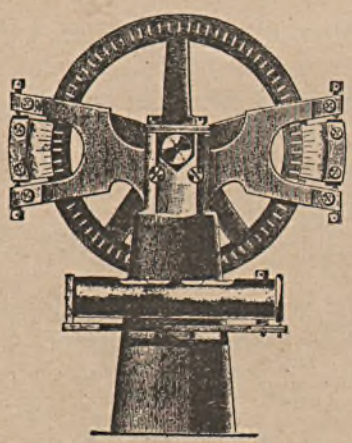
§ 275. Użycie koła wierzchołkowego (pionowego) dla pomiaru kątów pochylenia.

Dla pomiaru kątów pochylenia teodolity są zaopatrzone w koła wierzchołkowe; mogą więc wówczas służyć tak dla pomiarów poziomych, jak pionowych, i dzięki tej ich właściwości noszą często nazwę instrumentów uniwersalnych.

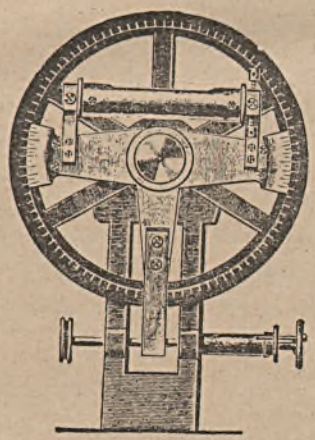
Rozpatrzmy zasadnicze, najczęściej spotykane typy kół wierzchołkowych.

Zwykle koło wierzchołkowe osadzone jest na osi obrotu lunety i połączone z nią trwale; koło wierzchołkowe obraca się zatem na osi razem z lunetą; pochyleniu lunety o pewien kąt odpowiada obrót koła wierzchołkowego o ten sam kąt.

Alhidada koła pionowego osadzona jest na dźwigarku osi obrotu. Nonjusze mogą być nieznacznie przesuwane w płaszczyźnie pionowej zapomocą bądź to śrubek korekcyjnych (rys. 596), bądź to dźwigni, spojonej z alhidadą; przy przesuwaniu końca dźwigni w kierunku poziomym zapomocą leniwki, nonjusze tem samem przesuwają się w pionowej płaszczyźnie (rys. 597). W typie I-ym libela jest przymocowana do dźwigarka, równolegle do płaszczyzny kolimacyjnej. Przy obserwacjach kątów pochylenia libela



Rys. 596.



Rys. 597.

ta, po spionowaniu osi obrotu alhidady koła poziomego, przed odczytaniem koła pionowego, ostatecznie sprowadza się do poziomu tą śrubą nastawową, która jest najbliżej położona do pionowej płaszczyzny, przechodzącej przez oś libeli. Odczyt z koła pionowego bierzemy po skierowaniu na obserwowany punkt krzyża nitek, względnie środkowej nitki; w ostatnim wypadku przy pomiarze w obydwu położeniach lunety, w drugiem położeniu należy obserwowany punkt układać na tej samej nici, ale z drugiej strony krzyża (symetrycznie).

W typie (rys. 597) libela jest przytwierdzona do alhidady koła pionowego. Jest to i dokładniejsze, i dogodniejsze. Libela sprowadza się do poziomu leniwką dźwigni alhidady (po spoziomowaniu alhidady koła poziomego). Użycie teodolitu tej konstrukcji przy pomiarze kątów pionowych polega na:

1) spoziomowaniu alhidady koła poziomego,

2) skierowaniu nici poziomej (środkowej, gdy są trzy) na obserwowany punkt,

3) sprowadzeniu osi libeli koła pionowego do poziomu zapomocą obrotu leniwką dźwigni alhidady,

4) dokonaniu odczytu z obydwu nonjuszów.

Z pomiędzy mniej dokładnych typów kół pionowych wymienić należy teodolit, niezaopatrzony w libelę ani przy kole pionowem, ani na lunecie, oraz teodolit, posiadający libelę na lunecie (patrz § 130), a nie posiadający jej przy kole pionowem. Aby otrzymać kąt pochylenia zapomocą tego przyrządu, należy (przy zachowaniu warunku równoległości osi celowej lunety do głównej płaszczyzny libeli) brać dwa odczyty: a) przy celu na obserwowany punkt, b) przy spoziomowanej osi celowej lunety. Różnica obydwu odczytów daje kąt pochylenia.

Wreszcie spotyka się modyfikacja typów I i II-ego: libela jest przytwierdzona do dźwigarka, alhidada zaś koła pionowego (bez libeli) posiada dźwigni, jak typ II-gi, ze śrubą rektyfikacyjną, zamiast leniwki.

Wreszcie istnieją teodolity o nieruchomem kole wierzchołkowem i ruchomej jego alhidadzie.

Podział na kołach wierzchołkowych.

Podziały na kołach wierzchołkowych różnią się w instrumentach różnych typów. Znamy więc:

1) podział bieżący, od 0° do 360°, w kierunku ruchu wskazówki zegara,

2) podział ćwiartkowy, idący w prawo i w lewo od 0° do 90° od obydwu końców średnicy koła, poziomej w kołach nieruchomych, i mniej więcej równoległej do osi celowej, w kołach ruchomych,



Rys. 598.

3) podział, rosnący od 300° do 60°, symetryczny w stosunku do środka na dwu połówkach koła, lub taki sam od 30° do 150°.

4) podziały zenitalne z opisem, biegnącym od 0° do 180° i dalej znów od 0° do 180°, lub od 180° do 0°.

Najdogodniejszy dla odczytywania kątów wzniesienia i pochylenia jest podział ćwiartkowy; przy innych podziałach te kąty należy obliczać na zasadzie odczytu.

§ 276. Obliczenie kątów pochylenia i rektyfikacja koła pionowego.

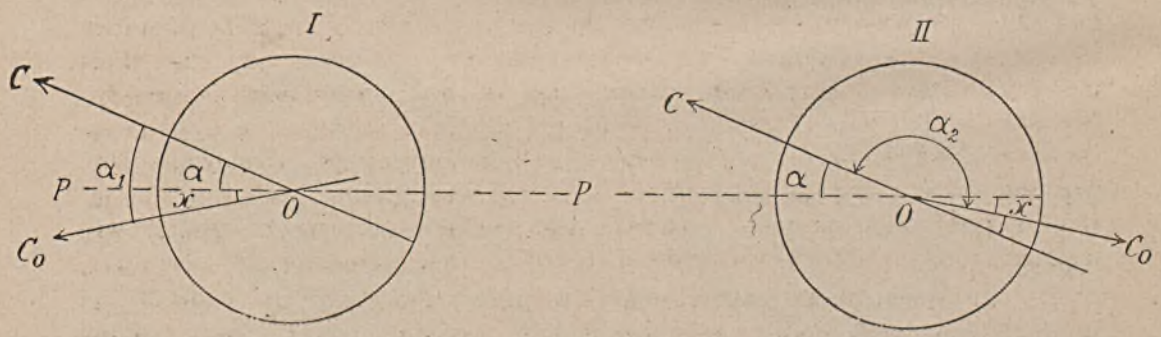
Rozpatrzmy koło pionowe o podziale bieżącym, od 0^0 do 360^0.

Jeżeli przy spoziomowanej osi celowej odczyt z koła pionowego wynosi zero, wówczas, odczytując koło pionowe przy pochylonej osi celowej, uzyskujemy kąt pochylenia.

Gdybyśmy jednak przy poziomej osi celowej odczytali z koła pewną wielkość $+ x$, to alhidada winna być przesunięta o tę samą wielkość z odwrotnym znakiem dla uzyskania zerowego odczytu; w przeciwnym razie — kąty pionowe będą stale odczytywane z błędem x, o który należy zmieniać wszystkie uzyskane wyniki.

Wyobraźmy sobie, że przy spoziomowanej osi libeli i ustawieniu koła pionowego do takiego położenia, by odczytem z I-ego nonjnszu było $0^0\ 0'\ 0''$, — oś celowa lunety $O\,C_0$ pochylona jest do poziomu o wielkość x. Gdy skierujemy oś celową na C przy kącie jej pochylenia α, wówczas luneta opisze łuk α_1, odpowiadający odczytowi z nonjuszu, równy

$$\alpha_1 = \alpha + x.$$



Rys. 599.

Gdy obrócimy alhidadę koła poziomego o 180^0 i, po przerzuceniu lunety, złączymy zero nonjuszu z zerem koła pionowego, co odpowiada w II położeniu osi celowej $O\,C_0$, to dla skierowania jej na ten sam punkt, co poprzednio (kierunek $O\,C$ pod kątem α do poziomu), należy lunetę obrócić do góry o pewien kąt α_2, równy $\alpha_2 = 180^0 - \alpha + x$, odczytany z nonjuszu.

Odejmując od pierwszego drugie równanie z jednej strony, z drugiej zaś dodając te równania, otrzymujemy

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2\alpha - 180^0$$

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + 180^0 - \alpha_2}{2}$$

oraz

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 180^0 + 2x$$

$$x = \frac{\alpha_1 - 180^0 + \alpha_2}{2}$$

Lub, oznaczając $\alpha_1 \pm 180^0$ literami KP (koło w prawo od osi celowej i α_2 literami KL (koło w lewo od osi celowej), napiszemy:

$$\alpha = \frac{KP - KL}{2}$$

i

$$x = \frac{KP + KL}{2}$$

Wielkość x nazywamy albo miejscem zera (MO), albo błędem kolimacji koła pionowego.

Ażeby ten błąd usunąć, należy przy celu do tego samego punktu w obydwu położeniach lunety dokonać odczytów α_1 i α_2, obliczyć α i, kierując na ten sam punkt lunetę przy kole prawem, unieruchomić zaciskiem lunetę i śrubą rektyfikacyjną dźwigni alhidady koła pionowego sprowadzić zero I nonjuszu na odczyt α. Oczywiście wówczas oś libeli wychyli się od poziomu; sprowadzimy ją (o ile jest osadzona na alhidadzie koła pionowego) do poziomu śrubkami rektyfikacyjnemi samej libeli. Gdy zaś libela jest połączona z dźwigarkiem, ograniczamy się do przesunięcia nonjuszów. Nie należy stąd wnioskować, by osadzenie libeli na dźwigarku było praktyczniejsze od osadzenia jej na alhidadzie koła pionowego; w ostatnim wypadku zawsze mamy po rektyfikacji kontrolę właściwego położenia nonjuszów (wychylenie alhidady o bardzo nieznaczny kąt wskaże libela, gdy jest osadzona na alhidadzie, i nie wskaże, gdy jest osadzona na dźwigarku).

Poza tem libela, osadzona na alhidadzie, umożliwia łatwe określenie jej przewagi, gdyż, notując raz przy danem położeniu bańki libeli odczyt z koła pionowego, wychylamy alhidadę śrubą rektyfikacyjną, przesuwającą dźwignię alhidady, do chwili, gdy bańka libeli wychyli się o kilka podziałek; bierzemy wówczas drugi odczyt z koła pionowego. Iloraz z różnicy obydwu odczytów z koła przez ilość podziałek libeli, o którą przesunęła się jej bańka między obydwoma odczytami, jest przewagą libeli, tem ściślej określoną, im z większej ilości takich par spostrzeżeń otrzymamy te ilorazy; za ostateczną wielkość przewagi przyjmiemy średnią arytmetyczną.

§ 277. Pomiar kątów pionowych z uwzględnieniem wychyleń bańki libeli.

Przy niwelacji trzygonometrycznej na krótszych odległościach, zmienność stanu warstw powietrza bardzo nieznacznie odbija się na dokładności pomiarów kątów pionowych, dzięki czemu możemy pomiar ten wykonywać z całą dostępną przy pomiarach dokładnością.

Przy dokładniejszych libelach na alhidadzie koła pionowego, zamiast sprowadzenia osi libeli ściśle do poziomu, praktyczniej będzie notować stan libeli i obliczać odpowiednią dla danego odczytu poprawkę.

Oznaczając literą τ przewagę libeli o podziale bieżącym, dla odczytów a i b końców bańki, dla jej środka mamy odczyt $\frac{1}{2}(a + b)$, dla wychylenia zaś osi libeli stosujemy:

$$p = \left[\frac{1}{2}(a + b) - m\right]\tau$$

gdzie m oznacza położenie punktu głównego podziału libeli; inaczej:

$$p = (a + b - 2m)\frac{\tau}{2}$$

gdzie $2m$ jest to ilość działek na libeli, zaś a oznacza lewy odczyt.

Ponieważ podział koła biegnie w kierunku prawym (od 0^0 do 360^0), więc do odczytu z koła pionowego dodajemy obliczone p.

Przy podziale symetrycznym na libeli, do odczytu lewego końca bańki przypisujemy znak —, prawego znak +, i stosujemy wzór na wielkość poprawki z koła pionowego:

$$p = (a + b)\frac{\tau}{2}$$

P r z y k ł a d: Podział na libeli bieżący; średnia z nonjuszów $9^0\,29'\,35''$; $\tau = 8''$, stan libeli o 30 podziałkach:

$$a = 11,\quad b = 23$$

$$p = (11 + 23 - 30)\frac{8}{2} = 16''$$

Ostateczny odczyt:

$$9^0\,29'\,35'' + 16'' = 9^0\,29'\,51''$$

§ 278. T a c h y m e t r j a.

Tachymetrja (dosłowne tłumaczenie — szybki pomiar) obecnie jest uważana za dział pomiarów wysokościowych; różni się od pomiarów wysokościowych, metodą trygonometryczną wykonywanych, głównie tem, że jednocześnie z pomiarem kąta pochylenia ustala się z dalekomierza odległość do celu i kąt kierunkowy celu.

Stąd widzimy, że tachymetrja jest połączeniem metody biegunowej zdjęcia sytuacyjnego z trygonometrycznem określaniem wysokości.

Jeżeli przez stanowisko przyrządu uniwersalnego B poprowadzimy osie spółrzędnych x (za którą możemy obrać nawet prostą, łączącą dane stanowisko z innem, znanem co do położenia), y i oś wysokości z, wówczas punkt P będzie wyznaczony, gdy określone zostaną:

1) kąt kierunkowy α promienia BP,
2) odległość $BP = D$, z której określimy jej rzut d, mając
3) kąt pochylenia φ promienia BP.

Jeżeli oś X będzie kierunkiem południka, wówczas kąt α nazwiemy azymutem.

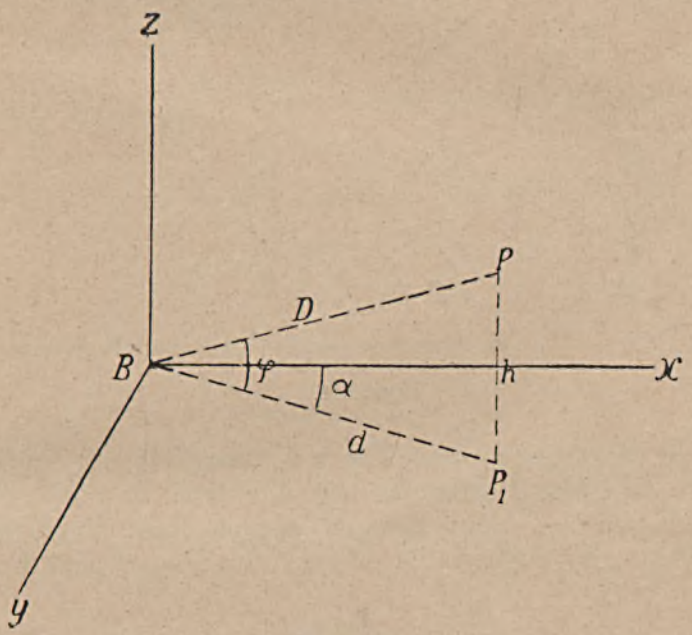
Jak wiadomo:

$$d = D \cos \varphi$$

$$h = D \sin \varphi$$

Wielkość α, d i różnica wysokości h dają możność wyznaczenia położenia punktu P na planie tak pod względem sytuacyjnym, jak wysokościowym, gdyż

$$H_P = H_B + h$$



Rys. 600.

Z tego powodu α, d i h noszą nazwę elementów tachymetrycznych (α kątowy, d i h linjowe).

Przyrządy, używane do pomiarów tachymetrycznych, zwane są tachymetrami. Winny być zaopatrzone w 1) koło poziome do określania kątów α, 2) koło pionowe do określania kątów φ i 3) w siatkę dalekomierczą, ażeby D i d mogły być określone szybko z danych pomiaru polowego.

Tachymetry dzielą się na:

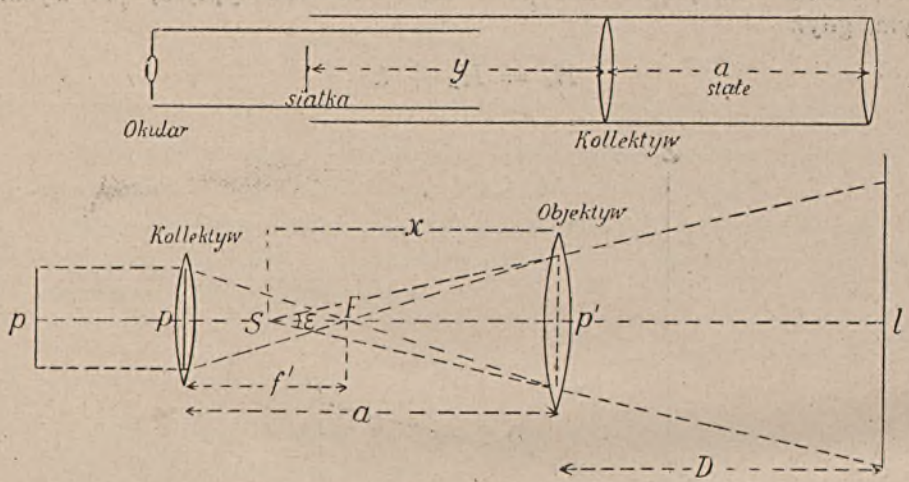
1) tachymetry zwykłe o trzech nitkach,
2) tachymetry zwykłe o dwu nitkach, z których jedna jest ruchoma,
3) autoredukcyjne tachymetry,
4) tachymetry ze śrubą Stampfera lub tangencjalną.

Uzupełnimy przed ich rozpatrzeniem dział o dalekomierzach, gdyż, prócz rozpatrzonych poprzednio dalekomierzy Rejchenbacha i Ertela, ma zastosowanie dalekomierz Porro.

§ 279. Dalekomierz Porro.

Luneta Porro posiada między objektywem i siatką nitek kolektyw nieruchomo osadzony w rurce objektywu, a więc w stałej od objektywu odległości a i w zmiennej odległości od siatki nitek.

Promienie, idące równolegle do osi lunety przez siatkę nitek, załamują się w przedniem ognisku F kolektywu i, przechodząc przez objektyw



Rys. 601.

załamują się po raz drugi, tworząc kąt ε o wierzchołku S, którego położenie ze względu na stałość odległości od kolektywu do objektywu również jest stałe. Taki sam jest bieg promieni, idących przez objektyw do nitek.

Z rysunku otrzymujemy dla obrazu urojonego S punktu F:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a-f'} - \frac{1}{x}$$

gdzie f jest ogniskową objektywu; skąd

$$\frac{1}{x} = \frac{f-a+f'}{f(a-f_1)}$$

oraz

$$x = \frac{f(a-f')}{f-a+f'}$$

następnie z równości:

$$\frac{D+x}{x} = \frac{l}{p'} \quad \text{i} \quad \frac{p'}{p} = \frac{a-f'}{f'}$$

otrzymujemy:

$$D + x = x \frac{l}{p'} \quad \text{i} \quad p' = \frac{a - f'}{f'} p$$

więc

$$D = - x + x \frac{l}{p'} = - \frac{f(a - f')}{f - a + f'} + \frac{f(a - f')}{f - a + f'} \cdot \frac{l}{p'} ;$$

i, wprowadzając p',

$$D = - \frac{f(a - f')}{f - a + f'} + \frac{f f'}{f - a + f'} \cdot \frac{l}{p} .$$

Jeżeli oznaczymy odległość od łaty do środka instrumentu literą d, odległość od środka instrumentu do objektywu literą δ, wówczas

$$d = \delta + D$$

lub

$$d = \delta - \frac{f(a - f')}{f - a + f'} + \frac{f f'}{f - a + f'} \frac{1}{p} . l$$

Oznaczając zapomocą

$$c = \delta - \frac{f(a - f')}{f - a + f'}$$

$$k = \frac{f f'}{f - a + f'} \cdot \frac{1}{p}$$

otrzymujemy stosowany wzór dla odległości do łaty:

$$\underline{d = kl + c}$$

W lunecie Porro wielkości f, a, f' i δ są tak dobrane, że

$$\delta = \frac{f(a - f')}{f - a + f'}$$

skąd

$$c = 0,$$

więc

$$\underline{d = kl}$$

Właściwość $c = 0$ dalekomierza Porro jest wielką jego zaletą.

Wzór $d = kl$ wskazuje, że odcinki na łatach, widoczne ze środka instrumentu, są proporcjonalne do odległości od łat do środka instrumentu. Przecięcie się osi lunety z osią obrotu instrumentu jest tym właśnie przez Porro nazwanym analaktycznym (niezmiennym) punktem S; punkt ten w lunecie Porro odpowiada środkowi instrumentu, w lunecie Ertela i Rejchenbacha leży poza nim, mianowicie w przedniem ognisku objektywu.

Aby sprawdzić podaną stałą dalekomierza (względnie ją określić), należy odmierzyć w terenie poziomym od stanowiska instrumentu 100 metrów lub t. p. i, ustawiając na końcu odcinka łatę, wziąć odczyty ze skrajnych

nitek; różnica ich wyniesie l. Jeżeli obliczone $d = k\,l$ nie odpowiada odmierzonej odległości, to obliczymy spółczynnik dalekomierza

$$k_1 = \frac{100}{l}$$

Gdy nitki możemy przesuwać zapomocą śrubek korekcyjnych, wówczas podaną stałą dalekomierza lepiej zachować, gdyż jest równa okrągło 100 lub 200. Obliczymy wtedy

$$l = \frac{100}{k}$$

skierujemy środkową nić na odczyt a z łaty na wysokości osi celowej i przesuniemy górną i dolną nić na odczyty $a + \frac{l}{2}$ i $a - \frac{l}{2}$, nie zmieniając położenia osi celowej (środkowa nić na a).

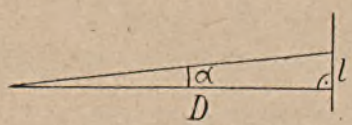
§ 280. Dalekomierze o dwu nitkach, stałej i ruchomej.

Dalekomierze te (w tachymetrach Starke w Wiedniu) posiadają lunetę Porro o dwu nitkach: dolnej nieruchomej i górnej, którą możemy przesuwać (zapomocą śruby mikrometrycznej przy diafragmie siatki) w kierunku pionowym. Obydwie nitki przy użyciu instrumentu winny być poziome (są wzajemnie równoległe). Podział na bębenku śruby mikrometrycznej umożliwia ścisłe określenie stopnia przesunięcia górnej nici.

Jeżeli stopień przesunięcia górnej nitki wzdłuż całego obrazu określa się n obrotami bębenka, literą zaś z oznaczymy krok śruby, to wielkość obrazu jest równa

$$o = n\,z$$

Gdy oś celowa (za krzyż nitek przyjmujemy skrzyżowanie pionowej z nieruchomą poziomą nitką) skierowana jest $\perp$-e do łaty i obydwie nitki odcinają na łacie l, kąt zaś, pod którym widzimy l, wynosi α, wówczas



Rys. 602.

$$D = l\,ctg\,\alpha$$

Lecz ze stosunku ogniskowej układu soczewki objektywu i soczewki między objektywem a okularem f do wielkości obrazu o otrzymujemy

$$ctg\,\alpha = \frac{f}{o}$$

uwzględniając I-e równanie:

$$ctg\,\alpha = \frac{f}{n\,z} = \frac{f}{z} : n = \frac{c}{n}$$

skąd

$$D = l \frac{c}{n}$$

Wielkości f i z można tak dobrać, by c było liczbą okrągłą; tak, np., w tachymetrach Starke $c = 500$; wówczas:

$$D = \frac{500\, l}{n}$$

Określenie odległości z tego dalekomierza może być dokonywane albo przy jednej stałej z dwu wielkości l i n, albo przy obydwu zmiennych.

§ 281. Tachymetryczne określenie różnicy wysokości.

Przy użyciu zwykłych tachymetrów dla tego celu z pomiaru polowego uzyskujemy: a) kąt pochylenia α osi celowej i b) trzy odczyty z łaty; różnica skrajnych wynosi l; średni odczyt nazwijmy S.

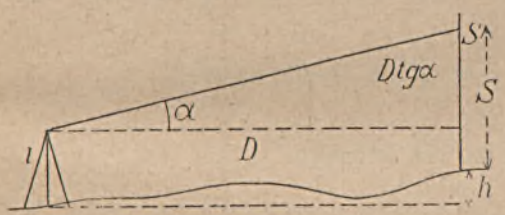
W § 161 ustaliliśmy, że rzut poziomy odległości do łaty określa się wzorem przybliżonym:

$$D = C \cos \alpha + k\, l \cos^2 \alpha$$

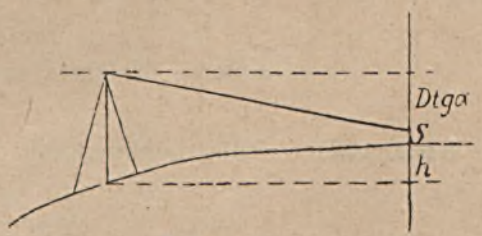
dla dalekomierza zaś Porro:

$$D = kl \cos^2 \alpha$$

Gdy D jest określone, dane są z pomiaru wysokość osi obrotu lu-



Rys. 603.



Rys. 603a.

nety i, kąt pochylenia osi celowej α i odpowiadający jej odczyt S liczony od ziemi, (przy zerze łaty u jej spodu), wówczas różnica wysokości:

$$h = D\, tg\, \alpha + i - S$$

Dla ułatwienia obliczeń na łacie oznacza się punkt, którego odległość od spodu łaty równa się i; kierując przy pomiarze oś celową na ten punkt, uzyskujemy

$$S = i$$

dzięki czemu

$$h = D\, tg\, \alpha$$

Gdyby użyta została do pomiaru łata z zerem u góry, o długości t i wzięto odczyt S (oczywiście, odpowiadający odcinkowi, liczonemu od góry

łaty), wówczas do rachunku należałoby wprowadzić dopełnienie S do długości łaty, t. j.

$$S_1 = ł - s$$

Kąt α może być dodatni na wzniesieniach i ujemny na pochyłościach. Odpowiednio do tego obliczać należy wyraz $D\,tg\,(\pm\,\alpha)$

Różnica wysokości h wyznacza się, pomijając D, z l i α, mianowicie dla Porro:

$$h = D\,tg\,\alpha = kl\cos^2\alpha\,tg\,\alpha = kl\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\,kl\sin 2\alpha$$

dla Reichenbacha zaś i Ertlela:

$$h = D\,tg\,\alpha = (c\cos\alpha + kl\cos^2\alpha)\,tg\,\alpha = c\sin\alpha + kl\sin\alpha\cos\alpha$$

Dla potrzeb praktyki wystarczają wzory:

$$D = (c + kl)\cos^2\alpha$$

$$h = (c + kl)\sin\alpha\cos\alpha$$

które otrzymamy, przekształcając D,

$$D = c\cos\alpha + kl\cos^2\alpha = (c + kl)\cos^2\alpha + c\cos\alpha - c\cos^2\alpha$$

$$h = (c + kl)\sin\alpha\cos\alpha + c\sin\alpha - c\sin\alpha\cos\alpha$$

ponieważ przy $c = 0{,}50\ m$ i kącie $\alpha = 20^0$ ostatnie dwa wyrazy sięgają 5 *cm*, co dla celów zdjęcia tachymetrycznego można pominąć, tem bardziej, że kąt $\alpha = 20^0$ rzadko się spotyka w praktyce, — przeto stosuje się wzór:

$$h = (c + kl)\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\,(c + kl)\sin 2\alpha$$

z odrzuceniem C dla dalekomierza Porro, dla którego:

$$h = \frac{1}{2}\,kl\sin 2\alpha$$

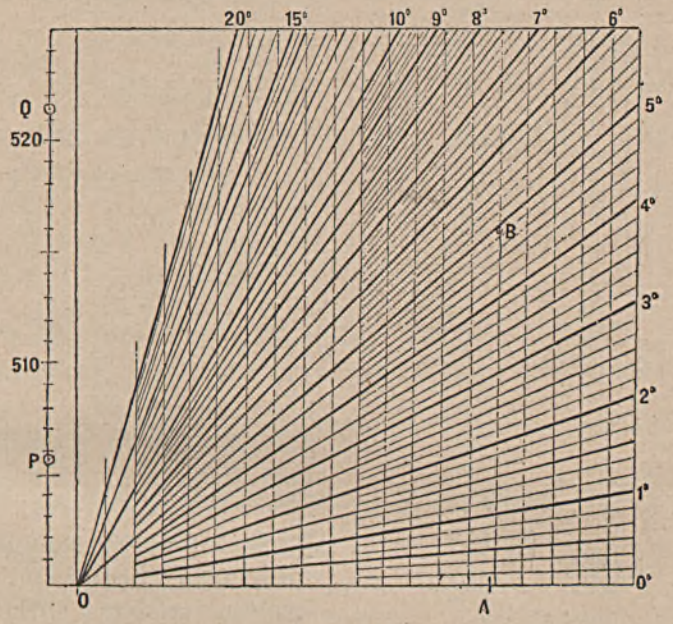
§ 282. Pomoce do obliczeń tachymetrycznych.

Wykres dla $D = (c + kl)\cos^2\alpha$ rozpatrzyliśmy w § 166.

W prostszy sposób budujemy wykres dla wzoru $D\,tg\,\alpha$. Mianowicie, dla poszczególnych α (do 10^0 co $10'$, od 10^0 do 20^0 co $30'$) obliczamy h dla $D = 300\ m$ do 6^0, i stopniowo mniejszych D dla większych kątów; na prostej OA w skali planu odkładamy D, a na rzędnej końca — kilkakrotnie powiększone h, opisując kolejne powiększone metry na podziałce rzędnej O.

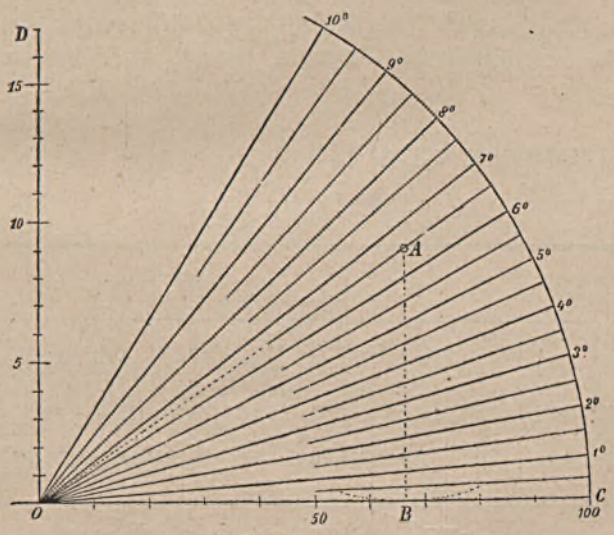
Biorąc w cyrkiel odległość z pomiaru do określonego punktu, odetniemy ją od O do A i dla danego kąta pochylenia (np. $4^0\ 57'$) weźmiemy w cyrkiel rzędną BA, której wielkość określimy z podziałki: $PQ = AB$; wobec tego, że P oznacza wysokość stanowiska, więc Q daje wysokość pikietu (rys. 604).

Wykres dla wzoru $h = \frac{1}{2}(c + kl) \sin 2\alpha = \frac{1}{2} d \sin 2\alpha$ zbudujemy, zataczając promieniem v, równym np. 300 m, w skali planu łuk koła



Rys. 604.

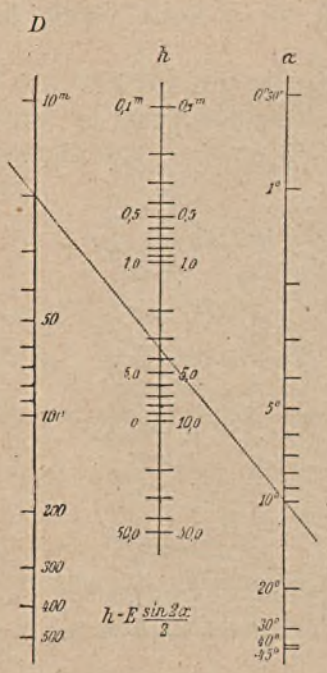
z punktu O, i dla dziesięciokrotnie powiększonych sin kątów co 30′ określimy rzędne D sin 30′, D sin 1°, D nis 1° 30′ i t. d. Przecięcia się tych



Rys. 605.

rzędnych z łukiem opisujemy 30′, 1°, 1° 30′ i t. d. Aby ze wzoru $h = \frac{1}{2} d \sin 2\alpha$ otrzymać h, na promieniu, opisanym na końcu jako α, odcinamy $d = OA$, bierzemy w cyrkiel rzędną AB i odczytujemy ją z pięciokrotnie powiększającej w porównaniu z OC podziałki na OD (rys. 605).

Wreszcie zasługuje na uwagę nomogram tachymetryczny, zbudowany przez Werkmeistra. Na skrajnych pionowych prostych wniesiony jest podział D i α, na środkowej h. Prosta, łącząca dane D z α, przecina środkową kreskę h w punkcie, dającym rozwiązanie, którego dokładność wprawdzie nie wszędzie jest jednakowa (rys. 606).



Rys. 606.

Z tablic tachymetrycznych wymienić należy tablice Jordana, ułożone dla kątów 0° — 30° co 3′ (odległości 10 — 100 *m*), od 0° do 20° co 2′ (odległości 100 — 175 *m*) i dla kątów 1° — 10° co 1′ (odległości 175 — 250 *m*). Tablice nie uwzględniają mniejszych od 10 *m* odległości, gdyż jest to zbyteczne dla praktyki (łaty nie ustawiają się zbyt blisko od tachymetru). W razie potrzeby (odległość, mniejsza od 10 *m*), otrzymaną odległość mnożymy kilkakrotnie i wzięte z tablic wyniki dzielimy przez użyty mnożnik.

Odwrotnie postępujemy, gdy odczytana na łacie odległość jest większa od 250 *m*, gdyż tablice kończą się dla tych odległości. Układ tablic jest następujący: w tytule każdej stronicy u góry wypisane są okrągłe liczby metrów i wzór $^1/_2 \sin 2\alpha$. Kolumny odpowiadają wypisanym u góry stopniom, wiersze — minutom. Skrajna prawa kolumna odpowiada wzorowi $d \cos^2 \alpha$.

Załączamy stronicę takiej tablicy:

133 ($^1/_2 \sin 2\alpha$)

α	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	133 $\cos^2 \alpha$	
0′	0,00	2,32	4,64	6,95	9,26	11,55	13,83	16,09	18,33	20,55	0°	133,0
2′	0,08	2,40	4,72	7,03	9,33	11,62	13,90	16,16	18,40	20,62	0° 30′	
4	0,15	2,48	4,79	7,11	9,41	11,70	13,98	16,24	18,48	20,70	1°	
— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —
— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —
	10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	12°	127,3
— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —
											12° 30′	126,9
14′	23,25	25,41	27,54	29,63	31,70	33,72	35,70	37,63	39,52	41,37	12° 40′	126,6
— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —	— —

Przykład: Odczytano w polu $l = 133$, $\alpha = 12^0\ 14'$;
wypisujemy z tablic $h = 27{,}54$ $d = 127{,}1$,
gdy dla: $\alpha = 12^0$: $133 \cos^2 \alpha = 127{,}3$
$\alpha = 12^0\ 30'$: $133 \cos^2 \alpha = 126{,}9$,
więc dla $\alpha = 12^0\ 14'$ $d = 127{,}1$ (z interpolacji).

Prócz tablic i wykresów używamy suwaków. Rozpatrzmy suwak logarytmiczno-tachymetryczny.

Suwak tachymetryczny.

Podstawy suwaka rozpatrzyliśmy w § 27.

W najnowszych suwakach tachymetrycznych na przesówce są naniesione dwa podziały: $\log \cos^2 \alpha$ i $\log \frac{1}{2} \sin 2\alpha$. Początek podziału odpowiada środkowi przesówki, oznaczonemu 45^0. Podział $\log \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ biegnie w lewo od 45^0 aż do 7^0, poczem od 7^0 do $0^0\ 35'$ biegnie z dolnej strony przesówki od jej prawego końca w lewo. W prawej stronie górnej części przesówki od kreski 45^0 biegnie w prawo zmniejszający się podział $\log \cos^2 \alpha$.

Każda kreska dolnego podziału $\log \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ (od 7^0 do $0^0\ 35'$) jest w taki sposób naniesiona na dolnej części suwaka, że w porównaniu do swego właściwego położenia (które możemy sobie wyobrazić na przedłużeniu górnej powierzchni przesówki w lewo od 7^0) jest przesunięta na odległość $\log 100$. Wskutek tego wyniki, przeczytane na suwaku zapomocą dolnego podziału przesówki, należy zmniejszać 100 razy.

Ponieważ $\log \cos^2 \alpha$ przy α, zawartem w granicach od 0^0 do 45^0, zmienia się od $\log 1 = 0$ do $\log \frac{1}{2} = -\log 2$, zaś $\frac{1}{2} \log \sin 2\alpha$ dla tych samych kątów zmienia się od 0 do $\log \frac{1}{2} = -\log 2$, więc obydwa podziały umieszczają się na obydwu stronach przesówki.

Ażeby zapomocą odczytanego na łacie l i kąta α obliczyć różnicę wysokości h (bez uwzględnienia wysokości osi obrotu lunety i średniego odczytu na łacie) i rzut poziomy odległości:

1) należy do kreski l górnego podziału suwaka dosunąć kreskę zerową przesówki i nad α podziału $\frac{1}{2} \log \sin 2\alpha$ przesówki odczytać wynik h na górnym podziale suwaka, oraz,

2) nie poruszając przesówki, nad kreską α podziału $\log \cos^2 \alpha$ odczytać d.

Pamiętać należy, że jeżeli wynik h odpowiada kątowi, którego kreska leży w prawo od zera, wówczas wynik należy zmniejszać 100 razy.

Ażeby nie wprowadzać błędów, polegających na przeniesieniu przecinka w wyniku, należy pamiętać, że

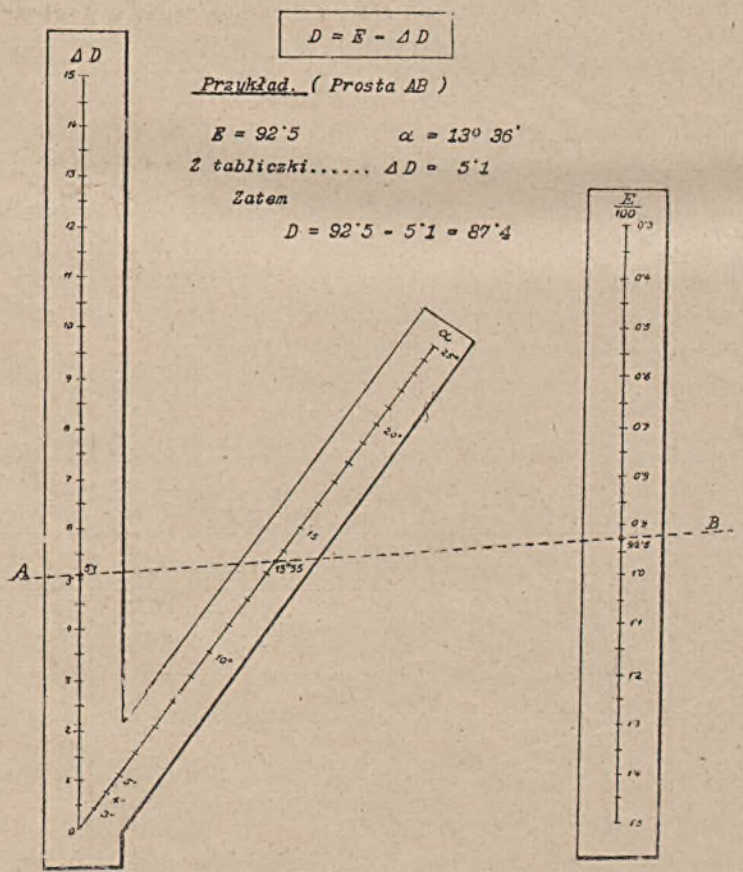
$$\frac{l}{10} > h > \frac{l}{10} \quad \text{przy} \quad 5^0\,46' > \alpha > 5^0\,46'$$

$$\frac{l}{100} > h > \frac{l}{100} \quad \text{przy} \quad 0^0\,34' > \alpha > 0^0\,34'$$

A więc:

przy $\alpha < 0^0\,34'$ jest $h < \frac{l}{100}$

przy $0^0\,34' < \alpha < 5^0\,46'$ jest $\frac{l}{100} < h < \frac{l}{10}$



Rys. 607.

przy $\alpha > 5^0\,46'$ jest $h > \frac{l}{10}$

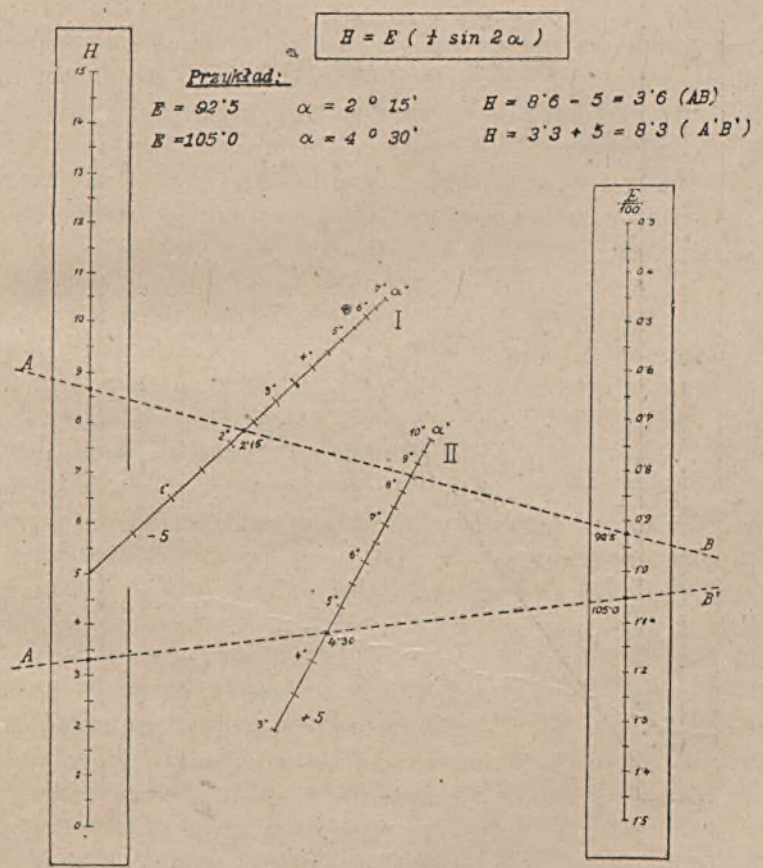
Dla wyrobienia wprawy w użyciu suwaka tachymetrycznego podajemy kilka przykładów dla spółczynnika 100 dalekomierza:

$l = 52,$	$\alpha = 20^0\,15'$	$d = 45,7$	$h = 16,89$
$l = 105,$	$\alpha = 5^0\,15'$	$d = 104,1$	$h = 9,57$
$l = 182,$	$\alpha = 1^0\,5'$	$d = 181,9$	$h = 3,44$
$l = 186,$	$\alpha = 0^0\,33'$	$d = 186,0$	$h = 1,79$

Przy kątach mniejszych od $0^0\,35'$ zwiększamy dziesięciokrotnie kąt, i tyleż razy zmniejszamy odległość.

Nomogramy tachymetryczne.

Znaczną oszczędność czasu daje stosowanie nomogramów tachymetrycznych (prof. Laski, rys. 607 i 608). Nomogram dla określenia rzutu poziomego zbudowany jest dla poprawki Δd odczytanej odległości, a więc:



Rys. 608.

$$\Delta D = E - E \cos^2 \alpha = E \sin^2 \alpha$$

Nomogram ten składa się z lewej podziałki ΔD, ukośnej α i prawej $\frac{E}{100}$ Przykładamy ekierkę, lub naciągamy nić, wzdłuż prostej, łączącej $\frac{E}{100}$ na prawej podziałce (dla E, równego np. 92,5) z α na środkowej (np. 13° 35'), i otrzymujemy poprawkę na lewej podziałce (np. 5,1, patrz rys. 607).

Nomogram dla obliczenia różnicy wysokości składa się z 4-ch podziałek: lewej H, prawej $\frac{E}{100}$ (odległości), I ukośnej i II ukośnej. Użycie nomogramu polega na poprowadzeniu prostej przez $\frac{E}{100}$ i odpowiednie α do przecięcia się z podziałką H, w punkcie, który daje wynik. Wynik ten zmniejszamy o 5, jeżeli użyta została I podziałka α, zwiększamy zaś o 5, jeżeli użytą była podziałka II dla α. Przykłady patrz rys. 608.

Wadą nomogramów tachymetrycznych jest konieczność stosowania kilku podziałek dla α. Wyniki, uzyskiwane z nomogramów, są, naogół biorąc, mniej dokładne, niż na suwaku.

§ 283. Przebieg pomiaru tachymetrycznego.

Pomiar tachymetryczny ma na celu uzyskanie materjału dla sporządzenia planu warstwicowego. Organizacja samego pomiaru podobna jest do organizacji niwelacji metodą punktów rozproszonych. A więc kolejność czynności jest następująca:

1) obieramy i wyznaczamy w terenie stanowiska tachymetru i repery,

2) określamy a) z pomiaru poligonowego — wzajemne położenie obranych stanowisk oraz b) z niwelacji — wysokość tych stanowisk i reperów,

3) dokonywamy na każdem stanowisku pomiaru tachymetrycznego punktów rozproszonych.

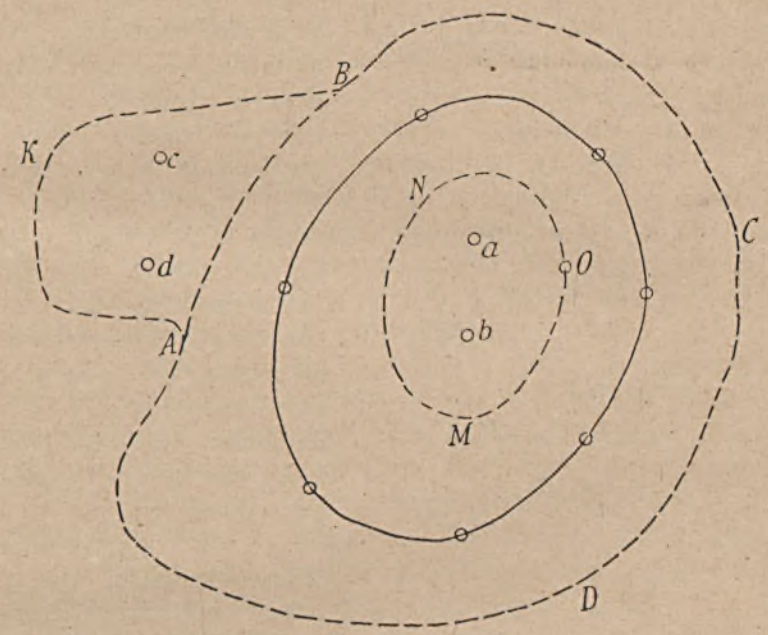
Ilość stanowisk uzależnia się od wielkości obszaru, jego charakteru i zasięgu tachymetru. Zwykle unikamy odległości, większych od 200 *m*. Wynikałoby stąd, że z jednego stanowiska tachymetru moglibyśmy zebrać punkty, położone w obrębie koła o promieniu 200 *m*, a więc o powierzchni około 13 *ha*. Liczba ta jednak winna być zmniejszona, mianowicie wobec tego, że zdjęcia tachymetryczne stosujemy w miejscowościach falistych; nierówności terenu nie zawsze pozwalają na obserwacje punktów w granicach zasięgu. Z tego względu zwykle ilość stanowisk wypada większa od przypuszczalnej.

Kierując się oszczędnością czasu, staramy się stanowiska tachymetru obierać na punktach o większym zasięgu, a więc unikamy stanowisk u podnóża wzgórz, w bliskości bezpośredniej terenów, nie podlegających pomiarowi: tak np., przy meljoracjach gruntów ornych jako stanowiska tachymetru nie będziemy obierać punktów, położonych na granicy lasu i t. p.

W terenie, mocno pofałdowanym, dogodnie jest obierać jako stanowiska punkty najwyższe.

Stanowiska tachymetryczne wiązane są pomiarem poligonowym i niwelacyjnym. Odległość między stanowiskami waha się od 200 do 350 *m*, w zależności od falistości terenu. Najoszczędniejsze ustalenie stanowisk w terenie jest takie, przy którem możemy najbardziej wyzyskać teren. Będzie to możliwe wówczas, gdy stanowiska obierzemy na linjach równoległych, odległych wzajemnie o wielkość, nieco mniejszą od dwukrotnego zasięgu.

Warunki terenowe i sytuacyjne wpływają jednakże bardzo często na inny układ linij stanowisk. Wówczas powstają między linjami stanowisk przestrzenie, wymagające uzupełnienia sieci dodatkowemi stanowiskami.



Rys. 611.

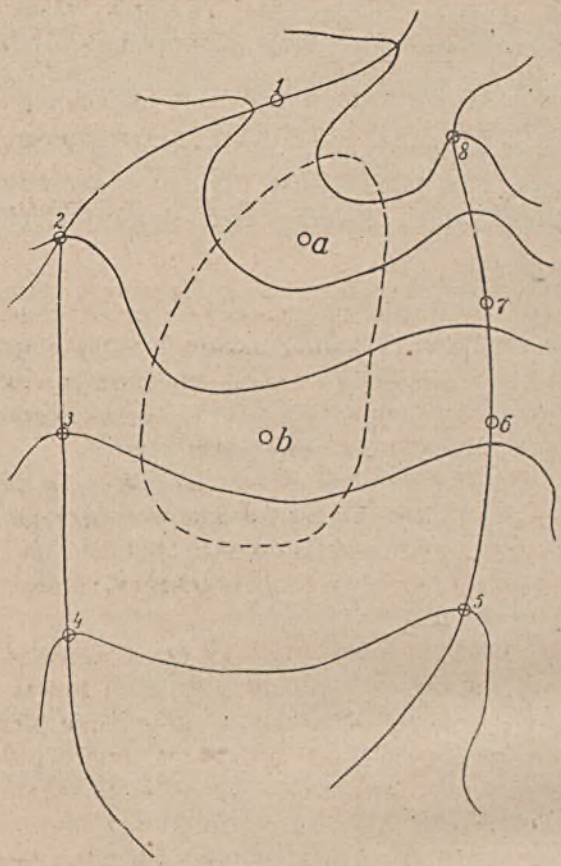
Tak, np., rysunek przedstawia obszar, którego granice *AKBCDA* są wykreślone kreskowaną linją; stanowiska są obrane na linji zamkniętej ciągłej, której tachymetryczny zasięg umożliwia pomierzenie obszaru między linjami *ABCD* i *MNO*. Dla pomiaru obszarów wewnątrz *MNO* i *AKB* założone są dodatkowe stanowiska *c*, *d*, *a* i *b*.

Jako inny przykład służyć mogą grzbietowe linje stanowisk 1, 2, 3 i 4 5, 6, 7 i 8 oraz uzupełniające stanowiska *a* i *b* (rys. 612).

Stanowiska wyznaczają się w terenie palikami, wbitemi równo z ziemią, i numerowanemi świadkami, wystającemi na 20 — 30 *cm* nad powierzchnią. Repery — jak w niwelacji terenowej—utrwalają się w miejscach, gwarantujących zachowanie punktów.

Ustalenia wzajemnego położenia stanowisk dokonamy zapomocą pomiaru poligonowego sieci stanowisk; wobec tego, że ścisłe ustalenie granic nie wchodzi w zakres prac tachymetrycznych, zdejmiemy je zapomocą dalekomierza ze stanowisk, przy granicy położonych. Z tego względu na

granicach własności nie należy wyznaczać samodzielnych poligonów. Podobnie, jak w siatkach poligonów, i tutaj odróżniamy poligony główne (związkowe), tworzące szkielet zdjęcia, od poligonów drugorzędnych, nawiązywanych do głównych. Boki poligonów głównych zmierzymy taśmą jeden raz, kontrolując ten pomiar dalekomierzem dla wykrycia grubych błędów; na dłuższych bokach tachymetr będzie w tym celu ustawiany pośrodku. Boki poligonów drugorzędnych, nawiązywanych do pierwszorzędnych, o ile nie są zbyt długie, mogą być mierzone dalekomierzem, przytem dwukrotnie, z ustawieniem nitek przy drugim pomiarze na innej części łaty, względnie na innych jej podziałkach. Dla kontroli odczytujemy trzy nitki, zestawiając różnice między środkową, a każdą ze skrajnych i notując przy każdem ustawieniu lunety kąt pochylenia. Kąty poligonów głównych mierzymy dwukrotnie, drugorzędnych jednokrotnie.



Rys. 612.

W podobny sposób określimy wysokości stanowisk i reperów, tworząc z ich sieci siatkę niwelacyjną i wyrównywając ją odpowiednio. Za poziom porównawczy możemy przyjąć poziom, dowolnie umówiony przyjmując, np., za 100 metrów wysokość I-ego reperu, lub też, gdy należy pomiar odnieść do poziomu morza, określamy wysokość I-ego (dowolnego) reperu z nawiązania go ciągiem niwelacyjnym do najbliżej położonego reperu niwelacji państwowej.

Sieć poligonów głównych obliczymy w lokalnym układzie spółrzędnych (przyjmując spółrzędne jednego ze stanowisk za zero—zero). Po naniesieniu w skali tych poligonów ze spółrzędnych na plan, drugorzędne poligony możemy wkreślić graficznie, po obliczeniu i wyrównaniu azymutów poszczególnych boków zapomocą przenośnika lub tablic tangensów. Zauważyć należy, że na mniejszych obszarach nawet poligony pierwszorzędne nanoszono nieraz na plan graficznie, bagatelizując w znacznym stopniu odchyłki linjowe. Systemu takiego nie należy stosować.

Właściwy pomiar tachymetryczny winien następować po ustaleniu i pomierzeniu poligonów głównych, gdyż drugorzędne poligony mogą być mierzone w połączeniu ze zdjęciem tachymetrycznem z odpowiednich stanowisk.

Na każdem, stanowisku odnotować przedewszystkiem należy:

1) wysokość osi obrotu lunety (t. zw. wysokość tachymetru), 2) kierunek na poprzednie (wogóle ustalone lub dające się ustalić na planie) stanowisko i 3) miejsce zera koła pionowego, określone zapomocą celowania przy dwu położeniach lunety na wyraźny punkt.

W wypadku użycia tachymetru repetycyjnego przy celu do danego stanowiska sprzęgamy zera limbusu i alhidady, uzyskując w ten sposób kierunek, orjentujący całe stanowisko, równy zeru.

Po zorjentowaniu stanowiska następuje pomiar punktów rozproszonych.

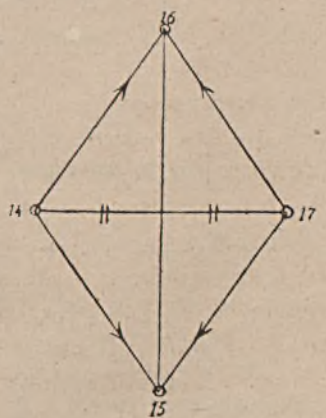
Przy celu do każdego punktu notujemy:

a) odczyty z trzech nitek, gdy zaś jest to niemożliwe (przeszkody terenowe, roślinne) przynajmniej ze środkowej i jednej skrajnej. Dogodnie jest dla obliczeń mieć oś celową skierowaną na wysokość tachymetru na łacie. W tym celu łaty tachymetryczne zaopatrzone są w przesuwane obrączki żelazne, dające się ustawić na dowolnej działce łaty;.

b) odczyt z koła poziomego, brany z dokładnością, nieco wyższą od dokładności nakreślenia kierunku na plan. Dostateczną dokładność uzyskamy, szacując ilość minut na oko z położenia zera nonjuszu między najbliższemi kreskami limbusu. Błąd, stąd wynikający, nie przekroczy nawet 4′ dla limbusów, podzielonych na półstopnie;

c) odczyt z koła pionowego, brany z całą możliwą do osiągnięcia dokładnością, przy celu na wszystkie punkty w jednem położeniu lunety. Pomiar tachymetryczny wykonywa się dostatecznie szybko, gdy jedna siła pracuje przy tachymetrze w charakterze obserwatora, druga zaś obiera odpowiednie dla ustawienia łat punkty charakterystyczne i wnosi je do szkicu (croguis). Przy dwu siłach technicznych wystarczy 3 robotników z łatami. Gdy jednak obserwator otrzymuje pomocnika, który notuje odczytywane przez obserwatora spostrzeżenia, mogą być użyte 5 — 6 łat. Jedna więc pomocnicza siła i trzech dodatkowych robotników z łatami podwajają tempo pracy. Najtrudniejszą częścią pracy jest obieranie charakterystycznych punktów terenu. Punkty te mogą być obierane rzadziej, niż we wzajemnej 40-metrowej odległości.

Na szkicu sąsiednie punkty, leżące na końcu odcinka o stałym spadzie, łączą się prostą z oznaczeniem (przy większych pochyleniach) strzałką kierunku spadu. Sąsiednie zaś punkty, oddzielone wnęką lub wzgórzem, łączą się prostą, kilkakrotnie przekreślaną.



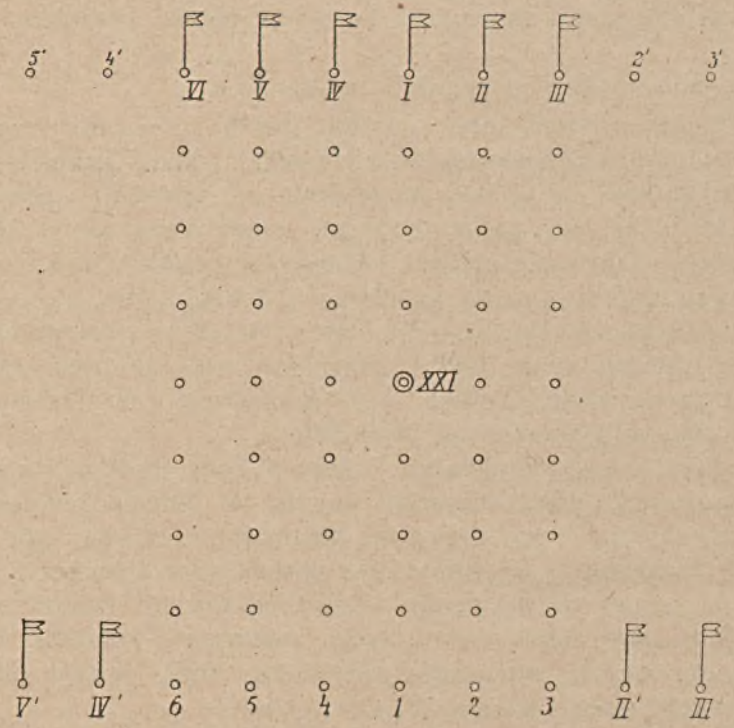
Rys. 613.

Rysunek 613 wskazuje punkty 14 i 17, leżące na zboczach doliny 16 – 15.

Na szkicu oznacza się również linje sytuacyjne (granice użytków, drogi, rzeczki i t. p. szczegóły), łączące punkty tych załamań, na których, niezależnie od falistości terenu, winny być ustawiane łaty.

Punkty, zdjęte na każdem stanowisku, otrzymują swój numer bieżący, licząc od początku pomiaru, lub co jest praktyczniejsze — od jed-

ności. Kolejność obserwacji każdej łaty winien ustalać technik, szkicujący rysunek terenu i numerujący punkty ustawienia łat. Dla uniknięcia błędów w numeracji przy zapisie u obserwatora, podlegająca pomiarowi łata stoi pionowo, a w tym czasie inne nie powinny zajmować tego położenia. Pomocna tutaj jest umówiona uprzednio sygnalizacja — jak użycie gwizdka, sygnały ręką i t. p. Dla uniknięcia błędów w zapisie, obserwator co 10 punktów daje umówiony sygnał, sprawdzany przez technika,



Rys. 614.

szkicującego teren. W terenach mało porzeźbionych łaty ustawiają się w punktach, tworzących sieć równoległoboków, uzupełnianą punktami o specjalnem znaczeniu.

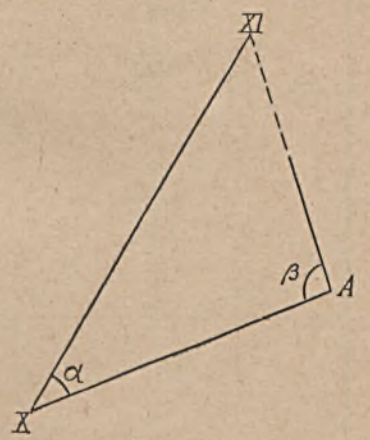
W tym celu na końcu zasięgu, prostopadle do linji stanowisk, we wzajemnej odległości około 40 *m*, odmierzanej krokami, ustawiają się tyczki. Po drugiej stronie stanowiska podobnie ustawiają się łaty 1, 2, 3, 4, 5, 6 przy linji stanowisk i dalej w przyjętej 40 *m* odległości—tyczki. Każdemu robotnikowi wskazuje się kierunek na odpowiednią tyczkę ze sta-

nowiskiem, w kierunku której ma się posuwać, zatrzymując się co 40 *m*. Przy przesuwaniu się w taki sposób ku tyczkom, łaty ustawiane są w punktach, tworzących sieć nieomal zupełnie ściśle zbudowanych kwadratów. Po dojściu do tyczek robotnicy rozstawiają się na prawo i na lewo w odległościach 40, 80 i 120 od skrajnych tyczek w punktach 2′, 3′, 4′, 5′ i t. d. i podobnie wracają do tyczek II′, III′, IV′, V′ i t. d.

Takie postępowanie ułatwia pracę szkicującemu teren i uniemożliwia rozłożenie punktów na zbyt bliskich lub dalekich odległościach. Poza punktami takiej siatki ustawiamy łaty w punktach charakterystycznych.

W szkicowniku polowym przy bardziej złożonych fragmentach form terenowych należy zarysowywać na oko warstwice.

Ponieważ na linjach, łączących stanowiska, znajdują się zaniwelowane paliki, przeto przy pomiarze na danem stanowisku należy jeden z nich wciągnąć do pomiaru tachymetrycznego, celem uzyskania materjału, dającego możność oceny dokładności tachymetrowania. Od takiego punktu należy rozpoczynać pracę na stanowisku, obliczając odrazu wysokość danego z niwelacji punktu na zasadzie danych pomiaru tachymetrycznego. Taki jest tryb postępowania polowego na każdem stanowisku. Stanowiska, zakładane dla uzupełnienia zdjęcia w czasie pomiaru, jak np. *A*, winny być nawiązane kątowo co najmniej z jedną linją stanowisk (przez kąt α). Dla uzyskania kontroli dla *A* należy w p. *A* pomierzyć prócz kierunku na *X*, który zorjentuje stanowisko *A*, jeszcze jeden kierunek na inne już ustalone stanowisko. Odległość *XA* i różnice wysokości określamy dwukrotnie tachymetrycznie, najlepiej z końca i ze środka odcinka *XA*, a przy znacznej długości *XA* — z dwu punktów, leżących wpobliżu środka, na tej prostej.



Rys. 615.

§ 284. Wyciąg czynności przy opracowaniu polowego materjału.

1. Określamy miejsce zera $MO = \frac{KP + KL}{2}$, pamiętając, że licznik tworzy się w zależności od opisu koła pionowego, a więc do sumy odczytów dodajemy 360° lub 180°, albo pozostawiamy ją bez zmiany;

2. obliczamy wszystkie kąty pochylenia, stosując jeden ze wzorów

$$L = KP - MO = MO - KL$$

3. określamy z tablic, wykresów lub suwaka różnicę wysokości;

4. mając wysokości stanowisk, obliczone z niwelacji (lub z tachymetrycznego określenia różnic wysokości tam, gdzie niwelacji nie wykonano), obliczamy wysokości punktów rozproszonych (pikietów);

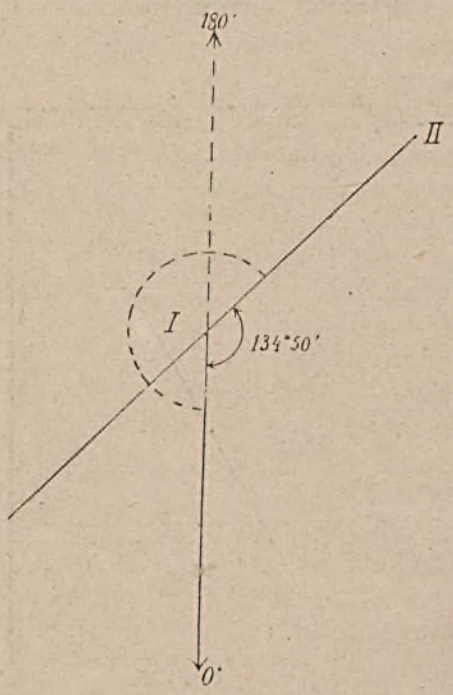
5. nanosimy stanowiska na plan;

6. nanosimy na plan pikiety, opisując ich wysokości;
7. wykreślamy warstwice;

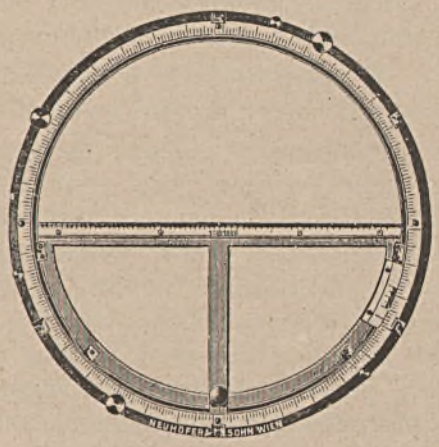
O sposobie nanoszenia pikietów patrz § 23 i 167.

Prócz zwykłych przenośników stosują się przenośniki z ruchomą, centrycznie osadzoną, podziałką.

Przenośnik ten (rys. 616a) ma 36 *cm.* średnicę, posiada minutowy nonjusz, ruchomą alhidadę z podziałką 1:1000 na średnicy. Podziałkę tę



Rys. 616.



Rys. 616a.



Rys. 616b.

można zastąpić inną. Należy ustawić ruchomą alhidadę wzdłuż kierunku zerowego na planie tak, by zero nonjuszu sprzęgnięte było z zerem limbusu (gdy środek przenośnika ułożony został nad właściwem stanowiskiem).

Obracając wówczas alhidadę na odpowiednie kąty, odcinamy od środka odległości, nakłuwamy i numerujemy odpowiednie punkty. Użycie zwykłego przenośnika (rys. 616b) z nonjuszem przy tachymetrji jest wskazane tylko przy nanoszeniu stanowisk.

Cały przenośnik obraca się dokoła nieruchomego środka alhidady. Użycie jest dogodne dzięki unieruchomieniu alhidady zapomocą dwu igieł, zamiast jednej (co zachodzi w zwykłych tekturowych przenośnikach 180°-owych, w których dolny brzeg posiada podziałkę w dwu kierunkach od środka i w których przenośnik obraca się dokoła igły, przypinającej jego środek do planu; obracanie przenośnika dokoła igły powoduje rozszerzanie otworu dla igły w planie).

Znany jest przenośnik rolkowy, wszakże nieco mniej dogodny w użyciu.

Gdy nanosimy na plan punkty, zebrane tachymetrem nierepetycyjnym, wówczas należy wykreślić kierunek zerowy. Tak, np., przy podziale prawym na kole poziomem na stanowisku I dokonano odczytu przy celu do orjentującego stanowiska II 225° 10′. Kierunek zerowy wykreślimy, odkładając w prawo od I — II dopełnienie do 360° odczytanego kierunku 225° 10′ (a więc 134° 50′) lub w lewo sam kąt 225° 10′ (rys. 616).

§ 285. Przykład protokółu polowego i obliczenia tachymetrji.

Protokół tachymetryczny.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
№ stanowiska. Wysokość instrumentu $= i$. Kota stanowiska H. Miejsce zera.	Cel do punktu №	Odczyty z koła: Poziome	Odczyty z koła: $K.\ P.$ Pionowe i kąt pochylenia	Odczyty z nitek: Górny środkowy ls i dolny	Odczyt z łaty l	Odległość $lk\cos^2\alpha$	Wzniesienie $h = \frac{1}{2} lk \sin 2\alpha$	Różnice wysokości $h - l_s = v$	Poziom instrumentu H_I oraz wysokość $H_I + h$	Uwagi
				400					11,57	$Hi = H_{II} + i$
II			0° 36′	299						
	I	201° 16′	+ 0° 34′	198	202	202	+2,00	—0,99	10,58	
$i = 1{,}47$				400						
			1° 6′	352						
$H_{II} = 10{,}10$	1	201° 19′	+ 1° 4′	304	96	96	+1,79	—1,73	9,84	
				400						
$KP = 0° 15′$			4° 17′	382						
$KL = 359° 41′$	2	175° 34′	+ 4° 15′	364	36	35,2	+2,66	—1,16	10,41	załam rowu
				400						
$MO = 359° 58′$			358° 17′	364						
	3	188° 3′	— 1° 41′	329	71	71	—2,09	—5,73	5,84	

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

Uwagi: W polu zapełnimy kolumny 1, 2, 3, 4, 5 6 i 11. Miejsce zera (kolumna 1-a) liczymy z odczytów na kole pionowem przy celu na ten sam punkt w obydwu położeniach lunety. Lepiej jednakże

zrektyfikować odrazu koło pionowe, aby następnie nie komplikować wprowadzaniem miejsca zera rachunku kąta pochylenia w kolumnie 4-ej. Należy również dążyć do ustawiania środkowej nitki na wysokość instrumentu na łacie. Znak w 8-ej kolumnie jest znakiem kątów pochylenia kolumny 4-ej. W kolumnie 9-ej środkowy odczyt ls jest zawsze dodatni. Poziom instrumentu Hi wypisujemy u góry kolumny 10-ej, a następnie dodajemy z uwzględnieniem znaku wynik każdego wiersza kolumny 9-ej, otrzymując w ten sposób wysokości poszczególnych punktów nad umówionym poziomem porównawczym.

§ 286. Wpływ błędów odczytu na łacie i kąta pochylenia na obliczenie różnicy wysokości.

Rozpatrzmy w zastosowaniu do dalekomierza Porro wzory:

$$h = \frac{1}{2} k\, l \sin 2\alpha$$

$$D = k\, l \cos^2 \alpha$$

Stąd:

$$m_h = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial l}\right)^2 m_l^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2}$$

$$m_D = \sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial l}\right)^2 m_l^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha}\right)^2 m_\alpha^2}$$

lecz

$$\frac{\partial h}{\partial l} = \frac{1}{2} k \sin 2\alpha = \frac{h}{l}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} = k\, l \cos 2\alpha = \frac{2\, h}{tg\ 2\alpha}$$

$$\frac{\partial D}{\partial l} = k \cos^2 \alpha = \frac{D}{l}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha} = -\, k\, l \sin 2\alpha = -\, 2\, h$$

więc:

$$m_h = \sqrt{\frac{h^2}{l^2} m_l^2 + \frac{4\, h^2}{tg^2\ 2\alpha} m_\alpha^2}$$

$$m_D = \sqrt{\frac{D^2}{l^2} m_l^2 + 4\, h^2\, m_\alpha^2}$$

ponieważ zaś w m_D drugi wyraz pod pierwiastkiem w większości wypadków jest nieznaczny w stosunku do pierwszego, więc w przybliżeniu:

$$m_D = \frac{D}{l} m_l = k \cos^2 \alpha \, m_l$$

A więc ponieważ $k \cos^2 \alpha$ jest bliskie k, zatem błąd określonej tachymetrycznie odległości jest około 100 razy (przy $k = 100$) większy od błędu odczytu na łacie.

Rozpatrzmy m_h:

$$m_h = h \sqrt{\left(\frac{m_l}{l}\right)^2 + \frac{4}{tg^2 \, 2\alpha} m_\alpha^2}$$

Stąd

$$\frac{m_h}{h} = \sqrt{\left(\frac{m_l}{l}\right)^2 + \frac{4}{tg^2 \, 2\alpha} m_\alpha^2}$$

Najmniejszą jest więc względna dokładność różnicy wysokości przy małych kątach pochylenia osi celowej, tak, np., przy

$$\alpha = 1'$$

i

$$m_\alpha = 1'$$

jest

$$\frac{m_h}{h} = \sqrt{\frac{m_l^2}{l^2} + 1}$$

Lecz już nawet przy niewielkich kątach pochylenia drugi wyraz pod pierwiastkiem może być odrzucony i wtedy

$$m_h = h \frac{m_l}{l}$$

Skąd wnioskujemy, że ponieważ przy wzroście l wielkość m_l rośnie w większem tempie, przeto należy unikać przy tachymetrji zbyt wielkich odległości.

Np., przy $l = 50$ *m*, m_l wynosi około 2 *mm*; już przy 150 *m* m_l przekracza 1 *cm*. A to tem bardziej, że na większych odległościach trudno mówić o dokładnych odczytach. Z tego względu, jeżeli chodzi o niewielkie m_h, lepiej jest unikać odległości 200 *m*.

Zaznaczyć należy, że łata powinna być utrzymywana pionowo, gdyż odchylenie łaty od pionu o 3° już odbija się na ustaleniu odległości od tachymetru.

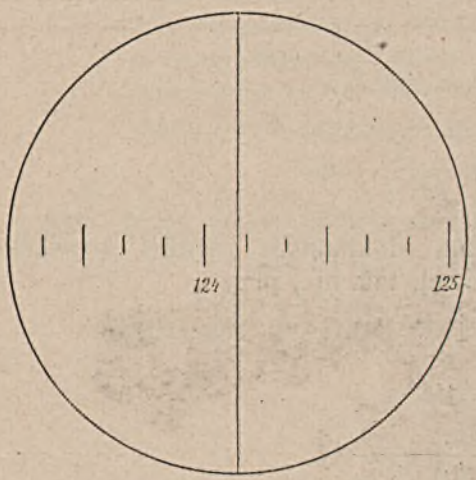
Gdy dopuszczalne jest $m_h = 2—5$ *cm*, wówczas można tolerować większe od 150 *m* odległości.

§ 287. Tachymetry autoredukcyjne.

Do tych tachymetrów zaliczamy te wszystkie, które są skonstruowane w taki sposób, że odległości i różnice wysokości między stanowiskiem a punktem ustawienia łaty mogą być bezpośrednio odliczane, bez obliczania. Do najbardziej znanych należą typy Wagner-Fennela, Hammer-Fennela i Sanguet. Najdogodniejszy jest tachymetr Hammer-Fennela.

Dolna część tego przyrządu jest taka sama, jak w teodolitach repetycyjnych. Część ta w tachymetrze Hammer-Fennela różni się od dotychczas rozpatrzonych teodolitów jedynie zastąpieniem w nim nonjuszów mikroskopami kreskowanemi.

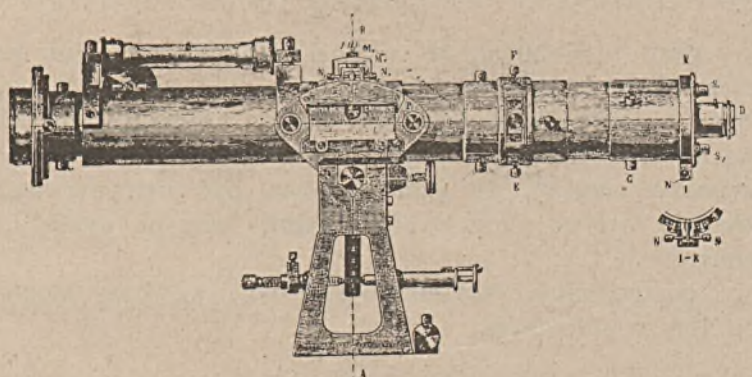
W polu widzenia tego mikroskopu widzimy powiększone podziałki limbusu oraz równoległą do nich nitkę, przecinającą oś mikroskopu. Limbus jest podzielony co 10'. Nitka umożliwia szacowanie $\frac{1}{10}$ części działki na limbusie. Odczytujemy tak, jak widzimy, np., dla rysunku mamy odczyt 124°8'.



Rys. 617.

Mikroskop u dołu posiada iluminator, t. j. rurkę, obracającą się dokoła osi mikroskopu, z otworem bocznym dla światła, odbijanego ku górze przez białą płytkę wewnątrz rurki, pochyloną ku osi mikroskopu o 45°.

Ten auto-tachymetr posiada lunetę Porro o powiększeniu 21, nie dającą się przerzucać przez oś obrotu z powodu znacznej długości, pochylającą się w granicach $\pm$ 30°. Przy obserwacjach rura objektywu przesuwa się wewnątrz okularowej. Oś obrotu znajduje się (rys. 618, 619) pod lunetą. Zamiast koła pionowego, po prawej stronie osi lunety, nad osią obrotu, przymocowana jest płytka szklana z diagramem, naprzeciwko którego wewnątrz lunety znajduje się pryzmat szklany; drugi taki pryzmat znajduje się w lunecie przy rurce okularu i jest ustawiony w taki sposób, że jedna jego ścianka leży w płaszczyźnie obrazów.

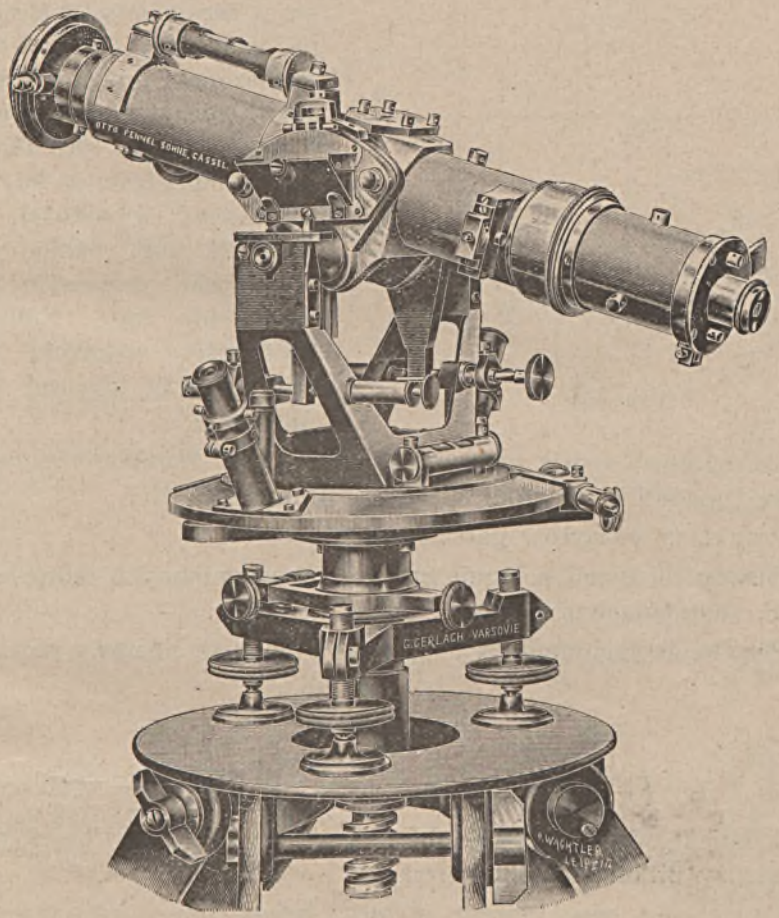

Rys. 618.

Między pryzmatami znajduje się wypukła soczewka. Płytka z diagramem jest nieruchoma przy pochylaniu lunety; oświetla się za pośrednictwem iluminatora w trójściennym pustym wewnątrz pryzmacie, którego górna płaszczyzna jest szklana. Promienie światła, przechodzące przez diagram wewnątrz lunety, ulegają załamaniu w pryzmatach; obraz diagramu (przesu-

wający się w prawo i w lewo przy pochylaniu lunety) widoczny jest w lewej połowie pola widzenia (rys. 621).

Nić pionową zastępuje pionowa ścianka pryzmatu wewnętrznego lunety, znajdującego się przy okularze.

Diagram składa się z trzech krzywych. Zerowa krzywa *G G* jest łukiem koła o promieniu 30 *mm* i środku *M*, leżącym poza płytką diagramu. Płytka jest tak ustawiona, że punkt *M* leży (rys. 620) na osi obrotu lunety.



Rys. 619.

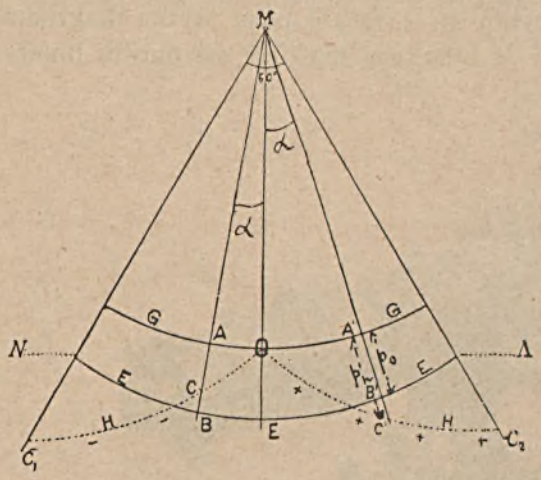
Krzywa odległości *E E* jest krzywą, spłaszczoną nieco ku końcom w porównaniu z zerową krzywą. Krzywa wysokości składa się z dwu gałęzi: ujemnej C_1O, oznaczonej — —, i dodatniej OC_2, oznaczonej + + +.

Luneta w tym auto-tachymetrze może mieć trzy zasadnicze położenia:

1) poziome; wówczas nić pozioma lunety jest styczna do zerowej krzywej i na pionowej ściance pryzmatu (zastępującej nić pionową) schodzą się krzywe zerowe i krzywa wysokości (środkowy rys. 621).

2) podniesione nad poziom do 30°, co odpowiada zetknięciu się z pionową ścianką pryzmatu prawego końca diagramu (promień $M C_2$);

3) pochylone do poziomu o 30°, co odpowie zetknięciu się z pionową ścianką pryzmatu lewego końca diagramu (promień MC_1). Poza temi granicami pochyleń krzywa wysokości znika z pola widzenia. Diagram jest widoczny w polu widzenia tylko w lewo od pionowej ścianki pryzmatu.



Rys. 620.

Sposób użycia tachymetru jest następujący: kierujemy lunetę na łatę i pochylamy ją do chwili, gdy górna krzywa (zerowa) zetknie się z zerem łaty (znajdującem się na wysokości 1.40 *m.* od ziemi), oznaczonem dwiema grubemi rysami. Odczyt z krzywej odległości, mnożony przez 100, daje rzut poziomy odległości do łaty. Odczyt z krzywej wysokości, mnożony przez 20, daje różnicę wysokości stanowiska przyrządu a punktu ustawienia łaty. Znak różnicy wysokości wskazują znaki + albo — przy krzywej wysokości diagramu.

Szczegółową teorję przyrządu patrz „Der Hammer-Fennelsche Tachymeter-Theodolit" wydania Wittwera, Stuttgart 1901.

Przykłady odczytów patrz rys. 621.

Zasady tej teorji polegają na określeniu zmiennych odległości między krzywemi, zastępującemi nitki.

Przy kącie nachylenia α i odczycie l na łacie poziomy rzut odległości wynosi

$$D = kl \cos^2 \alpha$$

dla lunety Porro $k = \frac{f}{p}$, gdzie f oznacza ekwiwalentną ogniskową układu soczewek objektywu i soczewki zbierającej wewnątrz rury objektywu, p zaś odstęp między nitkami dalekomierza.

Oznaczając więc odczyt z łaty, brany dla określenia odległości, literą l_p , mamy:

$$D = \frac{f}{p} l_p \cos^2 \alpha$$

Hammer oznacza:

$$D = C_1 l_p ,$$

skąd

$$C_1 = \frac{f}{p} \cos^2 \alpha ,$$

i przyjmuje C_1 stałe dla wszelkich kątów pochylenia lunety, ponieważ zaś ogniskowa f jest też stałą, więc przy zmiennem α winno p być zmienną, zależną funkcyjnie od α: mianowicie, oznaczając odległość p literą p_0 :

$$p_0 = \frac{f}{C_1} \cos^2 \alpha$$

Podobnie dla dalekomierza lunety Porro

$$h = \tfrac{1}{2} k l \sin 2\alpha$$

lecz

$$k = \frac{f}{p}$$

więc

$$h = \tfrac{1}{2} \frac{f}{p} l \sin 2\alpha$$

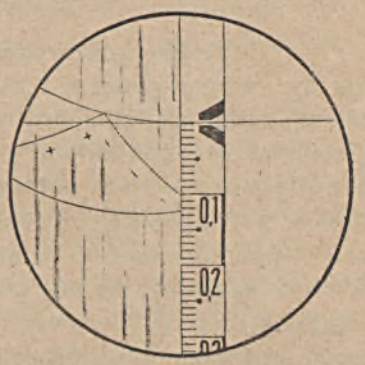
Na spadku (cel pochyły):

Odległość:

$0{,}124 \times 100 = 12{,}4\ m.$

Różnica wysokości:

$0{,}100 \times 20 = -\ 2{,}00\ m.$



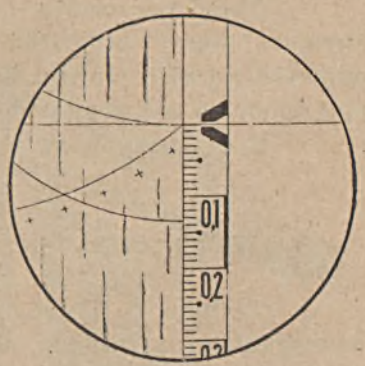
W poziomie:

Odległość:

$0{,}135 \times 100 = 13{,}5\ m.$

Różnica wysokości:

0,0.



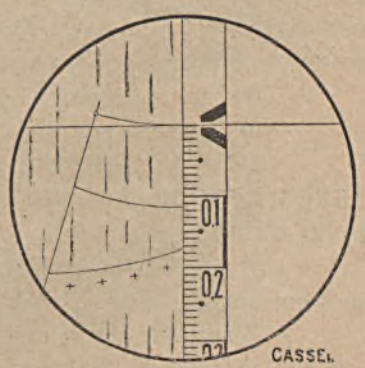
Na wzniesieniu (cel ku górze):

Odległość:

$0{,}115 \times 100 = 11{,}5\ m.$

Różnica wysokości:

$+\ 0{,}173 \times 20 = +\ 3{,}46\ m.$



Rys. 621.

Hammer oznacza:

$$h = C_2 \, l_q \, ,$$

przyjmując stąd:

$$h = \tfrac{1}{2} \frac{f}{p} \, l_q \sin 2\alpha = C_2 \, l_q$$



Rys. 621 a.

i zakładając, że C_2 jest stałą dla określenia różnic wysokości przy stałem f uzyskujemy dla odległości p między nitkami, służącej dla ustalenia różnicy wysokości (takie p oznaczmy jako p_h):

$$p_h = \frac{f}{2 \, C_2} \sin 2\alpha$$

Gdy dla poszczególnych α od 0^0 do 30^0 i danej ogniskowej f obliczymy odpowiednie p_0 i p_h (odstępy zmienne dla odległości i wysokości między nitkami), za jedną nić przyjmiemy krzywą zerową diagramu i wniesiemy od MO pod kątami α (rys. 620) kolejne promienie dla poszczególnych α, a następnie na nich odłożymy od krzywej zerowej odcinki p_0, wówczas końce tych odcinków w połączeniu dają krzywą odległości diagramu, końce zaś w podobny sposób zbudowanych odcinków p_h dadzą krzywą wysokości. W ten sposób zamiast drugiej dalekomierczej nitki dochodzi się do dwu zastępujących ją krzywych diagramu, z których każda ma dwie gałęzie, licząc od promienia ME, odpowiadającego $\alpha = 0^0$ (rys. 621 a).

Układ pryzmatów i soczewki między niemi przy każdym kącie pochylenia lunety projektują krzywe odległości i wysokości ich punktami, odpowiadającemi danemu kątowi pochylenia, na krawędź pryzmatu, zastępującą pionową nić w polu widzenia.

Stałe tachymetru Hammera są równe $C_1 = 100$, $C_2 = 20$.

§ 288. Sprawdzenie przyrządu Hammer - Fennela.

Tachymetr Hammer - Fennela winien odpowiadać poza specjalnemi wymaganiami warunkom, stawianym teodolitom repetycyjnym. Warunki te dotyczą podziału limbusu i nonjuszu osi libeli na alhidadzie, równoległości osi alhidady i limbusu, wyrazistości obrazów w mikroskopie, uzyskiwanej wskutek odpowiedniego przesunięcia tegoż.

Do specjalnych warunków należą:

1) centryczne osadzenie i zorjentowanie diagramu,

2) równoległość płaszczyzny celowej przechodzącej przez poziomą nitkę lunety, znajdującą się w górnej części pola widzenia lunety, do osi libeli na lunecie,

3) zachowanie przewidzianych wielkości 100 i 20 dla spółczynników dalekomierza i różnic wysokości.

Warunek I-szy jest zachowany, gdy:

a) środek diafragmu M znajduje się ściśle na końcu osi obrotu lunety,

b) nitka pozioma dotyka zerowej krzywej na krawędzi pionowej pryzmatu, zastępującej nić pionową,

c) przy właściwem ustawieniu przyrządu i przy poziomości celowej, (przechodzącej przez nić poziomą) średni punkt zerowej krzywej i gwiazdki, leżące z obydwu jej stron, leżą na pionowej krawędzi pryzmatu i nić pozioma przechodzi przez główny punkt zerowej krzywej.

Dla właściwego działania przyrządu należy:

a) ustawić obraz diagramu w płaszczyźnie poziomej nitki i pionowej krawędzi pryzmatu przy okularze zapomocą odpowiedniego przesunięcia rurki okularu po zwolnieniu śrubek zaciskowych tej rurki,

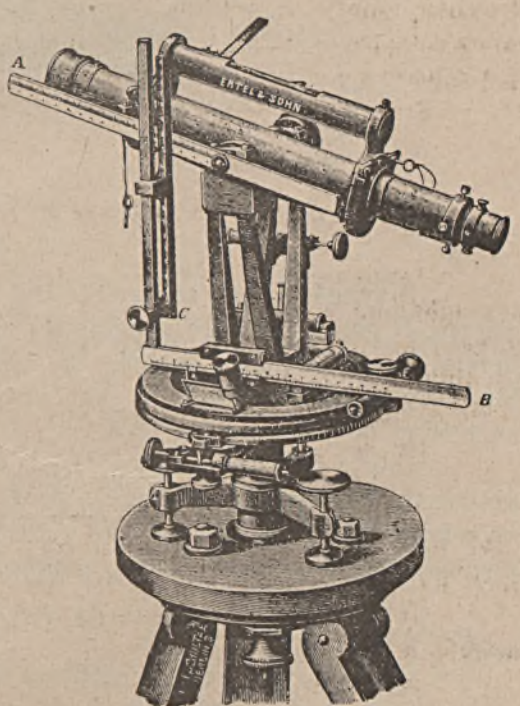
b) przy spoziomowanej alhidadzie i lunecie spionować pionową krawędź pryzmatu przy okularze, obserwując zawieszony pion i sprowadzając na jego obraz tę krawędź (po zwolnieniu równoległych do okularu a przy nim znajdujących się śrubek *S*) zapomocą odpowiedniego wkręcenia śrubek prostopadłych do pryzmatu, znajdujących się pod pierścieniem przy okularze,

c) sprowadzić płaszczyznę kolimacyjną, przechodzącą przez pionową krawędź pryzmatu i środek objektywu, do prostopadłości z osią obrotu lunety, a samą oś obrotu — do prostopadłości z osią obrotu tachymetru, korzystając z obrazu zawieszonego pionu i działając odpowiednio śrubkami poziomemi przy objektywie i śrubkami dźwigarku pod łożyskiem lunety,

d) sprowadzić płaszczyznę celową, przechodzącą przez nić poziomą, do równoległości z osią libeli zapomocą niwelacji ze środka i z końca; przy ustawieniu tachymetru na końcu odcinka kierujemy nić poziomą na odczyt, obliczony z wysokości osi obrotu lunety nad punktem ustawienia i określonej ze środka różnicy wysokości; sprowadzamy wówczas do punktu głównego bańkę libeli, działając śrubką rektyfikacyjną.

Po dokonaniu tych sprawdzeń sprowadzamy zapomocą poziomych i pionowych śrubek przy diafragmie obraz środkowego punktu krzywej zerowej do zetknięcia się z przecięciem nitki poziomej z pionową krawędzią pryzmatu przy spoziomowanej zapomocą libeli lunecie.

Działając odpowiednio śrubkami diafragmy i soczewki, znajdującej się między pryzmatami, sprowadzimy przy pochyleniach lunety $+$ i $-$ 30°: 1) skrajne promienie diafragmy do pokrycia się z pionową krawędzią pryzmatu, zastępującą nić pionową, i 2) nić poziomą do styczności z krzywą zerową w odpowiednim jej punkcie.



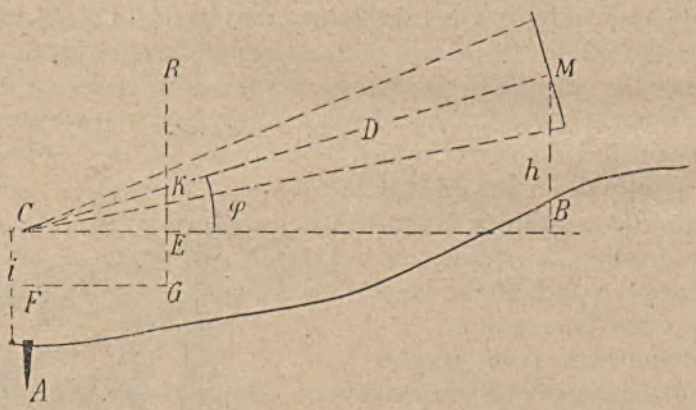
Rys. 622.

Co się tyczy stałych $C = 100$ i $C = 20$ tachymetru, to ustalimy je przy spoziomowanej lunecie, przesuwając soczewkę środkową lunety Porro w rurze objektywu o tyle, by odcinek odsuniętej ściśle o 100 *m* od środka tachymetru łaty, zawarty między krzywą zerową i krzywą odległości, wyniósł ściśle 1 *m*.

Zaletą auto-tachymetru Hammera jest uzyskiwanie rzutu poziomego odległości i różnic wysokości bez obliczeń i dodatkowych wykresów, przytem wyniki uzyskiwane dla odległości, pod względem dokładności nie odbiegają znacznie od dokładności, uzyskiwanej przy stosowaniu zwykłych tachymetrów. Określenie zaś różnicy wysokości jest mniej dokładne, niż w zwykłych tachymetrach. Tachymetr ten jest wielką pomocą przy studjach terenu dla celów budowy dróg, regulacji rzek, drenażu i t. p.

§ 289. Tachymetry Kreutera *) i Wagner-Fennela **).

Każdy z nich posiada trzy podziałki: pierwsza jest połączona z lunetą i jest do niej równoległa, początek zaś podziału znajduje się przy osi obrotu lunety, druga, zwana „skalą odległości“, leży w jednej płaszczyźnie z pierwszą, niżej przy alhidadzie, i trzecia — „skala wysokości”, jest prostopadła do drugiej, z podziałem, biegnącym od zera ku górze i wdół (rys. 622).



Rys. 623.

Przypuśćmy, że tachymetr jest ustawiony nad *A* (rys. 623), w punkcie zaś *B* ustawiono łatę skośnie do pionu, lecz prostopadle do osi celowej lunety, w ten jednakże sposób, że obserwowany przez tachymetr punkt *M* łaty leży w pionie punktu *B* (skośność łaty do pionu i ustawianie *M* nad *B* są trudne do osiągnięcia).

Gdy z dalekomierza (górnej i dolnej nitek) odczytaliśmy *l*, wówczas obliczamy skośną odległość $D = kl + c$, gdzie $k = 100$. Przesuwamy skalę wysokości *ER* do zetknięcia się z punktem *K* skali przy lunecie, który odpowiada odczytowi *D*, i wtedy ponieważ

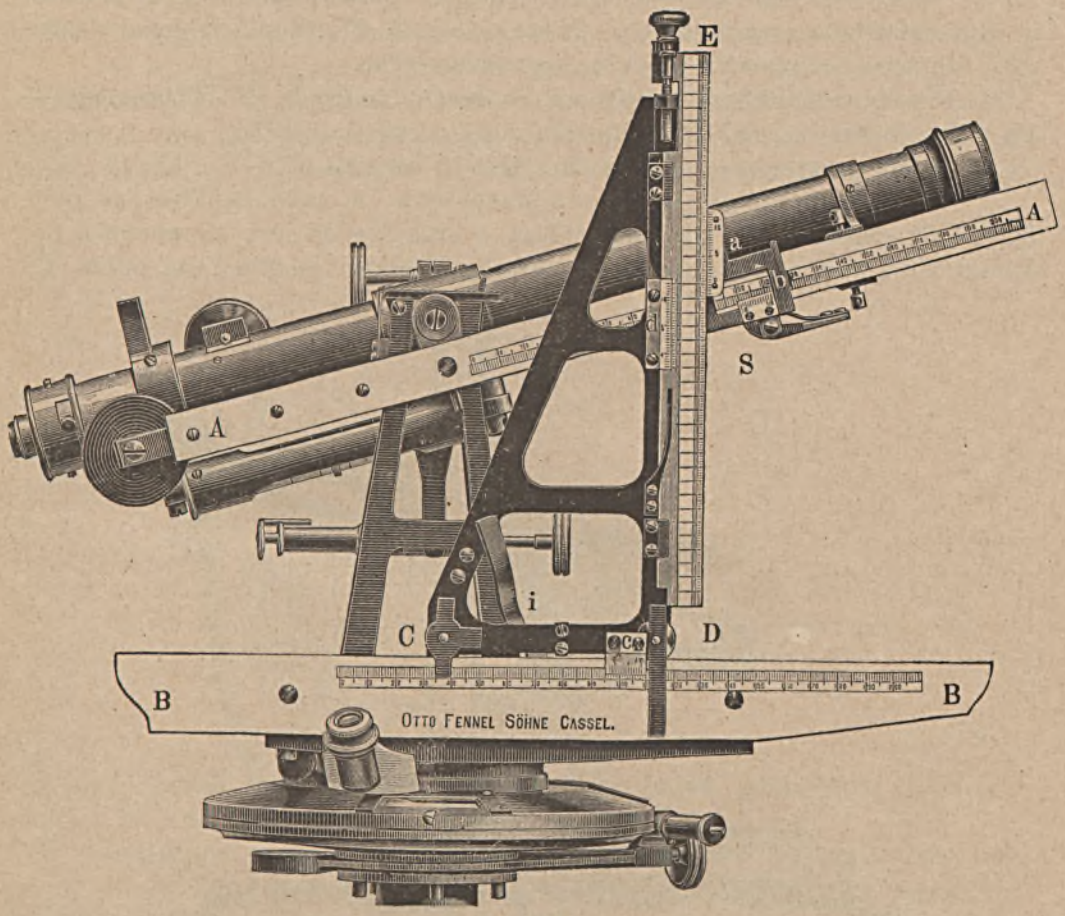
$$CE = CK \cos \varphi = D \cos \varphi$$

więc i

$$FG = CE = d$$

*) Rys. 622.
**) Rys. 624.

odczytamy ze skali odległości długość rzutu poziomego odcinka *AB*. Dokonywając przy *K* odczytu na skali wysokości, na mocy równań



Rys. 624.

$$EK = CK \sin \varphi$$

i

$$h = D \sin \varphi$$

odczytujemy h na skali wysokości EK. Wysokość H_B punktu B będzie więc równa:

$$H_B = H_A + i + h - MB,$$

przyjmując zaś, że MB odpowiada odczytowi v (punkt M na łacie),

$$\underline{H_B = H_A + i + h - v.}$$

Tachymetry Kreutera i Wagner-Fennela dają dostatecznie dokładne wyniki i działają sprawnie, jakkolwiek są mniej łatwe w użyciu, niż autotachymetr Hammer-Fennela. Na rys. 624: skala wysokości *ED* przesuwa się do czasu, gdy na *AA* odczytamy *D*.

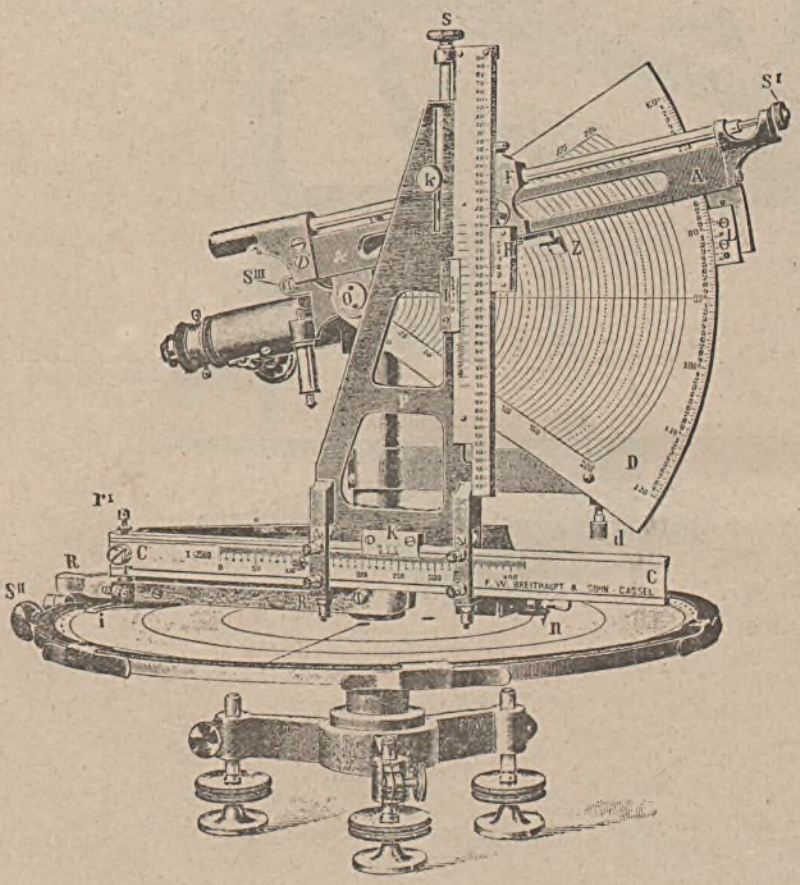
§ 290. Tachymetr Puller-Breithaupta.

Tachymetr Pullera ma tę wyższość w porównaniu z poprzedniemi, że łata ustawiana jest pionowo. Prócz łat № 55 Breithapta mogą być używane do tego tachymetru zwykłe łaty niwelacyjne.

Tachymetr Pullera znany jest w dwu odmianach: № 53 katalogu — dla zdjęć w skali 1:1000 i № 54—dla zdjęć w skali 1:2500.

Błąd w wysokości dla № 53 sięga 10 *cm*, dla № 54 — 16 *cm*.

Tachymetr Pullera umożliwia nanoszenie w polu punktów na plan. Typ № 54 składa się: z limbusu stałego o średnicy 36 *cm*, o wartości podziałki 20′ i nonjuszu 1′-owego; w środku limbusu znajduje się otwór dla



Rys. 625.

pionowej osi obrotu, wystającej nad limbusem w postaci kolumienki z podstawką dla osi obrotu lunety, połączonej trwale z wycinkiem kołowym. Luneta posiada dwie nitki dalekomiercze. Na lunecie znajduje się libela rewersyjna.

Urządzenie projekcyjne składa się:

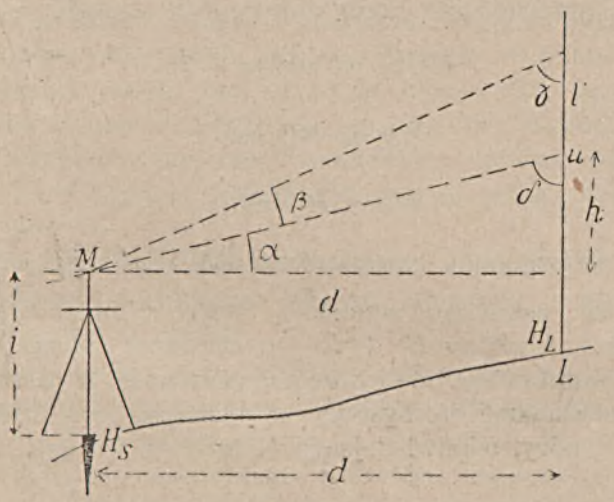
1) z wycinka kołowego, którego promień, odpowiadający działce 90°, może być spoziomowany,

2) z ramy *A A*, poruszającej się z lunetą i równoległej do niej; wzdłuż ramy porusza się przesuwka *F* z indeksem *Z*, ustawianym (odręcz-

nie i zapomocą śrubki S' na końcu ramy) między łukami wycinka według odległości z dalekomierza,

3) z poziomej linijki, dającej rzuty poziome (do 400 m w skali 1:2500) odległości z łaty i odkładanych na wycinku zapomocą indeksu Z,

4) z rzutującego △-a, przesuwającego się wzdłuż poziomej linijki CC, a zaopatrzonego w nonjusz. Pionowej podziałki rzutującego △-a dotyka nonjusz H, dla odczytów wysokości, obracający się na osi. Pionowa podziałka może być przesuwana wzdłuż nieruchomego nonjuszu I; do tego



Rys. 626.

celu służy zacisk k i leniwka S. Wartość podziałek nonjuszów H i J wynosi 0,1 m, nonjuszu zaś K—0,2 m.

Oznaczmy literą α kąt pochylenia celowej, przechodzącej przez dolną nić, literą β kąt diastimometryczny (stały kąt dalekomierza) wówczas będzie (rys. 626):

$$l : M_u = \sin \beta : \sin \gamma$$

lecz

$$\gamma = \delta - \beta = 90^0 - \alpha - \beta = 90^0 - (\alpha + \beta)$$

więc

$$M_u = \frac{l \cos (\alpha + \beta)}{\sin \beta}$$

$$d = M_u \cos \alpha = \frac{l \cos (\alpha + \beta) \cos \alpha}{\sin \beta};$$

$$h = d \, tg \, \alpha = \frac{l \cos (\alpha + \beta) \sin \alpha}{\sin \beta}$$

Oznaczmy

$$\frac{1}{\sin \beta} = k,$$

wtedy

$$d = k \, l \cos (\alpha + \beta) \cos \alpha$$

$$h = k \, l \cos (\alpha + \beta) \sin \alpha$$

a oznaczając literą H_S wysokość stanowiska, literą H wysokość określonego pikietu, otrzymamy dla tachymetru Pullera (skala 1:2500):

$$H = H_5 + i + h - u,$$

gdzie literą u oznaczamy odczyt z łaty, brany z dolnej nitki, a zwykle równy 2,0 m.

Przypuśćmy, że MN jest spoziomowany promień $M - 90^0$ wycinka (rys. 627) D, P jest rzutującym $\triangle$-em i MF jest pochyloną do poziomu pod kątem α celową, przechodzącą przez dolną nić u. Jeżeli

$$MO = kl \cos (\alpha + \beta)$$

i

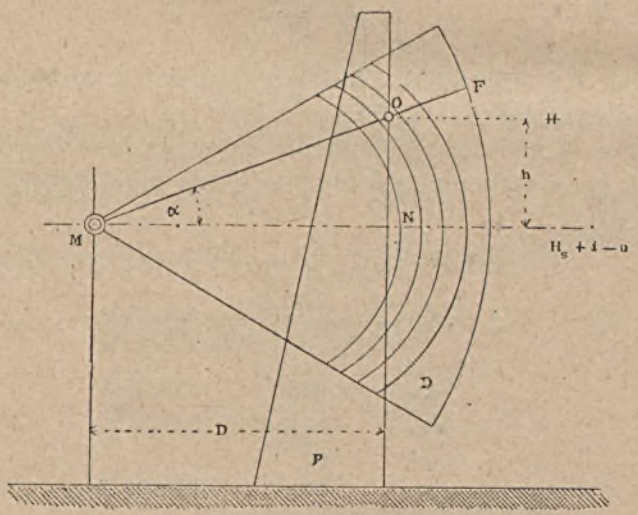
$$MN = MO \cos \alpha$$

oraz

$$NO = MO \sin \alpha,$$

to z przyrządu otrzymujemy bezpośrednio $MN = d$ i $NO = h$

Jeżeli zaś ustawimy zapomocą śruby S podziałkę pionową na odczyt z nonjuszu J, równy $H_s + i - u$, wówczas odczyt z nonjuszu H, odpowiadający punktowi O, równy będzie wysokości H określonego pikietu. Wielkości MO odkładamy, korzystając ze spółśrodkowych łuków, opisanych co 5 m, u dołu i góry, odpowiadających odczytom 1 z łaty.



Rys. 627.

Sprawdzenie tachymetru Pullera (rys. 626):

1) poziomujemy górny kąt linjału CC zapomocą sprawdzonej na tym samym linjale libeli nastawowej, sprowadzając linjał do poziomu śrubkami, znajdującemi się na jego końcu przy zacisku alhidady,

2) prostopadłość pionowej podziałki rzutującego Δ-a do linjału CC sprawdzamy zapomocą przystawienia do CC prostokątnego Δ-a i przysunięcia go do pionowej podziałki,

3) równoległość osi libeli na lunecie do celowej, idącej przez dolną nitkę (górną w polu widzenia), sprawdzimy na zasadzie odczytów z łaty, ustawionej w odległości 60 — 80 *m*, branych z nitki dolnej w dwu położeniach lunety, każde przy osi libeli, sprowadzonej do poziomu zapomocą leniwki lunety. Kierując dolną nić na średni z uzyskanych odczytów, sprowadzamy bańkę libeli do środka jej śrubkami rektyfikacyjnemi,

4) równoległość ramy *AA* z osią libeli na lunecie sprawdzimy, poziomując lunetę i przesuwając w takiem jej położeniu trójkąt rzutujący i nonjusz *H* wzdłuż ramy; odczyty z nonjuszu *H* winny być w każdem jego położeniu jednakowe; uchwycone różnice usuniemy śrubkami ramy *AA*,

5) poziomując lunetę, sprowadzamy odczyt 90° wycinka do zera nonjuszu wycinka zapomocą rektyfikacyjnej śrubki *d* wycinka,

6) przy spoziomowanej lunecie odczyty z obydwu nonjuszów *J* i *H* pionowej podziałki winny być jednakowe; gdy są różne, należy przesunąć odpowiednio nonjusz *J*,

7) sprawdzamy prawidłowość osadzenia nonjuszu *K*; odczyt z niego winien być 200-krotnie większy od różnicy odczytów z obydwu nitek na łacie przy spoziomowanej lunecie,

8) osadzenie igiełki *n* sprawdzimy, nakłuwając nią napięty na kole poziomem papier w dwu położeniach alhidady, różniących się o 180°, zwracając uwagę, by w II-em położeniu odczyt z nonjuszu *K* nie uległ zmianie. Gdy następnie zdejmiemy górną część przyrządu, zmierzona odległość między nakłuciami w podziałce 1 : 2500 winna być dwukrotnie większa od odczytu z nonjuszu *K*.

Użycie tachymetru Pullera.

Po ustawieniu tachymetru na stanowisku o podanej wysokości H_s, mierzymy wysokość instrumentu zapomocą ruletki, grającej rolę pionu. Odczyt ze wstęgi przy pudełeczku po zawieszeniu ruletki na haczyku śruby sprzęgającej tachymetr ze statywem i po opuszczeniu pionu na punkt, oznaczający stanowisko, daje wysokość tachymetru.



Rys. 628.

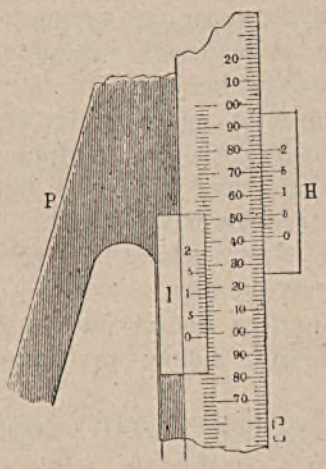
Ustawiamy oś pionową tachymetru do właściwego położenia początkowo zapomocą libeli pudełkowej, a następnie, łącząc zero nonjuszu *h* z 90° wycinka, poziomujemy limbus, korzystając z libeli rurkowej na lunecie.

Lunetę kierujemy na łatę, ustawioną na pikiecie, tak by dolna (w polu widzenia górna) nić skierowana była na podział 2,0 *m*. łaty.

Różnicę odczytów z obydwu nitek mnożymy nie przez spółczynnik dalekomierza 200, a przez 100, gdyż dwukrotnie również są zmniejszone napisy na łukach odległości wycinka *D*.

Otrzymanym dwu odczytom z nitek 2,95 i 2,0 odpowie ustawienie indeksu *Z* na punkt $(2{,}95 - 2{,}0) \times 100 = 95$ wycinka (na odpowiednio numerowanych łukach wycinka lub między niemi).

Ustawiamy nonjusz J na odczyt $H_s + i - 2{,}0$. Przy dolnej nici, skierowanej wciąż na 2,0, posuwamy rzutujący trójkąt do nonjuszu H, z którego dokonamy odczytu, równego wysokości określanego pikietu. Odczytem na rys. 628a jest 141,6. Nonjusz K odliczy rzut poziomy odległości. Na kole poziomem znajduje się umocowany spinaczami papier woskowy, na którym, nakłuciem igiełki, oznaczamy mierzony punkt.

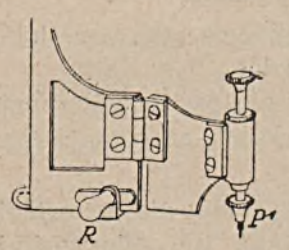


Rys. 628a.

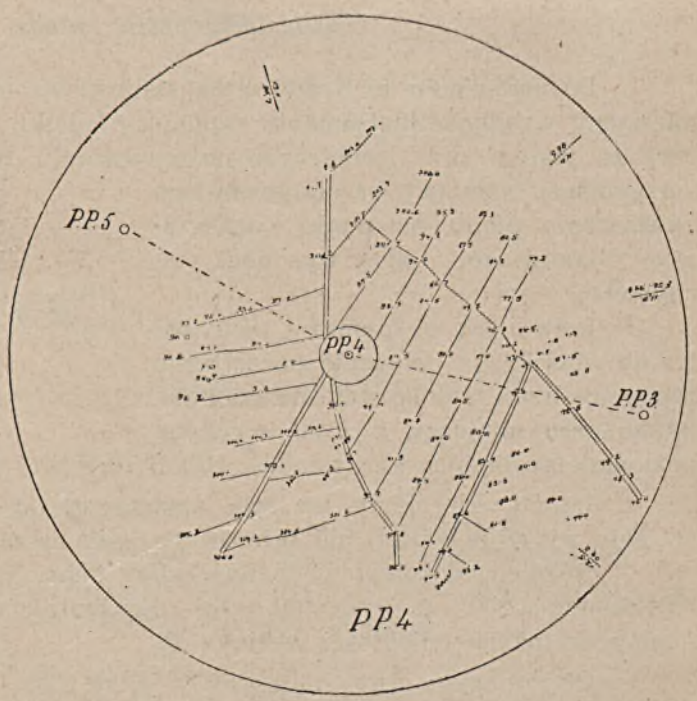
Ponieważ papier ten ma w środku wycięcie dla osi pionowej (kolumienki tachymetru), przeto odległości mniejszych od 42 *m.* oznaczać nie możemy; wówczas na brzegach papieru oznaczymy kierunek do bliskich punktów i ich numery, w notatniku zaś z odpowiedniemi numerami zapisujemy H i D, odczytane z nonjuszów. Równie dobrze możemy odnotować kierunki, wzięte z koła poziomego (rys. 628c).

Przy wykreślaniu w terenie na papierze woskowym, należy na każdem stanowisku wykreślić kierunek na inne o znanem położeniu stanowisko, ażeby następnie przy przekłuwaniu na plan można było na nim należycie zorjentować wykreślone na papierze woskowym zdjęcie. Dla każdego stanowiska używamy osobnego arkusza. Trójkąt P może być dosuwany do zera linijki CC po odsunięciu zasuwki R w lewo. Igiełkę p_1 możemy wówczas przesuwać dalej (rys. 628b).

Gdy tachymetr ustawiamy w punkcie, którego wysokość nie jest znana, wówczas kierujemy dolną nić lunety na 2,0 *m.* łaty, ustawionej na stanowisku o znanej wysokości H; następnie śrubą S przesuwamy podziałkę pionową do czasu, gdy nonjusz H wska-



Rys. 628b.



Rys. 628c.

że daną wysokość H. Wówczas odczyt A z nonjuszu J odpowie wielkości
$A = HS + i - 2{,}0$,

skąd

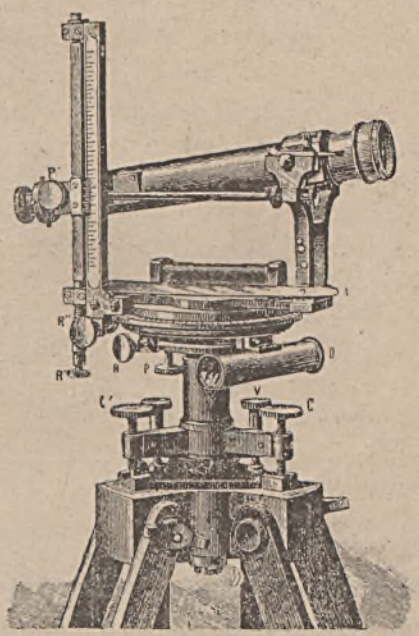
$$HS = A - i + 2{,}0.$$

Niwelacja tachymetrem Pullera dokonywa się zapomocą libeli na lunecie i dolnej nici; luneta może być obracana dokoła osi, gdyż libela jest rewersyjna.

Na rys. 628c. $PP4$ jest stanowiskiem przyrządu, $PP5$ i $PP3$ — jego sąsiedniemi stanowiskami, które wykreślone zostały dla podniesienia dokładności przekłucia na plan pikietów, zdjętych na danem stanowisku.

§ 291. Autoredukcyjny tachymetr Sanguet.

Do alhidady tachymetru przymocowany jest linjał, na którym umieszczony jest z jednej strony dźwigarek osi obrotu lunety, z drugiej pionowa podziałka F, pośrodku libela rurkowa. Siatka nitek lunety składa się z krzyża nitek (jednej poziomej i jednej pionowej nitki). Przez walcowe otwory prostopadle do podziałki F przymocowanych płytek przechodzi równoległy do F pręt, podtrzymywany z dołu śrubą R'. Nonjusz podziałki F może się wzdłuż niej przesuwać; posiada zacisk P'. Z nonjuszem połączone jest ostrze stalowe, na którem opiera się naciskająca je luneta przy okularze.



Rys. 629.

Rolę zacisku i leniwki lunety grają zacisk P' nonjuszu i śrubka R', pozwalające skierować krzyż nitek ściśle na obserwowany punkt. Odczyt z nonjuszu skali F charakteryzuje pochylenie lunety. Naśrubek przy R' połączony jest z krótszem ramieniem dźwigni L, obracającej się na poziomej osi, przechodzącej przez linjał F. Drugi koniec dźwigni L opiera się na jednym z czterech sztyftów, przytwierdzonych do dźwigarka lunety i leżących na łuku koła, którego środkiem jest oś obrotu dźwigni L. Luneta, naciskając krótkie ramię dźwigni, przyciska dłuższe ramię do sztyftu. Odsunięcie dźwigni od jednego sztyftu powoduje obniżenie się okularu do chwili zetknięcia się dźwigni z kolejnym u góry sztyftem.

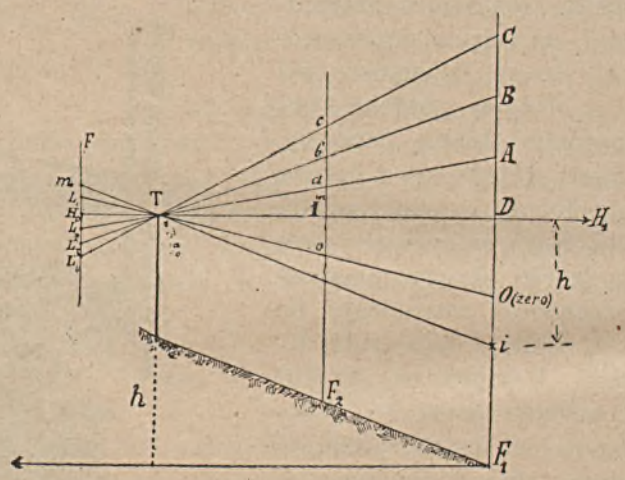
Zetknięcie dłuższego ramienia dźwigni z 4 sztyftami daje cztery kąty pochylenia lunety. W każdem z 4 położeń dźwigni zapomocą śruby R' i zacisku P' możemy pochylać lunetę i kierować oś celową na dowolny punkt łaty.

Gdy dźwignia naciska sztyft 1-y i nonjusz skali pionowej sprowadzony jest na zero, leżące w środku skali, wówczas oś lunety przy spoziomowanej alhidadzie jest pozioma. Podział na F rośnie od zera w dwu kierunkach: wdół ze znakiem —, ku górze ze znakiem +.

Teorja przyrządu Sanguet.

Oznaczmy literami: HH_1 poziom, T oś obrotu lunety, F pionową podziałkę, F_1 łatę metryczną w odległości D od przyrządu, o, α, β, γ sztyfty, licząc od dołu.

Doprowadziwszy dźwignię do styku z dolnym sztyftem, skierujemy śrubką P' krzyż nitek na zero 0 łaty (położenie L_1 T lunety). Obniżymy okular, sprowadzając dźwignię do styku z kolejnym sztyftem α, i przy uzyskanem położeniu lunety L_2 T odczytamy z łaty A. Następnie przy styku z trzecim sztyftem w położeniu L_3 T lunety odczytamy z łaty B i przy styku z czwartym sztyftem w położeniu L_4 T lunety dokonamy z łaty odczytu C.



Rys. 630.

Wyobraźmy sobie łatę, ustawioną w odległości 1 m od przyrządu; tym samym czterem zasadniczym położeniom lunety będą odpowiadać (licząc od dołu) odczyty o, a, b, c.

Z podobieństwa odpowiednich △-ów wynika

$$\frac{D}{1\ m} = \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} \qquad (1)$$

oraz szereg pochodnych proporcyj.

Jak widzimy, dla określenia D z odczytów A, B, C należy znać co najmniej jedną z wielkości a, b, c.

Oznaczając zapomocą $d = TH$ odległość podziałki F od osi obrotu lunety, napiszemy z podobieństwa odpowiednich △-ów:

$$d : 1\ m = L_1 L_2 : a = L_1 L_3 : b = L_1 L_4 : c$$

skąd

$$a = \frac{L_1 L_2}{d}, \qquad b = \frac{L_1 L_3}{d}, \qquad c = \frac{L_1 L_4}{d}$$

Wielkości $L_1 L_2$, $L_1 L_3$, $L_1 L_4$ są różnicami odczytów z podziałki F, d jest znane. Sanguet osadził sztyfty w taki sposób, że a=0,010 b=0,018 c=0,022. Korzystając z najprostszego spółczynnika a, mamy:

$$D : 1\,m = A : 0{,}01,$$

skąd

$$\underline{D = 100\,A}$$

Dla skontrolowania odczytów od 1-ego równania przechodzimy do:

$$\frac{D}{1\,m} = \frac{A + B + C}{a + b + c} = \frac{A + B + C}{0{,}05} = 20(A + B + C)$$

Jeżeli literą n oznaczymy odczyty z łat, r zaś odpowiadające im spółczynniki a, b lub c, to ponieważ prócz 1-ego i ostatniego równania zachodzą równorzędne i inne typu

$$\frac{D}{1\,m} = \frac{A + B}{a + b}$$

uogólniamy je wszystkie w równaniu symbolicznem:

$$\frac{D}{1\,m} = \frac{\Sigma n}{\Sigma r}$$

dającem kontrolę odczytów z łat.

Ponieważ

$$D = 100\,A = 20\,(A + B + C),$$

więc

$$A + B + C = 5\,A$$

lub

$$B + C = 4\,A$$

Przy znacznych odległościach lub kątach pochylenia możemy określać kilkakrotnie D ze styku dźwigni tylko z dwoma sztyftami:

$$\frac{D}{1\,m} = \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{B - A}{b - a}$$

i porównywać dla kontroli wyniki:

$$D = 100\,A = \frac{B - A}{0{,}008} = 125\,(B - A)$$

Przypuśćmy, że przy dźwigni na dolnym sztyfcie i pionowej lunecie odczytem z pionowej podziałki jest H_0, po skierowaniu zaś krzyża nitek na wysokość i przyrządu na łacie, odczytem z pionowej podziałki jest m. Wówczas (rys. 630), oznaczając literą h różnicę wysokości stanowiska i pikietu, otrzymamy:

$$(m - H_0) : d = h : D,$$

skąd

$$h = \frac{m - H_0}{d} D,$$

a stąd

$$m = H_0 + \frac{h\,d}{D}.$$

Wyraz $\frac{m - H_0}{d}$ oznacza tangens kąta pochylenia lunety, wskutek czego podziałkę F nazywają tangencjalną, gdyż z ostatniego wzoru dla założonych h, danych d i $H_0 = 0$ oraz $D = 100\ m$ (dla ułatwienia rachunku) Sanguet obliczył wielkości m i na ich podstawie sporządził podziałkę, z której odczyty dają bezpośrednio różnicę wysokości stanowiska i pikietu, odległego o 100 m. Ponieważ zaś odległości D nie zawsze równają się 100, przeto dla uzyskania różnicy wysokości h należy obliczyć dla każdej odległości D':

$$h = m \frac{D'}{100}.$$

Ażeby więc określić różnicę wysokości stanowiska i pikietu, należy:

1) ustawić dźwignię do styku z dolnym sztyftem, spoziomować libelę alhidady i dokonać odczytu H_0, który w sprawdzonym instrumencie winien być zerem;

2) skierować leniwką krzyż nitek na wysokość tachymetru na łacie i odczytać z podziałki $F - m$, co należy pomnożyć przez $\frac{D'}{100}$.

§ 292. Sprawdzenie tachymetru Sanguet.

Zachowanie warunków 1) prostopadłości osi libeli do osi pionowej tachymetru i

2) poziomości nitki lunety sprawdzamy, jak w teodolitach;

3) prostopadłość osi celowej do osi obrotu lunety sprawdzimy, jak w teodolicie, przekładając lunetę w łożyskach i obracając ją dokoła osi geometrycznej o 180°,

4) prostopadłość osi obrotu lunety do osi pionowej tachymetru sprawdzimy, ustawiając libelę nasadkową na oś obrotu lunety i rektyfikując wykryty błąd śrubką przy dźwigarku lunety, nie dotykającym dźwigni. Zachowanie tego warunku możemy sprawdzić, również jak w teodolicie, zapomocą pionu,

5) sprawdzenia miejsca zera pionowej podziałki dokonamy zapomocą załączonej do tachymetru libeli rewersyjnej.

Po spoziomowaniu alhidady i ustawieniu lunety na odczyt zero podziałki pionowej, umieszczamy libelę rewersyjną przy objektywie i zapomocą śrubki R' sprowadzamy oś libeli rewersyjnej do poziomu. Odczytamy z podziałki tangencjalnej n_1. Obracamy alhidadę o 180°, śrubką R' poziomujemy oś libeli rewersyjnej i notujemy drugi odczyt n_2.

Nową parę odczytów n_3 i n_4 uzyskamy po przełożeniu lunety w łożyskach, działając śrubką R'. Tworzymy

$$n = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}{4}$$

i ustawiamy nonjusz na odczyt n zapomocą śrub P' i R', poczem śrubkami rektyfikacyjnemi nonjuszu przesuniemy jego zero do zera podziałki pionowej.

Sprawdzenia tego możemy dokonać, określając różnicę wysokości dwu odległych wzajemnie o 200 m punktów z każdego z nich i ustawiając na średni z uzyskanych na podziałce odczytów nonjusz, poczem sprowadzimy jego zero do zera podziałki śrubkami rektyfikacyjnemi nonjuszu. Przy dźwigni na dolnym sztyfcie i odczycie zero z podziałki, przy spoziomowanej alhidadzie uzyskamy (po rektyfikacji) poziomość osi celowej lunety, a więc i możność niwelowania tachymetrem.

6) Prawidłowość położenia sztyftów sprawdzimy: 1) odmierzając od instrumentu 100,10 (0,10 m odpowiada ekscentryczności osi obrotu lunety) i ustawiając na końcu tego odcinka łatę, 2) kierując przy styku dźwigni z dolnym sztyftem krzyż nitek na zero łaty zapomocą obrotu śrubką R', 3) doprowadzając kolejno dźwignię do styku z następnemi sztyftami i odczytując A, B i C z łaty.

Odczytane wielkości powinny odpowiadać wielkościom:

$$A = 100 \times 0{,}01 = 1\ m$$

$$B = 100 \times 0{,}018 = 1{,}8\ m$$

$$C = 100 \times 0{,}022 = 2{,}2\ m$$

z dokładnością do $\pm$ 5 cm.

Większe różnice wymagają spiłowania sztyftów.

U w a g i: Limbus tachymetru Sanguet'a podzielony jest na 400 degrés. Dwa obok położone nonjusze są odległe o 15 degrés. Łuk 8 degrés odpowiada $^{1}/_{9}$ częściom pierwszego nonjuszu, 10 degrés odpowiada 11 częściom drugiego. Wartości podziałek obydwu nonjuszów wynoszą $^{1}/_{9}$ i $^{1}/_{11}$ degré. Pierwszy i drugi nonjusz jest opisany co 0,05, a więc opisany podział pierwszego wynosi 0,45 faktycznego, drugiego zaś 0,55 faktycznego. Jeżeli zatem prawdziwy odczyt w minutach (setnych degré) oznaczyć z pierwszego literą x, to odczyt, uzyskany z opisanego podziału 1-go, wyniesie 0,45 x, z 2-ego nonjuszu — 0,55 x. Ażeby zatem uzyskać minuty x, do odczytu w degrés z 1 nonjuszu należy dodać odczyty z obydwu nonjuszów:

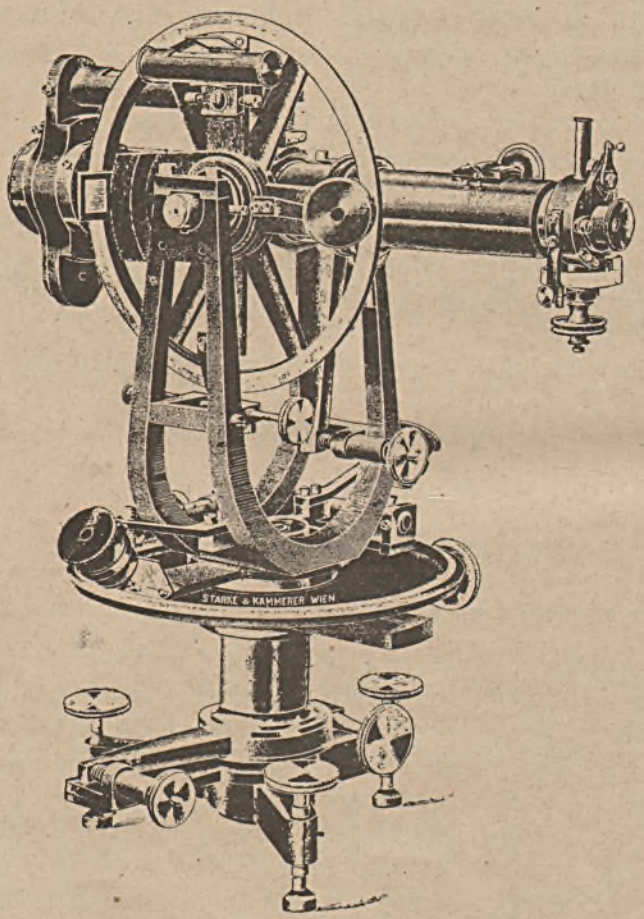
$$0{,}45x + 0{,}55x = x$$

i sprawdzić, czy różnica odczytów wynosi 0,1 x, gdyż

$$0{,}55x - 0{,}45x = 0{,}1x.$$

Tachymetr Sanguet'a nadaje się do określenia azymutu według słońca, 4 sztyfty przed i po południu, i do niwelacji. Przy niwelacji reperów należy libelę dodatkową tachymetru osadzić przy lunecie i niwelować w dwu położeniach lunety (w drugiem—luneta, obrócona o 180° dokoła osi), sprowadzając przy każdym celu bańkę libeli do środka. Oczywiście zachowanie warunku identyczności osi celowej i geometrycznej winno być uprzednio sprawdzone.

Pod limbusem, wewnątrz połączonej z nim metalowej rurki, znajduje się igła magnetyczna, o zagiętych ku górze końcach. Limbus będzie zorjentowany według południka magnetycznego, gdy, patrząc wewnątrz rurki,



Rys. 631.

spostrzeżemy (obracając we właściwym kierunku limbus) dwa końce igły, jeden rzeczywisty, drugi—odbity w zwierciadełku, na jednej linji. Zacisnąwszy limbus w tem położeniu busoli, odczytywać możemy bezpośrednio azymuty kierunków.

§ 293. Logarytmiczny tachymetr Tichy-Starke.

Tachymetr Tichy'ego posiada (rys. 631):

1) limbus o średnicy 15 *cm*, koło pionowe o średnicy 14 *cm*, obydwa z nonjuszami o wartości 0,01 stopnia,

2) libele krzyżowe na alhidadzie,

3) libelę niwelacyjną na lunecie,

4) libelę na ramieniu przy kole pionowem z leniwką przy dźwigarku i śrubami rektyfikacyjnemi przy libeli,

5) śrubę mikrometryczną okularu, określającą stopień przesunięcia ruchomej nitki,

6) dwa okulary ortoskopowe (powiększenia lunety 27 i 35), łatwo zdejmowane i osadzone przy pomocy obrotu korbką nad okularem,

7) II-gi podział na kole pionowem, z jego indeksem nad libelą; podział ten daje redukcję na poziom pochyłych odległości.

Tachymetr Tichy'ego podlega wszystkim tym sprawdzeniom, jakim podlega zwykły tachymetr z pionowem kołem.

Warunki, dotyczące śruby mikrometrycznej okularu, są następujące:

1) przy sprowadzeniu obrotem bębenka ruchomej nitki do pokrycia się z nieruchomą, odczyt na bębenku winien wynosić zero;

2) przy ustawieniu ruchomej nici na 5.000, stała dalekomierza winna wynosić 100.

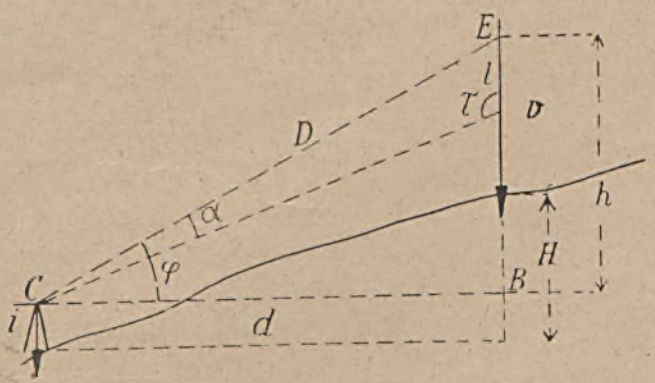
I-y warunek może nie być zachowany tylko w wypadku uszkodzenia instrumentu (bębenki śrub podobnych typów mogą być przesuwane po odciągnięciu samej śruby).

II-i warunek sprawdzimy, ustawiając łatę w odległości 100 *m.* od tachymetru; gdy, po ustawieniu bębenka na 5,000, odczyt z łaty wyniesie 100 *m*, wówczas warunek jest zachowany; w przeciwnym razie należy zwolnić śruby, zaciskające środkową (analatyczną) soczewkę, i obracać w przeciwnych kierunkach pierścienie, znajdujące się na $^1/_3$ odległości między osią obrotu lunety a okularem (licząc od osi obrotu), do czasu, aż obserwowany między nitkami odcinek łaty wyniesie ściśle 1 *m.*

Przyrząd może być stosowany:

a) przy stałem ustawieniu bębenka na odczyt 5,000; wówczas będziemy określać metodą Rejchenbacha lub logarytmiczną odległości i różnice wysokości, lub

b) przy dowolnem ustawieniu bębenka —



Rys. 632.

i wówczas odległość i różnice wysokości określimy metodą trygonometryczną. Tachymetr, ustawiony w A, odcina na łacie odstęp l między dwiema nitkami, rozpiętemi pod diastimometrycznym kątem α; oznaczając literą v wysokość celu E na łacie, i — wysokość tachymetru, D — pochyłą CE, mamy z $\triangle$-a ECB dla kąta pochylenia φ:

$$d = D \cos \varphi$$
$$h = D \sin \varphi$$
$$H = h + i - v,$$

lecz z Δ-a ECF:

$$l : D = \sin \alpha : \sin \tau$$

ponieważ zaś

$$\tau = 180^0 - \alpha - \sphericalangle CEB = 180^0 - \alpha - (90^0 - \varphi) = 90^0 - (\alpha - \varphi)$$

więc

$$l : D = \sin \alpha : \cos (\varphi - \alpha)$$

skąd

$$D = l \frac{\cos (\varphi - \alpha)}{\sin \alpha} = l \left(\frac{\cos \varphi}{tg\, \alpha} + \sin \varphi\right)$$

Oznaczając ogniskową układu dwu soczewek (objektywu i środkowej) lunety Porro literą f, wielkość obrazu literą l, wyznaczaną krokiem śruby g i ilością obrotów S bębenka śruby mikrometrycznej przy okularze, zapomocą równania

$$l = Sg,$$

otrzymamy dla wielkości $tg\, \alpha$ wyraz:

$$tg\, \alpha = \frac{l}{f} = \frac{Sg}{f} = \frac{S}{\frac{f}{g}} = \frac{S}{C}$$

a stąd:

$$D = l \left(C \frac{\cos \varphi}{S} + \sin \varphi\right) = Cl \left(\frac{\cos \varphi}{S} + \frac{\sin \varphi}{C}\right)$$

więc:

$$d = D \cos \varphi = Cl \left(\frac{\cos^2 \varphi}{S} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{C}\right)$$

$$h = D \sin \varphi = Cl \left(\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{S} + \frac{\sin^2 \varphi}{C}\right)$$

$$H = h + i - v$$

są to zasadnicze wzory tachymetru Starke.

Wielkości f i g są tak dobrane, że $C = 500$

a stąd

$$D = l\left(\frac{500\ \cos\varphi}{S} + \sin\varphi\right) = 100\ l\left(\frac{5\ \cos\varphi}{S} + \frac{\sin\varphi}{100}\right)$$

skąd

$$d = 100\ l\left(\frac{5\ \cos^2\varphi}{S} + \frac{\sin\varphi\ \cos\varphi}{100}\right)$$

$$h = 100\ l\left(\frac{5\ \sin\varphi\ \cos\varphi}{S} + \frac{\sin^2\varphi}{100}\right)$$

$$H = h + i - v$$

Stosowanie metody Rejchenbacha polega na rozstawieniu nitek o 5 obrotów bębenka i obserwacji zmiennych l przy stałem $S = 5$. Wzory zmienią się na:

$$d = 100\ l\ (\cos^2\varphi + \frac{\sin\varphi\ \cos\varphi}{100}) = 100\ l\ \cos^2\varphi\ (1 + 0{,}01\ tg\ \varphi)$$

$$h = 100\ l\ (\sin\varphi\ \cos\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{100}) = 100\ l\ \sin\varphi\ \cos\varphi\ (1 + 0{,}01\ tg\ \varphi)$$

Tablice Starkego, ułożone według argumentu φ, podają wielkości:

$$A = \log\ (\cos^2\varphi + 0{,}01\ \sin\varphi\ \cos\varphi)$$

$$B = \log\ (\sin\varphi\ \cos\varphi + 0{,}01\ \sin^2\varphi)$$

z których korzystając obliczamy:

$$\log d = \log 100\ l + A$$

$$\log h = \log 100\ l + B$$

$$H = h + i - v$$

Użycie przyrządu przy tej metodzie jest następujące: dolną nić zapomocą obrotu leniwki lunety kierujemy na zero u góry łaty i odczytujemy górną nić na łacie (przy bębenku, ustawionym na 5 obrotów); mając te odczyty (v i l), notujemy odczyt z koła poziomego i pionowego (po sprowadzeniu bańki libeli koła pionowego do środka.

Protokół polowy ma postać:

№ № stanowisk, wysokość stanowisk i tachymetru	Cel do stanowisk i pikietów	Koło		Łata		$i-v$	h	d	H	Wysokość pikietów H_p	Uwagi
		poziome	pionowe	r	l						
V	IV	42° 15'	° '								
$H_V = 120{,}00$	1	52,15	352,14	3,00	0,898	−1,65	−12,15	88,00	−13,80	106,20	
$i = 1{,}35$	2	57,40	4,32	3,00	1,238	−1,65	+ 9,31	123,2	7,66	127,66	

i t. d.

Stosowanie metody logarytmicznej polega na obserwacji, jak poprzednio, zmiennych l przy stałem $s = 5$ obrotom bębenka. Zasadnicze wzory mają postać:

$$\log d = \log 100\, l + A = \lambda + A$$

$$\log h = \log 100\, l + B = \lambda + B$$

$$H = h + i - v$$

Wielkości $\log 100\, l$ są oznaczone na specjalnej łacie logarytmicznej, wielkości A i B brane są z tablic. Na kole pionowem tachymetru na pionowem ramieniu alhidady znajduje się indeks, dla odczytów z podziału na kole, idącego w dwu kierunkach od zera, a sporządzonego dla wielkości

$$a = \log \frac{1}{\cos^2 \varphi\, (1 + 0{,}01\ tg\, \varphi)}$$

dla odpowiednich φ koła pionowego,

wobec tego zaś, że

$$A = \log (\cos^2 \varphi + 0{,}01 \sin \varphi \cos \varphi) = \log \cos^2 \varphi\, (1 + 0{,}01\ tg\, \varphi),$$

przeto

$$A + a = o$$

Równanie to daje kontrolę A z tablic i a, odczytanego z koła pionowego.

Ponieważ

$$\log d = \log 100\, l + A = \log l - a$$

więc, gdy chodzi tylko o określenie odległości, można nie notować kąta φ.

Przy określaniu pikietów, kierujemy stałą nić zapomocą leniwki na zero łaty (3-metrowej długości) u góry; w ten sposób $v = 3\ m$.

Białe kliny łaty z lewej jej strony odpowiadają 0,05; białe kółko u góry odpowiada 1, dwa białe poniżej odpowiadają 2; odczytem więc nitki ruchomej jest 1 = 2, 0352, gdzie 03 odczytamy z liczby ostrz białych klinów poniżej dwu kółek przy liczbie 0, zaś 52 dla położenia nitki między najbliższym górnym i dolnym białym klinem szacujemy na oko.



Rys. 633.

Z koła pionowego odczytujemy φ i a przy spoziomowanej libeli, oraz notujemy odczyt z limbusu.

Protokół polowy w porównianiu z poprzednim posiada więcej rubryk, a więc jedną dla A i B, drugą dla log d i log h; poza tem zamiast l notujemy λ.

Metoda trygonometryczna stosuje się wtedy, gdy przy ustawieniu bębenka na $s = 5$ obrotów nie można wskutek terenowych i roślinnych przeszkód odczytać obydwu nitek.

Ustawiamy wówczas zapomocą obrotu bębenka obydwie nitki na widoczny odcinek łaty.

Przekształcimy zasadnicze wzory:

$$d = 100\ l \left(\frac{5\cos^2\varphi}{s} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{100}\right) =$$

$$= 100\ l \frac{5}{s}\cos^2\varphi\left(1 + \frac{s}{500}\ tg\varphi\right);$$

$$h = 100\ l \left(\frac{5\sin\varphi\cos\varphi}{s} + \frac{\sin^2\varphi}{100}\right) =$$

$$= 100\ l \frac{5}{s}\sin\varphi\cos\varphi\left(1 + \frac{s}{500}\ tg\varphi\right);$$

Wyraz w nawiasie może być z dostatecznym stopniem dokładności zastąpiony iloczynem:

$$\left(1 + \frac{s}{500}\ tg\varphi\right) = \left(1 + \frac{tg\varphi}{100}\right)\left(1 - \frac{5-s}{500}\ tg\varphi\right)$$

skąd

$$d = 100\ l \frac{5}{s}\left(1 - \frac{5-s}{500}\ tg\varphi\right) \cos^2\varphi\left(1 + \frac{tg\varphi}{100}\right)$$

$$h = 100\ l \frac{5}{s}\left(1 - \frac{5-s}{500}\ tg\varphi\right)\sin\varphi\cos\varphi\left(1 + \frac{tg\varphi}{100}\right)$$

Dla usunięcia z rachunku logarytmów mniejszych od zera, zwiększymy wyraz

$$1 - \frac{5-s}{500} tg\varphi,$$

który jest mniejszy od jedności.

Najmniejszą w praktyce wielkość wyraz ten osiągnie przy $\varphi = 45^0$ i $s = 1$, wtedy

$$1 - \frac{5-s}{500} tg\varphi = \frac{496}{500};$$

wprowadzając ten wyraz do powyższych równań, raz jako mnożnik, drugi — jako dzielnik, usuniemy wyrazy mniejsze od 1.

Ponieważ

$$100\ l\ \frac{496}{500} = 99{,}2\ l,$$

więc

$$d = 99{,}2\ l\ \frac{5}{s}\left[\frac{500}{496}\left(1 - \frac{5-s}{500}\ tg\varphi\right)\right] \cos^2\varphi\ \left(1 + \frac{tg\varphi}{100}\right)$$

$$h = 99{,}2\ l\ \frac{5}{s}\left[\frac{500}{496}\left(1 - \frac{5-s}{500}\ tg\varphi\right)\right] \sin\varphi\cos\varphi\ \left(1 + \frac{tg\varphi}{100}\right)$$

stąd

$$\log d = \log 99{,}2\ l + \log\frac{5}{s} + \log\left[\frac{500}{496}\left(1 - \frac{5-s}{500}\ tg\varphi\right) + \right.$$

$$\left. + \log\left[\cos^2\varphi\ \left(1 + \frac{tg\varphi}{100}\right)\right]\right.$$

$$\log h = \log 99{,}2\ l + \log\frac{5}{s} + \log\left[\frac{500}{496}\left(1 - \frac{5-s}{500}\ tg\varphi\right)\right] +$$

$$+ \log\left[\sin\varphi\cos\varphi\ \left(1 + \frac{tg\varphi}{100}\right)\right]$$

Ostatnie wyrazy obydwu równań otrzymujemy z tablic dla argumentu φ, przedostatnie — z argumentów φ i s, pierwsze z argumentu l, drugie z argumentu S.

Wprowadzając według logarytmiczno-trygonometrycznych tablic Starkego oznaczenie tych wyrazów, napiszemy:

$$\log d = \lambda + \omega + \delta + A$$

$$\log h = \lambda + \omega + \delta + B$$

Postępowanie w polu polega na skierowaniu 1) pionowej nitki na oś łaty, 2) stałej poziomej nitki (zapomocą obrotu leniwki lunety) na najwyż-

szy widoczny decymetrowy klin, 3) ruchomej nitki obrotem bębenka (poniżej 5-u obrotów) — na najniższy widoczny klin.

Notujemy w protokóle określone z łaty v, l i S oraz odczyty z koła poziomego i pionowego (po spoziomowaniu libeli).

Metoda Tichy'go. Tichy uzależnia odczyty z łat dla odległości i różnicy wysokości od obrotów bębenka, których liczbę określa z równań:

$$d = 100\ l \left(\frac{5 \cos^2 \varphi}{S} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{100}\right)$$

$$h = 100\ l \left(\frac{5 \sin \varphi \cos \varphi}{S} + \frac{\sin^2 \varphi}{100}\right)$$

przyrównywając spółczynniki przy 100 l do jedności.

Dla odległości uzyskujemy w ten sposób:

$$s_1 = \frac{5 \cos^2 \varphi}{1 - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{100}}$$

dla różnicy wysokości:

$$s_2 = \frac{5 \sin \varphi \cos \varphi}{1 - \frac{\sin^2 \varphi}{100}}$$

Tablice na zasadzie tych wzrów dla s_1 i s_2 z argumentu φ ułożył prof. A. Schell. Prócz tego Starke-Kammerer sporządzili na kole pionowem dwie dodatkowe, średnicowo-przeciwległe podziałki przy końcach poziomego ramienia alhidady: jedną przy indeksie alhidady z napisem D dla s_1, drugą z napisem H dla s_1, w ten sposób, że przy pochyleniu lunety o kąt φ odczytujemy z indeksów odpowiednie s_1 i s_2.

Po określeniu s_1 i s_2 (z koła i dla kontroli z tablic), ustawiamy bębenek śrubą mikrometryczną przy okularze na s_1 i odczytujemy z ruchomej nici na łacie, używanej przy stosowaniu metody Rejchenbacha, bezpośrednio l_1, gdy stała nić jest ustawiona na zero łaty; następnie, ustawiając bębenek śruby na s_2, odczytujemy z łaty l_2. Obliczyn y następnie:

$$d = 100\ l_1$$

$$h = 100\ l_2$$

i

$$H = h + i - v$$

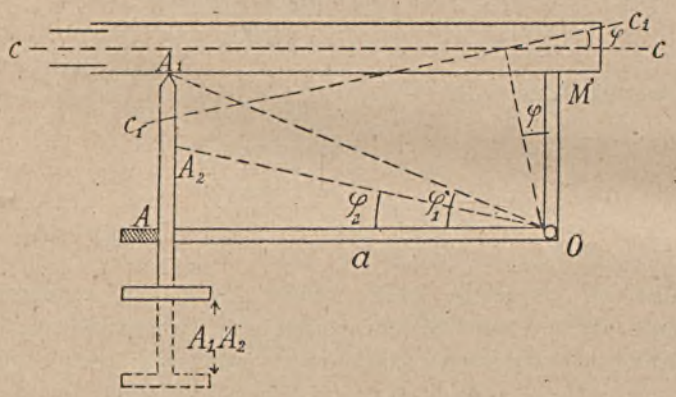
Gdy s_2 jest bardzo małe, wówczas zwiększamy je 1000, 100 lub 10 razy, aby iloczyn był bliski 5 obrotów bębenka; otrzymany przy powiększonem na bębenku s_2 odczyt l_2 zmniejszymy tyleż razy; postępowanie to zmniejszy błąd wyznaczenia l_2 na łacie.

§ 294. Niwelatory — tachymetry ze śrubami elewacyjnemi.

Przyrządy te są niwelatorami, w których oś celowa może być odchylana od poziomu zapomocą obrotu śrubą elewacyjną w granicach kilku stopni. Stanowi to udogodnienie przy niwelacji terenów falistych, gdzie spoziomowana oś celowa już w bliskich odległościach, zamiast łaty, przecina wznoszący się teren. Zapomocą śrub elewacyjnych sprowadzamy bańkę libeli rurkowej do środka, gdy oś pionowa przyrządu sprowadzi się do właściwego położenia zapomocą libeli pudełkowej.

Dwa są zasadnicze typy śrub elewacyjnych: tangencjalna i Stampfera; obydwie służyć mogą nietylko do sprowadzenia bańki libeli do poziomu, lecz również do określania stopnia odchylenia osi celowej od poziomu zapomocą odliczania całych i części obrotów bębenków tych śrub.

Śruba tangencjalna, przy jej obrocie, przesuwa się w kierunku pionowym równolegle do osi obrotu przyrządu. Naśrubek znajduje się w alhidadzie przyrządu (rys. 634).



Rys. 634.

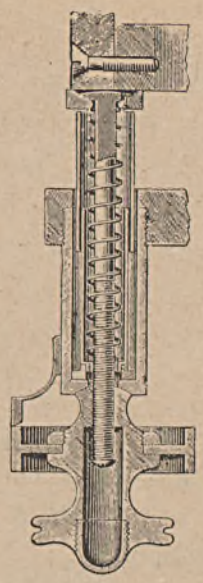
Na drugim końcu alhidady znajduje się pozioma oś obrotu *O*, dokoła której obraca się dźwigarek lunety przy odchylaniu jej od poziomu wskutek obrotu śruby elewacyjną. Koniec śruby przesuwa się wzdłuż linji ślizgania, przyczem znajduje się w najkrótszej odległości od *O* przy poziomem położeniu lunety.

Jeżeli punkt *O* przyjąć za biegun, alhidadę za oś biegunową, wówczas obniżenie śruby równa się różnicy tangensów kątów kierunkowych φ_1 i φ_2 końca śruby; dzięki temu właśnie śruba nosi nazwę tangencjalnej. W szeregu przyrządów, jak np. niwelator Bamberga (rys. 467a) dźwigarki przesuwają się inaczej: mianowicie, pod działaniem śruby elewacyjnej, przechodzącej przez wewnętrzną nieruchomą sztabę, złączoną trwale z osią obrotu alhidady, i kontr-sprężyny na drugim końcu ramy, łączącej dźwigarki, — pierwszy dźwigarek podnosi się, wskutek czego rama, obracając się dokoła poziomej osi, opuszcza drugi dźwigarek. Dźwigarki pozostają do siebie równoległe.



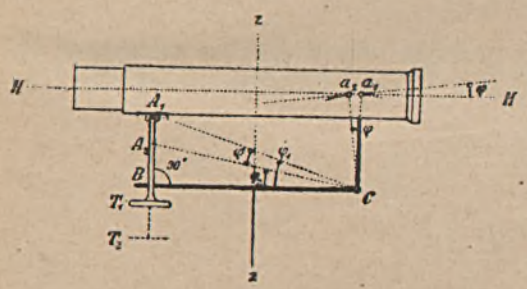
Rys. 635.

Śruba Stampfera (rys. 635) ma następujący wygląd: jest to rozwidlony dźwigarek t, przesuwający się wzdłuż ściętego w kształcie klina końca a alhidady. Śruba jest zawieszona na górnym końcu, który jest jej poziomą nieruchomą osią obrotu. Dokoła śruby, wzdłuż jej osi, nawinięta jest spiralna sprężyna, umieszczona wewnątrz dwu łusek metalowych, z których dolna wchodzi wewnątrz górnej h'. Obydwie zaś znajdują wewnątrz łuski h, wkręconej w koniec a alhidady. Do łuski h przytwierdzony jest nieruchomy indeks z, dający odczyty z bębenka T, osadzonego centrycznie na naśrubku K dolnego końca śruby elewacyjnej. Wkręcanie i wykręcanie naśrubka powoduje obniżanie lub podnoszenie dźwigarka w stosunku do kreski a końca alhidady. Kreska a jest indeksem dla podziałki na ramieniu dźwigarka; jedna działka odpowiada krokowi śruby. Dzięki temu przy obrocie naśrubka k można obliczyć z indeksu a całkowitą ilość obrotów. Bębenek jest podzielony na 100 części, tysiączne możemy szacować z indeksu Z na oko. Bębenek umożliwia określenie mikrometrycznych przesunięć śruby; gdy, np., krok śruby wynosi 0,5 *mm.*, wówczas z bębenka możemy szacować dziesiąte części 0,005 *mm.*



Rys. 636.

Na rys. 637 punkt A_1 jest punktem zawieszenia śruby, B jest łożyskiem naśrubka, C jest poziomą osią obrotu przyrządu. Odległość AC jest stała, niezależnie od stopnia wykręcenia śruby, gdyż punkt zawieszenia A jest stałym punktem dźwigarka lunety, kąt zaś między osią geometryczną lunety a osią drugiego dźwigarka nie ulega zmianie. Przesunięciu śruby od A_2 do A_1 odpowiada zmiana pochylenia osi celowej lunety o kąt φ. Wielkości cięciw BA_1, BA_2 i A_1A_2 dają możność obliczenia kątów φ_1, φ_2 i φ. A zatem w śrubie tej — cięciwy, nie zaś styczne, określają wielkość kąta wychylenia.

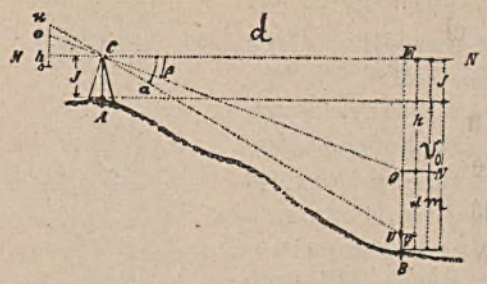


Rs. 637.

Pomiar kątów pochylenia śrubami elewacyjnemi.

A. *Śruba tangencjalna.*

Przypuśćmy, że przyrząd jest zrektyfikowany i oś libeli została spoziomowana obrotem śrubą elewacyjną; położeniu śruby odpowiada odczyt h_0



Rys. 638.

z bębenka, odczytem na łacie byłby v_0. Skierujmy oś celową, obracając śrubę elewacyjną, na dwa oznaczone na łacie punkty O i U; odpowiadające im na bębenku odczyty będą o i u.

Oznaczmy krok śruby literą g i załóżmy $h_0 C = Kg$, wówczas

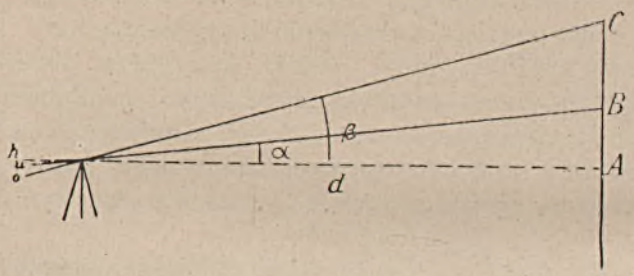
$$tg\,\alpha = \frac{h_0 u}{h_0 C} = \frac{(h_0 - u)\,g}{Kg} = \frac{h_0 - u}{K}$$

$$tg\,\beta = \frac{h_0 o}{hC} = \frac{h_0 - o}{K}$$

Ponieważ zero podziałki znajduje się u góry, więc $h_0 - u > O$ i $h_0 - o > O$.

Stała K jest podana przez fabrykę, wyrabiającą dany typ przyrządów.

Możemy ją określić, ustawiając pionowo w znanej odległości d od



Rys. 639.

poziomej osi obrotu C przyrządu łatę; notując odpowiadające odczytom bębenka h, u, o i t. d. odczyty z łaty A B C i t. d., określimy wielkości:

$$tg\,\alpha = \frac{B - A}{d} = a$$

skąd

$$K_1 = \frac{h_0 - u}{a}$$

oraz

$$tg\,\beta = \frac{C - A}{d} = b \text{ i t. d.}$$

$$K_2 = \frac{h_0 - o}{b} \text{ i t. d.}$$

Mając grupę wyników dla wielkości K, określimy najprawdobniejszy wynik, jako średnią arytmetyczną.

Znając K, możemy określić odległość d i różnicę wysokości H z $\triangle$-ów prostokątnych ECO i ECU (rys. 638) przy $EO = h$, $OU = m$ i $UB = v$:

$$h = d\,tg\,\beta$$

$$h + m = d\,tg\,\alpha$$

stąd

$$m = d\,(tg\,\alpha - tg\,\beta)$$

i

$$d = \frac{m}{tg\,\alpha - tg\,\beta}$$

więc

$$h = \frac{tg\,\beta}{tg\,\alpha - tg\,\beta}\,m = \frac{h_0 - o}{o - u}\,m$$

$$d = \frac{h}{tg\,\beta} = \frac{m}{tg\,\alpha - tg\,\beta} = K\frac{m}{o - u}$$

skąd różnica wysokości:

$$H = h + m + v - i$$

Gdy pozioma oś obrotu przyrządu jest ekscentryczna, należy d zwiększyć o wielkość ekscentryczności e.

Określenia odległości i różnicy wysokości można dokonać inaczej według prof. Lorbera. Mianowicie, jeżeli w równaniach

$$d = \frac{K}{o - u}\,m$$

$$h = \frac{h_0 - o}{o - u}\,m$$

oraz

$$H = (h + m) + v - i = \frac{h_0 - u}{o - u}\,m + v - i$$

przyjmiemy $o - u = S$ za stałą, wówczas

$$d = \frac{K}{S}\,m$$

$$h = \frac{h_0 - o}{S}\,m$$

$$H = \frac{h_0 - u}{S}\,m + v - i$$

Gdy instrument jest tak skonstruowany, że $\frac{K}{S} = 100$ przy $S = 2$ oraz $h - o = S$ odpowiada całkowitej liczbie obrotów bębenka, wówczas

$$d = 100\,m$$

$$h = \frac{S}{2}\,m$$

i

$$H = h + m + v - i$$

Gdy S jest wielokrotnością 2, t. j. $S = 2\,n$,
wówczas

$$h = n - m \qquad H = (n + 1)\,m + v - i$$

Postępując w myśl tej metody, odczytujemy h_0 przy spoziomowanej libeli; wykonywamy śrubą elewacyjną taką ilość całkowitych $2n$ obrotów, aż nić pozioma przetnie łatę, na której wówczas odczytamy l_1; po dokonaniu dalszych dwa obrotów odczytamy z łaty l_2; podstawiając do wzorów

$$d = 100\,m.$$

$$h = mn$$

i

$$H = (n + 1)\,m + v - i,$$

ilość n parzystych obrotów bębenka przed pierwszym odczytem,
i

$$m = l_2 - l_1$$

określimy d i H

Przyrządy ze śrubą tangencjalną mogą być używane przy tyczeniu spadów. Dla wytyczenia spadu p należy pochylić lunetę do poziomu o kąt, odpowiadający warunkowi $\operatorname{tg} \alpha = p$.

Jeżeli odczyt h_0 na śrubie odpowiada poziomej osi celowej,
to z równania

$$p = \operatorname{tg} \alpha = \frac{h_0 - u}{K}$$

obliczymy

$$\underline{u = h_0 - K\,p}$$

i, nastawiając śrubę na odczyt u, uzyskujemy pochylenie lunety p; należy więc przesuwać łatę w terenie, dopóki oś celowa nie przetnie łaty w punkcie, odległym od spadu łaty o wysokość osi obrotu lunety nad palikiem. Przestawiając przyrząd na miejsce łaty, znów wyszukamy w terenie punkt, leżący na jednej ze stanowiskiem linji o spadzie p. Wytyczony w ten sposób szereg punktów w terenie utworzy linję o spadzie p.

B. *Śruba Stampfera.*

Wielkość kąta pionowego α, zawartego między kierunkami osi celowej lunety, odpowiadającemi odczytom zero i n (przy celu do punktu) na bębenku, jest funkcją n, która po rozwinięciu w szereg Taylora ma postać (po odrzuceniu znikomo-małych wyrazów):

$$\alpha = an + bn^2$$

gdzie a, b są spółczynnikami stałemi dla każdego instrumentu.

Wychylenie osi celowej w tej samej płaszczyźnie pionowej aż do odczytu m ze śruby daje kąt β między kierunkami, odpowiadającemi odczytom zero i m bębenka, równy:

$$\beta = am + bm^2$$

kąt zaś γ, zawarty między kierunkami o odczytach n i m na bębenku jest równy:

$$\gamma = \alpha - \beta = a\,(n - m) + b\,(n^2 - m^2) = (n - m)\,[a + b\,(n + m)];$$

Ponieważ stała b w przyrządach typu Starke jest ujemna, przeto równanie śruby Stampfera ma postać:

$$\gamma = a\,(n - m) - b\,(n^2 - m^2) = (n - m)\,[a - b\,(n + m)].$$

Ażeby określić wielkości spółczynników a i b, należy odmierzyć bardzo ściśle w kierunku osi celowej odległość d od rzutu poziomej osi obrotu niwelatora do punktu ustawienia łaty.

Poziomując oś celową, odczytamy na łacie A_0 i na bębenku n_0; wychylając oś celową śrubą elewacyjną do odczytów z bębenka u_1, u_2, u_3 i t. d., odczytamy kolejno na łacie A_1, A_2, A_3 i t. d.

Kąty φ_1, φ_2, φ_3 i t. d. między kierunkiem do A_0 a kierunkami do A_1 A_2 .... są równe:

$$tg\,\varphi_1 = \frac{A_1 A_0}{d}$$

$$tg\,\varphi_2 = \frac{A_2 A_0}{d} \text{ i t. d.}$$

obliczając stąd φ_1 φ_2 .., ułożymy szereg równań:

$$\varphi_1 = a\,(n_1 - n_0) + b\,(n_1 - n_0)^2$$

$$\varphi_2 = a\,(n_2 - n_0) + b\,(n_2 - n_0)^2$$

$$\varphi_3 = a\,(n_3 - n_0) + b\,(n_3 - n_0)^2 \text{ i t. d.}$$

Z układu tych równań określimy a i b metodą najmniejszych kwadratów (rozdział XII) lub z poszczególnych grup równań po dwa.

Z rysunku Nr. 638 mamy:

$$m + h = d\,tg\,\alpha$$

oraz

$$h = d\,tg\,\beta$$

skąd

$$m = d\,(tg\,\alpha - tg\,\beta)$$

$$d = \frac{m \cos\alpha \cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$

oraz

$$h + m = d\,tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha \cos\beta}{\sin(\alpha - \beta)}\,m$$

oraz

$$H = h + m + v - i$$

Kąty α i β mogą być określone na zasadzie równania:

$$\gamma = a\,(n - m) - b\,(n^2 - m^2) = n - m\,[a - b\,(n + m)];$$

Wprowadzając odczyty z bębenka h_0, o i u, odpowiadające spoziomowanej libeli oraz celom pod kątami pochylenia β i α,

napiszemy:

$$\alpha'' = a''\,(h_0 - u) - b''\,(h_0^2 - u^2) = (h_0 - u)\,[a'' - b''\,(h_0 + u)]$$

$$\beta'' = a''\,(h_0 - o) - b''\,(h_0^2 - o^2) = (h_0 - o)\,[a'' - b''\,(h_0 + o)]$$

$$\alpha'' - \beta'' = a''\,(o - u) - b''\,(o^2 - u^2) = (o - u)\,[a'' - b''\,(o + u)]$$

Mając stąd

$$\alpha,\ \beta \text{ i } \alpha - \beta,$$

obliczymy

$$d,\ h + m \text{ i } H$$

Przy małych

$$\alpha \text{ i } \beta,$$

zakładając:

$$\cos\alpha = \cos\beta = 1$$

$$\sin\alpha = \alpha \qquad \sin(\alpha - \beta) = \alpha - \beta$$

otrzymamy:

$$d = \frac{m}{\alpha - \beta} \qquad h + m = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}\,m$$

$$H = h + m + v - i$$

Ponieważ przy małych kątach pochylenia są one proporcjonalne do obrotów śruby, przeto w wyrazach dla α, β i $\alpha - \beta$ drugie wyrazy rozwinięcia możemy odrzucać, dzięki czemu

$$\alpha = a\,(h_0 - u)$$

$$\beta = a\,(h_0 - o)$$

$$\alpha - \beta = a\,(o - u)$$

i wówczas, oznaczając $\frac{1}{a}$ literą K,

otrzymamy

$$d = \frac{m}{a\,(o - u)} = K\,\frac{m}{o - u}$$

$$h + m = \frac{h_0 - u}{o - u}\,m$$

§ 295. Niwelatory - tachymetry.

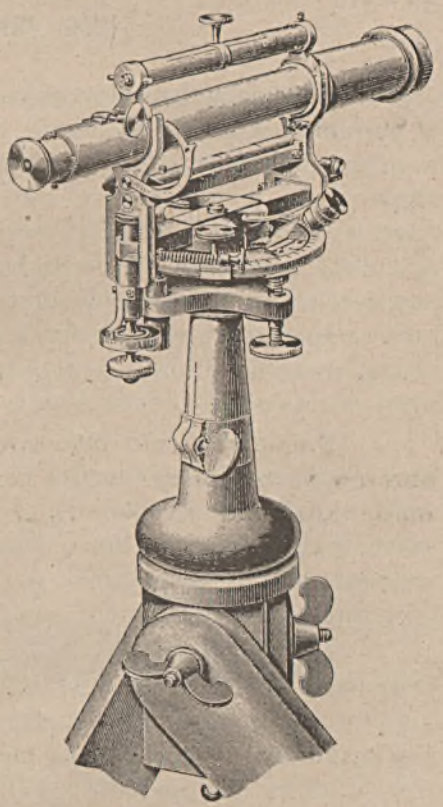
Z pomiędzy niwelatorów Starke - Kammerera, zaopatrzonych w śrubę Stampfera, rozpatrzymy niwelator, przedstawiony na rys. 640.

Przyrząd osadza się ściętym wewnątrz wydrążonym stożkiem na czopie statywu. Na stożku znajduje się trójkątna płyta z zagiętemi narożnikami; przez dwa narożniki przechodzą śruby nastawowe, podtrzymujące spód limbusu, który doprowadza się do poziomu dwiema opisanemi śrubami.

Kontr-sprężyna znajduje się przy trzecim narożniku. Na krótkiej osi pionowej w środku limbusu obraca się alhidada w postaci linjału, zakończonego z jednej strony poziomą osią obrotu dźwigarka, z drugiej klinowem ścięciem śruby elewacyjnej, zaopatrzonem w indeks. Jeden nonjusz koła poziomego umożliwia odczytywanie kierunków z dokładnością do 1'. Alhidada sprzęga się z limbusem zapomocą ustroju kleszczowego śruby zaciskowej i leniwki. Luneta może się odchylać w obydwu kierunkach od poziomu o 4° pod działaniem śruby elewacyjnej.

Przyrząd posiada 3 libele: 1) nasadkową, 2) na linijce między dźwigarkami i 3) na końcu alhidady, prostopadłą do niej.

Luneta może być przekładana w łożyskach.



Rys. 640.

Przyrząd rektyfikuje się, jak niwelator z lunetą przekładaną, libelą nasadkową i śrubą elewacyjną (typ Kerna).

Uzyskane przy rektyfikacji położenie śruby elewacyjnej notujemy z odczytu na indeksie przy podziałce pionowej (np. 20) i z bębna; śrubę ustawiać należy w tem położeniu przed poziomowaniem przyrządu.

Po sprawdzeniu zachowania warunków, które powinny być przestrzegane przy rektyfikacji niwelatora typu Kerna, przy spoziomowanej libeli nasadkowej, poziomujemy oś libeli pod lunetą zapomocą śrubek rektyfikacyjnych.

Typ niwelatora-tachymetru ze śrubą tangencjalną patrz rys. 467.

Właściwe tachymetry ze śrubą elewacyjną posiadają tylko krzyż nitek; zaopatrzone zaś w trzy poziome nitki mogą być używane do niwelacji ścisłej.

Dokładność wyznaczenia odległości mniejszych tachymetrem ze śrubą elewacyjną jest większa od uzyskiwanej przy użyciu dalekomierza. Co się tyczy różnicy wysokości, to określa się ona tem dokładniej, im mniejsze kąty pochylenia ma oś celowa, i im większa jest różnica $o - u$.

ROZDZIAŁ X.

FIZYCZNA NIWELACJA.

§ 296. Niwelacja barometryczna.

Niwelacja barometryczna polega na określeniu ciśnienia powietrza w punktach, których wysokość chcemy określić. Ciśnienie to zmniejsza się w miarę podnoszenia się nad poziomem morza, przyczem zmiana wysokości słupa rtęci w barometrze nie jest proporcjonalna do zmiany wysokości, gdyż w miarę wzrastania wysokości nad poziomem morza, gęstość warstw powietrza zmniejsza się coraz bardziej. Nawet dla tego samego punktu na powierzchni ziemi ciśnienie powietrza zmienia się ustawicznie, dzięki zmianom temperatury, wilgotności i t. p. Zmienność ciśnienia jest główną przyczyną, wskutek której dokładność niwelacji fizycznej stoi niewspółmiernie niżej od niwelacji innych typów.

Niemniej przeto tam, gdzie pojedyńcze metry nie grają roli, jak np. przy pomiarach miejscowości górskich (lub falistych, jeżeli chodzi o przybliżone określenie wysokości), niwelacja fizyczna, jako zabierająca najmniej czasu, jest na szeroką skalę stosowana. A więc studja geograficzne, przedwstępne studja techniczne w podgórskich i górskich terenach, zdjęcia odręczne — są dziedzinami niwelacji fizycznej.

Niwelacja fizyczna oparta jest na założeniu, że na niewielkich przestrzeniach ciśnienia warstw powietrza na jednakowej wysokości przy spokojnym stanie powietrza są jednakowe, zmniejszają się w miarę posuwania się ku górze i zwiększają się przy opuszczaniu się, oraz że gęstość powietrza w miarę podnoszenia się ku górze zmniejsza się. Ponieważ różnica wysokości dwu punktow jest proporcjonalna do różnicy ciśnień atmosferycznych w tych punktach, a więc jest proporcjonalna do wagi słupa powietrza o wysokości, równej różnicy wysokości tych punktów, waga zaś jest iloczynem objętości przez gęstość, która znów zależy od ciśnienia i temperatury, przeto prawa niwelacji fizycznej opierają się na prawach Boyle'a-Mariotte'a, Gay-Lussac'a i Daltona.

Prawo Boyle'a - Mariotte'a.

Przy niezmiennej temperaturze gęstość gazu zmienia się proporcjonalnie do ciśnienia, przyczem iloczyn ciśnienia przez objętość jest ilością stałą.

Oznaczając początkowe ciśnienie, objętość i gęstość zapomocą p_0, v_0 i Δ_0, końcowe zaś — zapomocą p, v i Δ, wyrazimy prawo Boyle'a - Mariotte'a analitycznie:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{v_0}{v} = \frac{\Delta}{\Delta_0}$$

i

$$v\,p = v_0\,p_0$$

Prawo Gay - Lussac'a.

Przy stałem ciśnieniu objętość gazu zmienia się proporcjonalnie do zmian temperatury.

Oznaczając początkową objętość i temperaturę literami v_0 i t_0, końcowe zaś literami V i t_1, napiszemy, oznaczając zapomocą $t = t_1 - t_0$

$$v - v_0 = k\,(t_1 - t_0) = kt$$

ponieważ zaś spółczynnik k zależy od sześciennego spółczynnika α rozszerzalności gazu, gdyż

$$v - v_0 = \alpha\,v_0\,t$$

skąd

$$k = \alpha\,v_0,$$

więc

$$v = v_0\,(1 + \alpha\,t)$$

Dla powietrza

$$\alpha = 0.003665 = \frac{1}{272{,}851}$$

lub w przybliżeniu

$$\alpha = \frac{1}{273}$$

skąd

$$\frac{v}{v_0} = \frac{273^0 + t}{273^0}$$

co upoważnia do wyrażenia prawa Gay - Lussac'a zdaniem: objętości gazu przy stałem ciśnieniu są proporcjonalne do absolutnych temperatur (absolutne zero = — 273°).

Prawo Mariotte'a i Gay-Lussac'a.

Gdy gaz o objętości v_0 przy temperaturze 0° i ciśnieniu p_0 ulegnie ciśnieniu p i wpływowi temperatury t, wówczas objętość jego zmienia się na

$$v = v_0\,\frac{p_0}{p}\,(1 + \alpha\,t)$$

gdyż przy niezmiennej temperaturze, według prawa Mariotte'a:

$$v_1 = v_0 \frac{p_0}{p}$$

przy zmienionej zaś do t temperaturze, według Gay-Lussac'a:

$$v = v_1 (1 + \alpha t) = v_0 \frac{p_0}{p} (1 + \alpha t)$$

ponieważ zaś objętości są odwrotnie proporcjonalne do ciśnień:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{\Delta_0}{\Delta}$$

przeto

$$\Delta = \Delta_0 \frac{v_0}{v} = \frac{p}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha t} \Delta_0$$

Prawo Daltona.

Ilość pary, niezbędna dla nasycenia gazu, równa się ilości pary, którą można napełnić przestrzeń taką samą, jaka jest zajęta gazem, przy tej samej temperaturze.

Ciśnienie mieszaniny pary i gazu równa się sumie ciśnień, częściowych (któremi nazywamy ciśnienia, jakie wywierałyby oddzielnie para i gaz, gdyby każde z nich wypełniało taką samą objętość, jak mieszanina). Gdy więc częściowe ciśnienie gazu jest p, pary p_1, wówczas ciśnienie:

$$P = p + p_1.$$

§ 297. Barometryczny pomiar wysokości.

Rozpatrzmy pionowy walec powietrza o jednostkowej powierzchni przekroju. Na wysokości H nad poziomem morza wielkością ciśnienia jest p, na wysokości $H + dh$ — ciśnienie zmniejszy się do $p - dp$.

Wielkość zmiany ciśnienia dp równa się wadze walca powietrza, którego objętość (przy jednostkowym przekroju) wynosi dH, masa (iloczyn objętości przez gęstość) równa jest $\Delta\, dH$, zatem, wprowadzając przyspieszenie g siły ciężkości, otrzymamy, że waga tego elementu walca wynosi

$$g\, \Delta\, dH$$

więc

$$dp = - g\, \Delta\, dH$$

lecz według prawa Mariotte'a i Gay-Lussac'a:

$$\Delta = \Delta_0 \frac{p}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha t}$$

więc

$$dp = -\frac{\Delta_0}{p_0}\,\frac{pg}{1+\alpha t}\,dH$$

skąd

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\Delta_0}{p_0}\,g\,\frac{dH}{1+\alpha t}\,.$$

Przyjmując ze wszystkich wyrazów p i H za zmienne, po scałkowaniu otrzymujemy:

$$lg\,p = -\left(\frac{\Delta_0}{p_0}\,g\,\frac{1}{1+\alpha t}\right)H + C.$$

Wypisując dla stanowisk górnego: $p = b$ i $H = H_2$, dolnego zaś $p = B$ i $H = H_1$, oraz oznaczając $h = H_2 - H_1$, mamy dla obydwu stanowisk:

$$lg\,b = -\left(\frac{\Delta_0}{p_0}\,\frac{g}{1+\alpha t}\right)H_2 + C$$

$$lg\,B = -\left(\frac{\Delta_0}{p_0}\,\frac{g}{1+\alpha t}\right)H_1 + C$$

a usuwając przez odejmowanie stałą całkowania, otrzymamy:

$$lg\,B - lg\,b = \left(\frac{\Delta_0}{p_0}\,\frac{g}{1+\alpha t}\right)h$$

gdzie h oznacza

$$H_2 - H_1$$

Przechodząc od naturalnych do logarytwów Brigg'a, t. j. zakładając:

$$lg\,B = \frac{1}{M}\log B \qquad lg\,b = \frac{1}{M}\log b$$

gdzie

$$M = 0{,}434295$$

otrzymujemy

$$\log B - \log b = M\left(\frac{\Delta_0}{p_0}\,\frac{g}{1+\alpha t}\right)h$$

skąd

$$h = \frac{1}{M}\,\frac{p_0}{\Delta_0\,g}\,(1+\alpha t)\log\frac{B}{b}\,;$$

Stosunek ciśnień $\frac{B}{b}$ może być określony, gdy za B i b przyjmować będziemy odczyty w *mm.*, odpowiadające wysokości słupa rtęci w barometrze.

Za p_0 przyjmujemy wagę słupa rtęci 760 *mm.*, t. j. $p_0 = 0{,}76\,g\,s$, gdzie s oznacza gęstość rtęci.

Ponieważ stosunek gęstości powietrza przy ciśnieniu 760 m i $t^0 = 0^0$ do gęstości rtęci jest znany, gdyż

$$\frac{S}{\Delta_0} = \frac{13{,}596\ldots}{0{,}001293\ldots}$$

więc

$$h = \frac{1}{M}\,\frac{0{,}76\ g\,s}{\Delta_0\ g}\,(1 + \alpha t)\log\frac{B}{b} = K\,(1 + \alpha t)\log\frac{B}{b}$$

gdzie

$$K = \frac{0{,}76\,s}{\Delta_0} = 18400$$

(z doświadczeń Arago i Biot) i 18464 dla uproszczonego wzoru dla szerokości 50°; t oznacza średnią temperaturę obserwacyj B i b.

Wielkość K możemy określić pośrednio, z szeregu obserwacyj B i b (zapomocą barometru) na punktach, których wysokość jest znana dokładnie z niwelacji, a zatem i wyrazy h są znane.

Metoda ta polega na określaniu

$$K = \frac{h}{(1 + \alpha t)\log\frac{B}{b}}$$

na zasadzie α i grup spostrzeżeń B i b dla każdej pary danych punktów.

Przybliżony wzór hypsometryczny

$$h = K\,(1 + \alpha t)\log\frac{B}{b};$$

jest wzorem, wystarczającym dla praktyki; ścisłe wzory (Laplace'a, Bauernfeinda, Rühlmana i Jordana są bardziej skomplikowane. Tak więc wzór Jordana ma postać:

$$h = K\log\frac{B}{b}\left(1 + \alpha t\right)\left((1 + 0{,}377\,\frac{l}{p}\right)\left(1 + \beta\cos 2\varphi\right)\left(1 + \frac{2H}{r}\right)$$

gdzie

$$K = 18400,$$

h oznacza różnicę wysokości,

B i b są jednocześnie spostrzeżonemi wskazaniami rtęciowego barometru,

$\alpha = 0{,}003665$ jest spółczynnikiem rozszerzalności powietrza,

t — średnia temperatura (Celsjusz) obydwu miejsc jednoczesnej obserwacji,

e — średnia prężność pary wodnej,

p — średnie ciśnienie $\frac{B+b}{2}$ powietrza,

$\beta = 0{,}00264$ spółczynnik siły ciężkości, uzależniony od spłaszczenia ziemi,

φ — średnia szerokość geograficzna obydwu miejsc obserwacji,

H — średnia wysokość nad poziomem morza,

$r = 6370000\ m$ promień ziemi.

Wzór więc Jordana od wzoru przybliżonego różni się tem, że uwzględnia 1) zmianę przyśpieszenia siły ciężkości a) przy wznoszeniu się nad poziom morza, b) przy zmianie szerokości geograficznej, 2) wilgotność powietrza.

Uproszczony wzór hypsometryczny

$$h = 18464\ (\log B - \log b)\ (1 + 0{,}003665\ t)$$

może być przedstawiony w postaci

$$h = 18464\ (1 + 0{,}003665\ t)\ [(\log 762 - \log b) - (\log 762 - \log B)]$$

W tym wzorze 762 oznacza średni stan barometru rtęciowego na poziomie morza pod szerokością 50°.

Wobec tego, możemy przyjąć za wysokości obydwu miejsc obserwacji:

$$H_1 = 18464\ (1 + 0{,}003665\ t)\ (\log 762 - \log b)$$

$$H_2 = 18464\ (1 + 0{,}003665\ t)\ (\log 762 - \log B)$$

skąd również:

$$h = H_2 - H_1$$

Tablica Nr. VIII (patrz załączniki) daje wielkości H_1 H_2 i t. d. dla średniej temperatury 15°.

Barometryczne przyrosty wysokości.

Różniczkując równanie.

$$h = 18464\ (\log B - \log b)\ (1 + 0{,}003665\ t)$$

według zmiennych B i h, otrzymujemy:

$$dh = -\ 18464\ M \frac{dB}{B}\ (1 + 0{,}003665\ t).$$

Zakładając $dB = -\ 1\ mm.$, otrzymujemy przyrost barometryczny wysokości

$$\Delta h = \frac{8019}{B}\ (1 + 0{,}003665\ t),$$

który oznacza wielkość, o którą należy wznieść się wyżej, aby ciśnienie powietrza zmniejszyło się o 1 *mm.* odczytu barometru.

Na zasadzie tego wzoru sporządzona jest tabelka № IX załączników, w której Δh, odpowiadające B i t, podane są w metrach.

Jeżeli więc na dwu punktach, pierwszym i drugim, uzyskaliśmy B_1 i B_2 oraz t_1 i t_2, to z argumentów

$$^1/_2 (B_1 + B_2) \text{ i } ^1/_2 (t_1 + t_2)$$

z tabelki IX wynotujemy odpowiednie Δh.

Jeżeli zaś zmianie B o 1 *mm.* odpowiada Δh, to różnica wysokości obydwu punktów będzie:

$$h = (B_1 - B_2) \Delta \text{h}.$$

Postępowanie to nie uwzględnia stopnia wilgotności i siły ciężkości.

Przykład:

Punkt	Ciśnienie *mm.*	Temperatura	
dolny	754,2	15	$\Delta b = B_1 - B_2 = 11{,}6$
górny	742,6	11	$\Delta h = 11{,}22$ (z tabelki)
średnia	748,4	13	$h = \Delta b \times \Delta h = 130{,}2$ *m.*

§ 298. Barometry rtęciowe.

Barometry te dzielą się na naczyniowe, (rys. 641) lewarowe rys. 642 i naczyniowo-lewarowe rys. 643. Odczyt, dokonywany w barometrach lewarowych równa się różnicy odczytów z obydwu rurek R i R'.

Przy barometrze znajduje się termometr, którego odczyty służą dla sprowadzania odczytów barometru do temperatury 0°.

Do odczytów z barometrów rtęciowych należy wprowadzać szereg poprawek.



Rys. 641.



Rys. 642.

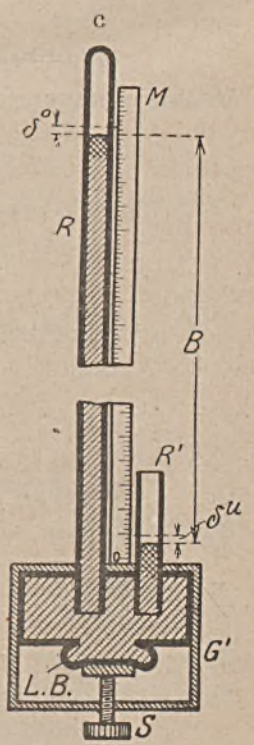
Poprawka na temperaturę.

Oznaczając literami t i B odczyty temperatury i barometru, odczyt przy 0° literą B_0 i spółczynnik rozszerzalności rtęci literą α, otrzymujemy:

$$B = B_0 (1 + \alpha t)$$

skąd

$$B_0 = \frac{B}{1 + \alpha\ t},$$



Rys. 643.

lub po odrzuceniu wyższych potęg αt, otrzymujemy

po rozwinięciu

$$B_0 = B\ (1 - \alpha t)$$

skąd

$$\Delta_t = B_0 - B = -\ 0.00018\ Bt.$$

Poprawka odczytu.

Zmierzona długość L_1 podziałki przy temperaturze t w zależności od długości L_0 przy temperaturze t_0

wynosi

$$L_1 = L_0\ [1 + \beta\ (t - t_0)]$$

skąd

$$\Delta L = L_0\ \beta\ (t - t_0)$$

i poprawka odczytu B:

$$\Delta_0 = B\ \beta\ (t - t_0)$$

gdzie β dla mosiądzu wynosi 0,000019.

Poprawka na powietrze w próżni.

Gdy w próżni barometru znajduje się powietrze, wówczas odczyty stanu barometru są zmniejszone.

Jeżeli przy raptownem pochyleniu barometru zamiast dźwięcznego usłyszymy głuche uderzenie rtęci o górny koniec rurki, wówczas w próżni znajduje się pewna ilość powietrza.

Najlepiej jest usunąć powietrze, napełniając całą rurkę rtęcią i usuwając pęcherzyki. Przy mniejszej ilości powietrza w próżni porównywamy nasz barometr z innym, w którym powietrza w próżni niema. O uzyskaną różnicę odczytów, dokonanych jednocześnie i w jednem miejscu, poprawiamy wszystkie odczyty naszego barometru.

Przy większej ilości powietrza w próżni nie można wprowadzać poprawki w tak prosty sposób; rozpatrzmy postępowanie Arago.

Przypuśćmy, że odczyt z barometru B_1 odpowiada ciśnieniu powietrza p_1 w próżni przy temperaturze t_1 i objętości v_1 próżni. Po dodaniu rtęci objętość próżni zmniejszy się o v, ciśnieniem powietrza w próżni będzie p i odczytem z barometru B.

Ponieważ z prawa Boyle'a-Mariotte'a wynika

$$p_1\ v_1 = p\ v$$

i ponieważ

$$p - p_1 = B_1 - B$$

więc

$$\frac{p_1\ v_1}{v} - p_1 = B_1 - B$$

skąd

$$p_1 = \frac{v\,(B_1 - B)}{v_1 - v}$$

Przy $v = \frac{1}{2}\, v_1$, co zależy od ilości dolanej rtęci,

$$p_1 = B_1 - B$$

Według zaś prawa Mariotte'a i Gay - Lussac'a, oznaczając literami v_0 i p_0 objętość i ciśnienie próżni barometru przy 0^0 i zamieniając $1 + \alpha\, t$ przez

$$\frac{273^0 + t}{273^0}$$

będzie:

$$v_1\, p_1 = v_0\, p_0 \left(\frac{273^0 + t_1}{273^0}\right)$$

$$v\, p = v_0\, p_0 \left(\frac{273^0 + t}{273^0}\right)$$

$$\frac{v_1\, p_1}{v\, p} = \frac{273^0 + t_1}{273^0 + t}$$

skąd

$$p = p_1 \frac{v_1}{v} \cdot \frac{273^0 + t}{273^0 + t_1}$$

a oznaczając

$$\frac{p_1\, v_1}{273^0 + t_1} = k$$

otrzymujemu:

$$p = \frac{k}{v}\,(273^0 + t)$$

co jest poprawką odczytu B.

Praktyczniej jest uniknąć tego postępowania, gdyż przy dolewaniu rtęci dostają się nowe pęcherzyki powietrza; to też zwykle porównywamy stan badanego barometru ze sprawdzonym przy różnych temperaturach i ciśnieniach, tworząc tabelkę poprawek dla odczytów badanego barometru.

§ 299. Poprawka na wysokość i szerokość geograficzną.

Oznaczmy literą g siłę ciężkości miejsca obserwacji, literę g_0 siłę ciężkości na poziomie morza pod szerokością geograficzną γ miejsca obserwacji, oraz zapomocą g_0^{45} siłę ciężkości na poziomie morza pod szerokością 45^0. Oznaczając m, m_0 i m_0^{45} masy słupków rtęci pod tem samem ciśnieniem w miejscu obserwacji, na poziomie morza pod tą samą szerokością i na poziomie morza pod szerokością 45^0, otrzymamy:

$$mg = m_0 g = m_0^{45}\, g_0^{45}$$

lub, zastępując stosunek mas stosunkiem odczytów z barometru:

$$Bg = B_0\, g_0 = B_0^{45}\, g_0^{45}$$

Przy umieszczeniu dwu jednakowych mas w różnych odległościach od środka ziemi, przyjętej za kulę, przyśpieszenia siły ciężkości dla obydwu mas, pomijając wpływ siły odśrodkowej, są odwrotnie proporcjonalne do odległości od środka ziemi; jeżeli więc literą r oznaczymy promień kuli ziemskiej i literą H wysokość miejsca obserwacji nad poziomem morza wówczas

$$\frac{g}{g_0} = \frac{r^2}{(r+H)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{H}{r}\right)^2} = 1 - \frac{2\,H}{r} + \ldots$$

Odrzucając dalsze wyrazy rozwinięcia i przyjmując z powyższego, że

$$\frac{g_0}{g} = \frac{B_0}{B}$$

otrzymamy

$$B_0 = B\left(1 - \frac{2\,H}{r}\right)$$

Siła ciężkości jest wypadkową przyciągania przez kulę ziemską i siły odśrodkowej, która zmniejsza się w miarę przesuwania się od równika ku biegunom; z tego względu siła ciężkości zwiększa się w miarę zwiększania się szerokości geograficznej.

Oznaczając siłę ciężkości g_0^{45} na poziomie morza pod szerokością 45°, na podstawie badań Helmetra otrzymujemy:

$$g_0 = g_0^{45}\,(1 - \beta \cos 2\,\varphi)$$

gdzie

$$\beta = 0.002644$$

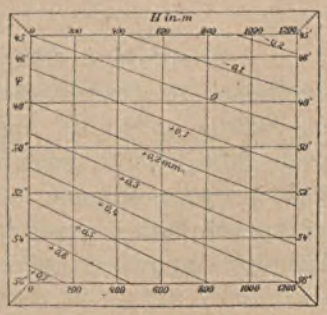
Skąd

$$B_0^{45} = B_0\,(1 - \beta \cos 2\,\varphi) =$$

$$= B\left(1 - \frac{2\,H}{r}\right)(1 - \beta \cos 2\,\varphi)$$

lub po odrzuceniu wyrazów niższego rzędu

$$B_0^{45} = B\left(1 - \frac{2\,H}{r} - \beta \cos 2\,\varphi\right)$$



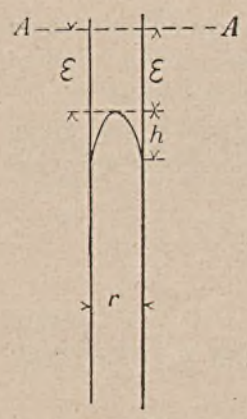
Rys. 644.

skąd wielkość poprawki dla siły ciężkości:

$$\Delta_c = B_0^{45} - B = -B\left(\frac{2\,H}{r} + \beta \cos 2\,\varphi\right)$$

wielkości Δ_c dla szerokości od 45° do 56° i wysokości do 1200 m wypisujemy na zasadzie skośnych linij wykresu, interpolując wynik dla punktu przecięcia się odpowiednich poziomych i pionowych prostych (rys. 644).

§ 300. Poprawka na depresję włoskowatą.



Rys. 645.

Wskutek przylegania rtęci do ścianek rurki obniża się stan barometru o wielkość ε, zwaną depresją włoskowatą. W barometrach o znacznej wewnętrznej średnicy rurki depresja ta jest znikomo mała i zwierciadło rtęci jest płaskie. Natomiast w wąskich rurkach obniżenie ε, będące funkcją wysokości menisku i promienia rurki, jest dość znaczne. Jeżeli literami AA oznaczymy zwierciadło normalnego (o dużej średnicy rurki) barometru, wówczas przy wąskiej rurce rtęć opuści się o ε, tworząc wierzchołek menisku, i o $\varepsilon + h$, tworząc jego podstawę.

Do odczytu należy dodawać poprawkę ε, braną z tabelki (dla $2r$ i h), w której wszystkie liczby są podane w milimetrach:

$2r$ \ h	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
2	1,26	2,45	4,38	5,58	6,70						
4	0,30	0,60	1,15	1,64	2,04	2,34	2,54	2,66	2,68	2,70	2,71
6	0,12	0,24	0,48	0,70	0,84	1,07	1,21	1,32	1,40	1,45	1,47
8	0,07	0,12	0,21	0,35	0,46	0,55	0,53	0,70	0,76	0,81	0,84
10	0,03	0.07	0,14	0,20	0,25	0,30	0,34	0,39	0,43	0,47	0,48

Wielkość h odczytuje się na podziałce barometru; dla odczytania wielkości $2r$ przesuwamy równoramienny Δ prostokątny przeciwprostokątną wzdłuż podziałki, odczytując 1-e położenie wierzchołka ostrego kąta przy skierowaniu przyprostokątnej na spód menisku i II-e położenie ostrego kąta po przesunięciu Δ-a do położenia, w którem przedłużenie tej samej przyprostokątnej przetnie średnicowo przeciwległy punkt podstawy menisku. Różnica obydwu wziętych z podziałki odczytów wynosi $2r$.

§ 301. Termohypsometry.

Temperatura wrzenia wody zależy od wielkości ciśnienia. Zależność pomiędzy temperaturą wrzenia wody a wielkością ciśnienia ustalona została doświadczalnie przez Regnault'a. Tabelka poniższa stanowi wyciąg z jego badań.

Jak widzimy z danych tabelki, zmiana temperatury wrzenia o $0{,}1^0\ C$ wskazuje na zmianę ciśnienia, równą około 2,7 *mm*. Wynika stąd, że pomiar temperatury winien być bardzo dokładny.

Termometry, używane przy wyrabianych u Zeissa w Jenie termohypsometrach, mają specjalny gatunek szkła (jeńskie szkło), który w bardzo małym stopniu ulega wpływowi temperatury, bliskiej 0°, dzięki czemu z biegiem czasu punkt topnienia lodu i punkt wrzenia wody przy ciśnieniu 760° nie zmieniają swego położenia w termometrze.

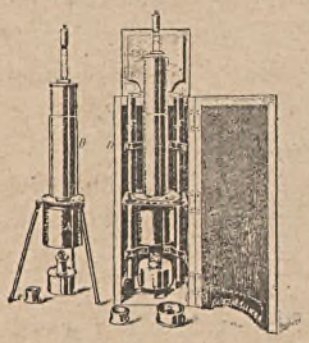
Temperatura wrzenia wg Cels	Ciśnienie	Różnice
99,4	743,83	
		2,69
99,5	746,52	
		2,68
99,6	749,20	
		2,69
99,7	751,89	
		2,69
99,8	754,58	
		2,71
99,9	757,29	
		2,71
100,0	760,00	
		2,72
100,1	762,72	
		2,73
100,2	765,45	
		2,73
100,3	768,18	
		2,75
100,4	770,93	
		27,5
100,5	773,68	
		2,77
100,6	776,46	

Podziałka termometru od 85° do 101° daje możność odczytywania z dokładnością do $\frac{1}{50}$ stopnia, dzięki kulce termometru o znacznym promieniu i bardzo wąskiej rurce, której dolna część jest rozszerzona w niektórych typach przyrządu. Opis podziałki termometru podany jest częstokroć w milimetrach, zamiast w stopniach, na podstawie powyższej tabelki. Dla określania temperatury wrzenia mamy więc podział u góry, dla temperatury topnienia lodu — u dołu pod bańką rurki. Komplet zwykle składa się z kilku termometrów — po jednym do odliczania temperatury od 70° — 80°, 80° — 90°, 90° — 101°.

Do gotowania wody służy naczynie *A*, wiszące na trójnogu; pod naczynie podstawia się lampa spirytusowa. Z pokrywą naczynia złączony jest pionowo stojący wewnętrzny walec metalowy, zamykany od góry korkiem gumowym, przez środek którego przesuwać się może termometr. Pod termometrem w dnie walca znajduje się siatka druciana, niedopuszczająca do termometru kropel wrzącej wody.

Do parowania używa się woda deszczowa lub destylowana.

Nazewnątrz środkowego walca znajduje się drugi; wewnętrzny jest wkręcany w pokrywę naczynia. Para przechodzi przez sito, podnosi się ku górze i przez otworki wewnętrznego walca wchodzi pomiędzy ścianki walców, skąd opada wdół przez boczne otwory. Futerał *D* chroni przyrząd od wiatru. Płomień lampy spirytusowej nie powinien być wyższy od 4 *cm*.



Rys. 646.

Woda powinna wrzeć przed dokonaniem odczytów nie mniej, niż 10 minut. Ponieważ błąd odczytu równy 0,1°, odpowiada dwudziestu kilku metrom, przeto odczyty winny być dokonywane kilkakrotnie. Dla usunięcia z odczytów wpływu paralaksy, w odległości do kilkunastu metrów od termometru, na wysokości jego podziałki, ustawia się do poziomu lunetę, przez którą należy odczytywać stan termometru.

Dokładność, uzyskiwana zapomocą termohypsometrów, nie dorównywa dokładności barometrów rtęciowych.

§ 302. Aneroidy.

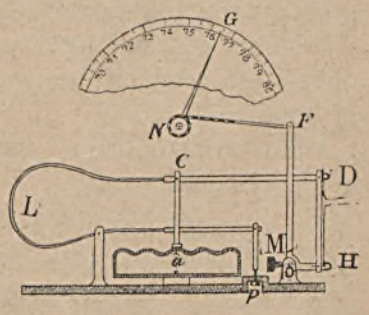
Znacznie dogodniejsze w użyciu od barometrów rtęciowych i hypsotermometrów są metalowe barometry, zwane aneroidami, wynalezione w 1847 r. przez Vidi,—dogodne dzięki małym wymiarom.

Najważniejszą częścią przyrządu jest metalowe pudełko kształtu walca z trwałemi ściankami i elastycznemi denkiem i pokrywką. Pokrywka ma kształt koncentryczno-falisty. Powietrze jest usunięte z pudełka.

Sprężyna *L* przeciwdziała wgnieceniu pokrywki i denka z powodu ciśnienia powietrza; niemniej przeto elastyczność jest zachowana. Przy powiększaniu ciśnienia pokrywka i denko zbliżają się wzajemnie; przy zmniejszeniu—oddalają się.

Przy średniej wielkości pudełka zmiana ciśnienia o 1 *mm*, zmienia odległość między pokrywką a denkiem o 0,004 *mm*.

Aneroid Naudet'a posiada mechanizm, przedstawiony na schematycznym rys. 647. Górny koniec silnej sprężyny *L* łączy się z ramieniem *CD*. Dźwignia *CD* przegubem *D* jest połączona z prostopadłem do niej ramieniem *DH*, działającem przy przesuwaniu się punktu *D* na dźwignię kolankową (dwuramienną) *HF*; koniec *F* dźwigni połączony jest prętem, zakończonym łańcuszkiem, z osią obrotu wskazówki *G*, na którą nawinięty jest ten łańcuszek. Zwiększenie ciśnienia wgniata pokrywkę wdół, co odsuwa *F* od osi obrotu wskazówki; takie przesunięcie *F* wprawia w obrót oś wskazówki, przesuwając ją w prawo. Zmniejszenie ciśnienia posuwa wskazówkę w lewo przy współdziałaniu innej spiralnej sprężyny *N*, nakręcającej oś obrotu



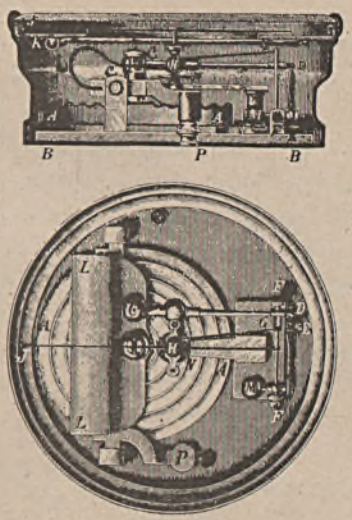
Rys. 647.

wskazówki na łańcuszek, zwolniony zapomocą zmniejszenia ciśnienia. Ruchowi martwemu osi obrotu wskazówki przeciwdziała sprężyna *L* i ciężarek *M*. Podziałka w górnej części przyrządu umożliwia dokonywanie odczytów ze stanu wskazówki.

Ponieważ stosunek przesunięcia końca wskazówki *G* do przesunięcia punktu *C* wynosi 250 i nie powinien się zmieniać, przeto dokładność wykończenia części przyrządu winna być bardzo wysoka.

Jednostka podziału przy wskazówce odpowiada 1 *mm* ciśnienia. Podział taki sporządza się na zasadzie określenia stanu wskazówki przy znanych ciśnieniach.

Rektyfikacyjna śrubka *p* przy wkręcaniu jej zmienić może w pewnych granicach położenie sprężyny *L*, a tem samem przesunie nieco wskazówkę. Możemy więc zapomocą tej śrubki sprowadzić wskazówkę na podziałkę, wskazującą liczbę, ściśle odpowiadającą ciśnieniu, określonemu w tym czasie i miejscu zapomocą barometru rtęciowego. Pozostaje uregulować ruch wskazówki, która winna przesuwać się zgodnie ze wskazaniami barometru. Można to uskutecznić dokonaniem odpowiedniej zmiany długości kolanka *O H*. Taka zmiana wymaga odpowiedniej wprawy i narzędzi; pozostawia się ją więc mechanikom.



Rys. 648.

Rys. 647 daje szczegóły konstrukcyjne aneroidów Naudet i Bohnego; ruchowi martwemu osi *H* obrotu wskazówki przeciwdziała spiralna sprężyna *N*; główna sprężyna *L* podtrzymuje słupek *C*; przy zmniejszeniu ciśnienia słupek i ramię *C D* podnoszą się ku górze. Ciężarek *M* przeciwdziała martwemu ruchowi tylko wtedy, gdy przyrząd utrzymywany jest poziomo; przy takiem więc jego położeniu należy dokonywać spostrzeżeń ze wskazówki. Przed dokonywaniem odczytów należy lekko uderzać palcem po aneroidzie.

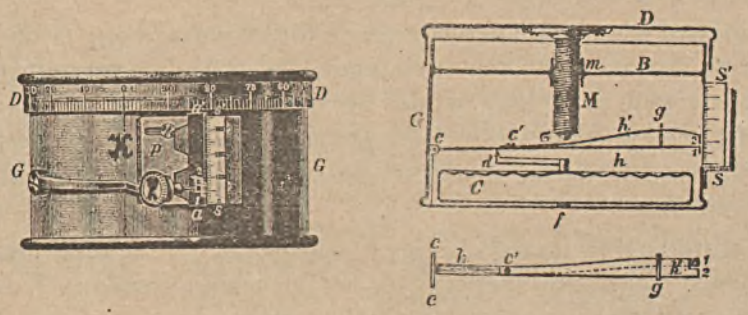
Do wykazywania wewnętrznej temperatury przyrządu służy termometr, połączony z cyferblatem. Dla ochrony od raptownych zmian temperatury przyrząd ułożony jest w pudełku, wyłożonem wewnątrz filcem.

W typie Bohnego ramię *C D* i ramię *D H* dźwigni są dwumetalowe, tak że ze wzrostem temperatury zachodzi wygięcie dźwigni i wynikające stąd przesunięcie punktu *D* wywołuje przesunięcie strzałki aneroidu, likwidujące wpływy rozszerzalności części przyrządu.

§ 303. Aneroid Goldschmida.

W naczyniu *G G* walcowego kształtu znajduje się mechanizm, składający się z bezpowietrznej komory *C*, ramion *h* i *h'* i mikrometrycznej śruby *M*. Ramię *d* przejmuje wahania pokrywy *C* i przenosi je na obraca-

jące się dokoła osi C ramię h. Ramię h zakończone jest indeksem 1, wysuniętym nazewnątrz naczynia w otworze $a\,a'$ tak, że dotyka podziału $s\,s'$.



Rys. 649.

Przy zwiększaniu się ciśnienia indeks opuszcza się, przy zmiejszaniu — podnosi się. Podział $s\,s'$ w przybliżeniu odpowiada wskazaniom barometru rtęciowego; wielkość jednej działki $s\,s'$ odpowiadą ciśnieniu 10 *mm*. W górne denko B aneroidu wśrubowany jest walec m, będący naśrubkiem mikrometrycznej śruby M, połączonej z pokrywą D, której obwód jest podzielony na 100 części. Na ściance pudełka w lewo od otworu $a\,a'$ naniesiony jest indeks K, z którego odczytujemy stan śruby M z podziałki bębenka na ściance $D\,D$ pokrywy. Jeden obrót śruby odpowiada 10 milimetrowej działce $s\,s'$, więc 1 działka bębenka $D\,D$ podpowiada $\frac{1}{10}$ *mm*, szacując zaś z indesu do $\frac{1}{10}$, możemy otrzymywać odczyty do $\frac{1}{100}$ *mm*.

Za stan śruby M przyjmować będziemy to jej położenie, przy którem śruba, cisnąc na sprężynę h', doprowadzi kreskę 2 do zetknięcia się z kreską 1. W tem położeniu śruby odczytywać należy indeks K.

Ponieważ podziały na bębenku i skali $s\,s'$ są w ten sposób uzgodnione, że przy sprowadzeniu indeksu 1 na jeden z dziesiątków *mm* skali $s\,s'$, z indeksu K na bębnie odczytujemy zero, przeto, gdy indeks 1 znajduje się między dziesięciomilimetrowemi kreskami $s\,s'$, śruba zaś M jest dokręcona tak, że kreski 1 i 2 są złączone, odczyt z indeksu K daje całe i części milimetra.

Np., jeżeli kreska indeksu 1 ustawi się między 730 i 740 skali $s\,s'$, z indeksu zaś K, po sprowadzeniu zapomocą obrotu śruby indeksów 1 i 2 do zetknięcia, odczytamy 3,37, to całkowitym odczytem będzie 733,37 *mm*.

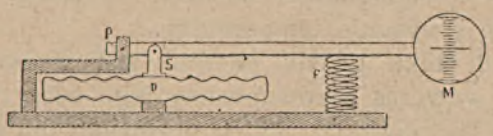
Przy przejazdach odkręcamy denko D o kilka obrotów, aby pokrywka C mogła swobodnie dostosowywać się do zmian ciśnienia.

Jakkolwiek odczyty z tego aneroidu można brać z dokładnością do 0,01 *mm*., to jednak powtórzony natychmiast po zwolnieniu i nowem zestawieniu śruby M ze sprężyną h' odczyt nie będzie identyczny z dokonanym, a różnić się będzie o kilka setnych.

§ 304. Mikroskopowy aneroid Reitz-Deutschbein'a.

Kolumienka S górnego denka bezpowietrznej komory D przy drganiu swem porusza ramię, obracające się dokoła P i podtrzymywane spiralną sprężyną F.

Na końcu ramienia PSF osadzona jest podziałka M, fotograficznie



Rys. 650.

utrwalona na szkle. Przez silnie popowiększający mikroskop, przytwierdzony prostopadle do płytki z podziałką, możemy dokonywać odczytów, jak na łacie.

Aneroid ten używa się na równinach.

§ 305. Poprawki aneroidu Naudet i Bohnego.

Odczyt F, wzięty z aneroidu, różni się od właściwego stanu ciśnienia Q. Zależność, między temi wielkościami zachodząca, określa się równaniem:

$$Q = F + a + bt + c\,(760 - F),$$

w którem: a oznacza poprawkę stanowiska (odczytu aneroidu przy temperaturze 0^0 i ciśnieniu 760 *mm.*), bt jest poprawką, sprowadzającą odczyt, wzięty przy temperaturze t^0, do temperatury 0^0, b jest spółczynnikiem temperatur, c $(760^0 - F)$ jest poprawką odczytu, wynikającą z niedość dokładnego funkcjonowania i doboru części aneroidu, dzięki czemu jednostka podziału aneroidu wypada za duża, lub za mała.

C jest poprawką jednego milimetra podziałki aneroidu.

Poprawkę c $(760^0 - F)$ obliczamy, licząc od ciśnienia 760^0, dla którego uwzględniamy poprawkę a.

Równanie na Q, powyżej wypisane, wystarcza dla celów praktyki.

Poprawka stanowiska.

Wielkość a zmienia się wskutek wstrząśnień, którym ulega aneroid przy transporcie i użyciu. Z tego względu wielkość a określamy dość często, porównywając odczyt aneroidu z odczytem barometru przy temperaturze 0^0 i ciśnieniu 760^0. Wielkość a może osiągnąć 0,5 *mm* w ciągu

krótkiego czasu. Z tego względu przy naukowych określeniach ciśnienia winien się znajdować prócz aneroidu barometr rtęciowy dla porównania.

Poprawka na temperaturę.

Ponieważ granice wahań temperatury są względnie niewielkie, przeto możemy poprawkę przyjąć za proporcjonalną do temperatury i przyrównać do *bt*. Spółczynnik *b* najdogodniej określać w zimie, gdyż wtedy łatwo uzyskujemy i niskie i wysokie temperatury.

Gdy w ciągu kilku godzin aneroid jest wystawiony na działanie stałej temperatury, wówczas porównywamy jego odczyt z odczytem z barometru rtęciowego. Dokonywając takich porównań dla różnych temperatur, określimy dla każdej z nich poprawkę *bt*. Wielkość *b* waha się od — 0,1 *mm* do — 0,2 *mm* przy lepszych aneroidach.

$$Q = F + a + bt + c\ (760 - F)$$

$$Q_1 = F' + a + bt' + c\ (760 - F').$$

Przyjmując, iż obserwacyj dokonano przy małej zmianie ciśnienia i że podziałka jest o tyle dokładna, że *c* jest niewielkie, ostatnie wyrazy w obydwu równaniach możemy przyrównać do siebie,

skąd

$$Q - Q_1 = F - F' + b\ (t - t')$$

$$b = \frac{Q - Q_1 - (F - F')}{t - t'} = \frac{\Delta Q - \Delta F}{\Delta t}$$

Poprawka podziału.

Badania tej poprawki najlepiej dokonywać w zimie, gdy mamy największe wahania ciśnienia (dochodzące dla tego samego miejsca do 40 *mm*). Zestawiamy tabelkę wskazań barometru rtęciowego i aneroidu, redukując je do temperatury 0°. Otrzymujemy grupę spostrzeżeń:

$$Q_1 = F_1 + a + c\ (760 - F_1)$$

$$Q_2 = F_2 + a + c\ (760 - F_2)$$

— — — — — — — — — —

— — — — — — — — — —

— — — — — — — — — —

$$Q_n = F_n + a + c\ (760 - F_n)$$

po dodaniu:

$$[Q] = [F] + na + c\{n\,760^0 - [F]\}$$

skąd

$$c = \frac{[Q] - [F] - na}{n\,760^0 - [F]}$$

Wielkości w liczniku i mianowniku są znane; c określimy. Dla mniejszych ciśnień tych samych obserwacyj dokonamy w górach, wprowadzając do barometru poprawkę na zmianę siły ciężkości w związku ze zmianą wysokości, Poza tem stosowane jest wypompowywanie powietrza z pod klosza, pod którym się znajduje aneroid.

Określenia a, b i c metodą najmniejszych kwadratów.

Równaniu

$$Q = F + a + bt + c\,(760 - F),$$

nawet przy dokładnie znanych a, b i c, nie stanie się zadość wobec błędów odczytów Q, F i t.

Wskutek tego z grupy spostrzeżeń Q i F uzyskamy grupę równań błędów, w których a, b i c będziemy pisać przez A, B i C (dla odróżnienia od symboli a i b równań błędów).

Tak więc (patrz rozdział XII):

$$v_1 = A + Bt_1 + C\,(760 - F_1) + (F_1 - Q_1)$$

$$v_2 = A + Bt_2 + C\,(760 - F_2) + (F_2 - Q_2)$$

— — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — —

$$v_n = A + Bt_n + C\,(760 - F_n) + (F_n - Q_n)$$

Oznaczając zapomocą l wyrazy typu $F - Q$, utworzymy równania normalne:

$$n\,A + [t]\,B + [760 - F]\,C + (F - Q) = 0$$

$$[t]\,A + [tt]\,B + [(760 - F)t]\,C + [(F - Q)\,t] = 0$$

$$[760 - F]\,A + [(760 - F)\,t]\,B + [(760 - F)^2]\,C + [(F - Q)\,(760 - F)] = 0$$

Z tych zaś równań obliczymy A, B i C, a więc spółczynniki a, b i c aneroidu.

§ 306. Przebieg niwelacji barometrycznej.

W ostatnich czasach, dzięki aneroidom, niwelacja barometryczna stosuje się dość często, pominąwszy badania naukowe, przy pomiarach technicznych, w terenach górskich i podgórskich; mając mapę sytuacyjną dla przedwstępnych studjów technicznych, trzeba nieraz wyznaczyć szybko wysokości przybliżone całego szeregu punktów znanych. Stosują się dwie metody postępowania: niwelacja dwoma i jednym aneroidem.

§ 307. Niwelacja dwoma aneroidami.

Jeden z nich w czasie posuwania się drugiego w terenie pozostaje na stanowisku o znanej wysokości; stąd nazwy *stacyjny* i *polowy* aneroid; obydwa mogą zamieniać się rolami: stacyjny może zostać polowym i odwrotnie.

Przed rozpoczęciem pracy porównywamy zegarki oraz odczyty obydwu aneroidów. Gdy jest do dyspozycji barometr rtęciowy, aneroidy porównywamy z nim. Gdy przy odczycie B, zredukowanym do temperatury zero, odczytamy z aneroidów (typ Naudet i Bohne) F_1 i t_1, oraz F_2 i t_2,

skąd:

$$B = F_1 + a_1 + b_1\, t_1 + c_1\, (760 - F_1)$$

$$B = F_2 + a_2 + b_2\, t_2 + c_2\, (760 - F_2)$$

i stąd obliczymy:

$$a_1 = B - F_1 - b_1\, t_1 - c_1\, (760 - F_1)$$

$$a_2 = B - F_2 - b_2\, t_2 - c_2\, (760 - F_2)$$

oraz

$$\Delta\, a = a_1 - a_2,$$

znajdziemy wówczas poprawki a_1, a_2 odczytów F_1 i F_2.

Następnie aneroid polowy rusza i dokonywamy zapisu stanu obydwu aneroidów i ich temperatury w umówionych, ale ściśle przestrzeganych, odstępach czasu, np. co 15 minut. Temperaturę powietrza notujemy co 30 minut.

Przy użyciu aneroidu polowego punkt obserwacyjny powinien być obrany w ciągu 15 minut. Przy transporcie tego aneroidu wstrząśnienia i wystawianie go na bezpośrednie działanie promieni słonecznych winny być wykluczone. Temperaturę powietrza określamy z termometru, który wprawiamy w wahanie na sznurku w ciągu pewnego czasu, przed dokonaniem odczytu. Obywa aneroidy przed odczytem ustawiają się poziomo; polowy—ustawia się na wysokości piersi, stacyjny zaś zawsze znajduje się na stoliku, lub innej stałej podstawce. Zapis aneroidu stacyjnego tem się różni od zapisu polowego, że nie posiada rubryki na № punktu. Wyciąg z zapisu aneroidu polowego ma wygląd następujący: (patrz tabl. str. 711).

Aneroid polowy nie powinien zbyt się oddalać od 1-ego aneroidu, gdyż współpraca dwu aneroidów jest celowa w rejonie działania jednakowych zmian ciśnienia, co nie ma miejsca dla większych odległości, a specjalnie w wypadku, gdy aneroidy są oddzielone głębokiemi dolinami lub wysokiemi pasmami wzgórz.

Po powrocie aneroidu polowego do stanowiska stacyjnego, porównanie obydwu winno być dokonane, jak na początku pracy.

Aneroid № 1875 polowy.

Punkt	Czas	Odczyt	Temperatura aneroidu	Temperatura powietrza i czas obserwacji
1	$8^h\ 40^m$	752,30	+ 14°,1	
2	$8^h\ 55^m$	750,75	+ 14°,3	+ 14°,5 9^h
3	$9^h\ 10^m$	753,10	+ 14°,6	
4	$9^h\ 25^m$	754,80	+ 15°,8	+ 16°,0 $9^h\ 30^m$
— —	— — —	— — —	— — —	— — — — —
— —	— — —	— — —	— — —	— — — — —

§ 308. Obliczenie niwelacji barometrycznej według wzoru Babinet'a.

We wzorze zasadniczym niwelacji barometrycznej:

$$h = 18464\ (1 + \alpha t) \log \frac{B}{b}$$

oznaczmy spółczynnik przy $\log \frac{B}{b}$ literą A; wówczas

$$h = A \log \frac{B}{b}$$

Przyrównajmy:

$$\frac{B}{b} = \frac{1+x}{1-x}$$

gdzie x określimy z pochodnej proporcji:

$$\frac{B-b}{B+b} = \frac{2x}{2} = x$$

stąd

$$\log \frac{B}{b} = \log (1+x) - \log (1-x)$$

Lecz z analizy wiadomo, że:

$$\log (1+x) = M \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\right)$$

$$\log (1-x) = -M \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \ldots\right)$$

zatem

$$\log \frac{1+x}{1-x} = M\left(2x + \frac{2}{3}x^3 + \ldots\right) = \log \frac{B}{b}$$

więc

$$h = A\,M\left\{2\,\frac{B-b}{B+b} + \frac{2}{3}\left(\frac{B-b}{B+b}\right)^3 - \ldots\right\} = A\,M\left\{\frac{B-b}{^1/_2(B+b)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{12}\left(\frac{B-b}{^1/_2\,(B+b)}\right)^3 + \ldots\right\}$$

lub po odrzuceniu wyrazów niższego rzędu:

$$h = AM\,\frac{B-b}{^1/_2\,(B+b)} = \frac{8019\,(1+\alpha\,t)}{^1/_2\,(B+b)}\,(B-b) = \Delta\,h_1\,(B-b)$$

dla wyrazu

$$\Delta\,h_1 = \frac{8019}{^1/_2\,(B+b)}\,(1+\alpha\,t)$$

ułożył prof. Jordan tablice, w których za oznaczenie B przyjmować należy wchodzące do wzoru $\frac{1}{2}\,(B+b)$, za $\Delta\,h$ — wielkość C.

Tablice te na końcu książki są podane w skrócie, jako tablica № IX.

Dla każdej pary jednocześnie zaobserwowanych przy niwelacji barometrycznej punktów, przyjmując za B spostrzeżenie w niższym, za b w wyższym punkcie, t. j. za B większe ciśnienie, za b — mniejsze, obliczymy:

a) średnią temperaturę t, odpowiadającą obydwu spostrzeżeniom, t.j.

$$t = \frac{t_B + t_b}{2}$$

b) wyrazy

$$\frac{B+b}{2} \text{ i } \frac{B-b}{2}$$

c) z tablic Jordana z argumentu B $\left(\text{nasz } \frac{B+b}{2}\right)$ i średniej temperatury t wypiszemy $\Delta\,h_1$ i wreszcie

d) obliczymy różnicę wysokości obydwu punktów:

$$\Delta\,h = \Delta\,h_1\,(B-b)$$

Oczywiście, przystępując do obliczenia według Babinet'a, należy uprzednio opracować dane spostrzeżeń.

Opracowanie to polega na uzgodnieniu sprowadzonych do temperatury zero jednoczesnych wskazań obydwu aneroidów.

Równanie każdego aneroidu typu

$$B = F_1 + a_1 + b_1\,t_1 + c_1\,(760 - F_1),$$

jak np.:

$$B = F_1 - 2{,}6 - 0{,}135\,t + 0{,}047\,(760 - F_1)$$

daje możność obliczyć poprawkowe wyrazy:

$$k_1 = -0{,}135\ t = b_1\ t$$
$$k_2 = +0{,}047\ (760 - F_1) = c_1\ (760 - F_1).$$

Tak więc uzyskamy dla temperatury zero poprawione jednocześnie wskazania obydwu aneroidów.

Gdy wyrazy a_1 nie są znane, wówczas wskazania aneroidu polowego sprowadzamy do wskazań stacyjnego.

Mianowicie obliczamy dla przedwstępnego i końcowego porównań aneroidów poprawki k_1 i k_2 i redukujemy obydwa spostrzeżenia stacyjnego i polowego aneroidu do temperatury zero;

uzyskujemy:

$$B'_s = F'_s + k_1 + k_2 \text{ (początek pracy)},$$
$$B''_s = F''_s + k'_1 + k'_2 \text{ (koniec pracy)};$$

to samo dla polowego

$$B'_p = F'_p - k'_p - k''_p$$
$$B''_p = F''_p - k'_p - k''_p$$

Tworząc różnice

$$\Delta F' = B'_p - B'_s$$
$$\Delta F'' = B''_p - B'_s,$$

obliczymy poprawkę a aneroidu polowego

$$a = \frac{\Delta F' + \Delta F''}{2}$$

o którą zwiększymy wszystkie jego odczyty, wzięte w polu.

Mając zredukowane w ten sposób spostrzeżenia obydwu aneroidów, dalsze obliczenia układamy według formularza Babinet:

	Aneroid		$\frac{B+b}{2}$	$B-b$	t_1	t_2	$\frac{t_1+t_2}{2}$	Δh z tablic	$\Delta h = \Delta h\,(B-b)$
	B	b							
N	722,4	710,6	716,5	+11,8	16°,0	17°,6	16°,8	11.89	+ 140,3

i t. d.

Niekiedy po powrocie aneroidu polowego analogicznie powtarzamy całe postępowanie, wysyłając w pole aneroid stacyjny.

Po ukończeniu pracy na danem stanowisku można przenieść obydwa aneroidy na ostatni określony ze spostrzeżeń barometrycznych punkt i kontynuować pracę w wyznaczonym kierunku.

Niwelację barometryczną szeregu punktów, leżących w coraz to dalszej od pierwszego odległości, wykonać możemy, jak następuje, zapomocą dwu porównanych z barometrem rtęciowym aneroidów:

1) I-y aneroid znajduje się w punkcie *A*, drugi przechodzi do *B*; w określonych odstępach czasu notujemy wskazania obydwu aneroidów i temperaturę: następnie

2) I-y aneroid przesuwa się z *A* do *B*, a równocześnie drugi — z *B* do C.

Takie równoczesne przesuwanie obydwu trwa do czasu, gdy w celu powtórnego porównania II-i aneroid zostaje zatrzymany w punkcie *x*, dopóki I-y tam nie dotrze. Po dokonaniu porównania postępujemy, jak poprzednio.

Gdyby przy pewnem, po 1-em, porównaniu, okazało się, że aneroidy dają odskok, wówczas należy je porównać z barometrem rtęciowym.

Postępowanie całe możemy sprowadzić do poprzedniego, stwarzając fikcję aneroidu stacyjnego; niech będzie, np.:

Punkt	Czas	Wskazania aneroidów		Wyrównane ze stanowiska *A* spostrzeżenia II-ego
		I	II	
A	3^h	742	745	742
	4^h	744		
B	4^h		747	744
	5^h	738		
C	5^h		738	735
	6^h	734		
D	6^h		733	730
	7^h	734		

Ponieważ pomiędzy 4-ą a 5-ą godziną ciśnienie zmniejszyło się o 744 — 738 = 6 *mm*, między zaś 5-ą a 6-ą o 735 — 734 = 1 *mm* i między 6-ą a 7-ą zwiększyło się o 734 — 730 = 4 *mm*, przeto, przyjmując, że zmiana ciśnienia na krótkim kilkokilometrowym odcinku była jednakowa we wszystkich punktach, otrzymamy dla wskazań fikcyjnego aneroidu w punkcie *A* notowania:

3^h 742 *mm*

4^h 744 „

5^h 738 „

6^h 736 „

7^h 739 „

Możemy więc stosować postępowanie takie, jak przy stacyjnym i polowym aneroidzie, przyjmując za polowy II-i aneroid.

§ 309. Niwelacja jednym aneroidem.

Niwelacja zapomocą jednego aneroidu, termometru i zegarka sprowadza się do typu niwelacji dwoma aneroidami.

Czas niwelacji winien być ograniczony do kilku godzin. Kończymy niwelację w punkcie początkowym. Mając w tym punkcie dwa spostrzeżenia F_1 i F_2, oraz odstępy czasu t_1 t_2 t_3 ... t_n, w których, licząc od początku, dokonywaliśmy spostrzeżeń, tworzymy: $T = [t]$

oraz

$$\Delta_1 = \frac{F_1 - F_2}{T} t_1$$

$$\Delta_2 = \frac{F_1 - F_2}{T} (t_1 + t_2)$$

— — — — — —

— — — — — —

i obliczamy wskazania fikcyjnego aneroidu na stanowisku pierwszem, równoczesne z dokonanemi spostrzeżeniami, t. j.

$$F_1 = F_1$$

$$F'_1 = F_1 + \Delta_1$$

$$F''_1 = F_1 + \Delta_2$$

— — — —

— — — —

W ten sposób zagadnienie sprowadza się do poprzedniego.

Gdy ciąg niwelacji barometrycznej, jednym aneroidem dokonanej, zamyka się w punktach o znanych wysokościach, wyrównamy sumę różnic wysokości kolejnych punktów do danej różni y wysokości pierwszego i ostatniego punktu, przypuszczając, że zmiany ciśnienia są proporcjonalne do czasu, o ile nie nastąpiły w czasie niwelacji zjawiska, wykluczające takie założenie, jak np. opady atmosferyczne, silne wiatry z raptowną zmianą temperatury i t. p.

OGÓLNE UWAGI.

Niwelacja barometryczna daje dość zgodny obraz różnic wysokości w takich terenach, gdzie błędy 2 — 3 *m* nie mają znaczenia. Poza podgórskiemi i górskiemi terenami, stosuje się wszędzie tam, gdzie niema ścisłych kart topograficznych. Jak stąd widzimy, praktyczne znaczenie tej niwelacji dla Europy jest niewielkie.

ROZDZIAŁ XI.

POMIARY STOLIKOWE.

Przy zdjęciach sytuacyjnych i tachymetrycznych prócz przyrządów uniwersalnych stosuje się stolik mierniczy.

Przyrząd ten umożliwia szybkie wykonanie pomiaru polowego z jednoczesnem wykonaniem ołówkiem planu sytuacyjnego; używany jest najczęściej przy pracach topograficznych, gdyż daje zupełnie dostateczną dla potrzeb topografji dokładność, sam zaś pomiar jest szybki i przejrzysty, ponieważ sporządzenie planu bezpośrednio w polu w otoczeniu najbliższych szczegółów daje możność porównywania wyników pracy z terenem, czego pozbawieni jesteśmy przy stosowaniu teodolitu, wówczas bowiem plan sporządza się w biurze po ukończeniu pracy polowej.

Stolik mierniczy pozwala wykreślać bezpośrednio w terenie rzuty poziome kątów, a więc i zespół kierunków, zaobserwowanych na dawnem stanowisku. Ażeby kąt, wykreślony na stoliku, ściśle odpowiadał wielkości tego samego kąta w terenie, należy w granicach dokładności graficznego wykreślenia dążyć do zachowania następujących warunków:

1) płaszczyzny kolimacyjne winny przechodzić przez wierzchołek kąta w terenie i na stoliku, prostopadle do płaszczyzny rysunku,

2) płaszczyzna papieru rysunkowego (naklejonego na t. zw. płytę stolikową) winna być pozioma;

3) poszczególne kierunki winny być wykreślone na papierze jako ślady płaszczyzn kolimacyjnych, względnie jako proste, do nich równoległe (gdyż równoległe do siebie przesunięcie ramion kąta nie zmienia jego wielkości). Ponieważ zwykle dążymy do takiego ułożenia prostych w stosunku do kierunku południka (wykreślonego na stoliku), jakie ma miejsce w terenie, przeto do poprzednich warunków dochodzi zorjentowanie, t. j. sprowadzenie zapomocą obrotu dokoła osi pionowej przyrządu płyty stolikowej do tego położenia, przy którem południk, wykreślony na stoliku, znajdzie się w płaszczyźnie południka.

Stąd wynika, że dla właściwego wykonania pomiaru należy:

a) poziomować stolik, b) mieć możność sprowadzania punktu (wierzchołka kąta) na stoliku do pionu odpowiedniego punktu terenu, t. j. mieć możność pionowania stolika i c) mieć możność dogodnego obracania stolika dokoła osi pionowej przyrządu.

Sprowadzenie płyty stolikowej do poziowu umożliwiają śruby nastawowe, obrót dokoła osi umożliwia zwolnienie śruby zaciskowej, względnie działanie odpowiedniej leniwki, wreszcie dla pionowania punktu — płyta stolikowa winna mieć ruch postępowy.

Stolik zaopatruje się w trzy dodatkowe przyrządy: kierownicę (linjał z przeziernikami (rys. 653 b) lub lunetą), pionownik i busolę stolikową.

§ 310. Stolik mierniczy.

Stolik mierniczy składa się z trzech części:

a) płyty stolikowej, b) głowicy i c) trójnoga. Trójnóg i głowica stanowią statyw stolika. Płyta jest sklejona z deseczek lipowych lub brzozowych, ujętych w ramę; z góry jest pokryta fornierem, od spodu jest zaopatrzona w trzy krążki mosiężne z naśrubkami od wewnątrz, służącemi dla wkręcania w płytę śrub, łączących ją z głowicą. Wymiary płyty, która jest kwadratowa, nie przekraczają zwykle 60×60 *cm.* w normalnych egzemplarzach.

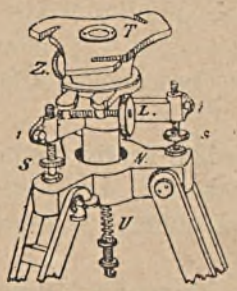
Na płycie stolikowej naklejany jest papier kreślarski, na którym przy pomiarze kreśli się odpowiednie linje. Płyta winna być płaska, co kontroluje się zapomocą przyłożenia do niej krawędzi sprawdzonego linjału. Jeżeli krawędź linjału (którego dolną płaszczyznę ustawimy mniej więcej prostopadle do górnej powierzchni płyty) przylega szczelnie do płyty w ten sposób, że pod krawędzią nie zauważymy wgłębienia płyty i przechodzącego przez nie swiatła, przytem w kilku położeniach linjału, wówczas górna powierzchnia płyty jest płaszczyzną.

Do naklejania papieru przyrządza się klej z rozpuszczonych przy wysokiej temperaturze w litrze wody 50 *gr.* odpadków pergaminowych, który to roztwór miesza się na wolnym ogniu z roztworem 200 *gr.* mąki krochmalnej w litrze wody, kilkakrotnie uprzednio bełtanym, a po odstaniu zlewanym i dopełnianym nowym litrem czystej wody aż do czasu, kiedy zgęszczona mieszanina utworzy galeretkę.

W braku kleju, zbijamy w piankę białko i pokrywamy niem płytę; następnie przycięty dla danej płyty arkusz papieru, zwilżony równomiernie, układamy na płycie i, — wygładzając od środka ku brzegom, usuwamy z pod niego pęcherzyki powietrza; brzegi papieru zaginamy i przyklejamy klejem stolarskim do ścianek i spodu płyty, poczem wysuszamy papier.

Trójnóg składa się z nasady i trzech nóżek, których rozwidlenia górne są przytwierdzone do występów nasady śrubami motylkowemi, sprzęgającemi nóżki z nasadą; przy ustawieniu trójnogu, zwalniając te śruby, normujemy pochylenie nóżek, następnie zaciskamy je obrotem śrubek motylkowych. U dołu nóżki są okute i zaopatrzone w występy dla wgłębienia w ziemię naciskaniem stopą.

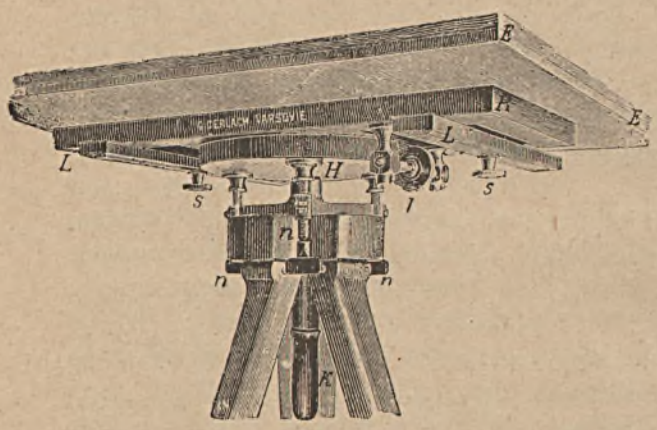
W środku nasady znajduje się otwór, przez który przechodzi śruba, sprzęgająca głowicę z nasadą. Śruba ta, zwana środkową, u dołu zaopatrzona jest w haczyk do pionu.



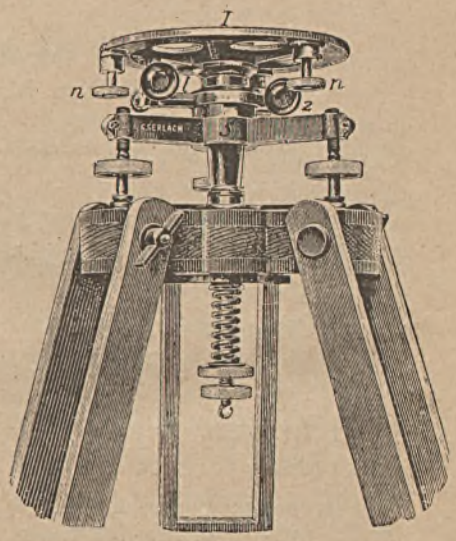
Rys. 651.

Głowica (typ Gerlacha, rys. 653) składa się z talerza *T*, z którym łączymy płytę, wkręcając w jej otwory śrubki *u* talerza.

Talerz połączony jest z osią obrotu, osadzoną w trójramiennnej spodarce *S*. Przez nóżki spodarki przechodzą trzy śruby nastawowe. Zacisk *z* i leniwka *l* służą do wprawiania talerza z płytą w ruch leniwy dokoła osi obrotu; zwolnienie zacisku umożliwia dowolny obrót stolika dokoła osi. Po sprzęgnięciu zapomocą środkowej śruby głowicy ze statywem, poziomujemy płytę obrotem śrubami nastawowemi spodarki.



Rys. 652.

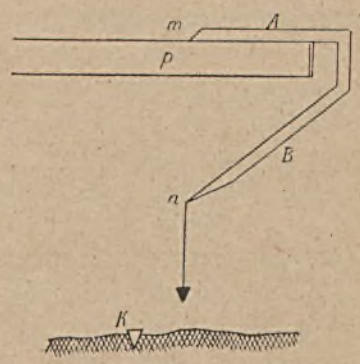


Rys. 653.

Głowica niemiecka M/75 (rys. 651) podobna jest do systemu Gerlacha; różnią się one tem, że leniwka w konstrukcji Gerlacha jest sprężynowa, w M/75 zaś bez sprężyny, śruby *n* w głowicy M/75 są połączone z płytą, a nie z talerzem, i wreszcie kształt talerza M/75 jest zbliżony do trójkątnego. Głowicę Gerlacha i M/75 możemy przesuwać na statywie.

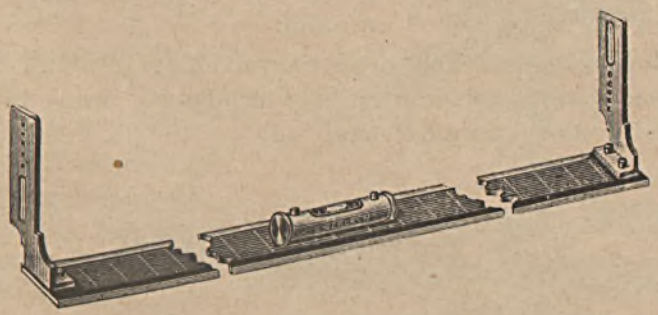
Stolik monachijski (rys. 652) składa się z płyty *EE*, sprzęganej z ramą *RR* listwami *LL* ze śrubami *SS*. Zwolnienie tych śrub umożliwia przesuwanie płyty po ramie *RR*. Po zwolnieniu śruby środkowej *K*, rama *RR* z płytą obraca się dokoła osi pionowej przyrządu.

Sprzęgamy tą śrubą tarczę *H* i ramę *RR* ze statywem; ruch leniwy na tarczy *H* nadajemy wówczas ramie *RR* zapomocą leniwki *l*.



Rys. 653 a.

Tak więc: śruby nastawowe *n n n* poziomują płytę, śruby *k* i *l* umożliwiają ruch obrotowy płyty dowolny i leniwy, śruby *s s* umożliwiają ruch postępowy płyty.



Rys. 653 b.

§ 311. Ustawienie stolika.

Ustawiamy przedewszystkiem statyw, zwalniając śruby motylkowe. Nóżki statywu ustawiamy tak, by jego nasada była mniej więcej pozioma (co sprawdzamy zapomocą porównania położenia górnej powierzchni nasady z położeniem widnokręgu; przestawiając odpowiednio dwie nóżki statywu, poziomujemy w przybliżeniu nasadę). Nóżki winny być rozstawione tak szeroko, by płyta znajdowała się na wysokości piersi obserwatora, przytem winny być wtłoczone ostrzami w ziemię.

Po zaciśnięciu śrub motylkowych i zwolnieniu środkowej śruby zapomocą odkręcania jej nakrętki, ustawiamy na nasadzie statywu głowicę, umieszczając nóżki spodarki w odpowiednich wyżłobieniach. Następnie wkręcamy całkowicie środkową śrubę w nagwintowany otwór spodarki i zaciskamy sprężynę, wkręcając nakrętkę do czasu, gdy głowica sprzęgnięta zostanie dostatecznie silnie ze statywem, nie o tyle jednak, by śruby nastawowe spodarki miały się obracać z trudnością. Wreszcie przymocowujemy odpowiedniemi śrubkami płytę do głowicy. Stolik monachijski ustawia się w podobny sposób: ramę RR układamy na tarczy *k*, następnie zaś sprzęgamy ramę RR z płytą.

§ 312. Sprawdzenie stolika.

A. Płyta winna być płaszczyzną; sprawdzimy zachowanie tego warunku zapomocą linjału.

B. Stolik winien być elastyczny po ustawieniu; sprawdzimy to, naciskając lekko palcem płytę z ustawioną na niej libelą. Po odsunięciu palca płyta winna wrócić do poprzedniego położenia, co wskaże bańka libeli.

C. Płaszczyzna płyty winna być prostopadła do osi obrotu. Sprawdzimy to, umieszczając sprawdzoną libelę na płycie i sprowadzając płytę

śrubami nastawowemi do poziomu. Gdy następnie zwolnimy środkową śrubę i obracać będziemy płytę dokoła osi pionowej stolika, bańka libeli powinna wskazywać poziom. O ile warunki *A* i *C* mają drugorzędne znaczenie, o tyle warunek *B* winien być zachowany. Na brak elastyczności stolika składają się poszczególne czynniki:

a) niedopasowanie śrub, sprzęgających talerz z płytą,
b) zepsucie lub osłabienie sprężyn środkowej śruby lub leniwki,
c) rozluźnienie okuć nóżek statywu.

§ 313. Przyrządy stolikowe.

Każdy stolik jest zaopatrzony w

1) pionownik,
2) kierownicę,
3) busolę.

Pionownik.

Służy do przenoszenia w kierunku pionowym punktu z terenu na stolik lub odwrotnie, oraz do ustawiania punktu na stoliku w pionie punktu terenu (rys. 653a).

Ma zastosowanie wówczas, gdy błąd przybliżonego ustawienia stolika nad punktem nie może być uważany za znikomo mały. Przypuśćmy, że przybliżone (odręczne) ustawienie punktu na stoliku nad punktem terenu jest błędne o połowę przekątnej płyty stolikowej (bierzemy krańcowy wypadek, gdyż nawet odręcznie można stolik ustawić dokładniej). Przy płycie 60 × 60 *cm*, połowa przekątnej wynosi 42 *cm*. Błąd centrowania 42 *cm* może dla zdjęcia graficznego wówczas tylko nie być brany pod uwagę, gdy w skali pomiaru nie przekracza 0,1 *mm*. Stąd wynika, że przy skalach, mniejszych od pewnej $\frac{1}{N}$, błąd ten zupełnie nie uwzględnia się, a zatem i sam pionownik jest wtedy zbyteczny.

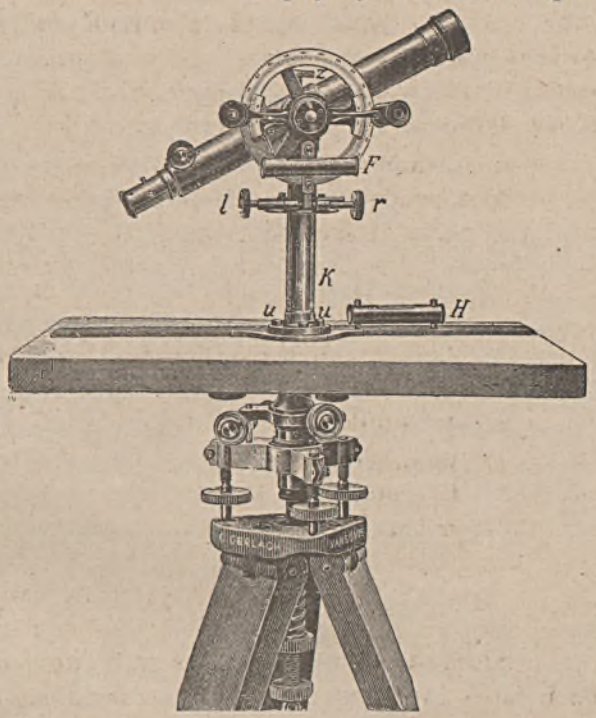
Obliczymy:

$$\frac{1}{N} \leqslant \frac{0{,}1}{420}$$

skąd wynika, że już przy skali $\frac{1}{N} = \frac{1}{5000}$ można nie używać pionownika, a więc tem bardziej przy skalach $\frac{1}{10000}, \frac{1}{15000}$ i mniejszych, przyrząd ten jest zbyteczny. W wyjątkowych wypadkach, gdy skala pomiaru jest większa, np. $\frac{1}{2000} - \frac{1}{2500}$, stosowanie pionownika jest wskazane.

Pionownik składa się z listewek A i B, spojonych w ten sposób, że gdy listewka A leży na płaszczyźnie poziomej, wówczas kreska m listewki A i punkt zawieszenia n pionu na listewce B znajdują się na jednym pionie.

Ażeby przenieść punkt k na stolik, należy pionownik przesuwać na płycie do chwili, gdy pion zawiśnie dokładnie nad K, wówczas m wskaże położenie K na stoliku. Dla ustawienia punktu m stolika w pionie punktu k, należy ramię widełek A ustawić kreską nad m i przesunąć płytę do takiego położenia, przy którem pion zwiśnie nad k.



Rys. 654.

Kierownica.

Rozpatrzmy kierownicę z przeziernikami i lunetą.

A. Kierownica z przeziernikami, zwana alhidadą (rys. 653 b), jest linjałem ze ściętą krawędzią, z osadzoną na nim libelą rurkową i parą przezierników na końcach, umocowanych prostopadle do linjału. Na linjale znajduje się podziałka transwersalna. Przezierniki winny leżeć w jednej płaszczyźnie z krawędzią linjału, względnie płaszczyzna przezierników winna być $\parallel$-a do tej krawędzi.

W pierwszym wypadku prosta, wykreślona wzdłuż krawędzi, daje ślad płaszczyzny kolimacyjnej; w drugim jest równoległa do tej płaszczyzny. Kąt pomiędzy dwoma tak nakreślonemi kierunkami w obydwu wypadkach jest jednakowy. Jeżeli nawet krawędź nie jest $\parallel$-a do płaszczyzny kolimacyjnej, to wszystkie proste przy różnych położeniach linjału są odchylone od odpowiadających im płaszczyzn kolimacyjnych o ten sam kąt, a więc oznaczając kierunki, wykreślone przy celach do pewnych punktów, literami $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$, prawdziwe zaś kierunki literami $\gamma_1\ \gamma_2 \ldots \gamma_n$, zawsze mieć będziemy przy błędzie nierównoległości δ

$$\alpha_1 = \gamma_1 + \delta$$

$$\alpha_2 = \gamma_2 + \delta$$

$$- - - -$$

$$- - - -$$

$$\alpha_n = \gamma_n + \delta$$

więc

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \gamma_2 - \gamma_1$$

$$\alpha_3 - \alpha_1 = \gamma_3 - \gamma_1$$

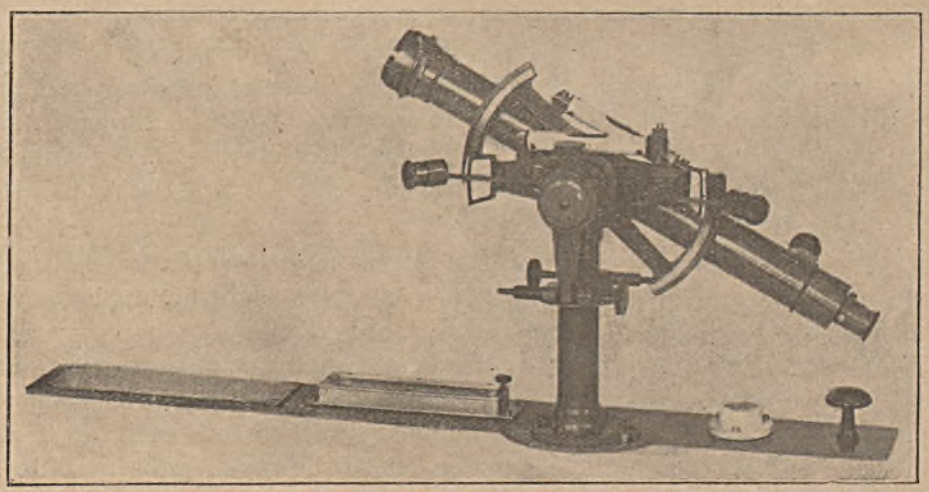
— — — — — — — —

— — — — — — — —

t. j. kąty między kierunkami nie będą obarczone wpływem błędu δ.

Nierównoległość płaszczyzny kolimacyjnej (po sprawdzeniu prostopadłości obydwu przezierników do dolnej krawędzi linjału, jak w astrolabji z przeziernikami, lub w gonjometrze, t. j. zapomocą zawieszonego pionu) do ściętej krawędzi linjału sprawdzimy, wbijając stycznie do ściętej krawędzi, a prostopadłe do płyty, dwie cienkie igły na końcach linjału. Obróciwszy płytę o tyle, aby poprzez igły spostrzec można było odległy a wyraźny punkt (ostateczne skierowanie zapomocą obrotu leniwki), sprawdzimy, czy, patrząc przez przezierniki, spostrzeżemy ten sam punkt na włosieniu. Gdy to zajdzie, równoległość jest zachowana.

Do linjału ‖-e do ściętej krawędzi przytwierdzona jest libela rurkowa, służąca do poziomowania płyty zapomocą początkowego spoziomowania 1) prostej w linji dwu śrub nastawowych, a następnie 2) prostopadłej do niej — zapomocą obrotu trzecią śrubą. Czynność tę powtarza się kilkakrotnie. Uprzednio jednak należy sprawdzić libelę. Ustawiając ją w linji



Rys. 655. Nowoczesny typ kierownicy firmy Gerlach.

dwu śrub, wykreślamy ołówkiem ślad wzdłuż krawędzi i sprowadzamy bańkę do środka obrotem tych śrub. Następnie odwracamy linjał o 180°, przysuwamy ściętą jego krawędź ściśle do wykreślonej prostej i połowę ewentualnego wychylenia usuwamy śrubką rektyfikacyjną libeli—resztę zaś śrubami nastawowemi.

B. Kierownica z lunetą (kipregel) wyrobu firmy Gerlach (rys. 654).

Kierownica ta składa się z linjału z podziałką transwersalną i libelą *H*, kolumienki *K*, podtrzymującej poziomą oś obrotu lunety, osadzoną we

wlutowanem w kolumnę łożysku walcowem. Do osi obrotu z jednej strony przyśrubowana jest luneta, z drugiej koło wierzchołkowe.

Zacisk *z* służy do unieruchomienia lub zwolnienia osi obrotu, a więc i lunety i koła wierzchołkowego; leniwka *l* wprawia je w ruch mikrometryczny. Do łożyska osi obrotu są przymocowane nonjusze koła pionowego, połączone stale z libelą *F*, wprawiane razem z libelą w ruch mikrometryczny zapomocą leniwki *r*. Koło wierzchołkowe posiada podział na cały obwód, lub też od zer w obydwu kierunkach biegnie podział na 60° (stopniowa podziałka), opisany w taki sposób, że z nonjuszów odczytujemy kierunki, odpowiadające kierunkowi ruchu wskazówki zegara. Opis z lewej strony i prawej biegnie od 330° przez 0° do 30°. Nonjusze i koło wierzchołkowe są osadzone w ten sposób, że przy równoległości osi lunety i libeli *F* zera koła odpowiadają zerom nonjuszów. Ze względu na możność spoziomowania osi libeli *F* niezależnie od położenia płyty dzięki leniwce *r*, kąty pionowe można mierzyć dokładnie nawet przy źle spoziomowanej płycie.

Kierownice Gerlacha posiadają lunety o powiększeniu 25, 30 i 36, dalekomierze 1 : 100, nonjusze jednominutowe lub dwuminutowe.

Oddzielnie załączane busole mają podział stopniowy.

Wyposażenie kierownicy w libelę na lunecie umożliwia niwelowanie; w braku takiej libeli poziomość osi celowej uzyskamy, sprowadzając do środka bańkę libeli *F* i łącząc zera nonjuszów z zerami koła wierzchołkowego zapomocą obrotu leniwką *l*.

Rektyfikacja tej kierownicy składa się z następujących sprawdzeń i ewentualnych poprawek:

A. Dolna powierzchnia linjału winna być płaszczyzną, ściętą krawędź — prostą.

Przykładając w różnych kierunkach sprawdzoną krawędź długiej linji do dolnej powierzchni linjału, sprawdzimy, czy powierzchnia ta jest płaska; patrząc pod światło na styk krawędzi linji z linjałem, spostrzeżemy wszelkie szpary, co wskaże na niezachowanie warunku. Prostolinjowość ściętej krawędzi sprawdzimy zapomocą odwrócenia jej o 180° dokoła swego wykreślonego rzutu poziomego.

B. Oś libeli na linjale winna być równoległa do dolnej powierzchni linjału.

Ustawimy linjał w kierunku dwu śrub nastawowych spoziomowanego w przybliżeniu stolika, sprowadzimy bańkę libeli do środka, ołówkiem nakreślimy prostą wzdłuż ściętej krawędzi, odwrócimy dokoła tej prostej kierownicę o 180° i połowę wychylenia usuniemy śrubką rektyfikacyjną libeli, drugą połowę śrubami nastawowemi.

Czynność tę należy powtarzać aż do całkowitego usunięcia błędu.

C. a) Oś celowa winna być prostopadła do osi obrotu lunety, b) oś zaś obrotu lunety jest równoległa do dolnej powierzchni linjału.

Obydwa te warunki zajdą przy braku błędu kolimacyjnego.

a) Gdy oś celowa nie jest prostopadła do osi obrotu lunety, wówczas przy obrocie lunety dokoła poziomej osi, oś celowa opisuje zamiast płaszczyzny powierzchnię podwójnego stożka o wierzchołku, leżącym w punkcie przecięcia się osi celowej z osią obrotu.

Ażeby sprawdzić zachowanie warunku prostopadłości osi celowej do osi obrotu, należy na spoziomowanej płycie stolika wyznaczyć igiełką w jej środku punkt i, obracając linjał przy tym punkcie, skierować oś celową na dowolny wyraźny punkt (np. krzyż na ścianie). W tem położeniu linjału kreślimy zaostrzonym ołówkiem prostą wzdłuż jego krawędzi; następnie przerzucamy lunetę przez zenit, obracamy kierownicę o 180°, przykładamy linjał do tego samego punktu i kierujemy oś celową znów na poprzednio obserwowany punkt. Wykreślamy wzdłuż krawędzi linjału prostą, przechodzącą przez nakłuty na płycie punkt.

Jeżeli obydwie wykreślone proste kryją się, wówczas warunek jest zachowany. Gdy zaś obydwie proste tworzą kąt, kreślimy dwusieczną, przykładamy do niej linjał i sprowadzamy krzyż nitek na obserwowany punkt, działając bocznemi śrubkami diafragmy. W wypadku, gdy utworzony obydwiema prostemi kąt jest bardzo mały, należy przy drugiem położeniu lunety ściętą krawędź linjału znów przyłożyć do poprzednio wykreślonej prostej, skierować zapomocą odpowiedniego pochylenia lunety poziomą nić na obserwowany punkt i przesunąć bocznemi śrubkami diafragmy krzyż nitek o połowę jego wychylenia od punktu. Postępowanie winno być powtarzane aż do całkowitego usunięcia błędu.

b) Ażeby sprawdzić, czy oś obrotu jest równoległa do dolnej powierzchni linjału (lub płyty), należy skierować oś celową lunety na wysoki punkt (np. na ścianie) i opuścić ją wdół do poziomu osi obrotu, oznaczając przecięcie się osi celowej ze ścianą w postaci punktu na ścianie (lub notując odczyt na łacie, ułożonej poziomo i prostopadle do osi celowej). Następnie, odwracając kierownicę o 180° i przerzucając lunetę przez zenit, znów kierujemy oś celową lunety na poprzednio obserwowany wysoki punkt i opuszczamy lunetę wdół. Jeżeli oś celowa przejdzie przez poprzednio oznaczony u dołu punkt, warunek jest zachowany. Jeżeli zaś u dołu wypadnie w poziomie poprzedniego inny punkt, wówczas należy usunąć stwierdzoną nierównoległość osi obrotu do dolnej powierzchni linjału, podkładając pod kolumienką z odpowiedniej strony płatki cynfolji. Uskutecznimy to po odkręceniu śrub, sprzęgających kolumienkę z linjałem. Rektyfikację tę należy wykonać w fabryce ze względu na jej żmudność.

D. Płaszczyzna kolimacyjna winna przechodzić przez ściętą krawędź linjału, względnie być do niej równoległa.

Dla sprawdzenia tego warunku obieramy na płycie spoziomowanego stolika dwa punkty leżące we wzajemnej odległości mniejszej nieco od długości linjału. W punktach tych ustawiamy pionowo krawędzie przyprostokątne ekierek i, korzystając z nich, wbijamy w płytę pionowo igiełki. Przysuwamy szczelnie ściętą krawędź linjału do igiełek i, obracając płytę, kierujemy oś celową na wyraźny punkt wpobliżu poziomu stolika, Jeżeli, patrząc poprzez obydwie igły, spostrzeżemy ten sam punkt na ich przedłużeniu — warunek jest zachowany. W przeciwnym razie — odkręcimy śrubki *u u* przy spodzie kolumienki, obrócimy stolik o tyle, by obserwowany punkt znalazł się w pionowej płaszczyźnie, przechodzącej przez igły, poczem obrócimy kolumienkę tak, by oś celowa przechodziła przez obserwowany punkt.

Gdyby tego rodzaju rektyfikacja nie została dokonana, to wszystkie wykreślone kierunki odchyliłyby się od właściwych o ten sam kąt, wskutek

czego rysunek byłby prawidłowy wprawdzie, lecz odchylony od kierunku południka o wielkość tego kąta — inaczej mówiąc, wykreślony plan byłby zorjentowany z błędem równym wielkości wzmiankowanego kąta.

E. Oś celowa lunety winna być równoległa do osi libeli przy kole wierzchołkowem, gdy zera nonjuszów złączone są z zerami koła pionowego; wówczas bowiem przy spoziomowanej osi libeli oś celowa również będzie pozioma, odczyt z koła pionowego będzie zerem i kąty pochylenia będą prawidłowo odliczane.

Gdy oś celowa lunety jest równoległa do osi libeli, zera zaś koła i nonjuszów nie zgadzają się, wówczas odczyt, wzięty z koła pionowego, nazywamy miejscem żera.

Jak wiemy z tachymetrji przy kole pionowem z podziałem tego rodzaju, jaki mamy w kierownicy Gerlacha, miejsce zera MO równa się:

$$MO = \frac{KP + KL}{2}$$

kąt zaś pochylenia

$$\alpha = \frac{KP - KL}{2}$$

lub:

$$\alpha = MO - KL$$
$$\alpha = KP - MO$$

gdzie KP i KL oznaczają odczyty z koła pionowego przy kole prawem i lewem.

We wzorach tych odczyty z koła mniejsze od 60^0 powiększamy o 360^0.

Dla określenia MO należy więc skierować oś celową lunety w obydwu położeniach koła do tego samego punktu, odczytać KP i KL i obliczyć MO.

Mając MO, możemy już zmierzyć kąty w jednem, np. prawem położeniu koła, zmniejszając je wszystkie o MO dla uzyskania kątów pionowych.

Przykład:

	Nonjusze		Średnia
	II	I	
Koło prawe .	$8^0\ 4'$	$6'$	$8^0\ 5'$
„ lewe .	$351^0\ 40'$	$42'$	$351^0\ 41'$

$$MO = \frac{8^0\ 5' + 360^0 + 351^0\ 41'}{2} = 359^0\ 53'$$

$$\alpha = \frac{8^0\ 5' + 360^0 - 351^0\ 41'}{2} = 8^0\ 12'$$

$$\alpha = 359^0\ 53' - 351^0\ 41' = 8^0\ 12'$$

$$\alpha = 8^0\ 5' + 360^0 - 359^0\ 53' = 8'\ 12'$$

Usunięcie błędu koła pionowego wymaga określenia z obydwu położeń koła kąta pochylenia α celu do pewnego punktu, skierowania przy kole prawem osi celowej na dany punkt i przesunięcia leniwką r nonjuszów o tyle, by odczyt z koła wyniósł α. Pozostaje wówczas śrubkami rektyfikacyjnemi libeli przesunąć jej bańkę do środka.

Gdy z szeregu spostrzeżeń wywnioskujemy, że miejsce zera zmienia się, wówczas przypuszczać należy, iż koło pionowe jest niedostatecznie mocno przyśrubowane do osi obrotu. Trzeba wtedy odkręcić nakrętkę osi obrotu, zdjąć umieszczony pod nią krążek oraz krążek przy ramionach lup nonjuszów; widoczną wewnątrz zakrętkę należy silnie dokręcić, założyć krążki i osadzić nakrętkę osi obrotu, poczem określić MO, przesunąć odpowiednio nonjusze i zrektyfikować libelę koła pionowego.

F. W wypadku, gdy na lunecie znajduje się libela, jej płaszczyzna główna winna być równoległa do osi celowej.

Ustawiamy do poziomu oś celową lunety, odchylając ją do czasu, gdy odczyt z koła pionowego przy kole prawem, przy spoziomowanym stoliku wyniesie MO.

Wówczas oś celowa jest pozioma; pozostaje śrubkami rektyfikacyjnemi libeli na lunecie sprowadzić jej bańkę do środka.

Busola stolikowa (rys. 656).

Składa się z płytki metalowej z osadzonem na niej kołem busolowem, w środku którego znajduje się trzpień dla osadzanej na nim igły magnesowej; koło jest przykryte szklaną pokrywką. Jeden lub dwa brzegi płytki są równoległe do średnicy, przechodzącej przez 0° koła podziałowego.



Rys. 656.

Igła magnesowa posiada czapeczkę agatową, która osadza się na stalowym trzpieniu. Zapomocą dźwigni, osadzonej jednym końcem na trzpieniu pod czapeczką igły, igła ta może być dociskana do szklanego wieczka, a więc unieruchomiona przy naciśnięciu wdół drugiego zgiętego końca dźwigni obrotem pokrywki, mającej odpowiednie wycięcie przy tym końcu. Podział na kole jest albo czwartakowy, od zer na końcu jednej średnicy w obydwu kierunkach do 90°, lub też azymutowy, od zera w kierunku lewym do 360°.

Wady busoli, jak stępienie trzpienia, rozmagnesowanie igły, niezachowanie warunku identyczności osi geometrycznej z magnetyczną, ekscentryczność igły, niezrównoważenie jej—rozpatrzyliśmy w dziale o busolach.

Zasadniczym dla stolikowej busoli warunkiem jest równoległość jednej z krawędzi płytki busolowej do średnicy zerowej koła podziałowego.

Zachowanie tego warunku sprawdzimy, przykładając badaną krawędź busoli do wykreślonej prostej. Odczytamy wskazania zwolnionej igły z obydwu jej końców po uspokojeniu się jej, następnie przełożymy busolę o 180° dokoła tej samej prostej i znów odczytamy wskazania igły. Ponieważ igła w obydwu wypadkach ustawia się ściśle w tym samym kierunku południka

magnetycznego, brzeg zaś busoli również zajmuje pierwotne co do kierunku położenie, przeto średnie odczytów w obydwu wypadkach winny być równe; przewyższająca 15′ rozbieżność wskaże na nierównoległość średnicy zerowej busoli do jej brzegu. Tej samej kontroli możemy dokonać, gdy ściętę krawędź linjału kierownicy przyłożymy do brzegu busoli i obrotem płyty skierujemy oś celową na dowolny punkt. Jeżeli następnie, nie poruszając stolika i busoli, przyłożymy krawędź linjału do średnicy zerowej busoli (pokrywkę lepiej zdjąć w tym celu), wówczas przy zachowanym warunku oś celowa przejdzie przez ten sam punkt. Jeżeli nie przejdzie — odczytamy wskazania igły i obrócimy śrubą mikrometryczną płytę do położenia, przy którem punkt znajdzie się na osi celowej, wtedy znów odczytamy wskazania igły. Różnica odczytów daje wielkość poprawki, którą należy uwzględnić przy dalszem używaniu danej busoli.

Używane są busole orjentacyjne, które posiadają zamiast całego koła średnicowo przeciwległe odcinki kołowe do 20° w obydwu kierunkach od zer. Dzięki temu busola ma kształt wydłużonego prostokąta. Spotyka się na linjałach niewielkich kierownic i wówczas prosta, łącząca zera, jest równoległa do ściętej krawędzi linjału.

§ 314. Elementarne zagadnienia, rozwiązywane na stoliku.

I. Określić azymut magnetyczny prostej, wytkniętej w terenie.

Ustawiamy stolik nad jednym z punktów (lepiej końców) danej prostej i obrotem kierownicy sprowadzamy oś celową na drugi koniec prostej. Następnie przykładamy do ściętej krawędzi linjału krawędź busoli, równoległą do średnicy, przechodzącej przez zero (krawędź tę będziemy nazywać brzegiem), i po sprawdzeniu, czy oś celowa nie odsunęła się od obserwowanego punktu (tyczki), odczytujemy azymut z busoli.

Ponieważ stolik jest ustawiony w ten sposób, że jego oś obrotu znajduje się ściśle na linji, przeto należałoby linjał ściętą krawędzią przyłożyć do środka stolika, t. j. do punktu przecięcia się płyty z osią obrotu. Niema jednak potrzeby używania pionownika w tym celu, gdyż krawędź kierownicy przy ustawieniu na oko może odchylić się od właściwego punktu najwyżej o 10 *cm.*, co nawet przy bliskiej odległości, równej np. 50 *m.*, do drugiego końca prostej spowoduje błąd w kierunku,

równy

$$\tau = \frac{0{,}1}{50}\,3438 = 7'$$

dokładność zaś określenia azymutu z busoli waha się 15' granicach.

II. Wytyczyć w terenie prostą pod danym azymutem magnetycznym.

W danym punkcie terenu należy scentrować stolik i, jeżeli prosta ma być krótka, przenieść punkt terenu na stolik zapomocą pionownika. Obracając brzeg busoli dokoła środka płyty, uzyskamy takie położenie busoli, przy którem odczytany azymut równa się danemu. Wówczas przykładamy ostrożnie linjał do brzegu busoli i w kierunku osi celowej wytyczamy punkt, dający z punktem, nad którym ustawiliśmy stolik, końce odcinka o danym azymucie.

III. Zorjentować płytę na zasadzie wykreślonego na niej kierunku południka magnetycznego lub geograficznego.

Zorjentowanać stolik znaczy ustawić płytę w taki sposob, by wszystkie na niej wykreślone proste były równoległe do odpowiednich prostych w terenie.

W danym razie, ponieważ południk w terenie nie jest wyznaczony, kierunek południka magnetycznego wskazuje igła magnesowa. Gdy więc brzeg busoli przyłożymy do wykreślonego na stoliku kierunku południka, dla zorjentowania stolika wystarczy obrócić płytę dokoła osi pionowej do takiego położenia, w którem zwolniona igła magnetyczna ustawi się ściśle wzdłuż średnicy zerowej busoli; ponieważ średnica ta jest równoległa do brzegu busoli, przeto wykreślony i rzeczywisty południk magnetyczny leżą w jednym kierunku, a więc stolik jest zorjentowany. Dokładność tej orjentacji waha się w granicach 15'. Gdy na płycie wykreślony jest południk geograficzny, należy uzyskać dane, dotyczące deklinacji magnetycznej od obserwatorjum magnetycznego w Świdrze, dla terenów, podlegających pomiarowi. Znając wielkość i kierunek odchylenia igły od południka geograficznego, przy poprzedniem postępowaniu, igłę sprowadzimy nie do średnicy zerowej busoli, a do odczytu, odpowiadającego deklinacji magnetycznej.

IV. Zorjentować płytę według prostej terenu, wykreślonej na stoliku.

Należy stolik ustawić ściśle na danej linji przy jej końcu lub w pośrednim punkcie, przyłożyć linjał do wykreślonej prostej i obrócić płytę o tyle, by oś celowa została skierowana na drugi koniec prostej w terenie.

Ustawienie stolika w środku prostej wymaga albo przetyczenia prostej wprzód ze środka, albo szeregu przestawień stolika. Mianowicie w dowolnym punkcie między danemi punktami orjentujemy płytę według jednego końca danej prostej, t. j. przykładamy linjał do danej na płycie prostej i obrotem płyty dokoła osi oś celową sprowadzamy do tego końca prostej w terenie, ku któremu nad płytą skierowany jest objektyw lunety. Następnie przerzucamy lunetę przez zenit i patrzymy, w którym kierunku od osi celowej odchyla się drugi koniec prostej; w tym samym kierunku należy przestawić stolik. W nowoobranym punkcie powtarzamy postępowanie. Po szeregu takich prób odnajdziemy punkt, leżący na danej prostej. Ten sposób orjentacji jest dokładniejszy, niż przy użyciu busoli, i tem dokładniejszy, im dłuższy bok jest na płycie wykreślony.

Wskutek tego boki, na zasadzie których wypadnie orjentować płytę, przedłużamy na marginesach płyty w postaci odcinków. Odchylenie poprzeczne linjału od takiej prostej nie przekroczy 0,2 *mm.*; długość tej prostej, jeżeli sięga 40 — 50 *cm.* lub więcej, sprowadza błąd orjentacji do (w przybliżeniu)

$$\alpha = \frac{0{,}2}{400}\ 3438 = 1'.7$$

Jak widzimy tedy, dokładność orjentacji będzie bez porównania wyższa, niż przy użyciu busoli.

V. Określić wartość deklinacji magnetycznej w wypadku odpowiednio wykreślonej na płycie prostej, istniejącej w terenie, oraz wykreślonego południka geograficznego.

Orjentujemy stolik według danej prostej i przykładamy brzeg busoli do południka geograficznego.

Szereg dokonanych w niezmienionem położeniu busoli odczytów z igły da wielkości i znak deklinacji w różnych godzinach dnia.

VI. Zbudować kąt, dany w terenie, na stoliku.

a) Ustawiamy stolik nad wierzchołkiem kąta w terenie; zapomocą pionownika przenosimy wierzchołek na stolik. Do otrzymanego na płycie punktu przykładamy krawędź linjału i, obracając kierownicę dokoła wierzchołka, kierujemy oś celową wzdłuż ramienia kąta w terenie, wyznaczonego zapomocą ustawionego sygnału. Kreślimy wzdłuż ściętej krawędzi rzut poziomy obserwowanego kierunku, poczem obrócimy kierownicę w kierunku drugiego boku kąta i znów przez wierzchołek kąta kreślimy rzut tego boku. W ten sposób uzyskujemy wykreślony kąt.

b) Gdy na stoliku wykreślony jest uprzednio wierzchołek kąta, centrujemy zapomocą pionownika ten punkt stolika nad odpowiadającym mu punktem terenu i postępujemy dalej, jak w p. a).

c) Gdy na stoliku prócz wierzchołka oznaczone jest jedno ramię kąta, wytyczonego w terenie, wówczas orjentujemy płytę na oko, centrujemy wierzchołek, poziomujemy płytę i orjentujemy ją ostatecznie zapomocą kierownicy, przyłożonej do wykreślonego boku, sprowadzając leniwką stolika oś celową na koniec danego boku, poczem, obracając kierownicę ściętą krawędzią dokoła wierzchołka kąta, sprowadzamy oś celową na punkt terenu, ustawiony na drugim boku, i kreślimy przez wierzchołek drugi bok.

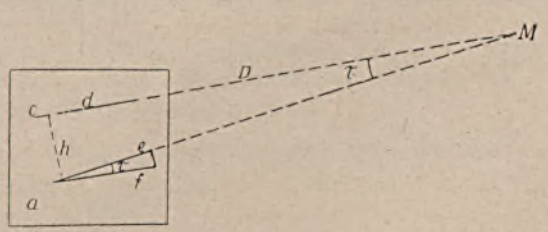
Początkujący ułatwiają sobie obrót kierownicy dokoła wierzchołka wetknięciem w wierzchołek cienkiej igiełki, stycznie do której ścięta krawędź jest obracana. Ołówek winien być zaostrzony w postaci łopatki.

VII. Wykreślić przez dany na stoliku punkt równoległą do wykreślonego boku (rys. 657).

Obieramy na widnokręgu, a co najmniej w odległości 1 — 2 *km*, wyraźny punkt, przykładamy ramię kierownicy do wykreślonego boku i obrotem płyty kierujemy oś celową na odległy punkt. Następnie przykładamy ramię kierownicy do danego punktu i, obracając je dokoła niego, kierujemy oś celową na ten sam odległy punkt, nie poruszając stolika. Wykreślona wzdłuż krawędzi kierownicy prosta jest równoległa do danej.

Gdy punkt M odległy jest od stolika więcej niż o 1—2 *km*, wówczas teoretycznie wykreślona prosta ae nie jest równoległa do cd; będzie nią pewna prosta af, odchylona od ac o kąt τ. Oznaczmy literą h odległość a od cd; wówczas, gdy D oznacza odległość M od stolika, będzie

$$\tau = \frac{h}{D \sin 1'}$$



Rys. 657.

h nie przekracza 40 *cm*; $D > 1$ *km*,

przeto

$$\tau = \frac{0.4}{1000}\ 3438 = 1'.4$$

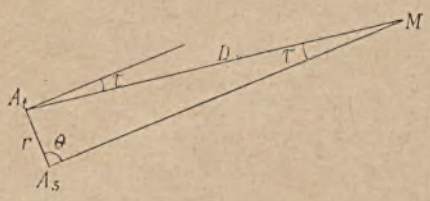
stąd wychylenie końca równoległej e od właściwego położenia f nie przekroczy nawet przy $ae = 50\ cm$ wielkości

$$ef = 50 \sin 1'.4 = 0.2\ mm,$$

co zaledwie możemy uchwycić cyrklem. Ponieważ jednak zwykle $h < 40\ cm$ i $D > 1\ km$, więc możemy uważać dane rozwiązanie budowania równoległej za dostatecznie dokładne.

§ 315. Wpływ błędu centrowania.

Przypuśćmy, że punkt A_t terenu znajduje się wskutek wadliwego centrowania w odległości r od rzutu tego samego punktu A_s na stoliku.



Rys. 658.

Przy obserwacji punktu M, odległego od stolika o D, wykreślimy więc zamiast prostej A_tM prostą A_sM.

Błąd w kierunku wyniesie τ, określone z równań:

$$\sin \tau = \frac{r}{D} \sin \Theta$$

$$\tau = \frac{r \sin \Theta}{D \sin 1'}.$$

Określmy, przy jakiem r dla $D = 200\ m$ τ wyniesie $1'$ (gdy $\Theta = 90^0$)

$$r = D\,\tau \sin 1' = \frac{200}{3438}\ m = 6\ cm.$$

Jak widzimy, względnie wielki błąd centrowania powoduje nawet przy średniej odległości 200 m niewielkie wychylenie wykreślanego kierunku. Natomiast ten sam błąd $r = 6\ cm$ przy nieznacznej odległości $D = 20\ m$ spowoduje błąd wykreślenia kierunku, równy:

$$\tau = \frac{0.06}{20}\ 3438 = 10'$$

a przy $r = 20\ cm$ i $D = 20\ m$ $\tau = 34'$.

Jednakże nawet taki błąd nie wywoła dostrzegalnego odsunięcia końca odcinka od właściwego położenia przy pomiarze już w skali $\frac{1}{5000}$, gdyż wówczas poprzeczne wychylenie p końca odcinka wyniesie

$$p = 20 \sin 34' = 0{,}2\ m$$

co na rysunku odpowie odcinkowi

$$\frac{0{,}2\ m}{5000} = 0{,}04\ mm.$$

A więc błąd centrowania nie ma znaczenia przy skali $\frac{1}{5000}$ i mniejszych, o ile przestrzegać będziemy warunku, polegającego na unikaniu orjentowania stolika na podstawie krótkich boków.

Przy skalach większych, jak np. $\frac{1}{1000}$, błąd centrowania 6 *cm* i 20 *cm* nietylko powoduje powyższe błędy kierunkowe 10' i 34', lecz poprzednio obliczone poprzeczne wychylenie wyniesie nie 0,04 *mm*, a 0,2 *mm*, nie mówiąc o tem, że w skali rysunku błąd spionowania 20 *cm* wynosi $\frac{20}{1000}$ *cm* = 0,2 *mm*.

Używanie więc pionownika jest tutaj wskazane.

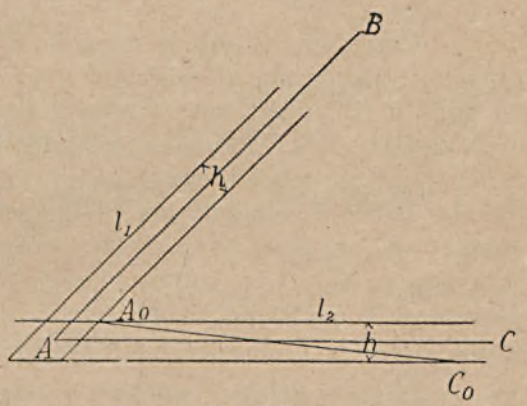
Nadmienić wszelako należy, że pomiary stolikowe w skali większej niż $\frac{1}{5000}$ należą do bardzo rzadko obecnie stosowanych.

§ 316. Błąd wykreślenia.

Dzięki temu, że idealnie ściśle krawędzi kierownicy do punktu przyłożyć nie można, jak również ślad, wykreślony ołówkiem wzdłuż krawędzi, nie jest matematyczną prostą, zamiast prostych AB i AC możemy w granicach $^1/_2\ h$ z obydwu ich stron wykreślić je dowolnie. Tak, np., zamiast AC określimy w najgorszym wypadku A_0C_0. Wielkość h przyjmiemy za równą 0,05 *mm*. Błędy kierunków τ określimy z równości

$$\tau = 3438\ \frac{h}{l_1}$$

$$\tau'_1 = 3438\ \frac{h}{l_2}$$



Rys. 659.

Więc w najniedogodniejszym dla wykreślenia kąta wypadku błąd kąta będzie równy sumie błędów kierunków, co wyniesie:

$$\tau_1 + \tau_2 = 3438h\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) = 3438h\frac{l_1 + l_2}{l_1\, l_2}$$

Błąd ten oczywiście będzie tem mniejszy, im dłuższe są boki l_1 i l_2. Dla boków $l_1 = l_2 = 10$ *cm* i $h = 0{,}05$ *mm* obliczymy

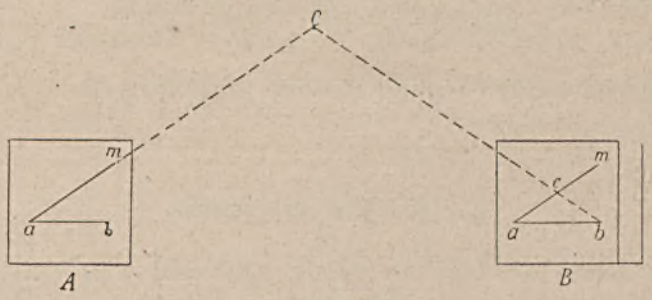
$$\tau_1 + \tau_2 = 3438 \times 0{,}05\frac{200}{10000} = 3',5$$

dla dwukrotnie krótszych boków błąd wzrośnie do 7'.

O ile więc chodzi o wykreślanie kierunków na zasadzie których będziemy następnie orjentować stolik, to wpływy błędów wykreślania zniewalają nas również do przedłużania kreślonych kierunków na marginesach płyty dla podniesienia dokładności orjentowania.

§ 317. Wcięcie wprzód.

W terenie znajdują się trzy wzajemnie widoczne punkty *A*, *B* i *C*, z których dwa *a* i *b* naniesione są na stolik. Należy określić na stoliku położenie trzeciego punktu *c* (rys. 660).



Rys. 660.

Ustawiamy stolik w punkcie *A* centrycznie (*a* w pionie *A*) i orjentujemy stolik prostą *ab* (kierujemy oś celową przyłożonej do *ab* kierownicy do punktu *B*). Następnie celujemy przez *a* do *C* i wzdłuż ramienia kierownicy kreślimy *am*. Przenosimy stolik do *B*, orjentujemy na oko, centrujemy *b* nad *B* i zapomocą kierownicy, przyłożonej do *ba*, orjentujemy według *BA*, poczem przez *b* celujemy do *C*, kreśląc odpowiednio przez *b* prostą, przecinającą *am* w punkcie *c*. Gdy z boku *AB* należy wziąć kilka punktów, wówczas w *A* i *B* po zorjentowaniu stolika kreślimy kierunki do wszystkich określonych punktów, oznaczając je literami dla uniknięcia błędu w określaniu przecięć z odpowiednich boków.

Unikać należy przecięć w określanym punkcie pod kątami zbyt ostremi. Wcięcie wprzód stosuje się również do określenia niedostępnej odległości.

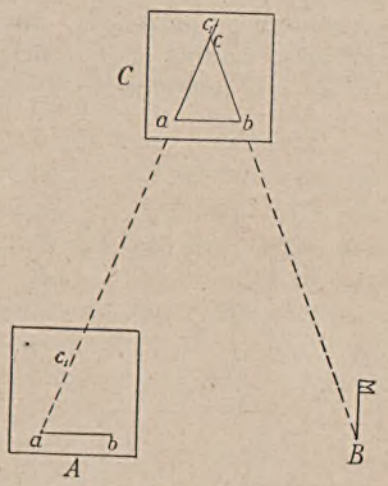
§ 318. Wcięcie boczne.

Różni się tem od wcięcia wprzód, że stolik ustawiamy nie w obydwu danych punktach, a w jednym z nich i w punkcie określanym (rys. 661).

W danym punkcie *A* orjentujemy stolik według *ab* i kreślimy kierunek *ac* do *C*, celując doń przez *a*; obieramy na oko punkt c_1, którym centrujemy stolik nad *C*, orjentując go według $c_1 a$ przez cel do *A*. Następnie obracamy ramię kierownicy dokoła *b* do czasu, gdy oś celowa przejdzie przez *B* i kreślimy wzdłuż ramienia prostą *bc*. Gdy *c* odsunięte jest znacznie od c_1, wówczas jeszcze raz centrujemy według *c* i wcinamy

wstecz przez b na B. Znów nakreślona prosta bc przetnie tym razem ac we właściwym punkcie.

Rozwiązanie to stosuje się wtedy, gdy nie można ustawić stolika nad jednym z danych punktów (np. na wieży). Zagadnienie to komplikuje się nieco, jeżeli nie możemy stanąć nad żadnym z danych punktów (rys. 662).

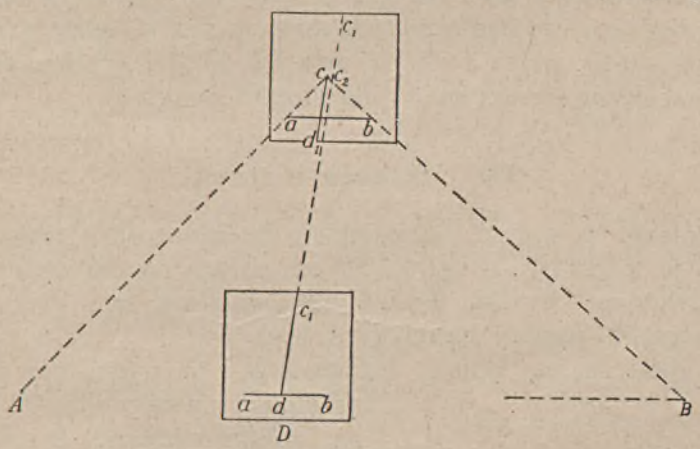


Rys. 661.

Obieramy wówczas w terenie punkt D, leżący ściśle na AB, i oznaczamy na oko punkt d na ab. Ustawiamy stolik w D, orjentujemy według AB i przez d celujemy do C, kreśląc dc_1. Stolik w C centrujemy obranym w przybliżeniu punktem c_2 nad C, orjentujemy według c_1d i wcinamy wstecz przez b do B i a do A. Jeżeli punkt przecięcia się c wykreślonych boków ac i bc nie leży na c_1d, to celujemy przez c do D, kreśląc cd_1. Centrujemy c nad C, orjentujemy stolik według cd_1, celując do D, i znów ostatecznie wcinamy przez a do A i b do B, kreśląc ostateczne położenia ac i bc. Przy skali $\frac{1}{5000}$ i mniejszych skalach rysunku zwykle uzyskujemy odrazu rozwiązanie, bez powtórnego centrowania.

§ 319. Zagadnienie Hanzena.

Mając dwa dane w terenie i naniesione na stolik punkty a i b,



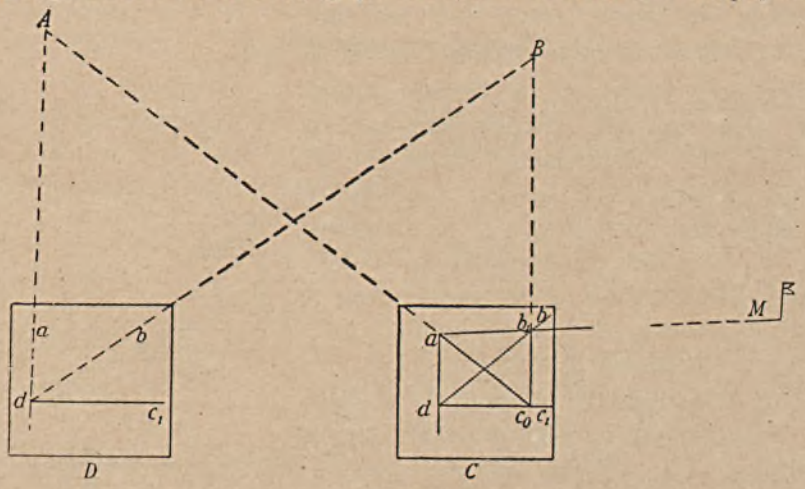
Rys. 662.

określić położenie trzeciego, danego w terenie, punktu C, nie ustawiając na AB stolika (rys. 663).

Obieramy obok C w kierunku, równoległym do AB, punkt pomocniczy D.

Ustawiamy stolik w D, orjentujemy na oko, by ab w przybliżeniu była ∥-a do AB i wcinamy przez a do A i b do B, uzyskując na stoliku d.

Przez d kreślimy zapomocą kierownicy, skierowanej do C, kierunek dc_1. Przenosimy stolik do C, orjentujemy według $c_1 d$ i, wcinając przez a do A, otrzymujemy punkt c_0. Kreślimy kierunek $c_0 b$ przy ramieniu kierownicy, ułożonem według $c_0 B$, i w przecięciu się z $d b$ otrzymujemy punkt b_1. Figura $d c_0 a b_1$ jest podobna do $DCAB$, gdyż $\Delta d c_0 a \sim \Delta DCA$ i $\Delta d b_1 c_0 \sim \Delta DBC$,



Rys. 663.

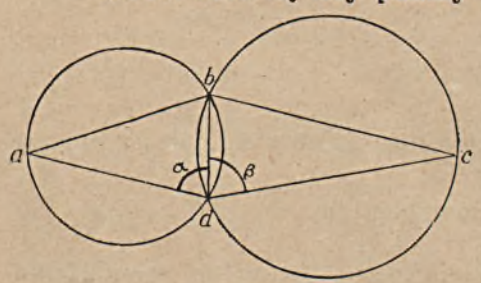
a poza tem, ponieważ $d b_1 : DB = c_0 d : CD$ i $c_0 d : CD = a d : AD$, więc $d b_1 : DB = a d : AD$ i $\sphericalangle a d b_1 = \sphericalangle ADB$ więc i $\Delta a b_1 d \sim \Delta ADB$, a wszystkie boki są proporcjonalne, jako jednakowo zmniejszone. Skoro zaś $dc_0 \parallel DC$ (gdyż stolik jest zorjentowany prostą dc_0), to i $ab_1 \parallel AB$. Przykładamy kierownicę do ab_1 i w terenie zapomocą lunety na przedłużeniu ab_1 wytyczamy punkt M w odległości kilkuset (200) metrów. Gdy więc teraz przyłożymy kierownicę do ab i obrotem stolika skierujemy oś celową na M, wówczas i ab będzie równoległe do AB, a zatem stolik będzie zorjentowany.

Celując wtedy przez a do A i przez b do B i kreśląc odpowiednie boki, w ich przecięciu się uzyskamy na stoliku punkt c.

§ 320. Wcięcie wstecz.

Zagadnienie to, zwane zagadnieniem Snelliusa lub Pothenota (pierwszy rozwiązał je w 1614 r., drugi w 1692 r.), polega na określeniu położenia na stoliku dowolnego punktu terenu, gdy widoczne są z niego trzy inne, naniesione na stolik, punkty terenu (rys. 664).

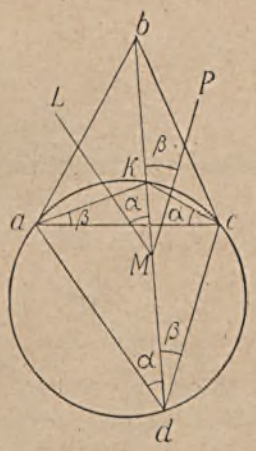
Jeżeli dane są trzy punkty terenu A B i C, naniesione jako a b i c na stolik, i należy określić położenie d na stoliku punktu D terenu wówczas, mierząc w terenie stolikiem, w punkcie D ustawionym, kąty α i β między kierunkami DA, DB i DC, równe odpowiednim kątom adb i bdc na stoliku, możemy zapomocą znanej konstrukcji geometrycznej rozwiązać dane zagadnienie. Mianowicie, zbudu-



Rys. 664.

jemy dwa koła: jedno—przechodzące przez punkty *a* i *b* i będące miejscem geometrycznem punktów, z których odcinek *ab* widoczny jest pod kątem α, drugie—przechodzące przez punkty *b* i *c* i będące miejscem geometrycznem punktów, z których odcinek *bc* jest widoczny pod kątem β. W przecięciu się obydwu kół znajduje się określane położenie punktu *d*.

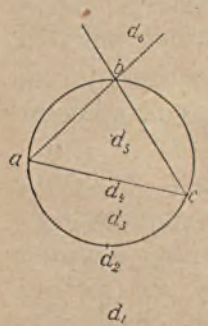
Inne geometryczne rozwiązanie danego zagadnienia, stosowane przy teodolitowych pomiarach w odniesieniu do punktów, które wolno nanosić bez określenia ich spółrzędnych, polega na określeniu położenia pomocniczego punktu *k*, leżącego na obwodzie koła, przechodzącego przez dwa dane punkty *a* i *c* oraz szukany punkt *d*. Punkt *K* (punkt Collinsa) leży na prostej *db* i na omówionem kole. Jak wynika z rys. 665, wystarczy przy boku *ac* w wierzchołku *a* zbudować prawy kąt β, w wierzchołku *c* lewy kąt α, by w przecięciu się wykreślonych ramion tych kątów uzyskać punkt *k*, mianowicie dlatego, że kąty *kac* i *kdc* oraz *kca* i *kda*, jako opierające się o jednakowe łuki, są sobie równe. Mając punkt *k*, kreślimy i przedłużamy prostą *bk* i w dowolnym jej punkcie *M* budujemy przy prostej *Mb* kąty: po lewej stronie α i po prawej β. Przesuwamy bok ekierki, przyłożonej do *ML*, równolegle do siebie zapomocą drugiej ekierki do chwili, gdy przejdzie przez punkt *a*; wykreślona wzdłuż tego boku ekierki prosta *ad* przetnie (oczywiście teoretycznie) prostą *MB* lub jej przedłużenie pod kątem α, a więc w punkcie *d*. Tak samo przesuniemy bok *MP* do punktu *c* i nakreślimy prostą *cd*. Całe postępowanie można wykonać kolejno dla *ML* i *MP* bez ich wykreślania. Wystarczy bok ekierki przyłożyć do odpowiednio ułożonego centrycznie na prostej *kb* przenośnika i przesunąć równolegle do siebie ekierkę.



Rys. 665.

W wykonaniu prosta *kb* (względnie jej przedłużenie) nie przetnie się z prostemi *ad* i *cd* w jednym punkcie, utworzy się natomiast trójkąt błędów o bardzo nieznacznych wymiarach, gdy wszystkie czynności wykonano dokładnie.

Prócz rozpatrzonych powyżej rozwiązań geometrycznych, istnieje jeszcze cały ich szereg. Jednakże zagadnienia Pothenota na stoliku nie rozwiązujemy zapomocą tych metod, lecz stosujemy t. zw. metody stolikowe.



Rys. 666.

W stosunku do danych trzech punktów *a*, *b* i *c* określany punkt może zajmować jedno z sześciu położeń:

1) naprzeciwko jednego boku △-a *abc* nazewnątrz koła, przechodzącego przez trzy dane punkty,
2) naprzeciwko jednego boku na obwodzie koła,
3) między bokiem a łukiem koła,
4) na boku,
5) wewnątrz danego △-a *a b c*,
6) nazewnątrz △-a i koła między przedłużeniami boków △-a (rys. 666).

Zadania nie możemy rozwiązać w wypadku drugim, gdyż tak

z punktu d_2, jak ze wszystkich punktów łuku a_2dc, boki ab i bc widzimy pod temi samemi kątami α i β. Dwie więc dane α i β w tym wypadku dają nieograniczoną ilość rozwiązań i zadanie jest nieokreślone.

Wypadek, gdy punkt szukany d leży ściśle na jednym z boków $\triangle$-a, sprowadza się do następującego prostego rozwiązania: orjentujemy stolik według boku ac i przez b celujemy do punktu B terenu; kreśląc wzdłuż krawędzi tak ułożonej kierownicy prostą, w punkcie jej przecięcia się z bokiem $\triangle$-a ac uzyskujemy rozwiązanie.

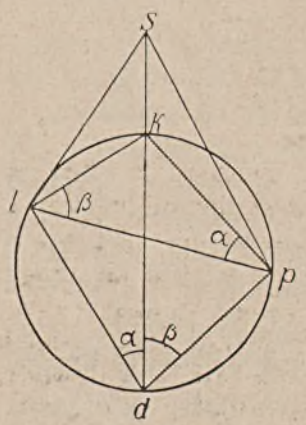
Wszystkie metody rozwiązania zagadnienia Pothenota na stoliku dzielą się na dwie grupy: bezpośrednie i pośrednie rozwiązania.

Bezpośrednie dają odrazu położenie określonego punktu, pośrednie zamiast punktu — dają trójkąt błędów.

Z bezpośrednich metod rozpatrzymy metodę Bonenbergera-Bessela, z pośrednich — metodę Lehmana.

§ 321. Metoda Bonenbergera-Bessela.

Oznaczmy dane punkty (rys. 667) literami l (lewy w stosunku do szukanego punktu d), p (prawy) i s (środkowy) i umówmy się, że niezależnie od położenia punktu d będziemy liczyć kąt α w prawo od kierunku dl do kierunku ds i kąt β w prawo od kierunku ds do kierunku dp.



Rys. 667.

Gdybyśmy na stoliku, ustawionym w punkcie D terenu, znaleźli punkt Collinsa k, leżący na prostej ds i na obwodzie koła, przechodzącego przez l, p i d, wówczas punkt d leżałby albo na prostej ds, albo na jej przedłużeniu, w zależności od położenia punktu d w stosunku do $\triangle$-a lsp.

Mając prostą ks, moglibyśmy przyłożyć do ks ramię kierownicy i, obracając stolik dokoła osi, skierować oś celową na S w terenie.

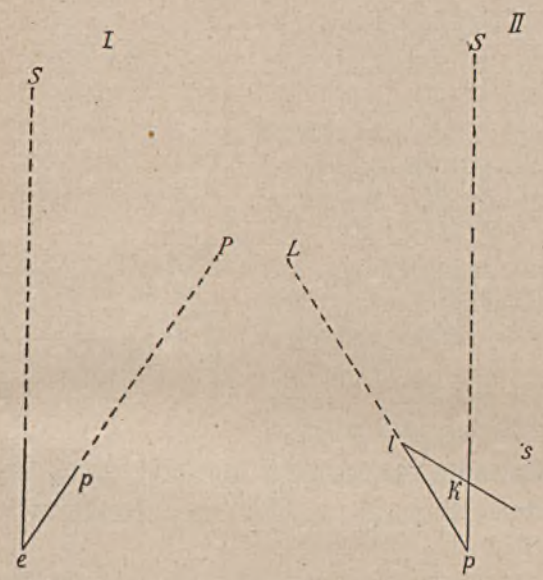
Wówczas proste ds na stoliku i DS terenu leżałyby w jednej pionowej płaszczyźnie, a więc stolik byłby zorjentowany. Pozostałoby w takiem jego położeniu wciąć prostą sk lub jej przedłużenie, celując przez l do L terenu, lub przez p do P terenu, i w przecięciu się tak ustawionego ramienia kierownicy z prostą ks lub jej przedłużeniem otrzymalibyśmy punkt d.

Całe zagadnienie w metodzie Bonenbergera-Bessela sprowadza się zatem do naniesienia na stolik punktu pomocniczego k na zasadzie zbudowanego przy lp kąta β i przy pl kąta α.

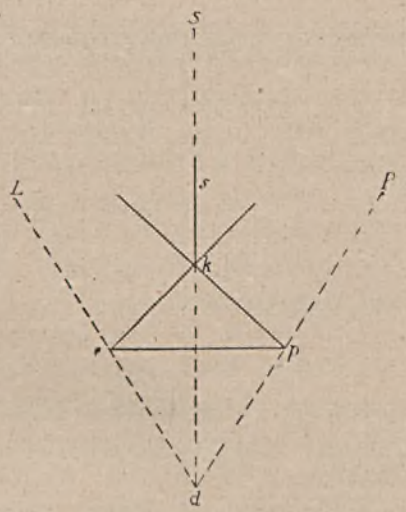
Gdy nad punktem D terenu ustawimy stolik, obracając go tak, by prosta lp stolika skierowana była do punktu P terenu, i następnie kierownicę, przyłożoną do punktu l, skierujemy do punktu S terenu i wzdłuż ramienia kierownicy wykreślimy prostą, wówczas uzyskamy kąt przy lp z lewej strony, równy kątowi $sdp = \beta$. Następnie prostą pl obrotem stolika kierujemy ku punktowi L terenu i obracamy na stoliku kierownicę dokoła punktu p, kierując ją do punktu S terenu.

Kreśląc wzdłuż krawędzi tak ułożonej kierownicy prostą, uzyskujemy drugie ramię kąta lpk, równego $\sphericalangle LDS = \alpha$.

W przecięciu się dwu wykreślonych prostych otrzymujemy punkt k. Budowę obydwu kątów przedstawiają rysunki I i II.



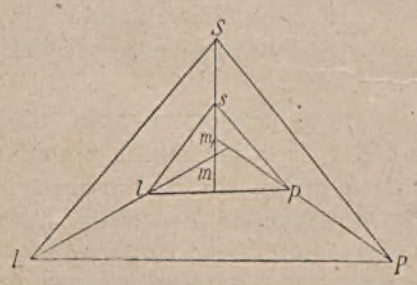
Rys. 668.



Rys. 669.

Mając punkt k, orjentujemy stolik prostą ks, kierując ją obrotem stolika do punktu S zapomocą kierownicy. Po zorjentowaniu stolika wcinamy L przez l, kreśląc prostą wzdłuż ramienia kierownicy, oraz P przez p. Proste sk, Ll i Pp przetną się w punkcie d, o ile prosta ks jest tak długa, że może posłużyć do dostatecznie dokładnego zorjentowania stolika; w przeciwnym razie uzyskamy zamiast punktu d — trójkąt błędów o niewielkich bokach. Powyższe opiera się na twierdzeniu: Gdy stolik jest zorjentowany, wówczas cele, przechodzące przez wierzchołki △-a na stoliku do odpowiadających im wierzchołków △-a w terenie, przecinają się na stoliku w jednym punkcie.

Dowiedziemy tego. Przy zorjentowanym stoliku boki Δ-a na stoliku są równoległe do odpowiednich boków w terenie. Jeżeli trzy celowe sS, pP, i lL nie przetną się w jednym punkcie, wówczas linja środkowa przecięta zostanie bocznemi w punktach m i m_1.



Rys. 670.

Z podobieństwa Δ-ów mls i mLS, oraz m_1ps i m_1SP wynika:

$$\frac{ms}{mS} = \frac{ls}{LS} \qquad \frac{m_1s}{m_1S} = \frac{sp}{SP}$$

ponieważ zaś Δ-y lsP i LSP są podobne, gdyż △ lsp jest naniesiony w skali,

więc:

$$\frac{ls}{SL} = \frac{sp}{SP},$$

a zatem:

$$\frac{ms}{mS} = \frac{m_1 s}{m_1 S};$$

utworzymy pochodną proporcję:

$$\frac{ms}{mS - ms} = \frac{m_1 s}{m_1 S - m_1 s}$$

lub

$$\frac{ms}{sS} = \frac{m_1 s}{sS}$$

skąd wynika, że

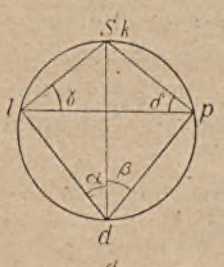
$$ms = m_1 s$$

co dowodzi, iż wszystkie trzy wykreślone na stoliku kierunki winny się przeciąć w jednym punkcie, o ile orjentacja stolika jest dostatecznie dokładna.

UWAGA: Przy pomiarach w dużej skali, przy budowaniu kątów przy wierzchołkach p i l należy stolik centrować temi punktami nad określanym punktem D terenu; jest to zbyteczne już przy skali 1:5000, 1:10000 i t. d.

§ 322. Punkt Collinsa a długość orjentującej prostej *ks* w metodzie Bonenbergera - Bessela.

Im dłuższa jest prosta ks, tem dokładniej możemy zorjentować stolik. Zbadajmy, w którym z 6 zasadniczych położeń punktu D w stosunku do $\triangle$-a LSP długość prostej ks będzie sprzyjać dokładności orjentacji stolika.



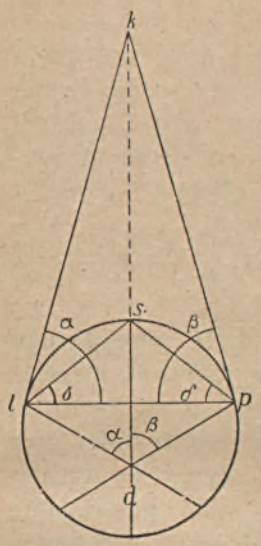
Rys. 672.

Gdy punkt d leży na kole lps, wówczas budowane przy lp kąty α i β są odpowiednio równe kątom $\triangle$-a lps: $\gamma = \beta$ oraz $\alpha = \delta$ i punkt k znajduje się w punkcie s. Długość $ks = o$, zorjentować więc stolika zapomocą ks nie możemy.

Jeżeli d znajduje się poza obwodem koła naprzeciw lp, to $\alpha < \delta$ oraz $\beta < \gamma$, więc punkt k znajdziemy wewnątrz trójkąta tem bliżej do S, im bliżej obwodu koła leży punkt D. Długość ks może być nieznaczna.

Jeżeli punkt d znajduje się między łukiem lp a bokiem $\triangle$-a, to punkt k znajduje się po drugiej stronie punktu S w stosunku do boku lp,

ponieważ $\alpha > \delta$ oraz $\beta > \gamma$. Długość ks będzie tem większa (rys. 672), im bliżej boku lp znajduje się d, i gdy punkt D znajdzie się na LP, wówczas $\alpha + \beta = 180^0$, więc $lk \parallel pk$ i punktu k na stoliku nie otrzymamy. Równoległość lk i pk dowodzi, że D leży na LP.

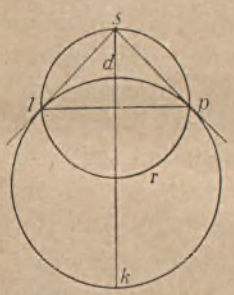


Rys. 672.

Gdy punkt D leży wewnątrz △-a LSP, wówczas $\alpha > \delta$ oraz $\beta > \gamma$ (rys. 673).

Ponieważ punkt k leży zawsze na kole, przechodzącem przez l, d i p, po drugiej stronie boku lp, i przytem na prostej sd lub jej przedłużeniu, przeto w danym wypadku punkt k znajdzie się nazewnątrz △-a lps i koła lps po drugiej stronie lp w porównaniu z punktem S, wobec tego, że promień koła ldp jest większy od promienia koła lsp. Orjentacja w tym wypadku będzie dokładna. Kreśląc odpowiednie koła, stwierdzimy również, że gdy D leży poza △-em LPS między przedłużeniami ramion LS i PS, wówczas punkt k znajdzie się pomiędzy prostą lp a łukiem lp. Orjentacja będzie więc również dobra.

W tych położeniach punktu D, przy których metoda Bonenbergera - Bessela zawodzi, gdyż orjentacyjna prosta ks jest krótka, otrzymamy zamiast punktu d trójkąt błędów i położenie punktu d należy wyznaczać w zależności od położenia tego trójkąta, jak w metodzie Lehmana.



Rys. 673.

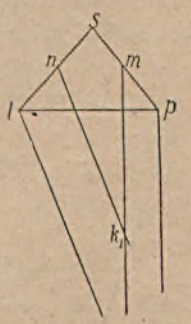
W wypadkach, kiedy proste, wyznaczające punkt k, nie przecinają się na płycie, należy od S na bokach sl i sp odłożyć części, proporcjonalne do boków (rys. 674),

np.:

$$sn = \frac{sl}{2}$$

oraz

$$sm = \frac{sp}{2},$$



Rys. 674.

i przez punkty n i m poprowadzić odpowiednie równoległe. Uzyskany punkt k_1 leży na sk, a więc zapomocą prostej $k_1 s$ zorjentujemy stolik, celując do S.

§ 323. Metoda Lehmana.

Metoda ta polega na przybliżonem zorjentowaniu stolika w określanym punkcie zapomocą busoli lub w braku jej na oko, wcięciu wstecz przez trzy wierzchołki △-a na stoliku odpowiednich punktów terenu i określeniu ostatecznego położenia punktu d, z wykorzystaniem trójkąta błędów.

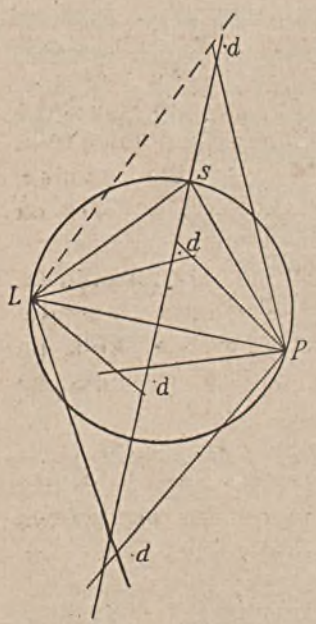
Mając trójkąt błędów, wyznaczymy punkt d na podstawie następujących twierdzeń Lehmana:

1) jedynie wówczas, gdy punkt D leży wewnątrz trójkąta LPS, punkt d leży wewnątrz trójkąta błędów,

2) jeżeli środkową celową oznaczymy literą DS, to przy położeniu D nazewnątrz △-a LPS, d leży nazewnątrz △-a błędów, przyczem tylko wtedy po jednej z △-em błędów stronie środkowej celowej, gdy punkt D leży nazewnątrz koła LPS naprzeciw jednego z boków; w pozostałych wypadkach dla D, położonego nazewnątrz △-a LPS trójkąt błędów i punkt d leżą po obydwu stronach środkowej celowej,

3) odległości punktu d od boków △-a błędów są proporcjonalne do odległości d od wierzchołków △-a lps.

Po uzyskaniu na płycie △-a błędów, na podstawie powyższego twierdzenia, na oko oznaczamy położenie d, przykładamy krawędź kierownicy do prostej, łączącej punkt d z najdalszym z danych punktów △-a, orjentujemy stolik według tej prostej i znów wcinamy pozostałe dwa punkty w terenie przez odpowiednie wierzchołki △-a na płycie; w przecięciu się środkowej celowej z nowemi skrajnemi uzyskamy albo punkt, albo tym razem mniejszy trójkąt błędów, z którym powtarzamy postępowanie do czasu, gdy celowe przetną się w jednym punkcie.



Rys. 675.

Jest to więc metoda kolejnych przybliżeń.

Sposób określania położenia punktu d w stosunku do △-a błędów dla różnych położeń punktu D w stosunku do △-a LSP wskazuje rys 675.

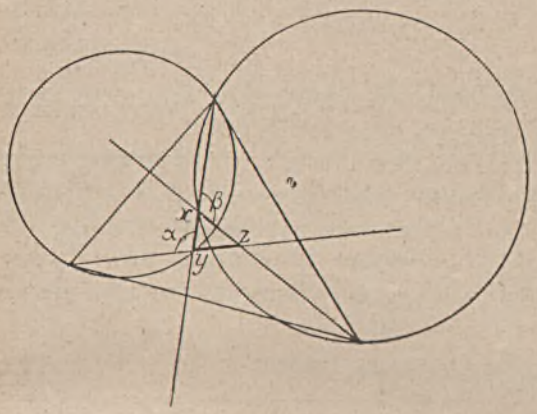
Dowód I-ej części twierdzenia Lehmana polega na następującem rozważaniu: dwa wierzchołki △-a błędów są punktami, z których boki ls i sp są widoczne pod kątami α i β, gdyż do końców tych boków idą przez te wierzchołki proste, odpowiadające kierunkom w terenie, między któremi zawarte są kąty α i β (rys. 676).

Stąd wierzchołki y, l i s leżą na kole, obejmującem kąt α, wierzchołki x, s i p na kole, obejmującem kąt β. Ponieważ zaś punkt d jest punktem, z którego odcinki ls i sp są widoczne pod kątami α i β, więc punkt d nie może leżeć ani między ramionami, ani między przedłużeniami ramion tych kątów. A wobec tego, że jedynie przestrzeń wewnątrz △-a błędów odpowiada temu warunkowi, przeto punkt d leżeć może tylko wewnątrz △-a błędów.

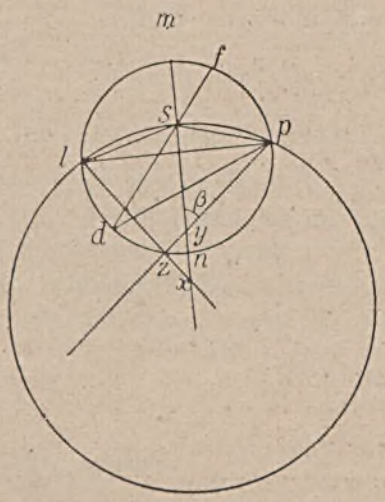
Podobnież (x odpowiada wierzchołkowi kąta β, y-kąta α, z-trzeciemu wierzchołkowi △-a dłędów) dowiedziemy, że we wszystkich innych położeniach D w stosunku do △-a LPS punkt d winien leżeć między ramionami yz i xz, lub ich przedłużeniami, wyjąwszy sam △ błędów.

Drugą część twierdzenia Lehmana rozpatrzymy w odniesieniu do trzech wypadków:

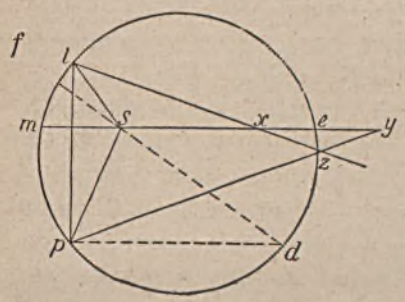
1) stolik stoi nazewnątrz △-a LSP wewnątrz koła LSP (rys. 677). Poprowadźmy koło przez l i p, obejmujące kąt $\alpha + \beta$. Przypuśćmy, że punkt d leży na tem kole na łuku lz.



Rys. 676.



Rys. 677.



Rys. 678.

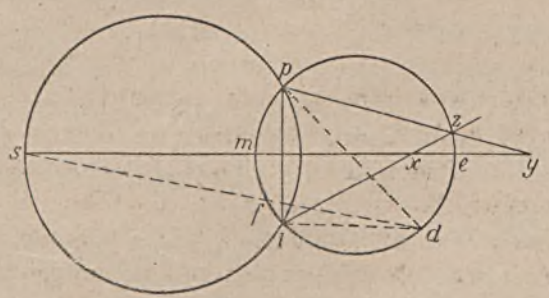
Prosta ds przetnie to koło w punkcie f; kąt między środkową a prawą celową $sdp = \beta$ mierzy się połową łuku fp; lecz ten sam kąt β przy wierzchołku y wymierza się połową łuku $mp + zn$, przyczem $mp > fp$. Stąd wynika, że założenie, jakoby punkt d mógł leżeć na kole lpz między l i z, jest błędne.

Skoro zaś punkt d nie leży na łuku lz, ani na zn, jako leżącym wewnątrz △-a błędów, przeto leży na obwodzie koła po drugiej stronie △-a błędów w stosunku do środkowej celowej;

2) stolik stoi między przedłużeniami ramion kąta c (rys. 678).

Wykreślmy koło lzp, obejmujące kąt $\alpha + \beta$; przypuśćmy, że d leży między z i p na łuku tego koła; ale wtedy $pds = \beta$ mierzyłby się połową łuku pf, gdy tymczasem $\beta = \sphericalangle xye$ wymierza się połową łuku $(pm - ez)$; ponieważ zaś $pf > pm$, więc niemożliwe jest, by punkt d leżał na łuku pz, winien zatem leżeć po drugiej stronie środkowej celowej w stosunku do △-a błędów xyz;

3) stolik stoi nazewnątrz koła, przechodzącego przez trzy dane punkty lsp. Przypuśćmy, że punkt d leży na łuku le koła pzl, obejmującym kąt $\alpha + \beta$.



Rys. 679.

Wówczas otrzymamy:

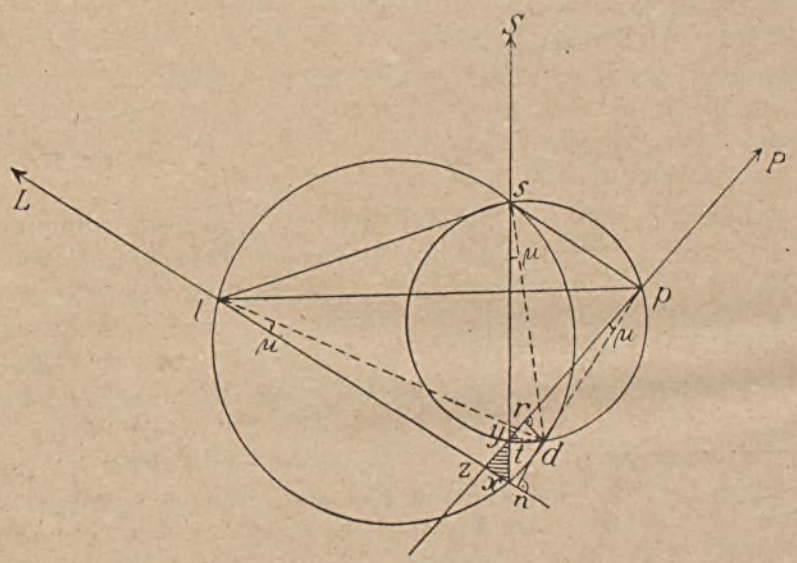
$$\alpha = ldf = \frac{1}{2} \smile lf$$

$$\alpha = lxs = \frac{1}{2} (\smile lm + \smile ze)$$

co jest niemożliwe, gdyż $lm > lf$.

Jeżeli zatem punkt d nie może leżeć na łuku lde, więc winien leżeć po tej samej stronie środkowej celowej, co i Δ błędów.

Dowód trzeciej części twierdzenia Lehmana jest następujący: przypuśćmy, że dzięki błędowi orjentacji stolika μ każda z celowych wychyliła się od właściwego kierunku o ten sam kąt μ, wskutek czego utworzył się



Rys. 680.

Δ błędów xyz. Wierzchołek x kąta α leży na kole lds, obejmującem kąt α, tak samo wierzchołek y kąta β leży na kole spd. Łączymy punkt d z punktami l, s i p i spuszczamy na boki lub przedłużenia boków Δ-a błędów prostopadłe dr, dt i dn.

Z podobnych prostokątnych Δ-ów nld, std i prd (mających równe ostre kąty μ)

wynika

$$dn : dt : dr = dl : ds : dp$$

lecz

$$dl : ds : dp = DL : DS : DP$$

więc

$$dn : dt : dr = DL : DS : DP$$

t. j. punkt d leży od boków Δ-a błędów w odległościach, proporcjonalnych do odległości punktu D od danych L, P i S.

§ 324. Rozwiązanie zagadnienia Pothenota na stoliku zapomocą kalki.

Jeżeli przypniemy na papier płyty kalkę, oraz przez wyznaczony na oko punkt płyty, odpowiadający stanowisku stolika w stosunku do trzech danych punktów, wykreślimy, nie poruszając stolika, celowe do trzech danych punktów, ustawiając odpowiednio kierownicę, wówczas otrzymamy na kalce trzy proste, wychodzące z jednego punktu, będące ramionami kątów α i β.

Jeżeli teraz zaczniemy na płycie przesuwać kalkę do czasu, gdy proste, lewa, środkowa i prawa, przejdą ściśle odpowiednio przez lewy, środkowy i prawy dany punkt, i przekłujemy punkt przecięcia się prostych z kalki na płytę zapomocą pionowo ustawionej igły, wówczas nakłuty na papierze punkt daje rozwiązanie, t. j. punkt d na stoliku.

Na dokładność wyników, uzyskiwanych przy stosowaniu tego sposobu, wpływa rozciągliwość kalki i błąd nakłucia.

§ 325. Pomiary stolikowe. Punkty główne.

Zapomocą stolika i kierownicy możemy dokonywać zdjęć sytuacyjnych i wysokościowych.

Ponieważ pomiary szczegółowe zawsze oparte są na sieci punktów głównych, przeto i przy pomiarach stolikowych tworzymy tę sieć.

Jeżeli zdjęcia stolikowe obejmują wielkie obszary, to za podstawę do pomiaru służą punkty trygonometryczne, tak gęsto w terenie rozstawione, by na każdy arkusz zdjęcia stolikowego przypadały przynajmniej trzy punkty trygonometryczne. Gdy sieć trygonometryczna nie odpowiada temu warunkowi, wówczas należy ją uzupełnić punktami dodatkowemi.

Punkty te winny być obierane na wzgórzach, wpobliżu ważnych linij sytuacyjnych, jak np. skrzyżowania dróg, rozwidlenia rzek. Punkty należy obierać w terenie tak, by z każdego z nich można było obserwować możliwie największą liczbę sąsiednich. Odległość między punktami zależy od ilości szczegółów, podlegających pomiarowi — przy większej ich liczbie i ilość punktów trygonometrycznych winna być większa. Warunek ten ma znaczenie dla zdjęć o charakterze wyłącznie sytuacyjnym; jeżeli bowiem chodzi o pomiary wysokościowe — to cały mierzony obszar należy dość gęsto pokryć punktami trygonometrycznemi.

Obszar, podlegający zdjęciu, dzieli się na sekcje; ilość ich zależy od wielkości płyty i skali zdjęcia.

Stosowane u nas skale zdjęć topograficznoch 1 : 20000 i 1 : 10000 (w ważniejszych wypadkach) wskazują, że powierzchnie, odpowiadające jednemu arkuszowi zdjęcia, są dość znaczne; z tego względu płyty zdjęć topograficznych odpowiadają pasom równoleżnikowym, dzięki czemu ramka płyty nie jest kwadratem, a trapezem, ograniczonym z góry i z dołu równoleżnikami, z boków południkami.

Zdjęcia stolikowe, wykonywane dla celów gospodarczych lub podatkowych, jak np. pomiary katastralne w Małopolsce, odniesione są do prostokątnego układu spółrzędnych, dzięki czemu i ramki płyt są prostokątne. Skalą zdjęć katastralnych w Galicji była 1 : 2880.

Gdy ilość punktów, danych na sekcji, jest nieznaczna, należy ją uzupełnić najlepiej wcięciami wprzód z co najmniej dwu punktów; wynik podlega sprawdzeniu w terenie na określanym punkcie zapomocą zorjentowania go według jednego z boków i celowania do pozostałych punktów, przy krawędzi kierownicy, ściśle przyłożonej do odpowiednich punktów na stoliku. Sprawdzany punkt winien znajdować się w polu widzenia lunety nieopodal od nitki pionowej.

Jeżeli niema nawet dwu punktów na każdą płytę, wówczas na oddzielną płytę nanosimy cztery sekcje w dwukrotnie mniejszej skali i uzupełniamy wcięciami wprzód sieć punktów trygonometrycznych, uzyskując punkty, graficznie określone. Po dostatecznem zagęszczeniu sieci, przenosimy poszczególne punkty na sekcje w normalnej skali, korzystając ze spółrzędnych graficznie określonych, przecięć prostych, łączących punkty, z ramkami sekcji i t. p. Tak np., austrjacka triangulacja katastralna wykonywana była w skali 1 : 14400 na arkuszach, podzielonych na 20 sekcyj (4×5 cali) z tem, że na każdą sekcję miało przypaść najmniej po 3 punkty dla zdjęcia w skali 1 : 2880.

Można jednakże uzupełnić ilość punktów na danej sekcji, nie wykorzystując punktów, położonych na innych sekcjach, dla wcięć wprzód. Zachodzą trzy wypadki:

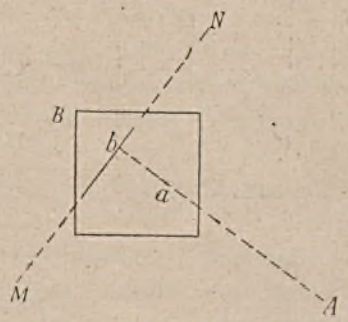
1) na sekcji znajduje się punkt i kierunek, łączący dwa punkty, położone na innych sekcjach (rys. 681),

2) na sekcji znajduje się punkt i przechodzący przezeń kierunek do punktu, położonego na innej sekcji,

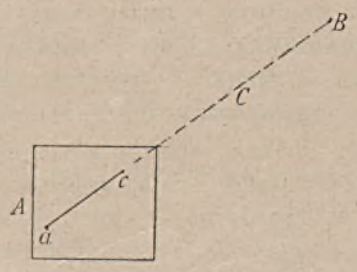
3) na sekcji niema punktu, są natomiast dwa kierunki.

W I-ym wypadku ustawiamy stolik ściśle na prostej MN (gdy dany jest na stoliku kierunek, łączący te punkty), orjentujemy za jej pomocą i, wcinając wstecz przez a do A, określamy na danym kierunku położenie b stolika.

Mając dwa punkty A i B terenu na danej sekcji, zapomocą wcięcia wprzód możemy otrzymać szereg innych.



Rys. 681.

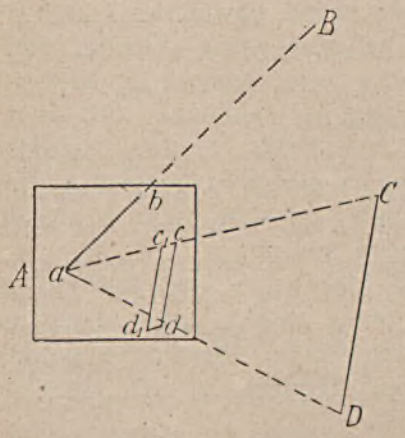


Rys. 682.

II-i wypadek wymaga ustawienia stolika w punkcie a, zorjentowanego według danego kierunku AB, odmierzenia na nim długości podstawy AC i wniesienia jej w skali zdjęcia, jako odcinka ac (rys. 682).

Gdy prosta AB nie nadaje się do pomiaru, wówczas obieramy dowolną prostą CD, dającą się pomierzyć, określamy jej długość, ustawiamy stolik w A, orjentujemy z AB i kreślimy kierunki przez a do C i D.

Przenosimy stolik do punktu C, orjentujemy według $C A$, wyznaczamy na oko c_1 na stoliku na kierunku $a c$, kreślimy kierunek $c_1 d_1$ do D, równy długości $C D$ w podziałce zdjęcia, przez d_1 prowadzimy $\parallel$-ą do $a c_1$ do przecięcia się z $a d$ w punkcie d i przez d kreślimy równoległą do $c_1 d_1$ do przecięcia się z $a c$. W ten sposób otrzymujemy na płycie trzy punkty $a b c$, na podstawie których możemy uzupełnić sekcję całym szeregiem dodatkowych (rys. 683).

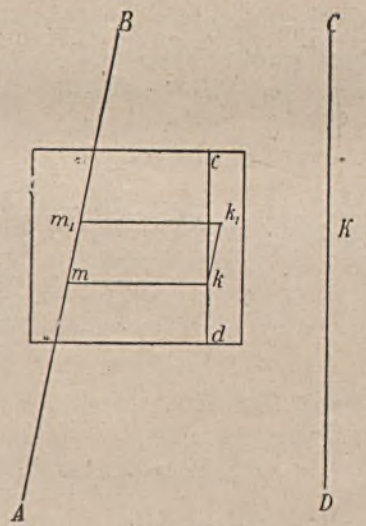


Rys. 683.

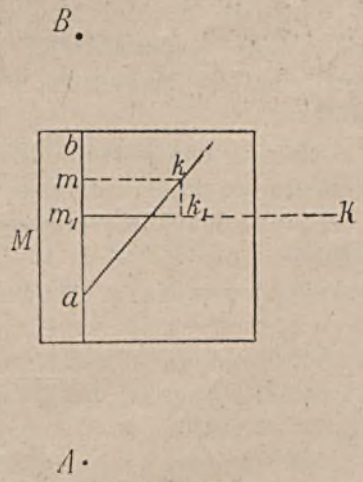
Gdy wreszcie nad danym punktem nie można ustawić stolika, wówczas obieramy na $A B$ punkt M, z którego można pomierzyć prostą $M K$. Na oko na kierunku $a b$ wyznaczamy punkt m_1, orjentujemy stolik, kreślimy kierunek $m k_1$, poczem mierzymy długość $M K$ i nanosimy jako $m_1 k_1$. Następnie przenosimy stolik do K, orjentujemy według $k_1 m_1$ i wcinamy A przez a, kreśląc prostą, na której leży punkt k. Jak w poprzednim wypadku na skutek równoległego przesunięcia otrzymujemy $m k$ (rys. 685).

Mając na sekcji trzy punkty a, m i k możemy je uzupełnić.

W III wypadku, gdy dane są tylko dwa kierunki $A B$ i $C D$, na jednym z nich w punkcie, z którego możemy pomierzyć prostą w kierunku



Rys. 684.



Rys. 685.

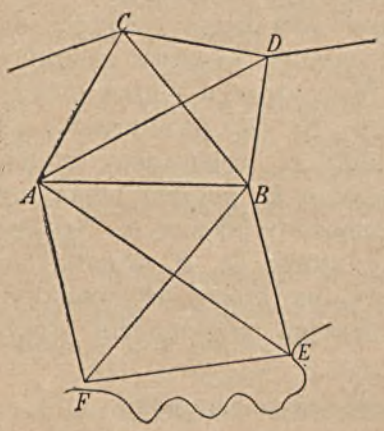
do drugiego, ustawiamy stolik, orjentujemy i nakreślimy kierunek i długość mierzonego odcinka $m_1 k_1$, którego koniec K leży na $C D$ (rys. 684).

Prostą $m_1 k_1$ przesuniemy równolegle do siebie tak, by jej końce znalazły się na danych kierunkach. Otrzymamy w ten sposób dwa punkty m i k na stoliku, odpowiadające punktom M i K terenu.

§ 326. Zdjęcia szczegółów i metody pomiaru.

Przy zdjęciach stolikowych szczegóły mierzymy najczęściej metodą biegunową, korzystając z dalekomierza, metodą wcięć, obwodową i linjową.

Przy metodzie biegunowej ustawiamy na stanowisku (którego położenie na stoliku określimy, gdy nie jest dane, z wcięć wprzód lub szybciej metodą Lehmana) stolik, orjentujemy i, wysyłając na załamania linij szczegółowych łaty, kierujemy oś celową kolejno na każdą z nich, odcinając z podziałki linjału odczytaną i zredukowaną na poziom odległość wzdłuż krawędzi kierownicy od stanowiska w kierunku do określanego punktu.



Rys. 686.

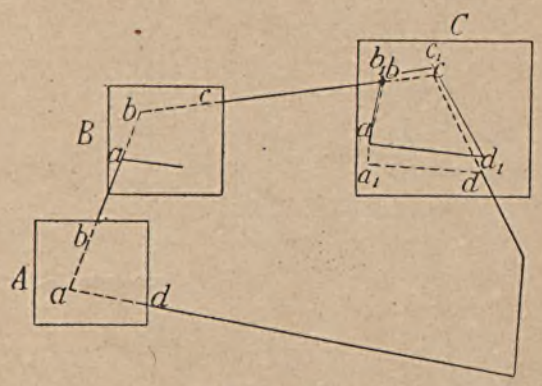
Krawędź kierownicy przy każdym celu przechodzi przez punkt, oznaczający na płycie dane stanowisko. Otrzymane punkty łączymy linjami, zgodnie z ich biegiem w terenie.

Metoda zdjęcia szczegółów *zapomocą wcięcia* jest bardzo uciążliwa i dlatego mało obecnie, wobec wprowadzenia dalekomierzy, stosowana. Polega na tem, że z każdej pary stanowisk (danych lub specjalnie w tym celu określonych) wcinamy załamania linij w terenie, unikając przecięć pod zbyt ostremi lub rozwartemi kątami. Jak stąd możemy wnioskować, metoda ta może być stosowana w równych i otwartych terenach.

Tak np., ze stanowisk A i B wetniemy załamy C i D, oraz punkty F i E wpobliżu pewnej krzywej, której liczne punkty wszelako lepiej, nie wcinając, zdjąć z punktów F i E (orjentując na nich należycie stolik) (rys. 686) metodą biegunową lub z domiarów.

Metoda obwodowa odpowiada na stoliku zdjęciu poligonu.

Przypuśćmy, że podlega pomiarowi obwód $A\ B\ C\ D$. W punkcie A ustawiamy i orjentujemy z busoli stolik, kreślimy przez odpowiednio obrany na stoliku punkt a kierunki $a\,b$ i $a\,d$, mierzymy odległość $A\ B$ zapomocą dalekomierza lub taśmą (wynik będzie nieco tylko dokładniejszy przy pomiarze taśmą, niż przy dwukrotnym pomiarze odległości zapomocą dalekomierza, np. ze środka każdej prostej; a jakkolwiek sama długość określa się z taśmy dokładnie, to jednak dokładność ta niknie przy końcowem rozrzucaniu odchyłki, wobec błędów graficznego wyznaczania kątów) i odcinamy w skali zdjęcia odcinek $a\,b$. Następnie przenosimy stolik do B, ustawiamy i orjen-



Rys. 687.

tujemy według przedłużeń $a\,b$ na marginesach płyty i wykreślamy cel do C. Po pomierzeniu boku $B\,C$, nanosimy $b\,c$, przenosimy stolik do C, orjentujemy z przedłużeń $b\,c$ i kreślimy kierunek $c\,d$. Po naniesieniu długości $c\,d$, otrzymamy na jej końcu punkt d, który nie będzie (najczęściej) leżeć na kierunku $a\,d$, wykreślonym w punkcie A.

Przenosząc stolik do D, orjentując według $d\ c$ i kreśląc kierunek do A, oraz nanosząc pomierzoną długość $D\,A$, otrzymamy punkt a_1 i odchyłkę aa_1. Odchyłkę te rozrzucamy linjami $\parallel$-emi do niej na wszystkie punkty, mianowicie: przyłożymy krawędź kierownicy ściśle do aa_1 i obrotem stolika skierujemy oś celową tak ułożonej kierownicy na odległy punkt. Następnie przykładać będziemy przy niezmiennem położeniu stolika krawędź kierownicy do wszystkich wierzchołków $b\ c\ d$... i oś celową kierować będziemy we wszystkich wierzchołkach $b\ c$... do tego samego odległego punktu, kreśląc równoległe wzdłuż krawędzi i przenosząc wzdłuż nich w kierunku $\parallel$-ym do $a_1\ a$ wszystkie wierzchołki o wielkości, będące w takim stosunku do długości $a_1\ a$, w jakim ma się odległość danego wierzchołka od a, liczona wzdłuż obowodu od a, do długości całego obwodu. Względna odchyłka może sięgać $\frac{1}{100}$. Metoda ta znajduje zastosowanie w wypadku, gdy dwa dane w terenie i na stoliku punkty winny być połączone ciągiem stolikowym.

Metoda obwodowa stosuje się albo przy pomiarze bardzo niewielkich parcel, albo też w zarośniętych terenach.

Przy poligonach o znacznej ilości załamań przaktyczniej będzie orjentować stolik z busoli, gdyż wtedy błąd orjentacji umieści się na każdem stanowisku, i nie przenosi się, jak wypadku orjentowania z boków, na całą dalej położoną część poligonu.

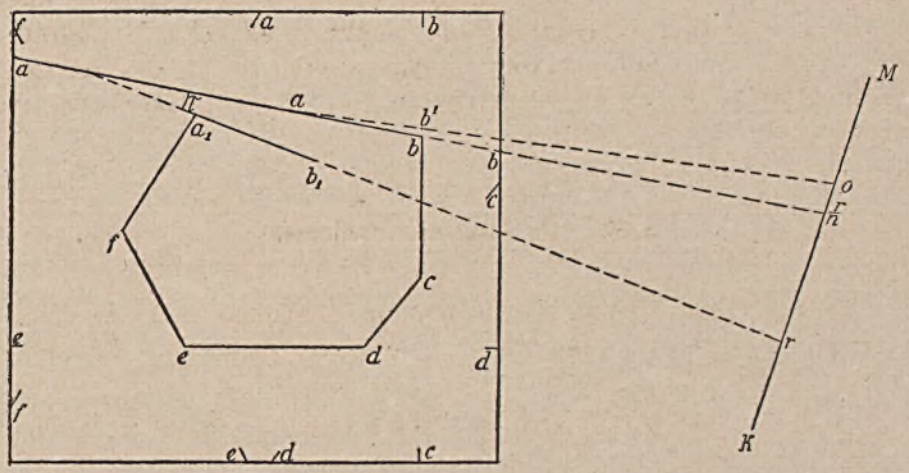
Metoda ta stosuje się częstokroć z omijaniem co drugiego punktu, tak np. ustawieniami stolika w poligonie $A\,B\,C\,D\,E\,F$ byłyby punkty A, C, E, mianowicie: w punkcie A po zorjentowaniu z busoli wykreślamy kierunki $a\,b$ i $a\,f$ (gdy dany poligon jest zamknięty), po takiem samem zorjentowaniu stolika w punkcie C wcina się punkt B przez naniesiony na stolik z pomierzonej długości $A\,B$ punkt b, i odcina się w skali $b\,c$, poczem kreśli się z kierunku i długości $c\,d$; następnie w F orjentuje się z busoli stolik, kreśli się $d\,f$ z celowania przez d do D, z otrzymanego kierunku i długości, oraz $f\,a$.

Usunięcie odchyłki dokonywa się równoległemi linjami. Gdy jednak orjentacja dokonywana była na zasadzie odcinków, mierzonych taśmą, wówczas głównych przyczyn odchyłki, która w tych wypadkach nie powinna przekraczać $\frac{1}{200}$, należy szukać w błędach naniesienia kątów.

Przypuszczając, że błędy kątów najracjonalniej jest poprawić we wszystkich wierzchołkach równomiernie, określimy poprawkę φ na każdy kąt, wskutek czego azymut 1-ego boku należy zmienić o φ, drugiego o $2\ \varphi$, trzeciego o $3\ \varphi$ i t. d.

Niech $a\,b\,c\,d\,e\,f\,a$ (r. 688) oznaczają wierzchołki i boki poligonu (bok a_1b_1 jest określony w punkcie A po zorjentowaniu stolika według $a_1\,f$). Odchyle-

nie kierunku $a_1 b_1$ od właściwego ab wynosi τ, równe przy n wierzchołkach $n\varphi$

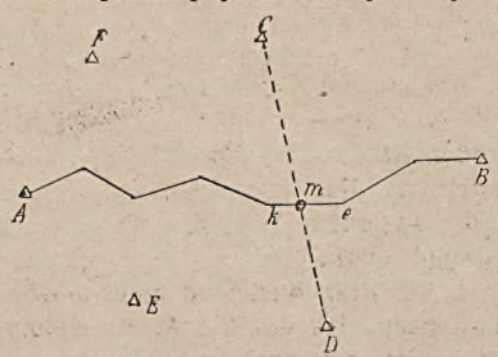


Rys. 688.

stąd

$$\varphi = \frac{\tau}{n}$$

Najdogodniej wielkość φ określić zapomocą poziomo ułożonej w odległości 100 m od stolika łaty. Mianowicie, układając ściętą krawędź kierownicy wzdłuż ab, dokonamy na łacie odczytu o, wzdłuż $a_1 b_1$ odczytu—r. Przesunięcie o kąt φ odpowie na łacie wielkości $\frac{r}{n}$. Pierwszy kierunek poprawimy, utrzymując kierownicę przy a i celując na $\frac{r}{n}$ na łacie. Wykreślimy $ab' = ab$. Następnie obrócimy stolik dokoła osi do położenia, przy którem oś celowa kierownicy, przyłożonej do bc, skierowana zostanie na zero łaty. Wówczas przez b' kreślimy kierunek do $\frac{2r}{n}$ na łacie i odcinamy $b'c' = bc$. Znów obrotem stolika kierujemy cd na zero łaty, i przykładając kierownicę do c_1, celujemy do $\frac{3r}{n}$ na łacie, kreśląc wzdłuż krawędzi i odcinając $c'd' = cd$. W ten sposób poprzesuwamy wszystkie wierzchołki. Pozostałość odchyłki rozrzucimy równolegle na kilka ostatnich wierzchołków.



Rys. 689.

Metoda linjowa odpowiada tej samej metodzie, rozpatrzonej już przez nas w dziale o metodach pomiarowych. Uzupełnia się zdjęciem szczegółów, przyległych do linji pomiarowych z domiarów.

Nieraz połączenie kilku metod podnosi dokładność pomiaru. Przypuśćmy, że między punktami A i B

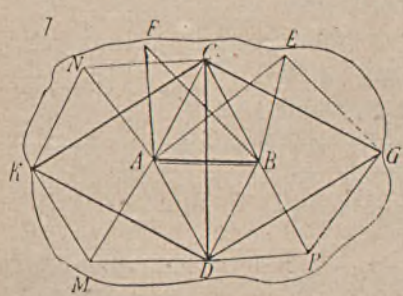
biegnie ciąg stolikowy. Możemy określić punkt przecięcia się tego ciągu z prostą, łączącą dwa punkty dane, np. *C* i *D*, zapomocą ustawienia stolika na skrzyżowaniu boków *CD* i *kl* w terenie i określenia na zasadzie wcięcia na inne dane punkty, jak *E* i *F*. Punkt *m*, w ten sposób określony, zamknie ciąg stolikowy, rozbijając go na dwa krótsze, wskutek czego odchyłka może być we właściwszy sposób rozrzucona (rys. 689).

§ 327. Triangulacja stolikowa.

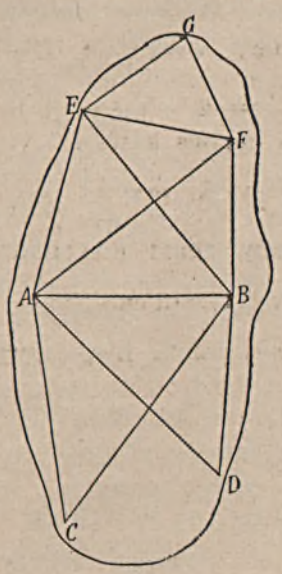
Gdy na terenie, podlegającym pomiarom, niema punktów trygonometrycznych, wówczas przy większych obszarach i zdjęciu w drobnej skali można założyć triangulację stolikową.

Rozpatrzmy wypadek, gdy cały obszar umieści się na jednym arkuszu o wymiarach płyty.

Dla założenia triangulacji należy mieć dwa punkty terenu, dające prostą o znanej długości i azymucie. Wcięciem wprzód z tych punktów zgęścimy sieć triangulacji stolikowej. Ponieważ przejście przez cały szereg trójkątów powoduje coraz to mniej dokładne określanie punktów, przeto dążymy tak obrać w terenie dwa pierwsze punkty, aby zapomocą najlepiej tylko jednego trójkąta określić z nich położenie każdego z kilku punktów na krańcach obszaru. Wobec konieczności jednak unikania wcięć pod zbyt ostremi lub rozwartemi kątami, najlepszem położeniem boku, łączącego dwa pierwsze punkty, zwanego podstawą lub bazą, będzie środek terenu. Końce bazy winny być obrane w ten sposób, by prosta, łącząca je w terenie, nadawała się do pomiaru długości. Przy wyciągniętym w jednym kierunku obszarze dogodniej jest obrać bazę w środku obszaru, prostopadle do tego kierunku, niż wzdłuż niego. W takim wypadku (rys. 691) z bazy *AB* na zasadzie wcięcia wprzód (sprawdzanego następnie na określonych punktach zapomocą zorjentowania według jednego boku i celowania do widocznych punktów triangulacji) określimy punkty *E*, *F*, *C* i *D* i tylko punkt *G*, najdalej odsunięty, będzie określony z boku *EF*, zamiast podstawy. Natomiast w wypadku czworokątnego obszaru (rys. 690) z bazy *AB* określimy punkty *C* i *D* oraz blisko od nich położone, punkty zaś leżące mniej więcej w linji bazy, jak np. *G* i *K*, określimy już na podstawie boku *CD*. Mając kilka takich głównych punktów, na zasadzie wcięć z nich możemy określić cały szereg dodatkowych punktów,

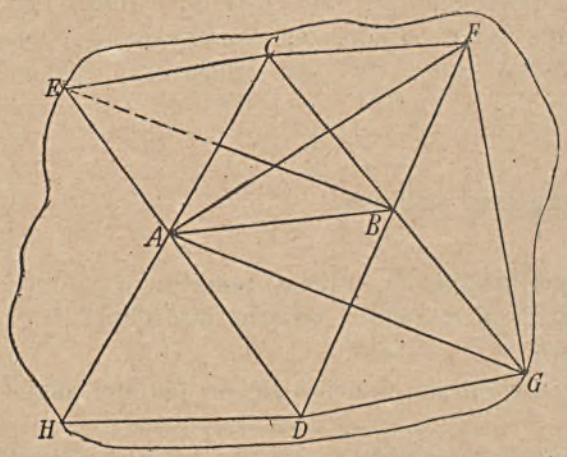


Rys. 690.



Rys. 691.

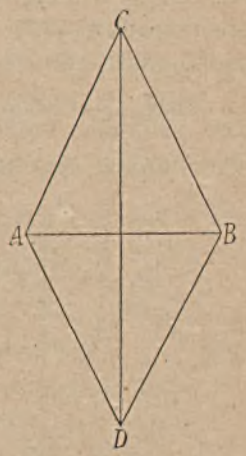
jak np. *M, N* i *D*. Gdyby konfiguracja terenu lub inne przeszkody uniemożliwiały wzajemną widoczność punktów *C* i *D*, leżących w linji, prostopadłej do bazy, wówczas za podstawę do określenia dalszych punktów należy przyjmować boki △-tów *ACB ABD* i innych opartych o *AB*. Rozwinięcie sieci odpowiadałoby wówczas rys. 692.



Rys. 692.

Oczywiście każdy nowy punkt winien być określony z największej ilości celowych, tak więc, po określeniu *C* i D, punkt *E* określi się z wcięć *AE, CE* i *BE*, punkt F z wcięć AF, *BF* i *CF*, punkt *G* z wcięć *AG, BG, DG* i *FG* i t. d.

Długość bazy, w wypadku, gdy obszar mieści się przy skali zdjęcia na płycie, może sięgać $^1/_4$ szerokości boku kwadratu ramki arkusza. Zmniejszanie długości bazy odbije się na dokładności określenia położenia punktów, leżących na krańcach obszaru, gdyż przy zbyt krótkiej bazie przechodziliśmy do nich przez liczne △-y. Oczywiście przy drobnej skali zdjęcia, trudnościach terenowych, jak np. brak odpowiednio długiej prostej do pomiaru długości, mogą zmusić nas do obrania nawet stosunkowo krótkiej bazy. Wówczas należy jednak starać się o okrelenie z niej dwu bardziej od siebie odległych punktów *C* i *D*, które zastąpić mogą podstawę przy dalszem rozwijaniu siatki. Najdogodniejszym systemem przejścia z bazy *A B* na bok *C*D, z którego możemy rozwijać większe △-y, będzie rozwinięcie rombowe; (rys. 693) figura *A B C* D jest zbliżona do rombu o kątach *C* i D, nie mniejszych od 40°. W praktyce takie rozwiązanie jest nadzwyczaj dogodne, jeżeli *A B* leży w dolinie, a *C* i D na wzgórzach. Po założeniu sieci triangulacji stolikowej ze wszystkich określonych punktów metodą biegunową zbierzemy położone przy nich szczegóły. Niezbędne zaś dla dalszego pomiaru sytuacji stanowiska określimy metodą Lehmana, kontrolując orjentację stolika zapomocą celowania do innych widocznych punktów, niż trzy użyte do rozwiązania zagadnienia Pothenota.

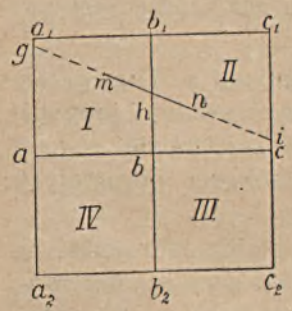


Rys. 693.

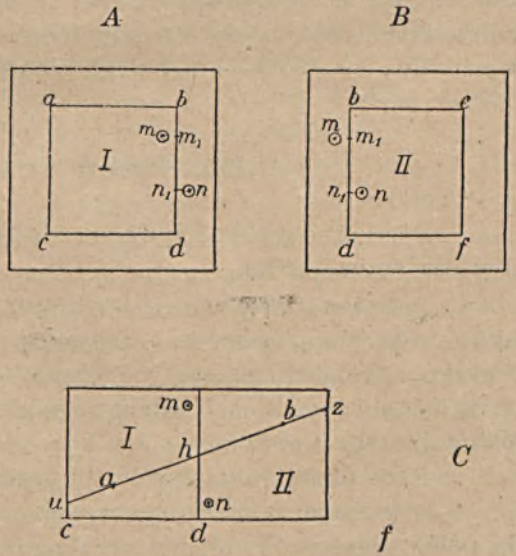
Punkty triangulacji stolikowej (lub, jak ją nazywają, sieci geometrycznej) wyznaczają się w terenie zapomocą żerdzi, wysokich na 3 — 4 *m.*, o średnicy 8 — 10 *cm.*, z wbitemi u góry przecznicami. Przy większej liczbie takich znaków przecznice przybijają się na nich w różny sposób i w różnej ilości; np.: dwie równoległe poziome, lub dwie równoległe, pochylone do poziomu, jedna, trzy i t. p. Ważniejsze zaopatrują się w chorągwie różnego koloru·

Sygnały takie najlepiej ustawiać pionowo, przy tem wyjmować je można w celu ustawienia stolika tylko przy budowie na stoliku całej sieci, ponieważ przed przystąpieniem do wcięć sygnały te winny już być ustawione. Natomiast po założeniu sieci i wykreśleniu jej na stoliku niema celu wyjmować sygnały dla ustawiania stolika do zdjęć stolikowych: gdy skala jest mała, np. $\frac{1}{10{,}000}$ i mniej, odsunięcie stolika o 1 *m.* od znaku nie ma znaczenia; wówczas więc wystarczy ustawić stolik przy samym znaku i uważać można, że jest scentrowany nad właściwym punktem; gdy zaś skala zdjęcia jest większą, wystarczy odmierzyć 2 metry od danego punktu w kierunku na inny punkt, nanieść otrzymany punkt na prostą, łączącą na stoliku te dwa punkty, i wówczas stolik ustawiać się będzie nad odsuniętym w ten sposób punktem.

Jeżeli zdejmowany obszar nie zmieści się na jednym arkuszu, to albo sieć geometryczną zbudujemy w dwukrotnie mniejszej skali i przeniesiemy ją na poszczególne sekcje, korzystając z przecięć poszczególnych boków z linjami sekcyjnemi (ramki arkusza, t. j. boki każdego kwadratu sekcyjnego, nanoszą się w tym celu i na sekcję w mniejszej skali, na której przy pomiarze w polu ustalone kierunki wyznaczane są ich przecięciami się ze wszystkiemi bokami sekcyjnych kwadratów), lub też określamy z planu w mniejszej skali graficznie spółrzędne poszczególnych punktów i przenosimy odpowiednio powiększone spółrzędne na poszczególne sekcje. Pierwszy sposób jest dokładniejszy (rysunek 694); łatwo bowiem z planu w zmiejszonej skali przenieść na arkusz II prostą mn, odcinając bh i ci na sekcji II, oraz odmierzając hn na hi. Odnotowane odcinki bh, ci i hn winny być odpowiednio na sekcji II-ej powiększone. Możemy jednak i nie sporządzać planu siatki geometrycznej w zmniejszonej skali; wówczas obierając bazę w środku obszaru, na jednej sekcji, budujemy w jej granicach sieć, układając szereg punktów w pobliżu jej ramek.



Rys. 694.



Rys. 695.

Tak, np., punkty m i n rys. 695 *A* przeniesiemy na sąsiednią wschodnią sekcję II, odcinając odpowiednio spółrzędne bn_1 i bm_1 oraz nn_1, m_1m, przyczem m_1 i n_1 są spodkami prostopadłych, spuszczonych z m i n na bd. Równie dokładnie możemy nanosić kierunki, łączące punkty na dwu

sekcjach; przypuśćmy, że sekcja I scentrowana i zorjentowana była nad punktem A terenu i wykreślono na niej kierunek ah, odpowiadający prostej AB terenu; ponieważ boki kwadratów obydwu sekcyj są równe i odcinek cu na I sekcji, jak również hd, są znane, to przy $cd = df$ winno zachodzić (rys. 695 C).

$$2\,hd = cu + fz$$

skąd obliczymy

$$fz = 2\,hd - cn$$

i naniesiemy na II-gą sekcję odcinek fz.

Sam punkt b na stoliku uzyskamy, ustawiając w B stolik z wykreślonemi m i n oraz hz, orjentując zh według BA i wcinając przez m do M terenu; sprawdzenie da cel do N przez n.

Jeżeli ramki stolików mogą nie odpowiadać kierunkowi południka, to bazę wykreślamy na wspólnym boku dwu sekcyj i sieć geometryczną budujemy oddzielnie na obydwu sekcjach, w miarę potrzeby przenosząc ją na dalsze.

§ 328. Pomiary stolikowe, oparte o sieć poligonów.

Gdy punkty główne zdjęcia stolikowego określone są z pomiaru poligonowego, wówczas te z nich, które leżą na wzniesionych punktach terenu, uwidoczniamy zapomocą ustawienia na nich wysokich żerdzi, dbając o to, ażeby ilość odpowiednio obranych punktów była dostateczna dla wykonania zdjęcia stolikowego. Na sekcje stolikowe nanosimy punkty ze spółrzędnych; naniesienie to poprzedza podział całego obszaru na sekcje. Zgęszczenia sieci dokonamy przy pomocy wcięć.

§ 329. Pomiary warstwicowe na stoliku.

Pomiary wysokościowe na stoliku wykonywają się jednocześnie ze zdjęciem sytuacyjnem.

Pożądane jest, ażeby dla kilku punktów triangulacji stolikowej wysokość określona została zapomocą niwelacji geometrycznej, jednakże w braku niwelatora na małych obszarach możemy na podstawie podanej lub założonej wysokości jednego punktu określić wysokości pozostałych, posługując się kierownicą.

Przy określaniu wysokości punktów zapomocą stolika odróżniać należy wysokość punktu od wysokości sygnału. Wysokość punktu obliczamy dla pala, wbitego w ziemię przy punkcie; wysokość sygnału — dla dolnej krawędzi najniższej poprzeczki, lub górnej najwyższej. Różnica wysokości obydwu punktów (sygnału i punktu) wymierza się ruletką.

Przy określaniu wysokości punktów triangulacyjnych zapomocą kierownicy odległości między punktami określamy ze stolika zapomocą cyrkla i podziałki.

Oznaczmy literami:

St wysokość stanowiska,

O wysokość obserwowanego przedmiotu (punkt pod obserwowanym sygnałem).

D rzut poziomy odległości od *St* do *O*,

α kąt pochylenia celowej do *O*,

i wysokość osi obrotu lunety kierownicy nad punktem,

s wysokość obserwowanego sygnału,

p poprawkę na kulistość ziemi i refrakcję.

Wówczas:

$$O = St \pm D\,tg\,\alpha + i - S + p$$

Gdy zaś określamy wysokość stanowiska, t. j. punktu, nad którym ustawiony jest stolik, to

$$St = O \mp Dtg\alpha - i + S - p$$

przyczem — $Dtg\alpha$ odpowiada kątom wzniesienia α, zaś + $Dtg\alpha$ kątom pochylenia α.

Wielkości $Dtg\alpha$ określamy z tablic, wykresów lub suwakiem.

Jeżeli więc dane są wysokości kilku głównych punktów z niwelacji, określamy z nich wysokości pozostałych punktów triangulacji z tem, ażeby każdy nowy punkt określony został co najmniej z trzech danych, co jest niezbędne tak dla kontroli, jak i podniesienia dokładności wyniku. Różnice pomiędzy poszczególnemi wynikami nie powinny przekraczać 3 — 4 *dcm* Średnia arytmetyczna takich wyników jest ostateczną wysokością punktu.

W wypadku, kiedy niwelacja geometryczna nie była wykonywana, przyjmujemy wysokość jednego z końców bazy, np., za 100 *m.* i na zasadzie obserwacyj wzajemnych z końców bazy określamy wysokość drugiego końca bazy. Z punktu o wysokości H = 100 *m.* drugi koniec bazy określimy ze wzoru dla *O*, poczem po przeniesieniu nań stolika wysokość stanowiska określimy ze wzoru dla *St*. Średnia arytmetyczna da wysokość określanego końca bazy. Z obydwu końców bazy określamy kąty pochylenia α do wszystkich punktów triangulacyjnych i na zasadzie α i odległości *D*, wziętego ze stolika, określimy dwukrotnie wysokość *O* każdego zaobserwowanego punktu. Na określanych punktach z obserwacji α przy wizach do końców bazy ze wzoru dla *St* znów określimy wysokość tego punktu; w ten sposób dla każdego z punktów triangulacji uzyskamy co najmniej 3 wyniki i ostateczną wysokość określimy jako średnią arytmetyczną.

Punkty, niewidoczne z jednego lub dwu końców bazy, określimy z innych punktów, których wysokość została wyznaczona z bazy. Katy α i wielkości *i* możemy określać jednocześnie z triangulacją graficzną.

Na stanowiskach, których położenie na stoliku określamy na zasadzie rozwiązania zagadnienia Pothenota, stosujemy wzór *St* dla kilku celowych do punktów o znanych wysokościach.

Wysokość stanowiska odpowiada średniej arytmetycznej wszystkich wyników.

Punkty szczegółowe, określane na każdem stanowisku odczytem z łaty *l* i kątem pochylenia α, określane są tachymetrycznie ze wzorów

$$D = kl \cos^2 \alpha$$

$$h = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

w których odrzucamy *c* (stałą dalekomierza) ze względu na skalę zdjęć stolikowych.

Instrukcje Wojskowego Instytutu Geograficznego zalecają dla wysokości szczegółowych (obserwowanych ze stanowiska) punktów wzór:

$$O = St \pm (L - p) \, tg \, \alpha$$

gdzie:

O oznacza określoną wysokość szczegółowego punktu,

St „ wysokość stanowiska,

α „ kąt pochylenia,

L „ odczyt z łaty, mnożony przez stałą dalekomierza,

p „ poprawkę poziomą.

Znak + odpowiada wzniesieniu, — spadcm.

Gdy wysokość stanowiska *St* określamy z łaty, ustawionej na punkcie o znanej wysokości *O*,

wówczas:

$$St = O \pm (l - p) \, tg \, \alpha$$

jest wzorem na przerzucenie stanowiska, w którym znak — odpowiada wzniesieniom, + odpowiada pochyleniom.

Poprawka *p* określa się ze wzoru:

$$p = L - D$$

skąd

$$D = L - p.$$

Wielkość *p* dla L podana jest w tablicach dla wzoru:

$$p = L - D = L - L \cos^2 \alpha = L \sin^2 \alpha$$

Poprawkę *p* należy uwzględniać dla kątów, większych od 2^0, przy zwykłych odległościach.

Przebieg pomiaru punktów szczegółowych po ustawieniu i zorjentowaniu stolika jest następujący.

Przykładamy kierownicę do punktu, oznaczającego stanowisko na stoliku, i celujemy na łatę; odczytujemy odległość z łaty; bańkę libeli sprowadzamy do poziomu i kierujemy środkową nić na punkt łaty, odpowiadający wysokości osi obrotu lunety. Odczytaną odległość oznaczamy nakłuciem cyrkla wzdłuż krawędzi kierownicy od stanowiska, nakłucie oznaczamy krążkiem, wykreślonym ołówkiem, oraz numerem bieżącym.

Do książki pomiarów z tym samym numerem wpisujemy odległość i kąt pionowy oraz, po obliczeniu, wysokość.

W toku pomiaru należy oznaczać strzałkami spady, dla trudniejszych zaś terenowych konfiguracyj należy sporządzić oddzielny szkic. Przy pomiarach topograficznych po ukończeniu stanowiska przerysujemy na kalkę wszystkie punkty z ich numerami, obejdziemy mierzony teren i wrysujemy następnie sytuacje. Szkic taki nazywa się *oleatą*.

Książka pomiarów odpowiada książce pomiarów tachymetrycznych, z tą różnicą, że rubryki na kąt poziomy niema.

Wykreślenie warstwic i sytuacji tuszem, opisanie nazw szczegółów wykonywane jest w domu.

ROZDZIAŁ XII.

WYRÓWNANIE SPOSTZEŻEŃ POŚREDNICH METODĄ NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW.

§ 330. Spostrzeżenia pośrednie.

W wielu wypadkach wielkości określane albo wcale nie mogą być otrzymane ze spostrzeżeń bezpośrednich, albo też taka metoda rozwiązania daje zbyt mało dokładne wyniki, względnie połączona jest ze zbyt wielkiemi trudnościami. Możliwe jest natomiast ustalenie związku funkcyjnego między określanemi niewiadomemi a pewnemi znanemi, względnie łatwemi do określenia, wielkościami; korzystając z takiego związku, możemy na podstawie bezpośrednich spostrzeżeń funkcyj niewiadomych ustalić same niewiadome. Rozpatrzmy przykład.

Powierzchnia P figury jest określana planimetrycznie na podstawie wzoru

$$P = np + C$$

przy biegunie wewnątrz figury.

Obliczanie P z tego wzoru wymaga znanego C, p, oraz obwodzenia wodzidłem granicy figury, skąd otrzymamy n, jako wielkość bezpośrednio spostrzeżoną.

O ile n nie jest trudne do uzyskania ze spostrzeżeń, o tyle bezpośrednie określenie C i p jest kłopotliwe i mało dokładne.

Z tego względu uciekamy się do *pośredniego określenia* stałych planimetru, mianowicie obieramy dwie znane powierzchnie P_1 i P_2, obwodzimy każdą z nich przy biegunie wewnątrz, uzyskując dwa wyniki z kółka całkującego n_1 i n_2; wówczas:

$$P_1 = n_1 p + C$$

$$P_2 = n_2 p + C$$

Z tych dwu równań o dwu niewiadomych p i C możemy obydwie niewiadome obliczyć.

Takie rozwiązanie zagadnienia nie jest wystarczające, ponieważ w każdym wypadku, nawet przy grubych błędach, niewiadome dadzą się określić.

Z tego względu dla upewnienia się, czy wyniki postępowania są dostatecznie dokładne, należy powtórzyć to samo z trzecią figurą o znanej powierzchni P_3, t. j. po dokonaniu obwodzenia wodzidłem ustalić n_3, skąd:

$$P_3 = n_3\, p + C$$

Rozwiązując to równanie z jednem z poprzednich, np. z pierwszem, obliczymy znów p i C; zgodność tych wyników z poprzedniemi usunie wątpliwości co do istnienia grubego błędu, powstanie natomiast pytanie, które wyniki należy uważać za ostateczne. Oczywiście — najdokładniejszy będzie wynik, otrzymany ze wszystkich trzech spostrzeżeń, co wymagałoby zestawienia P_3 i P_2, skąd otrzymalibyśmy nowe rozwiązanie.

Zagadnienie sprowadza się więc do określenia *najprawdopodobniejszych* p i C ze wszystkich dokonanych spostrzeżeń, gdyż *prawdziwych* p i C nie możemy określić dzięki nieuniknionym błędom spostrzeżeń.

§ 331. Równania błędów.

Przypuśćmy, że najprawdopodobniejsze (określane z pośrednich spostrzeżeń) wielkości niewiadowych X, Y, Z w liczbie m są związane linjowo z wynikami bezpośrednich spostrzeżeń L_1, L_2, L_3, ... L_n. W ogólnym wypadku ilość spostrzeżeń n jest większa od liczby niewiadomych m. Ponieważ wielkości L_1, L_2.... są obarczone błędami spostrzeżeń, przeto związki linjowe, przy oznaczeniu literami v_1, v_2..... błędów spostrzeżeń, literami a, b, c..... spółczynników przy niewiadomych, przedstawią się w formie, kiedy np. $m = 3$.

$$\begin{aligned}
a_1\, X + b_1\, Y + c_1\, Z &= L_1 + v_1 \\
a_2\, X + b_2\, Y + c_2\, Z &= L_2 + v_2 \\
\text{— — — — — — — —} & \\
a_n\, X + b_n\, Y + c_n\, Z &= L_n + v_n
\end{aligned}$$

W równaniach tych wielkości v_1, v_2..... tylko wtedy byłyby równe zeru, gdyby spostrzeżenia były bezbłędne; wówczas mogłaby być mowa o odnajdywaniu *prawdziwych* wielkości niewiadomych.

Zwykle układ powyższy przedstawiamy w postaci układu równań błędów:

$$\begin{aligned}
v_1 &= a_1\, X + b_1\, Y + c_1\, Z - L_1 \\
v_2 &= a_2\, X + b_2\, Y + c_2\, Z - L_2 \\
\text{— — — — — — — —} & \\
v_n &= a_n\, X + b_n\, X + c_n\, Z - L_n
\end{aligned}$$

Jeżeli wielkości L_1, L_2..... L_n są liczbami wielocyfrowemi, dla uniknięcia rachunku z takiemi liczbami, wprowadzamy t. zw. przybliżone wiel-

kości niewiadomych x_0, y_0, z_0. Takie wielkości zawsze możemy uzyskać, przyrównywając, np. $v_1 = v_2 = v_3 = o$ i rozwiązując pierwsze trzy równania.

Oznaczając przez

$$x = X - x_0$$
$$y = Y - y_0$$
$$z = Z - z_0$$

nieznane narazie najprawdopodobniejsze poprawki przybliżonych niewiadowych, podstawimy do równań błędów

$$X = x_0 + x$$
$$Y = y_0 + y$$
$$Z = z_0 + z$$

i wówczas:

$$v_1 = a_1 (x_0 + x) + b_1 (y_0 + y) + c_1 (z_0 + z) - L_1$$
$$v_2 = a_2 (x_0 + x) + b_2 (y_0 + y) + c_2 (z_0 + z) - L_2$$
$$— — — — — — — — — — — — —$$

a stąd:

$$v_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + (a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0 - L_1)$$
$$v_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + (a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0 - L_2)$$
$$— — — — — — — — — — — — —$$
$$— — — — — — — — — — — — —$$

Oznaczając:

$$L_1 - (a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0) = l_1$$
$$L_2 - (a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0) = l_2$$
$$— — — — — — — — —$$
$$— — — — — — — — —$$

Otrzymujemy *równania błędó v*, wyrażone poprawkami x, y, z niewiadomych, mianowicie:

$$v_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z - l_1$$
$$v_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z - l_2$$
$$— — — — — — — —$$
$$— — — — — — — —$$
$$v_n = a_n x + b_n y + c_n z - l_n$$

Nie zawsze jednak związek pomiędzy niewiadomemi a ich funkcją, określaną ze spostrzeżeń, jest tak prosty, jak w rozpatrzonym wypadku. Z tego względu rozpatrzmy zagadnienie w najogólniejszej formie, mianowicie,

założymy, że pewne niewiadome, których *najprawdopodobniejsze* wartości X i Y mamy określić, są związane z wielkościami L_1, L_2..... L_n, uzyskanemi ze spostrzeżeń, zależnościami

$$\begin{aligned} f_1\,(X,\ Y) &= \mathrm{L}_1 \\ f_2\,(X,\ Y) &= \mathrm{L}_2 \\ f_n\,(X,\ Y) &= \mathrm{L}_n \end{aligned} \qquad (1)$$

które wówczas tylko byłyby zachowane, gdyby nie było błędów pomiaru. Oznaczamy

$$\begin{aligned} &L_1 + v_1 \\ &L_2 + v_2 \\ &- - - \\ &- - - \end{aligned}$$

najprawdopodobniejsze wielkości spostrzeżonych L_1, L_2....., a więc przez v_1, v_2 ..... nazwiemy najprawdopodobniejsze poprawki wielkości L_1, L_2.....

Stąd:

$$\begin{aligned} f_1\,(X,\ Y) &= L_1 + v_1 \\ f_2\,(X,\ Y) &= L_2 + v_2 \\ &- - - - - \\ f_n\,(X,\ Y) &= L_n + v_n \end{aligned}$$

i równaniami błędów będą

$$\begin{aligned} v_1 &= -\ L_1 + f_1\,(X,\ Y) \\ v_2 &= -\ L_2 + f_2\,(X,\ Y) \\ &- - - - - - \\ v_n &= -\ L_n + f_n\,(X,\ Y) \end{aligned}$$

Przypuśćmy, że w jakikolwiek sposób określiliśmy przybliżone wielkości X_0, Y_0 niewiadomych, takie jednak, iż ich poprawki x, y, t. j. różnice

$$\begin{aligned} x &= X - X_0 \\ y &= Y - Y_0 \end{aligned}$$

są wielkościami o tyle niewielkiemi, że ich drugie potęgi, mnożone przez drugie pochodne, mogą nie być brane pod uwagę.

A wówczas

$$\begin{aligned} f_1\,(X,\ Y) &= f_1\,(X_0 + x,\ Y_0 + y) = \\ &= f_1\,(X_0,\ Y_0) + \frac{\partial f_1}{\partial x}\,x + \frac{\partial f_1}{\partial y}\,y \\ &= f_1\,(X_0,\ Y_0) + a_1\,x + b_1\,y \end{aligned} \qquad (2)$$

gdzie oznaczyliśmy

$$a_1 = \frac{\partial f_1}{\partial X}$$

$$b_1 = \frac{\partial f_1}{\partial Y}$$

i analogicznie

$$a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial X}$$

$$b_2 = \frac{\partial f_2}{\partial Y} \quad \text{i t. d.}$$

A stąd otrzymamy linjowe równania błędów:

$$v_1 = -L_1 + f_1(X_0, Y_0) + a_1 x + b_1 y$$

$$v_2 = -L_2 + f_2(X_0, Y_0) + a_2 x + b_2 y$$

$$- - - - - - - - - -$$

$$v_n = -L_n + f_n(X_0, Y_0) + a_n x + b_n y$$

Ponieważ funkcje $f_1\ f_2 \ldots f_n$ oraz wielkości $X_0\ Y_0$ są również znane, przeto możemy pierwsze dwa wyrazy w prawej części każdego równania błędu zamienić na:

$$\begin{aligned} -l_1 &= -L_1 + f_1(X_0, Y_0) \\ -l_2 &= -L_2 + f_2(X_0, Y_0) \\ &- - - - - - - \\ -l_n &= -L_n + f_n(X_0, Y_0) \end{aligned} \qquad (3)$$

Skąd napiszemy równania błędów w ich ostatecznej postaci:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y - l_1 \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y - l_2 \\ &- - - - - - \\ v_n &= \underbrace{a_n x + b_n y}_{m} - l_n \end{aligned}\right\} n \qquad (4)$$

Gdy literą m oznaczymy liczbę niewiadomych $x, y \ldots$, literą n — liczbę równań w układzie (1) równań, wówczas przy:

1) $m = n$ rozwiązanie może być tylko jedno,

2) $m > n$ rozwiązanie będzie nieokreślone i tylko przy

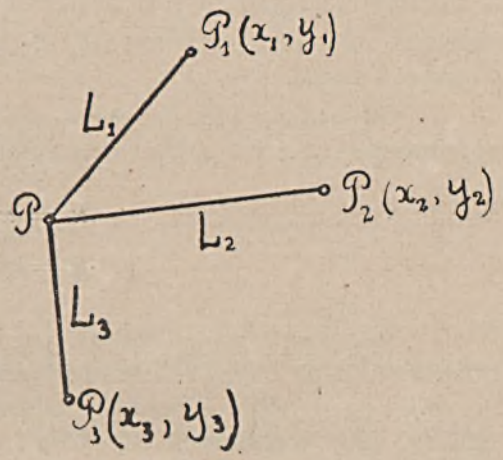
3) $n > m$ powstaje zagadnienie o wyrównaniu, gdyż inaczej możemy otrzymać cały szereg różnych, jakkolwiek bliskich co do wielkości, rozwiązań.

§ 332. Przykład.

Przypuśćmy że pomierzono odległości L_1, L_2, L_3 od pewnego punktu P_3 do punktów o danych spółrzędnych (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Należy na podstawie tych danych określić spółrzędne punktu P.

Ponieważ dwie proste L_1 i L_2 wystarczają dla określenia punktu P, przeto trzecie spostrzenie L_3 wysuwa sprawę wyrównania spostrzeżeń pośrednich spółrzędnych x, y punktu P.

Pomierzone długości L różnić się będą od długości prostych, obliczonych na podstawie spółrzędnych wyrównywanych punktu P i spółrzędnych punktów P_1, P_2 i P_3.



Rys. 696.

Równaniami błędów będą równania:

$$v_1 = -L_1 + \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$$

$$v_2 = -L_2 + \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2}$$

$$v_3 = -L_3 + \sqrt{(x_3 - x)^2 + (y_3 - y)^2}$$

Ponieważ

$$f(x, y) = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) = f(x_0, y_0) + \frac{df}{dx}\triangle x + \frac{df}{dy}\triangle y + \ldots\ldots,$$

gdzie $\triangle x$ i $\triangle y$ są nieznacznemi poprawkami przybliżonych wielkości x_0, y_0, przeto, oznaczając literą D_1 odległość od punktu (x_0, y_0) do (x_1, y_1) otrzymamy:

$$f(x, y) = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} + \frac{df}{dx}\triangle x + \frac{df}{dy}\triangle y$$

lecz

$$\frac{df}{dx} = \frac{-2(x_1 - x_0)}{2\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}} = -\frac{x_1 - x_0}{D_1} = a_1$$

$$\frac{df}{dy} = \frac{-2(y_1 - y_0)}{2\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}} = -\frac{y_1 - y_0}{D_1} = b_1$$

Stąd przez analogję:

$$v_1 = -L_1 + \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} + a_1 \triangle x + b_1 \triangle y$$

$$v_2 = -L_2 + \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2} + a_2 \triangle x + b_2 \triangle y$$

$$v_3 = -L_3 + \sqrt{(x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2} + a_3 \Delta x + b_3 \Delta y$$

lub, łącząc pierwsze dwa wyrazy prawych części równań błędów w jeden : l_1, l_2, l_3,

otrzymamy linjowe równania błędów:

$$v_1 = -l_1 + a_1 \Delta x + b_1 \Delta y$$
$$v_2 = -l_2 + a_2 \Delta x + b_2 \Delta y$$
$$v_3 = -l_3 + a_3 \Delta x + b_3 \Delta y$$

w których wielkości l, a, b mogą być obliczone na podstawie powyżej wypisanych dla nich wzorów (1), (2) i (3), a więc mogą już być uważane za wielkości znane.

Gdybyśmy więc na podstawie ostatniego układu obliczyli najprawdopodobniejsze Δx i Δy, wówczas spółrzędne punktu P byłyby równe

$$x = x_0 + \Delta x$$
$$y = y_0 + \Delta y$$

Jak stąd wynika, ciężar zagadnienia polega na rozwiązaniu równań błędów, t. j. na określeniu zawartych w nich niewiadomych. Wielkości zaś v_1, v_2,... v_n, również nieznane, można będzie (np. dla sprawdzenia rachunku) obliczyć po określeniu Δx i Δy 1) z każdego równania błędów i 2) jako różnice pomiędzy spostrzeżonemi L_1, L_2.... a obliczonemi z wyrównanych spółrzędnych punktu P.

§ 333. Wyrównanie spostrzeżeń pośrednich.

Przypuśćmy, że mamy układ n równań błędów o m niewiadomych x, y..... :

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots\ldots - l_1 \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots\ldots - l_2 \\ &- - - - - - - - - - \\ &- - - - - - - - - - \\ v_n &= a_n x + b_n y + c_n z + \ldots\ldots - l_n \end{aligned} \qquad \text{I}$$

przytem $$n > m$$

Wyrównanie pośrednich spostrzeżeń ma na celu odnalezienie takich najprawdopodobniejszych x, y, z..... , aby $[v\,v]$ w wypadku jednakowo dokładnych spostrzeżeń była równa *minimum*.

Taką metodę wyrównania nazwał Legendre „metodą najmniejszych kwadratów“ ściślej „metodą sum najmniejszych kwadratów“.

W wypadku niejednakowo dokładnych spostrzeżeń o wagach p_1, p_2... przyrównywamy do minimum sumę kwadratów, zredukowanych do jednostki wagi błędów, t. j. sumę kwadratów błędów

$$v_1\sqrt{p_1}\,,\ v_2\sqrt{p_2}\ldots..$$

Warunek powyższy przedstawimy w postaci równań

$$[v\,v] = Min \qquad \text{dla jednakowo dokładnych spostrzeżeń}$$

i

$$[pvv] = Min \qquad \text{dla niejednakowo dokładnych spostrzeżeń.}$$

Ostatnie równanie jest bardziej ogólne, to też oprzemy się na niem. Warunek minimum zachodzi ze względu na najprawdopodoniejsze $x, y, z \ldots$, skąd:

$$\frac{\partial\,[pvv]}{\partial\,x} = o \qquad \text{II}$$

$$\frac{\partial\,[pvv]}{\partial\,x} = o$$

$$— \quad — \quad — \quad —$$

$$— \quad — \quad — \quad —$$

t. j. otrzymujemy tyle równań, które już nie będą zawierać błędów v, ile jest niewiadomych. Stąd powstaje możność jednoznacznego określenia niewiadomych.

Określmy $[p\,v\,v]$ z I-ego układu i przejdźmy do II-ego układu równań.

§ 334. Równania normalne.

Zakładając dla spostrzeżeń nad wielkościami $L_1\ L_2 \ldots\ldots L_n$ wagi $p_1\ p_2 \ldots\ldots p_n$, określimy sumę $[pvv]$ i znajdziemy jej minimum z warunku

$$\left.\begin{aligned}
&[p\,v\,v] = p_1\,v_1^2 + p_2\,v_2^2 + \ldots\ldots p_n\,v_n^2 = \\
&= p_1\,(a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + \ldots\ldots - l_1)^2 + \\
&+ p_2\,(a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + \ldots\ldots - l_2)^2 + \\
&+ — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \\
&+ p_n\,(a_n\,z + b_n\,y + c_n\,z + \ldots\ldots - l_n)^2 =
\end{aligned}\right\} \qquad \begin{matrix}(99)\\ \\ \\ \\ \text{minimum}\end{matrix}$$

Stąd:

$$\frac{\partial\,[p\,v\,v]}{\partial\,x} =$$

$$= 2\,p_1\,(a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + \ldots\ldots - l_1)\,a_1 +$$

$$+ 2\,p_2\,(a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + \ldots\ldots - l_2)\,a_2 +$$

$$— \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad —$$

$$+ 2\,p_n\,(a_n\,x + b_n\,y + c_n\,z + \ldots\ldots - l_n)\,a_n = 0$$

Po skróceniu przez 2 i rozwinięciu nawiasów,

otrzymamy

$$p_1\,a_1^2\,x + p_1\,a_1\,b_1\,y + p_1\,a_1\,c_1\,z + \ldots. - p_1\,a_1\,l_1 +$$

$$+ p_2\,a_2^2\,x + p_2\,a_2\,b_2\,y + p_2\,a_2\,c_2\,z + \ldots. - p_2\,a_2\,l_2 +$$

$$- - - - - - - - - - - - - - -$$

$$+ p_n a^2_n x + p_n a_n b_n y + p_n a_n c_n z + \ldots . - p_n a_n l_n = 0$$

lub, usuwając niewiadome za nawias i oznaczając symbolem sumy [ ] sumę wyrazów jednego typu,

otrzymamy:

$$[p\,a\,a]\,x + [p\,a\,b]\,y + [p\,a\,c]\,z + \ldots\ldots - [p\,a\,l] = 0 \qquad (5)$$

Podobnie znajdziemy

$$\frac{\partial\,[p\,v\,v]}{\partial\,y} =$$

$$= 2\,p_1\,(a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + \ldots\ldots - l_1)\,b_1 +$$
$$+ 2\,p_2\,(a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + \ldots\ldots - l_2)\,b_2 +$$
$$- - - - - - - - - - - - - -$$
$$+ 2\,p_n\,(a_n\,x + b_n\,y + c_n\,z + \ldots\ldots - l_n)\,b_n = 0$$

a stąd

$$p_1\,a_1\,b_1\,x + p_1\,b_1\,b_1\,y + p_1\,b_1\,c_1\,z + \ldots . - p_1\,b_1\,l_1 +$$
$$+ p_2\,a_2\,b_2\,x + p_2\,b_2\,b_2\,y + p_2\,b_2\,c_2\,z + \ldots . - p_2\,b_2\,l_2 +$$
$$- - - - - - - - - - - - - - -$$
$$+ p_n\,a_n\,b_n\,x + p_n\,b_n\,b_n\,y + p_n\,b_n\,c_n\,z + \ldots . - p_n\,b_n\,l_n = 0$$

lub

$$[p\,a\,b]\,x + [p\,b\,b]\,y + [p\,b\,c]\,z + \ldots . - [p\,b\,l] = 0 \qquad (6)$$

Z warunku

$$\frac{\partial\,[p\,v\,v]}{\partial\,z} = 0$$

znajdziemy:

$$[p\,a\,c]\,x + [p\,b\,c]\,y + [p\,c\,c]\,z + \ldots . - [p\,c\,l] = 0 \qquad (7)$$

Równania (5), (6) i (7) noszą nazwę *normalnyah.*

Gdyby spostrzeżenia nad wielkościami $L_1\ L_2 \ldots . L_n$ były jednakowo dokładne, t. j. $p_1 = p_2 = \ldots . p_n = 1$, równania te przybrałyby kształt:

$$\left\{\begin{array}{l} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + \ldots . - [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + \ldots . - [b\,l] = 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + \ldots . - [c\,l] = 0 \\ - - - - - - - - - - - - - \end{array}\right.$$

Ilość równań normalnych jest już równa ilości niewiadomych. Rozwiązać je można którymkolwiek ze sposobów, podanych przez algebrę.

Przeważnie jednak rozwiązuje się równania normalne zapomocą t. zw. algorytmu Gaussa, t. j. metody, która polega na stopniowem rugowaniu niewiadomych. Metoda Gaussa ma tę zaletę, że jako wyniki uboczne przy rozwiązaniu otrzymujemy wielkości, potrzebne do scharakteryzowania dokładności otrzymanych rezultatów.

§ 335. Obliczanie spółczynników równań normalnych.

Rozpatrując układ równań normalnych, łatwo zauważyć pewną symetrję w ich budowie:

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{[paa]}\,x + [pab]\,y + [pac]\,z + [pad]\,u + \ldots - [pal] = 0 \\ [pab]\,x + \underline{[pbb]}\,y + [pbc]\,z + [pbd]\,u + \ldots - [pbl] = 0 \\ [pac]\,x + [pbc]\,y + \underline{[pcc]}\,z + [pcd]\,u + \ldots - [pcl] = 0 \\ [pad]\,x + [pbd]\,y + [pcd]\,z + \underline{[pdd]}\,u + \ldots - [pdl] = 0 \\ - - - - - - - - - - - - - - - - \end{array}\right. \qquad (9)$$

Spółczynniki przy niewiadomych są symetryczne względem przekątnej układu, oznaczonej podkreśleniem: obierając dowolny wyraz, położony na przekątnej, i posuwając się w kierunkach wzajemnie prostopadłych, np. $__\rfloor$, względnie $\lceil\overline{}$, spotykamy te same spółczynniki. Obliczanie spółczynników równań normalnych zredukować przeto można do połowy.

Zasada tworzenia równań normalnych z linjowych równań błędów jest następująca dla wypadku spostrzeżeń o jednakowej wadze:

1) Dla otrzymania I-ego równania normalnego należy każde równanie linjowe pomnożyć przez spółczynnik przy I-ej niewiadomej, wszystkie otrzymane z mnożenia równania dodać i otrzymaną sumę przyrównać do zera.

2) Dla otrzymania II-go równania normalnego należy każde równanie linjowe pomnożyć przez spółczynnik przy II-ej niewiadomej, wszystkie otrzymane równania dodać i wynik przyrównać do zera i tak dalej.

W wypadku równań linjowych o różnej wadze:

1) Dla otrzymania I-go równania normalnego należy każde równanie błędów pomnożyć przez iloczyn wagi równania i spółczynnika przy I-ej niewiadomej; otrzymane z mnożenia równania wszystkie należy dodać i sumę przyrównać do zera.

2) By otrzymać II-gie równanie normalne należy każde równanie linjowe pomnożyć przez iloczyn wagi równania i współczynnika przy II-ej niewiadomej; otrzymane tym sposobem równania trzeba dodać i sumę przyrównać do zera i tak dalej.

§ 336. Kontrola sumowa.

Przejście od równań błędów do równań normalnych, a więc obliczenie ich spółczynników, jest czynnością, wymagającą dużej wprawy rachunkowej.

Dla wykrycia błędów rachunku stosujemy t. zw. kontrolę sumową. Kontrolę sumową prowadzi się równocześnie z obliczaniem spółczynników równań normalnych.

Jeżeli z równań błędów:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z - l_1 = v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z - l_2 = v_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_n x + b_n y + c_n z - l_n = v_n \end{cases}$$

obliczymy sumy spółczynników przy niewiadomych łącznie z wyrazami wolnemi każdego równania:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 - l_1 = s_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 - l_2 = s_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_n + b_n + c_n - l_n = s_n \end{cases} \qquad (10)$$

pomnożymy każde równanie otrzymanego układu przez spółczynnik przy jego pierwszej niewiadomej, to otrzymamy:

$$\begin{aligned} a_1 a_1 + a_1 b_1 + a_1 c_1 - a_1 l_1 &= a_1 s_1 \\ a_2 a_2 + a_2 b_2 + a_2 c_2 - a_2 l_2 &= a_2 s_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_n a_n + a_n b_n + a_n c_n - a_n l_n &= a_n s_n \end{aligned}$$

Dodając te równania, otrzymamy z lewej strony spółczynniki I-ego równania normalnego, z prawej zaś wyraz $[as]$, służący dla kontroli

$$[aa] + [ab] + [ac] - [al] = [as]$$

Mnożąc każde równanie układu (10) przez jego spółczynnik przy drugiej niewiadomej, po dodaniu iloczynów otrzymamy:

$$[ab] + [bb] + [bc] - [bl] = [bs]$$

Analogicznie postępując, tworzymy cały układ równań, kontrolujących rachunek zapomocą sumy spółczynników każdego równania; w wypadku np. 3-ch równań:

$$\begin{cases} [aa] + [ab] + [ac] - [al] = [as] \\ [ab] + [bb] + [bc] - [bl] = [bs] \\ [ac] + [bc] + [cc] - [cl] = [cs] \end{cases} \qquad (11)$$

Gdy mamy do czynienia ze spostrzeżeniami niejednakowej dokładności, wówczas równania układu (10)-ego mnożymy kolejno przez $a_1 p_1$, $a_2 p_2$, ... $a_n p_n$ i dodajemy, otrzymując:

$$[p\,a\,a] + [p\,a\,b] + [p\,a\,c] + \ldots - [p\,a\,l] = [p\,a\,s] \qquad (12)$$

mnożąc zaś równania (10) 1) przez $b_1 p_1$, $b_2 p_2 \ldots$, $b_n p_n$ i dodając, 2) przez $c_1 p_1$, $c_2 p_2 \ldots c_n p_n$ i dodając i t. d., otrzymujemy dalsze równania sumowe:

$$[p\,a\,b] + [p\,b\,b] + [p\,b\,c] + \ldots - [p\,b\,l] = [p\,b\,s]$$

$$[p\,a\,c] + [p\,b\,c] + [p\,c\,c] + \ldots - [p\,c\,l] = [p\,c\,s] \qquad (12)$$

— — — — — — — — — — — —

które dają sprawdzian prawidłowości rachunku spółczynników równań normalnych w wypadku niejednakowo dokładnych spostrzeżeń.

U w a g a I. Przy obliczaniu wyrazów $[aa]$ $[bb]$ i t. d. dogodne jest stosowanie tablicy kwadratów, która może być wykorzystana również i przy tworzeniu iloczynów na zasadzie relacji:

$$ab = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} \qquad (108)$$

U w a g a II. W wypadku gdy wagi równań błędów są kwadratami liczb całkowitych, lub dogodnych do obliczeń ułamków, opłaca się redukować równania błędów do jednostki wagi, mnożąc każde równanie błędu przez pierwiastek kwadratowy z jego wagi. Przejście do równań normalnych wymaga wówczas tworzenia współczynników typu $[aa]$ $[ab]$ ..., podobnie jak w wypadku jednakowo dokładnych spostrzeżeń.

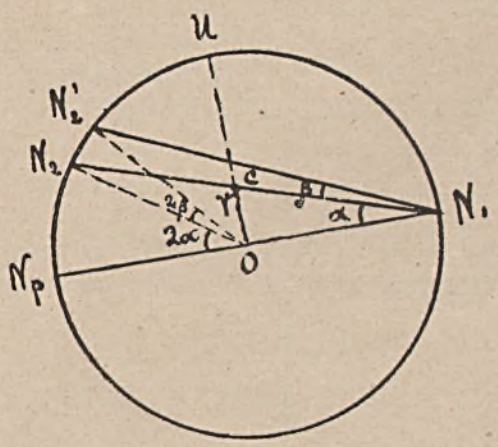
§ 337. Przykład.

Określenie elementów ekscentryczności teodolitu drogą pośrednich obserwacyj nad kilku niewiadomemi. Wykreślone koło przedstawia limbus teodolitu (rys. 697).

A. Oś obrotu alhidady winna przechodzić przez środek limbusu. Jednak wskutek wad konstrukcji warunek powyższy nie jest nigdy spełniony i oś obrotu alhidady osadzona jest ekscentrycznie, np. w punkcie c, odległym od środka O limbusu o wielkość r, zwaną mimośrodem.

B. Gdyby linja, łącząca zera nonjuszów przechodziła przez oś obrotu alhidady, wada ekcentryczności sprowadziłaby się do tego, że zamiast odczytów na nonjuszach N_1, N_p mielibyśmy odczyty N_1, N_2. Jednak oprócz

ekscentrycznego osadzenia alidady, mamy do czynienia z ekscentrycznem osadzeniem nonjuszów, wynikającem z niezachowania warunku (*B*), wskutek tego na nonjuszach odczytujemy faktycznie N_1 N_2'.



Rys. 697.

Różnica pomiędzy odczytami na nonjuszach

$$N_2' - N_1$$

powinna być zawsze $= 180^0$ (w założeniu, że podział na limbusie jest też dokładny).

O ile przeto, odczytując na danym instrumencie szeregi odczytów N_1 N_2', otrzymywać będziemy z różnic odczytów wielkości odmienne od 180^0, będzie to dowodem ekscentryczności.

Wadę ekscentryczności, wynikającą z niezachowania warunków (*A*) i (*B*), stwierdzimy dla danego instrumentu, jeżeli określimy t. zw. elementy ekscentryczności

1) mimośród ... *r*,

2) odczyt *U*, leżący na przedłużeniu mimośrodu,

3) kąt β pomiędzy prostą, łączącą nonjusze, a prostą, przechodzącą przez środek alidady i pierwszy nonjusz.

Bezpośredni pomiar elementów ekscentryczności jest rzeczą niewykonalną. Możemy jednak skorzystać z tego, że różnice $N_2' - N_1 = 180^0$ są, jako wynikłe z ekscentryczności, funkcją jej elementów.

Mając wyniki spostrzeżeń, t. j. wielkości odczytów N_2', N_1, możemy określić pośrednio elementy ekscentryczności. W tym celu określmy przedewszystkiem zależność funkcyjną między elementami ekscentryczności a wielkością odczytów. Oznaczając kąt N_p N_1 $N_2 = \alpha$ (kąt ekscentrycznego osadzenia alhidady), kąt N_2 N_1 $N_2' = \beta$ (kąt ekscentrycznego osadzenia nonjuszów), oraz promień limbusu $= R$, otrzymamy następujący szereg zależności:

$$N_2' - N_1 = \sphericalangle\ N_1 ON_2' = 180^0 + N_p ON_2 + N_2 ON_2'$$

Ponieważ jednak

$$\sphericalangle\ N_p ON_2 = 2\alpha$$

$$\sphericalangle\ N_2 ON_2' = 2\beta$$

otrzymamy

$$N_2' - N_1 = 180^0 + 2\alpha + 2\beta$$

$$N_2' - N_1 - 180^0 = 2\alpha + 2\beta.$$

Pozostaje wyrazić α w zależności od elementów ekscentryczności z Δ-ta OCN_1,

$$\frac{\sin \alpha}{r} = \frac{\sin (180^0 - \sphericalangle UCN_1)}{R} = \frac{\sin \sphericalangle UCN_1}{R},$$

lub, ponieważ $\sphericalangle UCN_1$, mierzy się w przybliżeniu różnicą łuków $N_1 - U$ (z powodu nieznacznej wielkości mimośrodu),

więc

$$\frac{\sin \alpha}{r} = \frac{\sin (N_1 - U)}{R}$$

Zważywszy zaś, że kąt α jest b. mały,

znajdziemy

$$\alpha = \rho \frac{r}{R} \sin (N_1 - U)$$

$$= \rho \frac{r}{R} (\sin N_1 \cos U - \cos N_1 \sin U)$$

Skąd

$$2\alpha = 2\rho \frac{r}{R} \sin N_1 \cos U - 2\rho \frac{r}{R} \cos N_1 \sin U$$

I ostatecznie

$$N'_2 - N_1 - 180^0 = 2\rho \frac{r}{R} \sin N_1 \cos U - 2\rho \frac{r}{R} \cos N_1 \sin U + 2\beta$$

lub oznaczając

$$2\rho \frac{r}{R} \cos U = x$$

$$-2\rho \frac{r}{R} \sin U = y$$

$$2\beta = z$$

$$N_2 - N_1 - 180^0 = l$$

Znajdziemy

$$l = x \sin N_1 + y \cos N_1 + z$$

W powyższem równaniu mamy trzy niewiadome x, y, z. Określenie tych niewiadomych pozwoli nam wyznaczyć elementy ekscentryczności U, r i β, na zasadzie związków (II). Dokonywając 12 spostrzeżeń nad wielkościami

$$l = N_2 - N_1 - 180^0,$$

ułożymy następującą tabelę:

№ № obserw.	N_1	$N'_2 - 180^0$	$l = N'_2 - N_1 - 180^0$	sin N_1	cos N_1
1	0° 0′ 20″	0 0′ 10″	— 10″	0	1
2	30° 0′ 0″	29° 59′ 50″	— 10″	0,5	0,87
3	60° 0′ 0″	60° 0′ 10″	+ 10″	0,87	0,5
4	90° 0′ 0″	90° 0′ 0″	0″	1	0
5	120° 0′ 10″	120° 0′ 20″	+ 10″	0,87	— 0,5
6	150° 1′ 10″	150° 1′ 0″	— 10″	0,5	— 0,87
7	180° 0′ 20″	180° 0′ 10″	— 10″	0	— 1
8	210° 0′ 10″	210° 0′ 10″	0	— 0,87	— 0,5
9	240° 0′ 20″	240° 0′ 40″	+ 20	— 0,87	— 0,5
10	270° 0′ 30″	270° 0′ 20″	— 10″	— 1	0
11	300° 0′ 30″	300° 0′ 30″	0″	— 0,87	0,5
12	330° 0′ 40″	330° 1′ 0″	+ 20″	— 0,5	0,87

która doprowadzi do równań błędów:

$$x \sin N_1 + y \cos N_1 + z - l = v$$

$$\begin{aligned}
0\,x + 1\,y + z + 10'' &= v_1 \quad (1)\\
0{,}5\,x + 0{,}87\,y + z + 10'' &= v_2 \quad (2)\\
0{,}87\,x + 0{,}5\,y + z - 10'' &= v_3 \quad (3)\\
1\,x + 0\,y + z + 0'' &= v_4 \quad (4)\\
0{,}87\,x - 0{,}5\,y + z - 10'' &= v_5 \quad (5)\\
0{,}5\,x - 0{,}87\,y + z + 10'' &= v_6 \quad (6)\\
0\,x - 1\,y + z + 10'' &= v_7 \quad (7)\\
-0{,}5\,x - 0{,}87\,y + z + 0'' &= v_8 \quad (8)\\
-0{,}87\,x - 0{,}5\,y - z - 20'' &= v_9 \quad (9)\\
-1\,x + 0\,y + z + 10'' &= v_{10} \quad (10)\\
-0{,}87\,x + 0{,}5\,y + z + 0 &= v_{11} \quad (11)\\
-0{,}5\,x + 0{,}87\,y + z - 20'' &= v_{12} \quad (12)
\end{aligned}$$

Z powyższych równań błędów ułożymy 3 równania normalne

$$[a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z - [a\,l] = 0$$

$$[a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z - [b\,l] = 0$$

$$[a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z - [c\,l] = 0.$$

Obliczenia spółczynników równań normalnych łącznie z kontrolą sumową dokonamy w następujących tabelach:

1. Obliczenie sum spółczynników.

Nr. równ. błędów	SPÓŁCZYNNIKI				Sumy S
	$a = \sin N_1$	$b = \cos N_1$	c	$-l$	
1	0	1	1	+ 10	+ 12
2	0,50	0,87	1	+ 10	+ 12,37
3	0,87	0,50	1	— 10	— 7,63
4	1	0	1	0	+ 2
5	0,87	— 0,50	1	— 10	— 8,63
6	0,50	— 0,87	1	+ 10	+ 10,63
7	0	— 1	1	+ 10	+ 10
8	— 0,5	— 0,87	1	0	— 0,37
9	— 0,87	— 0,50	1	— 20	— 20,37
10	— 1	0	1	+ 10	+ 10
11	0,87	0,50	1	0	+ 0,63
12	— 0,5	0,87	1	— 20	— 18,63
	0	0	+ 12	— 10	+ 2,00

Kontrola + 12 — 10 = + 2

2. Obliczenie spółczynników I równania normalnego.

Nr. równ. bł.	$a\,a$	$a\,b$	$a\,c$	$-a\,l$	$a\,s$
1	0	0	0	0	0
2	0,25	0,43	0,50	5	6,18
3	0,76	— 0,43	0,87	— 8,7	— 6,64
4	1	0	1	0	2
5	0,76	— 0,43	0,87	— 8,7	— 7,51
6	0,25	— 0,43	0,50	5	5,32
7	0	0	0	0	0
8	0,25	0,43	— 0,50	0	0,18
9	0,76	0,43	— 0,87	17,4	17,72
10	1	0	— 1	— 10	— 10
11	0,76	— 0,43	— 0,87	0	— 0,55
12	0,25	— 0,43	— 0,50	10	+ 9,32
	6,04	0,0	0,0	+ 10	16,02

Kontrola 6,04 + 10 (=) 16,02. Różnica wynikła wskutek zaokrągleń przy mnożeniach.

3. Obliczenie spółczynników II równania normalnego.

№ № równ. bł.	$a\,b$	$b\,b$	$b\,c$	$b\,l$	$b\,s$
1		1	1	10	12
2		0,76	0,87	8,7	+ 10,76
3		0,25	0,50	— 5	— 3,81
4		0	0	0	0
5		0,25	— 0,50	5	+ 4,32
6		0,76	— 0,87	— 8,7	— 9,25
7		1	— 1	— 10	— 10
8		0,76	— 0,87	0	+ 0,32
9		0,25	— 0,50	+ 10	— 10,18
10		0	0	0	0
11		0,25	0,50	0	+ 0,32
12		0,76	0,87	— 17,40	— 16,21
	0	6,04	0	— 7,40	— 1,37

Kontrola 6,04 — 7,40 (=) — 1,37.

4. Obliczenie spółczynników III równania normalnego.

№ № równ. bł.	$a\,c$	$b\,c$	$c\,c$	$c\,l$	$c\,s$
1			1	+ 10	+ 12
2			1	+ 10	+ 12,37
3			1	— 10	— 7,63
4			1	0	+ 2
5			1	— 10	— 8,63
6			1	+ 10	+ 10,63
7			1	+ 10	+ 10
8			1	0	— 0,37
9			1	— 20	— 20,37
10			1	+ 10	+ 10
11			1	0	+ 0,63
12			1	— 20	— 18,63
			12	— 10	+ 2

Kontrola 12 — 10 = + 2.

Równania normalne będą:

$$\begin{aligned} 6.04\ x \quad\quad + 10 &= 0 \\ 6.04\ y \quad - 7.4 &= 0 \\ 12\ z - 10 &= 0 \end{aligned}$$

Skąd

$$\begin{cases} x = -\ 1'',66 \\ y = \quad 1'',23 \\ z = \quad 0'',83 \end{cases}$$

Obecnie możemy już obliczyć najprawdopodobniejsze wartości elementów ekscentryczności; korzystając ze wzorów (II), otrzymamy przy promieniu limbusa $R = 87{,}5\ mm$:

$$\beta = \frac{z}{2} = \frac{0'',82}{2} = 0''.41$$

$$u = -\ arc.\ tg.\frac{y}{x} = arc.\ tg.\frac{-1{,}23}{1{,}66} = 36^0\ 32' \pm k\ 180^0$$

$$r = \frac{R\ x}{2\rho \cos u} = \frac{87.5\ mm \cdot 1'',66}{2\ .\ 206265''\ \cos\ 36^0\ 32'} = 0.0004\ mm.$$

Ponieważ cos u posiada ten sam znak, co i x, samo zaś u otrzymaliśmy ze znakiem +, więc w danym wypadku $u = 216^0\ 32'$.

§ 338. Rozwiązanie układu równań normalnych.

Mamy układ n równań normalnych. W celu sprowadzenia tego układu do $(n - 1)$ równań, zrównamy spółczynniki przy I niewiadomej w I i II, następnie I i III..... I — N równaniu, mnożąc I równanie przez odpowiednie czynniki. Przy odjęciu tak przekształconego równania I od $(n—1)$ pozostałych, otrzymamy t. zw. zredukowany układ równań normalnych, niezawierający już I-ej niewiadomej. Postępując analogicznie z otrzymanym układem, przejdziemy do układu $(n - 2)$ równań o $(n - 2)$ niewiadomych i t. d., aż do jednego równania z jedną niewiadomą.

Przerobimy przykład dla 3-ch równań:

$$\begin{cases} \text{(I)}\ [p\ a\ a]\ x + [p\ a\ b]\ y + [p\ a\ c]\ z - [p\ a\ l] = 0 \\ \text{(II)}\ [p\ a\ b]\ x + [p\ b\ b]\ y + [p\ b\ c]\ z - [p\ b\ l] = 0 \\ \text{(III)}\ [p\ a\ c]\ x + [p\ b\ c]\ y + [p\ c\ c]\ z - [p\ c\ l] = 0 \end{cases} \qquad (13)$$

Mnożymy pierwsze równanie I) przez $\frac{[p\ a\ b]}{[p\ a\ a]}$ i odejmujemy od II-ego, II) przez $\frac{[p\ a\ c]}{[p\ a\ a]}$ i odejmujemy od III-ego; otrzymamy:

$$\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{II}) - \dfrac{(\mathrm{I})\ [p\ a\ b]}{[p\ a\ a]} = \left\{[p\ a\ b] - \dfrac{[p\ a\ a]\ [p\ a\ b]}{[p\ a\ a]}\right\} x + \\ + \left\{[p\ b\ b] - \dfrac{|p\ a\ b|\ |p\ a\ b|}{[p\ a\ a]}\right\} y + \left\{[p\ c\ c] - \dfrac{[p\ a\ c]\ [p\ a\ c]}{[p\ a\ a]}\right\} z - \\ - \left\{[p\ b\ l] - \dfrac{[p\ a\ l]\ [p\ a\ b]}{[p\ a\ a]}\right\} = 0 \\ (\mathrm{III}) - \dfrac{(\mathrm{II})\ [p\ a\ c]}{[p\ a\ a]} = \left\{[p\ a\ c] - \dfrac{[p\ a\ a]\ [p\ a\ c]}{[p\ a\ a]}\right\} x + \\ + \left\{[p\ b\ c] - \dfrac{[p\ a\ b]\ [p\ a\ c]}{[p\ a\ a]}\right\} y + \left\{[p\ c\ c] - \dfrac{[p\ a\ c]\ [p\ a\ c]}{[p\ a\ a]}\right\} z - \\ - \left\{[p\ c\ l] - \dfrac{[p\ a\ l]\ [p\ a\ c]}{[p\ a\ a]}\right\} = 0 \end{array}\right. \tag{14}$$

Otrzymaliśmy układ, niezawierający już I-ej niewiadome x, gdyż spółczynniki przy niej $= 0$. W celu łatwiejszego zapamiętania spółczynników zredukowanych równań normalnych, zastosujemy następujące oznaczenia (symbole Gaussa):

$$[p\ a\ b.1] = [p\ a\ b] - \frac{[p\ a\ a]\ [p\ a\ b]}{[p\ a\ a]}$$

$$[p\ b\ b.1] = [p\ b\ b] - \frac{[p\ a\ b]\ [p\ a\ b]}{[p\ a\ a]}$$

$$[p\ b\ c.1] = [p\ b\ c] - \frac{[p\ a\ c]\ [p\ a\ b]}{[p\ a\ a]}$$

$$[p\ b\ l.1] = [p\ b\ l] - \frac{[p\ a\ b]\ [p\ a\ l]}{[p\ a\ a]}$$

$$[p\ a\ c.1] = [p\ a\ c] - \frac{[p\ a\ a]\ |p\ a\ c]}{[p\ a\ a]} \tag{15}$$

$$[p\ b\ c.1] = [p\ b\ c] - \frac{[p\ a\ b]\ [p\ a\ c]}{[p\ a\ a]}$$

$$[p\ c\ c.1] = [p\ c\ c] - \frac{[p\ a\ c]\ [p\ a\ c]}{[p\ a\ a]}$$

$$[p\ c\ l.1] = [p\ c\ l] - \frac{[p\ a\ l]\ [p\ a\ c]}{[p\ a\ c]}$$

po podstawieniu których do (14)-ego otrzymamy układ po pierwszej redukcji:

$$\left\{\begin{array}{ll} [p\,b\,b\,.\,1]\,y + [p\,b\,c\,.\,1]\,z - [p\,b\,l\,.\,1] = 0 & (I_1) \\ [p\,b\,c\,.\,1]\,y + [p\,c\,c\,.\,1]\,z - [p\,c\,l\,.\,1] = 0 & (II_1) \end{array}\right. \tag{16}$$

Postępując zupełnie tak samo, jak poprzednio, t. j. mnożąc I_1 równanie przez $[p\,b\,c]$ i odejmując od II_1, przejdziemy do jednego równania z jedną niewiadomą:

po drugiej redukcji

$$\left\{\begin{array}{l} (II_1) - (I_1)\ \dfrac{[p\,b\,c\,.\,1]}{[p\,b\,b\,.\,1]} = \left\{[pbc\,.\,1] - \dfrac{[pbb\,.\,1]\ [p\,b\,c\,.\,1]}{[p\,b\,b\ .\ 1]}\right\} y + \\ \qquad + \left\{[p\,c\,c\,.\,1] - \dfrac{[p\,b\,c\ .\ 1]\ \ [p\,b\,c\ .\ 1]}{[p\,b\,b\ .\ 1]}\right\} z \\ \qquad - \left\{[p\,c\,l\,.\,1] - \dfrac{[p\,b\,l\ .\ 1]\ \ [p\,b\,c\ .\ 1]}{[p\,b\,b\ .\ 1]}\right\} = 0 \end{array}\right. \tag{17}$$

lub, stosując symbole:

$$\left\{\begin{array}{l} [p\,b\,c\ .\ 2] = [p\,b\,c\ .\ 1] - \dfrac{[p\,b\,b\ .\ 1]\ \ [p\,b\,c\ .\ 1]}{[p\,b\,b\ .\ 1]} \\ [p\,c\,c\ .\ 2] = [p\,c\,c\ .\ 1] - \dfrac{[p\,b\,c\ .\ 1]\ \ [p\,b\,c\ .\ 1]}{[p\,b\,b\ .\ 1]} \\ [p\,c\,l\ .\ 2] = [p\,c\,l\ .\ 1] - \dfrac{[p\,b\,l\ .\ 1]\ \ [p\,b\,c\ .\ 1]}{[p\,b\,b\ .\ 1]} \end{array}\right. \tag{18}$$

Otrzymamy

$$[p\,c\,c\ .\ 2]\ z - [p\,c\,l\ .\ 2] = 0. \tag{19}$$

Skąd

$$z = + \frac{[p\,c\,l\ .\ 2]}{[p\,c\,c\ .\ 2]} \tag{20}$$

Podstawiając kolejno tak określoną niewiadomą do poprzednich układów: zredukowanego (16) i (14), określimy ostatecznie wszystkie niewiadowe z zależności:

$$\left.\begin{array}{r} [p\,c\,c\,.\,2]\,z - [p\,c\,l\,.\,2] = 0 \\ [p\,b\,b\,.\,1]\,y + [p\,b\,c\,.\,1]\,z - [p\,b\,l\,.\,1] = 0 \\ [p\ a\ a]\,x + [p\ a\ b]\,y + [p\ a\ c]\,z - [p\ a\ l] = 0 \end{array}\right\} \tag{21}$$

Otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} z &= + \frac{[p\,c\,l\,.\,2]}{[p\,c\,c\,.\,2]} \\ y &= + \frac{[p\,b\,l\,.\,1]}{[p\,b\,b\,.\,1]} - \frac{[p\,b\,c\,.\,1]}{[p\,b\,b\,.\,1]}\,z \\ x &= + \frac{[p\,a\,l]}{[p\,a\,a]} - \frac{[p\,a\,b]}{[p\,a\,a]}\,y - \frac{[p\,a\,c]}{[p\,a\,a]}\,z \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

W wypadku większej ilości niewiadomych, np. 4-ch, otrzymamy przez analogję:

$$\left.\begin{aligned} [p\,d\,d\,.\,3]\,u - [p\,d\,l\,.\,3] &= 0 \\ [p\,c\,c\,.\,2]\,z + [p\,c\,d\,.\,2]\,u - [p\,c\,l\,.\,2] &= 0 \\ [p\,b\,b\,.\,1]\,y + [p\,b\,c\,.\,1]\,z + [p\,b\,d\,.\,1]\,u - [p\,b\,l\,.\,1] &= 0 \\ [p\,a\,a]\,x + [p\,a\,b]\,y + [p\,a\,c]\,z + [p\,a\,d]\,u - [p\,a\,l] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

W celu zapamiętania przyjętego przez Gaussa znakowania, rozpatrzmy kilka symboli:

$$\left\{\begin{aligned} &(1)\quad [p\,b\,c\,.\,1] = [p\,b\,c] - \frac{[p\,a\,b]\,[p\,a\,c]}{[p\,a\,a]}\,; \\ &(2)\quad [p\,b\,b\,.\,1] = [p\,b\,b] - \frac{[p\,a\,b]\,[p\,a\,b]}{[p\,a\,a]}\,; \\ &(3)\quad [p\,c\,l\,.\,2] = [p\,c\,l\,.\,1] - \frac{[p\,b\,c\,.\,1]\,[p\,b\,l\,.\,1]}{[p\,b\,b\,.\,1]}\,; \\ &(4)\quad [p\,c\,c\,.\,2] = [p\,c\,c\,.\,1] - \frac{[p\,b\,c\,.\,1]\,[p\,b\,c\,.\,1]}{[p\,b\,b\,.\,1]}\,; \end{aligned}\right. \quad (24)$$

Każdy symbol jest różnicą, w której

A) odjemną jest ten sam symbol ze zmniejszonym o jedność wskaźnikiem,

B) odjemnikiem jest ułamek:

a) mianownik ułamka jest symbolem, składającym się z kolejnych dwu jednakowych liter, odpowiadających spółczynnikowi przy rugowanej niewiadomej.

Tak np., pierwsza redukcja ma na celu wyrugowane I-ej niewiadomej x; w mianowniku odjemnika symbolu po pierwszej redukcji (1) i (2) mamy więc $[p\,a\,a]$. Druga redukcja ma na celu wyrugowanie II niewiadomej; w mianowniku odjemnika symbolu po drugiej redukcji (2) i (3) mamy $[p\,b\,b\,.\,1]$.

b) licznik ułamka jest iloczynem 2 symbolów o wskaźnikach mianownika. Literami jednego symbolu licznika są: jedna litera rozpatrywanego symbolu w połączeniu z literą mianownika, literami drugiego symbolu licznika są: druga litera rozpatrywanego symbolu w połączeniu z literą mianownika.

Jeżeli porządek rugowania niewiadomych odpowiada alfabetycznemu porządkowi spółczynników przy niewiadomych, t. j. jeżeli przy pierwszej redukcji usuwamy niewiadomą o spółczynniku $a\,a$, przy drugiej o spółczynniku $b\,b$, przy trzeciej $c\,c$, czwartej $d\,d$ i t. d., znakowanie Gaussa jest łatwe do zastosowania i przejrzyste, gdyż wtedy na zasadzie $B\,(a)$ będziemy mieli w mianowniku odjemnika zawsze tę literę, której porządkowe miejsce w alfabecie określa wskaźnik symbolu.

$$\text{Np.} \qquad [pcl\,.\,4] = [pcl\,.\,3] - \frac{[pcd\,.\,3]\,[pdl\,3]}{[pdd\,.\,3]}$$

$$[pel\,.\,3] = [pel\,.\,2] - \frac{[pec\,.\,2]\,[pcl\,.\,2]}{[pcc\,.\,2]} \quad \text{i t. d.}$$

Jeżeli jednak porządek rugowania jest niezgodny z porządkiem alfabetycznym spółczynników, w znakowaniu bardzo łatwo się pomylić. Specjalną uwagę należy zwrócić wtedy na $(B)\,(a)$.

Rozwiążemy, np., układ 3 równań normalnych, w wypadku rugowania najpierw z, potem y

$$\begin{cases} [cc]\,z + [bc]\,y + [ac]\,x - [cl] = 0 & \text{(I)} \\ [bc]\,z +]bb]\,y + [ab]\,x - [bl] = 0 & \text{(II)} \\ [ac]\,z + [ab]\,y + [aa]\,x - [al] = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

W celu usunięcia z, musimy dzielić (I) przez $[c\,c]$ i, mnożąc kolejno przez $[bc]$ oraz $[ac]$, odejmować od (II) i (III).

Układ po pierwszej redukcji będzie:

$$[bb\,.\,1]\,y + [ab\,.\,1]\,x - [bl\,.\,1] = 0 \qquad (\text{I}_1)$$

$$[ab\,.\,1]\,y + [aa\,.\,1]\,x - [al\,.\,1] = 0 \qquad (\text{II}_1)$$

gdzie

$$\begin{cases} [b\,b\,.\,1] = [b\,b] - \dfrac{[c\,b]\,[c\,b]}{[c\,c]} \\ [a\,b\,.\,1] = [a\,b] - \dfrac{[a\,c]\,[b\,c]}{[c\,c]} \\ [b\,l\,.\,1] = [b\,l] - \dfrac{[b\,c]\,[c\,l]}{[c\,c]} \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} [a\,b\,.\,1] = [a\,b] - \dfrac{[a\,c]\,[b\,c]}{[c\,c]} \\ [a\,a\,.\,1] = [a\,a] - \dfrac{[a\,c]\,[a\,c]}{[c\,c]} \\ [a\,l\,.\,1] = [a\,l] - \dfrac{[a\,c]\,[c\,l]}{[c\,c]} \end{array}\right.$$

Rugowania y dokonamy w drodze podzielenia (I_1) przez $[b\,b\,.\,1]$, pomnożenia przez $[a\,b\,.\,1]$ i odjęcia od (I_1)

Otrzymamy po drugiej redukcji:

$$[a\,a\,.\,2]\,x - [a\,l\,.\,2] = 0$$

gdzie

$$[a\,a\,.\,2] = [a\,a\,.\,1] - \frac{[a\,b\,.\,1]\,[a\,b\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}$$

$$[a\,l\,.\,2] = [a\,l\,.\,1] - \frac{[a\,b\,.\,1]\,[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}$$

Ostatecznie do określenia niewiadomych mamy:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrr} [c\,c]\,z & + & [b\,c]\,y & + & [a\,c]\,x & - & [c\,l] = 0 \\ & & [b\,b\,.1]\,y & + & [a\,b\,.1]\,x & - & [b\,l.1] = 0 \\ & & & & [a\,a.2] & - & [a\,l.2] = 0 \end{array}\right\}$$

gdzie znaczenia symbolów umiemy określać.

Jeżeli po rozwiązaniu równań normalnych podstawimy najprawdopodobniejsze wartości niewiadomych $x\ y\ z\ldots$ do równania błędów, otrzymamy najprawdopodobniejsze wartości błędów spostrzeżeń:

$$\left\{\begin{array}{l} v_1 = a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z - l_1 \\ v_2 = a_2\,x + b\,y + c_2\,z - l_2 \\ \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ v_n = a_n\,x + b_n\,y + c_n\,z - l_n \end{array}\right.$$

za pośrednictwem których możemy przeprowadzić kontrolę rozwiązania, porównywając wielkość v_1, $v_2\ldots$ z odpowiedniemi różnicami pomiędzy spostrzeżonemi a wyrównanemi L_1, $L_2\ldots$.

§ 339. Kontrala budowy i rozwiązania równań normalnych.

W charakterze kontroli budowy układu równań normalnych mieliśmy (§ 336) równania sumowe

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 + b_1 + c_1 - l_1 = s_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 - l_2 = s_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_n + b_n + c_n - l_n = s_n \end{array}\right. \tag{24}$$

$$\left\{\begin{array}{l} [p\,a\,a] + [p\,a\,b] + [p\,a\,c] - [p\,a\,l] = [p\,a\,s] \\ [p\,a\,b] + [p\,b\,b] + [p\,b\,c] - [p\,b\,l] = [p\,b\,s] \\ [p\,a\,c] + [p\,b\,c] + [p\,c\,c] - [p\,c\,l] = [p\,c\,s] \\ [p\,a\,l] + [p\,b\,l] + [p\,c\,l] - [p\,l\,l] = [p\,l\,s] \end{array}\right. \tag{25}$$

Dla zredukowanych równań normalnych zachodzą analogiczne zależności:

po 1-ej redukcji

$$\left\{\begin{array}{l} [p\,b\,b\,.\,1] + [p\,b\,c\,.\,1] - [p\,b\,l\,.\,1] = [p\,b\,s\,.\,1] \\ [p\,b\,c\,.\,1] + [p\,c\,c\,.\,1] - [p\,c\,l\,.\,1] = [p\,c\,s\,.\,1] \end{array}\right. \tag{26}$$

oraz po 2-ej redukcji

$$[p\,c\,c\,.\,2] - [p\,c\,l\,.\,2] = [p\,c\,s\,.\,2] \tag{27}$$

Dowód polega oczywiście na rozwinięciu odpowiednich symboli. Wykażemy, że:

$$[p\,b\,b\,.\,1] + [p\,b\,c\,.\,1] - [p\,b\,l\,.\,1] = [p\,b\,s\,.\,1]$$

$$[p\,b\,b\,.\,1] = [p\,b\,b] - \frac{[p\,a\,b]\;[p\,a\,b]}{[p\,a\,a]}$$

$$[p\,b\,c\,.\,1] = [p\,b\,c] - \frac{[p\,a\,b]\;[p\,a\,c]}{[p\,a\,a]}$$

$$[p\,b\,l\,.\,1] = -[p\,b\,l] + \frac{[p\,a\,b]\;[p\,a\,l]}{[p\,a\,a]}$$

$$[p\,b\,b\,.\,1] + [p\,b\,c\,.\,1] - [p\,b\,l\,.\,1] = [p\,b\,s] - [p\,a\,b] - \frac{[p\,a\,b]}{[p\,a\,a]} \times$$

$$\times \{ [p\,a\,b] + [p\,a\,c] - [p\,a\,l] \}$$

$$= [p\,b\,s] \quad [p \quad\quad [p$$

Przechodząc od kontroli budowy do kontroli rozwiązania równań normalnych, wyprowadzimy kilka zależności, zachodzących pomiędzy najprawdopodobniejszemi wartościami błędów spostrzeżeń, a spółczynnikami równań normalnych.

Kontrola I: mnożąc kontrolujące równania sumowe (str. 766) przez odpowiednie iloczyny błędów przez wagi spostrzeżeń, otrzymamy:

$$\begin{array}{l|l} a_1 + b_1 + c_1 - l_1 = s_1 & p_1\ v_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 - l_2 = s_2 & p_2\ v_2 \\ - - - - - - - - - & - - \\ a_n + b_n + c_n - l_n = s_n & p_n\ v_n \end{array}$$

$$\begin{aligned} p_1\ a_1\ v_1 + p_1\ b_1\ v_1 + p_1\ c_1\ v_1 - p_1\ l_1\ v_1 &= p_1\ s_1\ v_1 \\ p_2\ a_2\ v_2 + p_2\ b_2\ v_2 + p_2\ c_2\ v_2 - p_2\ l_2\ v_2 &= p_2\ s_2\ v_2 \qquad (28) \\ - \\ p_n\ a_n\ v_n + p_n\ b_n\ v_n + p_n\ c_n\ v_n - p_n\ l_n\ v_n &= p_n\ s_n\ v_n \end{aligned}$$

Skąd $$[p\ a\ v] + [p\ b\ v] + [p\ c\ v] - [p\ l\ v] = [p\ s\ v]$$

lecz $[p\ a\ v] = 0$ jest I-em równaniem normalnem,

gdyż

$$\begin{aligned} [p\ a\ v] = {} & p_1\ a_1\ (a_1\ x + b_1\ y + c_1\ z - l_1) + \\ & p_2\ a_2\ (a_2\ x + b_2\ y + c_2\ z - l_2) + \\ & - - - - - - - - - - - - - - - - \\ & p_n\ a_n\ (a_n\ x + b_n\ y + c_n\ z - l_n); \end{aligned}$$

$$+ [p\ a\ v] = [p\ a\ a]\ x + [p\ a\ b]\ y + [p\ a\ c]\ z - [p\ a\ l] = 0$$

podobnie

$$[p\ b\ v] = 0;\ [p\ c\ v] = 0$$

ostatecznie więc: (29)

$$- [p\ l\ v] = [p\ s\ v]$$

II. Mnożąc układ równań błędów przez odpowiednie iloczyny błędów — przez wagi spostrzeżeń, otrzymamy:

$$\begin{array}{l|l} v_1 = a_1\ x + b_1\ y + c_1\ z - l_1 & p_1\ v_1 \\ - - - - - - - - - - & - - \\ v_n = a_n\ x + b_n\ y + c_n\ z - l_n & p_n\ v_n \end{array}$$

$$p_1\ v_1\ v_1 = p_1\ v_1\ a_1\ x + p_1\ v_1\ b_1\ y + p_1\ v_1\ c_1\ z - p_1\ v_1\ l_1$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$p_n\ v_n\ v_n = p_n\ v_n\ a_n\ x + p_n\ v_n\ b_n\ y + p_n\ v_n\ c_n\ z - p_n\ v_n\ l_n \quad (30)$$

skąd $$[p\ v\ v] = [p\ a\ v]\ x + [p\ b\ v]\ y + [p\ c\ v]\ z - [p\ l\ v]$$

lub, ponieważ

$$[p\ a\ v] = 0$$

$$[p\ b\ v] = 0$$

$$[p\ c\ v] = 0$$

będzie

$$[p\ v\ v] = -[p\ l\ v] \quad (31)$$

3. Rozwijając symbol $-[p\ l\ v]$, znajdziemy:

$$-[p\ l\ v] = -p_1\ l_1\ (a_1\ x + b_1\ y + c_1\ z - l_1) +$$

$$- - - - - - - - - - -$$

$$\underline{- p_n\ l_n\ (a_n\ x + b_n\ y + c_n\ z - l_n)}$$

$$-[p\ l\ v] = -[p\ a\ l]\ x - [p\ b\ l]\ y - [p\ c\ l]\ z + [p\ l\ l]$$

$$[p\ v\ v] = -[p\ l\ v] = -[p\ a\ l]\ x - [p\ b\ l]\ y - [p\ c\ l]\ z + [p\ l\ l]$$

Podstawiając do tego równania kolejno zamiast x, y, z ich znaczenia, określone z układu zredukowanych równań normalnych, znajdziemy:

$$[p\ v\ v] = -[p\ a\ l]\left\{+\frac{[p\ a\ l]}{[p\ a\ a]} - \frac{[p\ a\ b]}{[p\ a\ a]}\ y - \frac{[p\ a\ c]}{[p\ a\ a]}\ z\right\}$$

$$- [p\ b\ l]\ y - [p\ c\ l]\ z + [p\ l\ l] =$$

$$= [p\ l\ l] - \frac{[p\ a\ l]\ [p\ a\ l]}{[p\ a\ a]} - \left\{[p\ b\ l] - \frac{[p\ a\ l]\ [p\ a\ b]}{[p\ a\ a]}\right\} y -$$

$$- \left\{[p\ c\ l] - \frac{[p\ a\ l]\ [p\ a\ c]}{[p\ a\ a]}\right\} z =$$

$$= [p\ l\ l\ .\ 1] - [p\ b\ l\ .\ 1]\ y - [p\ c\ l\ .\ 1]\ z =$$

$$= [p\ l\ l\ .\ 1] - [p\ b\ l\ .\ 1]\left\{\frac{[p\ b\ l\ .\ 1]}{[p\ b\ b\ .\ 1]} - \frac{[p\ b\ c\ .\ 1]}{[p\ b\ b\ .\ 1]}\ z\right\} - [p\ c\ l\ .\ 1]\ z$$

Stąd:

$$[p\,v\,v] = [p\,l\,l\ .\ 1] - \frac{[p\,b\,l\ .\ 1]\ [p\,b\,l\ .\ 1]}{[p\,b\,b\ .\ 1]} -$$

$$- \left\{[p\,c\,l\ .\ 1] - \frac{[p\,b\,l\ .\ 1]\ [p\,b\,c\ .\ 1]}{[p\,b\,b\ .\ 1]}\right\} z =$$

$$= [p\,l\,l\ .\ 2] - [p\,c\,l\ .\ 2]\ z =$$

$$= [p\,l\,l\ .\ 2] - \frac{[p\,c\,l\ .\ 2]\ [p\,c\,l\ .\ 2]}{[p\,c\,c\ .\ 2]}$$

i ostatecznie:

$$[pvv] = [pll \,.\, 3] = [pll] - \frac{[pal]\,[pal]}{[paa]} -$$

$$- \frac{[pbl \,.\, 1]\,[pbl \,.\, 1]}{[pbb \,.\, 1]} - \frac{[pcl \,.\, 2]\,[pcl \,.\, 2]}{[pcc \,.\, 2]} \qquad (32)$$

W wypadku czterech, pięciu... m równań normalnych otrzymalibyśmy:

$$[pvv] = [pll \,.\, m] \qquad (33)$$

4) Wykażemy jeszcze, że zachodzi równość,

$$[pll \,.\, m] = -[pls \,.\, m] \qquad (34)$$

Weźmy, np., wypadek 3-ch niewiadomych i dowiedźmy, że zakładając

$$[pll \,.\, 3] = -[pls \,.\, 3]$$

inaczej

$$[pll \,.\, 3] + [pls \,.\, 3] = 0,$$

dojdziemy do tożsamości.

Obliczmy w tym celu założoną równość,

$$[pll \,.\, 3] = [pll \,.\, 2] - \frac{[pcl \,.\, 2]\,[pcl \,.\, 2]}{[pcc \,.\, 2]}$$

$$[pls \,.\, 3] = [pls \,.\, 2] - \frac{[pcl \,.\, 2]\,[pcs \,.\, 2]}{[pcc \,.\, 2]}$$

$$[pll \,.\, 3] + [pls \,.\, 3] = [pll \,.\, 2] + [pls \,.\, 2] - \frac{[pcl \,.\, 2]}{[pcc \,.\, 2]} \times$$

$$\times \Big\{[pcl \,.\, 2] + [pcs \,.\, 2]\Big\}$$

lecz

$$[pcl \,.\, 2] + [pcs \,.\, 2] = [pcc \,.\, 2] \quad \text{na zasadzie} \qquad (27),$$

skąd

$$[pll \,.\, 2] + [pls \,.\, 2] - [pcl \,.\, 2] = [pll \,.\, 3] + [pls \,.\, 3] = K$$

Rozwińmy otrzymane symbole:

$$[pll \,.\, 2] = [pll \,.\, 1] - \frac{[pbl \,.\, 1]\,[pbl \,.\, 1]}{[pbb \,.\, 1]} +$$

$$+ [pls \,.\, 2] = + [pls \,.\, 1] - \frac{[pbl \,.\, 1]\,[pbs \,.\, 1]}{[pbb \,.\, 1]} -$$

$$- [pcl \,.\, 2] = - [pcl \,.\, 1] + \frac{[pbc \,.\, 1]\,[pbl \,.\, 1]}{[pbb \,.\, 1]}$$

$$K = [pll\,.\,1] + [pls\,.\,1] - [pcl\,.\,1] - \frac{[pbl\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]}\{[pbl\,.\,1] + [pbs\,.\,1] - [pbc\,.\,1]\}$$

lecz

$$[pbl\,.\,1] + [pbs\,.\,1] - [pbc\,.\,1] = [pbb\,.\,1] \quad \text{na zasadzie} \quad (26)$$

skąd:

$$K = [pll\,.\,1] + [pls\,.\,1] - [pcl\,.\,1] - [pbl\,.\,1]$$

Rozwijając symbole, znajdziemy:

$$[pll\,.\,1] = [pll] - \frac{[pal]\,[pal]}{[paa]}$$

$$+ [pls\,.\,1] = + [pls] - \frac{[pal]\,[pas]}{[paa]}$$

$$- [pcl\,.\,1] = - [pcl] + \frac{[pac]\,[pal]}{[paa]}$$

$$- [pbl\,.\,1] = - [pbl] + \frac{[pab]\,[pal]}{[paa]}$$

$$K = [pll] + [pls] - [pcl] - [pbl] - \frac{[pal]}{[paa]}\{[pal] + [pas] - [pac] - [pab]\}$$

lecz

$$[pal] + [pas] - [pac] - [pab] = + [paa] \quad \text{na zasadzie} \quad (25),$$

skąd

$$K = [pll] + [pls] - [pcl] - [pbl] - [pal]$$

Ponieważ prawa strona tego równania na zasadzie ostatniego równania (25) równa się 0, otrzymaliśmy

$$K = 0$$

co dowodzi, że założona równość (34) była słuszna.

Ogólnie

$$[pll\,.\,m] = - [pls\,.\,m] \qquad (35)$$

§ 340. Kontrola sumowa w wypadku spostrzeżeń jednakowo dokładnych.

W wypadku jednakowo dokładnych spostrzeżeń, kontrole powyższe przyjmą następującą formę:

A. Kontrole sumowe:

dla równań normalnych

$$\left\{\begin{array}{l} [aa]+[ab]+[ac]-[al]=[as] \\ [ab]+[bb]+[bc]-[bl]=[bs] \\ [ac]+[bc]+[cc]-[cl]=[cs] \\ \quad - - - - - - - - - - - \\ \quad - - - - - - - - - - - \\ [al]+[bl]+[cl]-[ll]=[ls] \end{array}\right.$$

oraz

dla układu równań zredukowanych

$$\left\{\begin{array}{l} [aa]+[ab]+[ac]-[al]=[as] \\ [bb.1]+[bc.1]-[bl.1]=[bs.1] \\ [cc.2]-[cl.2]=[cs.2] \\ \quad - - - - - - - - \\ [ll.m]=-[ls.m] \end{array}\right. \qquad (37)$$

B. Kontrole błędów v, sum spółczynników s i wyrazów niewiadomych l:

$$\left\{\begin{array}{l} -[lv]=[sv] \\ [vv]=-[lv] \\ [vv]=[ll.m]=-[ls.m] \end{array}\right. \qquad (38)$$

$$[vv]=[ll.m]=-[ls.m]=-[lv]=[sv] \qquad (39)$$

Stosowanie wzorów kontrolujących:

Po zestawieniu równań błędów tworzy się sumy spółczynników każdego równania i przy obliczaniu spółczynników równań normalnych oblicza się wyrazy $[pas]$, $[pbs]$ i t. d., względnie $[as]$, $[bs]$ ..... Spółczynniki niewiadomych, wyrazy wiadome — $[pal]$ i t. d. oraz wyrazy $[pas]$ ..... w równaniach normalnych winny czynić zadość kontroli sumowej; analogiczna kontrola zachodzi dla układu zredukowanych równań normalnych; przy rozwiązaniu tych ostatnich należy obliczyć wyrazy równania

$$[pll.m]=-[pls.m]$$

które winny być wzajemnie równe, a każde oddzielnie winno się równać sumie $[pvv]$, obliczonej z równań błędów, po wstawieniu do nich wyznaczonych wielkości niewiadomych.

Kontrolę

$$[pvv] = -[plv] = [psv]$$

szybko obliczymy przy pomocy arytmometru, tworząc dla wszystkich trzech wyrazów w każdem równaniu błędów wspólną mnożną p_n, v_n, dla trzech mnożników v_n, l_n i s_n.

§ 341. Schemat rozwiązania równań normalnych.

Podajemy schemat rozwiązania równań normalnych przy użyciu arytmometru ze względu na rozpowszechnienie tego przyrządu.

Załączony na str. 787 schemat odpowiada 4 równaniom normalnym z czterema niewiadomemi x, y, z, u.

Schemat zawiera 7 kolumn i 25 wierszy.

Spółczynniki równań normalnych wypisujemy w wierszach 1, 2, 5 i 10. Ze względu na oszczędność miejsca, w wierszu 2-im brak spółczynnika $[ab]$, gdyż jest wypisany w 1-ym wierszu nad $[bb]$; tak samo wiersz 5-y zaczynamy od $[cc]$ w kolumnie 3-ej, gdyż $[ac]$ i $[bc]$ już poprzednio wypisaliśmy w tej kolumnie w wierszach 1-ym i 2-im; podobnie wiersz 10-y rozpoczynamy od $[dd]$ w kolumnie 4-ej, gdyż $[ad]$, $[bd]$ i $[cd]$ znajdują się już w tej samej kolumnie w wierszach 1-ym, 2-im i 5-ym.

Umówmy się dla skrócenia pisać, np., (4, 15), zamiast „wyraz, znajdujący się w kolumnie 4-ej w wierszu 15-ym“ — a więc numer kolumny będzie 1-ą liczbą, numer wiersza — drugą.

Obliczamy kolejno i wypisujemy wyrazy: (7, 3), (7, 6) i (7, 11).

Mając wypisane te mnożniki, tworzymy iloczyny wiersza 3-ego, 6-ego i 11-ego po prawej stronie grubszych kresek pionowych.

Następnie obliczamy wyrazy wiersza 4-ego w kolumnach 2—6, jako sumy algebraiczne wyrazów wierszy 2-ego i 3-ego w poszczególnych kolumnach; analogicznie z wierszy 5 i 6 tworzymy wiersz 7-y, z wierszy 10 i 11— wiersz 12-y,

Rachunek sprawdzamy, porównywając sumy algebraiczne wszystkich wyrazów, z wyjątkiem kolumny 6-ej w wierszach 4-ym, 7-ym i 12-ym, z ostatniemi wyrazami tych wierszy, przyczem sumę wyrazów wiersza 7-ego uzupełniamy wyrazem (3, 4), wiersza zaś 12-ego — wyrazami (4, 4)-ym i (4, 7)-ym.

Następnie liczymy i wypisujemy wyrazy (7, 8) i (7, 13), oraz, korzystając z nich, zapełnimy wiersze 8-y i 13-y, poczem z wyrazów wierszy 7-ego i 8-ego utworzymy w każdej kolumnie, jako algebraiczne sumy, wyrazy wiersza 9-ego, z wierszy zaś 12-ego i 13-ego utworzymy wyrazy wiersza 14-ego.

Obliczymy i wypiszemy następnie wyraz (7, 15), zapełnimy wiersz 15-y, i dodając w każdej kolumnie wyrazy wierszy 14-ego i 15-ego, utworzymy wiersz 16-y.

W toku rachunku sprawdzamy sumy wyrazów z wyjątkiem kolumny 6-ej w wierszach: 9-ym, 14-ym, uzupełniając tę sumę wyrazem (4, 9) i w wierszu 16-ym.

Analogicznie obliczamy wiersze 17 — 25 w kolumnach 5 — 7 dla uzyskania kontroli:

$$[b\,l\,.\,1] + [c\,l\,.\,1] + [d\,l\,.\,1] + [l\,l\,.\,1] = [l\,s\,.\,1]$$

$$[c\,l\,.\,2] + [d\,l\,.\,2] + [l\,l\,.\,2] = [l\,s\,.\,2]$$

$$[d\,l\,.\,3] + [l\,l\,.\,3] = [l\,s\,.\,3]$$

$$[l\,l\,.\,4] = [l\,s\,.\,4]$$

Po dokonaniu tych rachunków, obliczamy niewiadome kolejno pod literami A, B, C i D posuwając się ukośnie ku górze tak, np.:

$$z = \frac{-[c\,l\,.\,2] - u\,[c\,d\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]} = \frac{S_1}{[c\,c\,.\,2]}.$$

Ze względu na brak sprawdzenia przy obliczaniu niewiadomych, rachunek każdej z nich należy wykonać dwukrotnie.

Prawidłowo obliczone niewiadome przetworzą równania normalne w tożsamości.

Pewnego rodzaju uproszczenia dokonalibyśmy, usuwając ze schematu wiersze 7, 12, 14, 19, 21 oraz 23. Wówczas, np., wyrazy wiersza 16-ego otrzymalibyśmy, tworząc kolumnami sumy wyrazów wierszy 10-ego, 11-ego, 13-ego i 15-ego. Takie jednak uproszczenie można stosować tylko przy dość dużej rutynie rachunkowej.

Korzystając z tego przykładu, łatwo ułożyć schemat dla dowolnej ilości równań normalnych.

§ 342 Średnie błędy i wagi niewiadomych, określonych z równań normalnych.

Z układu 3 równań normalnych:

$$[paa]\,x + [pab]\,y + [pac]\,z - [pal] = 0$$

$$[pab]\,x + [pbb]\,y + [pbc]\,z - [pbl] = 0$$

$$[pac]\,x + [pbc]\,y + [pcc]\,z - [pcl] = 0$$

określimy średnie błędy oraz wagi obliczonych niewiadomych, na zasadzie wzorów na średni błąd i wagę funkcji linjowej, gdyż wartości najprawdopodobniejsze x, y, z są linjowemi funkcjami wyników spostrzeżeń $l_1, l_2 \ldots l_n$.

Obliczone z równań normalnych niewiadome zawierają części wyrazów l_1, $l_2 \ldots l_n$, mianowicie:

Schemat rozwiązania równań normalnych.

1	2	3	4	5	6	7	Wiersz
$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[ad]$	$[al]$	$[as]$	Mnożnik	1
D	$[bb]$	$[bc]$	$[bd]$	$[bl]$	$[bs]$		2
$-[al]$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[ad]$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[al]$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[as]$	$-\frac{[ab]}{[aa]}$	3
$-u[ad]$							
$-z[ac]$							
$-y[ab]$	$[bb.1]$	$[bc.1]$	$[bd.1]$	$[bl.1]$	$[bs.1]$		4
	C	$[cc]$	$[cd]$	$[cl]$	$[cs]$		5
s_3	$-[bl.1]$	$-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$	$-\frac{[ac]}{[aa]}[ad]$	$-\frac{[ac]}{[aa]}[al]$	$-\frac{[ac]}{[aa]}[as]$	$-\frac{[ac]}{[aa]}$	6
$x=\frac{s_3}{[aa]}$	$-u[bd.1]$						
	$-z[bc.1]$						
		$[cc.1]$	$[cd.1]$	$[cl.1]$	$[cs.1]$		7
s_2	$y=\frac{s_2}{[bb.1]}$	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1]$	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bd.1]$	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bl.1]$	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bs.1]$	$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}$	8
		$[cc.2]$	$[cd.2]$	$[cl.2]$	$[cs.2]$		9
			$[dd]$	$[dl]$	$[ds]$		10
			$-\frac{[ad]}{[aa]}[ad]$	$-\frac{[ad]}{[aa]}[al]$	$-\frac{[ad]}{[aa]}[as]$	$-\frac{[ad]}{[aa]}$	11
			$[dd.1]$	$[dl.1]$	$[ds.1]$		12
		B	$-\frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bd.1]$	$-\frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bl.1]$	$-\frac{[bd.1]}{[bb.1]}[bs.1]$	$-\frac{[bd.1]}{[bb.1]}$	13
		$-[cl.2]$					
		$-u[cd.2]$	$[dd.2]$	$[dl\,2]$	$[ds.2]$		14
			$-\frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cd.2]$	$-\frac{[cd.2]}{[cc.2]}[cl.2]$	$-\frac{[cd.2]}{(cc.2)}[cs.2]$	$-\frac{[cd.2]}{[cc.2]}$	15
		s_1					
		$z=\frac{s_1}{[cc.2]}$					
			$[dd.3]$	$[dl.3]$	$[ds.3]$		16
			A	$[ll]$	$[ls]$		17
			$u=-\frac{[dl.3]}{[dd.3]}$	$-\frac{[al]}{[aa]}[al]$	$-\frac{[al]}{[aa]}[as]$	$-\frac{[al]}{[aa]}$	18
				$[ll.1]$	$[ls.1]$		19
				$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bl.1]$	$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}[bs.1]$	$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]}$	20
				$[ll.2]$	$[ls.2]$		21
				$-\frac{[cl.2]}{[cc.2]}[cl.2]$	$-\frac{[cl.2]}{[cc.2]}[cs.2]$	$-\frac{[cl.2]}{[cc.2]}$	22
				$[ll.3]$	$[ls.3]$		23
				$-\frac{[dl.3]}{[dd.3]}[dl.3]$	$-\frac{[dl.3]}{[dd.3]}[ds.3]$	$-\frac{[dl.3]}{[dd.3]}$	24
				$[ll.4]$	$[ls.4]$		25

W tym schemacie wyrazy */aa/ ... /al/, /bb/ ... /bl/* ... zachowują znaki, które posiadają w równaniach normalnych.

$$\begin{cases} x = +\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 \ \ldots + \alpha_n l_n \\ y = +\beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 \ \ldots + \beta_n l_n \\ z = +\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 \ \ldots + \gamma_n l_n \end{cases} \qquad (41)$$

gdzie odpowiednie α, β, γ są nieznanemi spółczynnikami, które wskazują ile części poszczególnych wyrazów $l_1, l_2 \ldots l_n$ składa się na otrzymanie niewiadomych x, y, z ...

Jeśli oznaczymy średni błąd spostrzeżenia o jednostce wagi przez m_0, średnie błędy spostrzeżeń, dokonanych nad wielkościami l_1, $l_2 \ldots l_n$ przez m_1, m_2, m_n, średnie błędy niewiadomych przez m_x, m_y, m_z, zaś wagi ich przez p_x, p_y, p_z, mieć będziemy następujące zależności:

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{p_1}}$$

$$m_2 = \frac{m_0}{\sqrt{p_2}} \ldots\ldots m_n = \frac{m_0}{\sqrt{p_n}} \qquad (42)$$

$$m_x = \pm\sqrt{\alpha_1^2 m_1^2 + \alpha_2^2 m_2^2 + \ldots \alpha_n^2 m_n^2}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{m_0^2 \alpha_1^2}{p_1} + \frac{m_0^2 \alpha_1^2}{p_2} + \ldots \frac{m_0^2 \alpha_n^2}{p_n}} \qquad (43)$$

i ostatecznie:

$$\begin{cases} m_x = \pm m_0 \sqrt{\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]}, & \text{analogicznie:} \\ m_y = \pm m_0 \sqrt{\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]} \\ m_z = \pm m_0 \sqrt{\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]} \end{cases} \qquad (44)$$

skąd, korzystając z (42), otrzymamy:

$$\begin{cases} p_x = \frac{1}{\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]} & \text{analogicznie:} \\ p_y = \frac{1}{\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]} \\ p_z = \frac{1}{\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]} \end{cases} \qquad (45)$$

Aby jednak stosować powyższe wzory, określić należy wartości $\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]$, $\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]$ i $\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]$, oraz wartość średniego błędu m_0, spostrzeżenia o jednostce wagi.

W celu określenia wartości $\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]$ pomnożymy dany układ (40) równań normalnych przez nieoznaczone spółczynniki $Q_{1\cdot1}$ $Q_{1\cdot2}$ $Q_{1\cdot3}$, nie czyniąc narazie żadnych zastrzeżeń co do ich wartości. Otrzymamy:

$$\begin{cases} \text{(I).}\ Q_{1\cdot1}=[paa]\,x\,Q_{1\cdot1}+[pab]\,y\,Q_{1\cdot1}+[pac]\,z\,Q_{1\cdot1}-[pal]\,Q_{1\cdot1}=0 \\ \text{(II).}\ Q_{1\cdot2}=[pab]\,x\,Q_{1\cdot2}+[pbb]\,y\,Q_{1\cdot2}+[pbc]\,z\,Q_{1\cdot2}-[pbl]\,Q_{1\cdot2}=0 \\ \text{(III).}\ Q_{1\cdot3}=[pac]\,x\,Q_{1\cdot3}+[pbc]\,y\,Q_{1\cdot3}+[pcc]\,z\,Q_{1\cdot3}-[pcl]\,Q_{1\cdot3}=0 \end{cases} \quad (46)$$

Sumując powyższy układ, znajdziemy:

$$\begin{cases} x\{[paa]\,Q_{1\cdot1}+[pab]\,Q_{1\cdot2}+[pac]\,Q_{1\cdot3}\}+ \\ +y\{[pab]\,Q_{1\cdot1}+[pbb]\,Q_{1\cdot2}+[pbc]\,Q_{1\cdot3}\}+ \\ +z\{[pac]\,Q_{1\cdot1}+[pbc]\,Q_{1\cdot2}+[pcc]\,Q_{1\cdot3}\}- \\ -[pal]\,Q_{1\cdot1}-[pbl]\,Q_{1\cdot2}+[pcl]\,Q_{1\cdot3}=0 \end{cases} \quad (47)$$

Ponieważ czynnikom nieoznaczonym $Q_{1\cdot1}$ $Q_{1\cdot2}$ $Q_{1\cdot3}$ nie narzucaliśmy żadnych warunków, przeto możemy założyć:

$$\begin{cases} [p\,a\,a]\,Q_{1\cdot1}+[p\,a\,b]\,Q_{1\cdot2}+[p\,a\,c]\,Q_{1\cdot3}=1 \\ [p\,a\,b]\,Q_{1\cdot1}+[p\,b\,b]\,Q_{1\cdot2}+[p\,b\,c]\,Q_{1\cdot3}=0 \\ [p\,a\,c]\,Q_{1\cdot1}+[p\,b\,c]\,Q_{1\cdot2}+[p\,c\,c]\,Q_{1\cdot3}=0 \end{cases} \quad (48)$$

wskutek czego wyrugujemy z równania (47) niewiadome z i y i otrzymamy

$$x-[p\,a\,l]\,Q_{1\cdot1}-[p\,b\,l]\,Q_{1\cdot2}-[p\,c\,l]\,Q_{1\cdot3}=0,$$

skąd

$$x=+[p\,a\,l]\,Q_{1\cdot1}+[p\,b\,l]\,Q_{1\cdot2}+[p\,c\,l]\,Q_{1\cdot3} \quad (49)$$

lub, rozwijając symbole:

$$\begin{aligned} x=&+p_1\,a_1\,l_1\,Q_{1\cdot1}+p_2\,a_2\,l_2\,Q_{1\cdot1}\ldots+p_n\,a_n\,l_n\,Q_{1\cdot1}+ \\ &+p_1\,b_1\,l_1\,Q_{1\cdot2}+p_2\,b_2\,l_2\,Q_{1\cdot2}\ldots+p_n\,b_n\,l_n\,Q_{1\cdot2}+ \\ &+p_1\,c_1\,l_n\,Q_{1\cdot3}+p_2\,c_2\,l_2\,Q_{1\cdot3}\ldots+p_n\,c_n\,l_n\,Q_{1\cdot2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=&+p_1\,l_1\,(a_1\,Q_{11}+b_1\,Q_{1\cdot2}+c_1\,Q_{1\cdot2}) \\ &+p_2\,l_2\,(a_2\,Q_{1\cdot1}+b_2\,Q_{1\cdot2}+c_2\,Q_{1\cdot3})+\ldots \\ &+p_n\,l_n\,(a_n\,Q_{1\cdot1}+b_n\,Q_{1\cdot2}+c_n\,Q_{1\cdot3}) \end{aligned}$$

Porównywając otrzymaną zależność z równością (41), wyrażającą x jako funkcję linjową spostrzeżeń,

otrzymamy

$$\begin{cases} \alpha_1 = p_1 (a_1 Q_{1\cdot 1} + b_1 Q_{1\cdot 2} + c_1 Q_{1\cdot 3}) \\ \alpha_2 = p_2 (a_2 Q_{1\cdot 1} + b_2 Q_{1\cdot 2} + c_2 Q_{1\cdot 3}) \\ \text{— — — — — — — — — — — — —} \\ \alpha_n = p_n (a_n Q_{1\cdot 1} + b_n Q_{1\cdot 2} + c_n Q_{1\cdot 3}) \end{cases} \tag{50}$$

skąd obliczymy potrzebną nam sumę

$$\left[\frac{\alpha\ \alpha}{p}\right]:$$

$$\begin{cases} \alpha_1\ \alpha_1 = \alpha_1 p_1 (a_1 Q_{1\cdot 1} + b_1 Q_{1\cdot 2} + c_1 Q_{1\cdot 3}) \\ \alpha_2\ \alpha_2 = \alpha_2 p_2 (a_2 Q_{1\cdot 1} + b_2 Q_{1\cdot 2} + c_2 Q_{1\cdot 3}) \\ \text{— — — — — — — — — — — — —} \\ \alpha_n\ \alpha_n = \alpha_n p_n (a_n Q_{1\cdot 1} + b_n Q_{1\cdot 1} + c_n Q_{1\cdot 3}) \end{cases} \tag{51}$$

dalej:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_1\ \alpha_1}{p_1} = \alpha_1 (a_1 Q_{1\cdot 1} + b_2 Q_{1\cdot 2} + c_1 Q_{1\cdot 3}) \\ \dfrac{\alpha_2\ \alpha_2}{p_2} = \alpha_2 (a_2 Q_{1\cdot 1} + b_2 Q_{1\cdot 2} + c_2 Q_{1\cdot 3}) \\ \text{— — — — — — — — — — — — —} \\ \dfrac{\alpha_n\ \alpha_n}{p_n} = \alpha_n (a_n Q_{1\cdot 1} + b_n Q_{1\cdot 2} + c_n Q_{1\cdot 3}) \end{cases} \tag{52}$$

$$\left[\frac{\alpha\ \alpha}{p}\right] = Q_{1\cdot 1} [a\ \alpha] + Q_{1\cdot 2} [b\ \alpha] + Q_{1\cdot 3} [c\ \alpha] \tag{53}$$

Obliczmy teraz wartości spółczynników przy Q.

Mnożąc równania układu (50) przez odpowiednie a i sumując, znajdziemy:

$$[a\ \alpha] = [p\ a\ a]\ Q_{1\cdot 1} + [p\ a\ b]\ Q_{1\cdot 2} + [p\ a\ c]\ Q_{1\cdot 3} \tag{53}$$

Podobnie, mnożąc te równania przez b i sumując,

otrzymamy:

$$[b\ \alpha] = [p\ a\ b]\ Q_{1\cdot 1} + [p\ b\ b]\ Q_{1\cdot 2} + [p\ b\ c]\ Q_{1\cdot 3} \tag{54}$$

Wreszcie, mnożąc przez c i sumując,

znajdziemy

$$[c\ \alpha] = [p\ a\ c]\ Q_{1\cdot 1} + [p\ b\ c]\ Q_{1\cdot 2} + [p\ c\ c]\ Q_{1\cdot 3} \tag{55}$$

Porównanie tych zależności z warunkiem (48) daje:

$$\begin{cases} [a\ \alpha] = 1 \\ [b\ \alpha] = 0 \\ [c\ \alpha] = 0 \end{cases} \tag{56}$$

Podstawiając te wartości do (53), znajdziemy ostatecznie

$$\left[\frac{\alpha\ \alpha}{p}\right] = Q_{1\cdot 1} \tag{57}$$

skąd według (45)

$$\begin{cases} p_x = \dfrac{1}{Q_{1\cdot 1}} \\ m_x = \pm m_0 \sqrt{Q_{1\cdot 1}} \end{cases} \tag{58}$$

W celu określenia wartości $Q_{1\cdot 1}$ należy zestawić równania (48), które tem się tylko różnią od równań normalnych, że zamiast niewiadomych x, y, z, występują spółczynniki $Q_{1.1}$, $Q_{1.2}$, $Q_{1.3}$, zamiast zaś wyrazów wolnych — z e r a, z wyjątkiem równania pierwszego, gdzie wyraz wolny $= -1$. Równania te nazwiemy r ó w n a n i a m i w a g dla I-ej niewiadomej. Podobnie, określając wagę drugiej niewiadomej, otrzymalibyśmy, mnożąc układ równań normalnych przez nieoznaczone czynniki $Q_{2.1}$, $Q_{2.2}$, $Q_{2.3}$ i sumując równanie analogicznie do (47),

$$\begin{cases} x\ \{[paa]\ Q_{2.1} + [pab]\ Q_{2.2} + [pac]\ Q_{2.3}\} + \\ + y\ \{[pab]\ Q_{2.1} + [pbb]\ Q_{2.2} + [pbc]\ Q_{2.3}\} + \\ + z\ \{[pac]\ Q_{2.1} + [pbc]\ Q_{2.2} + [pcc]\ Q_{2.3}\} + \\ - [pal]\ Q_{2.1} + [pbl]\ Q_{2.2} - [pcl]\ Q_{2.3} = O \end{cases} \tag{59}$$

Chcąc przedstawić drugą niewiadomą, jako funkcję linjową spostrzeżeń, należałoby wyrugować x i z, t. j. założyć:

$$\begin{aligned} [paa]\ Q_{2.1} + [pab]\ Q_{2.2} + [pac]\ Q_{2.3} &= 0 \\ [pab]\ Q_{2.1} + [pbb]\ Q_{2.2} + [pbc]\ Q_{2.3} &= 1 \\ [pac]\ Q_{2.1} + [pbl]\ Q_{2.2} + [pcl]\ Q_{2.3} &= 0 \end{aligned} \tag{60}$$

Wskutek czego otrzymalibyśmy z równania (59)

$$\begin{aligned} y &= + [pal]\ Q_{2.1} + [pbl]\ Q_{2.2} + [pcl]\ Q_{2.3} \\ &= + p_1 l_1 (a_1 Q_{2.1} + b_1 Q_{2.2} + c_1 Q_{2.3} \\ &\quad + p_2 l_2 (a_2 Q_{2.1} + b_2 Q_{2.2} + c_2 Q_{2.3}) + \end{aligned} \tag{61}$$

— — — — — — — — — — — —

Skąd po uwzdlędnieniu (41):

$$\begin{cases} \beta_1 = p_1 (a_1 Q_{2.1} + b_1 Q_{2.2} + c_1 Q_{2.3}) \\ - - - - - - - - - \\ \beta_n = p_n (a_n Q_{2.1} + b_n Q_{2.2} + c_n Q_{2.3}) \end{cases} \quad (62)$$

dalej:

$$\begin{cases} \beta_1 \beta_1 = \beta_1 p_1 (a_1 Q_{2.1} + b_1 Q_{2.2} + c_1 Q_{2.3}) \\ - - - - - - - - - - \\ \beta_n \beta_n = \beta_n p_n (a_n Q_{2.1} + b_n Q_{2.2} + c_n Q_{2.3}) \end{cases} \quad (63)$$

$$\begin{cases} \frac{\beta_1 \beta_1}{p_1} = \beta_1 (a_1 Q_{2.1} + b_1 Q_{2.2} + c_1 Q_{2.3}) \\ - - - - - - - - - - \\ \frac{\beta_n \beta_n}{p_n} = \beta_n (a_n Q_{2.1} + b_n Q_{2.2} + c_n Q_{2.3}) \end{cases} \quad (64)$$

$$\left[\frac{\beta\ \beta}{p}\right] = Q_{2.1} [a\ \beta] + Q_{2.2} [b\ \beta] + Q_{2.3} [c\ \beta] \quad (65)$$

Następnie, mnożąc układ (62) przez odpowiednie a i sumując, przez odpowiednie b i sumując, wreszcie przez odpowiednie c i sumując, znaleźlibyśmy:

$$\begin{cases} [a\ \beta] = [paa]\ Q_{2.1} + [pab]\ Q_{2.2} + [pac]\ Q_{2.3} \\ [b\ \beta] = [pab]\ Q_{2.1} + [pbb]\ Q_{2.2} + [pbc]\ Q_{2.3} \\ [c\ \beta] = [pac]\ Q_{2.1} + [pbc]\ Q_{2.2} + [pcc]\ Q_{2.3} \end{cases} \quad (66)$$

Skąd, po uwzględnieniu

$$\begin{cases} [a\ \beta] = 0 \\ [b\ \beta] = 1 \\ [c\ \beta] = 0 \end{cases} \quad (67)$$

mamy ostatecznie

$$\left[\frac{\beta\ \beta}{p}\right] = Q_{2.2} \quad (68)$$

Waga i średni błąd drugiej niewiadomej będą

$$p_y = \frac{1}{Q_{2.2}}$$

$$m_y = \pm m_o \sqrt{Q_{2.2}} \quad (69)$$

Dla trzeciej niewiadomej z otrzymamy analogicznie;

$$p_z = \frac{1}{Q_{3.3}}$$

$$m_z = \pm m_o \sqrt{Q_{3.3}} \qquad (70)$$

Uogólnienie. Chcąc określić wagę i średni błąd k-tej niewiadomej z układu m równań o m niewiadomych, należy zestawić dla tej niewiadomej równania wag (analogiczne do (48) i (60). Niewiadomemi w równaniach wag będą symbole

$$Q_{k.1}\ Q_{k.2} \ldots\ Q_{k.k} \ldots\ Q_{k.m} \ldots$$

Spółczynnikami przy niewiadomych są spółczynniki równań normalnych, wyrazem wolnym w k-tem równaniu jest -1, w pozostałych $m-1$ równaniach — zera.

Waga i średni błąd k-tej niewiadomej określą się jako

$$\begin{cases} p_k = \dfrac{1}{Q_{k.k}} \\ m_k = \pm m_0 \sqrt{Q_{k.k}} \end{cases} \qquad (71)$$

§ 343. Średnie błędy i wagi, wyznaczone z symboli Gaussa.

Ustalimy teraz bardzo ważną właściwość wag i ostatniej niewiadomej.

Weźmy w tym celu układ 3 równań normalnych (40) i napiszmy układ równań wag dla 3-ej niewiadomej:

$$\begin{cases} [paa]\,Q_{3.1} + [pab]\,Q_{3.2} + [pac]\,Q_{3.3} = 0 \\ [pab]\,Q_{3.1} + [pbb]\,Q_{3.2} + [pbc]\,Q_{3.3} = 0 \\ [pac]\,Q_{3.1} + [pbc]\,Q_{3.2} + [pcc]\,Q_{3.3} = 1 \end{cases} \qquad (72)$$

Zredukowany układ tych równań będzie:

$$\begin{aligned} [paa]\,Q_{3.1} + [pab]\,Q_{3.2} + [pac]\,Q_{3.3} &= 0 \\ [pbb.1]\,Q_{3.2} + [pbc.1]\,Q_{3.3} &= 0 \\ [pcc.2]\,Q_{3.3} - 1 &= 0 \end{aligned} \qquad (73)$$

skąd

$$Q_{3.3} = \frac{1}{[pcc.2]},$$

zaś

$$p_z = \frac{1}{Q_{3.3}} = [pcc.2] \qquad (74)$$

co znaczy, że waga ostatniej niewiadomej jest równa spółczynnikowi przy tej niewiadomej w ostatniem zredukowanem równaniu.

W celu określenia wag niewiadomych, możnaby więc rozwiązywać równania normalne tyle razy, ile jest niewiadomych, przyjmując kolejno za ostatnią niewiadomą x, y, z.

W ostatnich zredukowanych równaniach otrzymywalibyśmy kolejno niewiadome oraz ich wagi, jako spółczynniki.

Mielibyśmy, np., w wypadku 3 niewiadomych dla określenia x, oraz p_x:

$$\begin{cases} [p\,c\,c]\,z + [p\,b\,c]\,y + [p\,a\,c]\,x - [p\,c\,l] = 0 \\ [p\,b\,c]\,z + [p\,b\,b]\,y + [p\,a\,b]\,x - [p\,b\,l] = 0 \\ [p\,a\,c]\,z + [p\,b\,a]\,y + [p\,a\,a]\,x - [p\,a\,l] = 0 \end{cases}$$

po I-ej redukcji:

$$\begin{cases} [pbb.1]\,y + [pab.1]\,x - [pbl.1] = 0 \\ [pab.1]\,y + [paa.1]\,x - [pal.1] = 0 \end{cases}$$

po II-ej redukcji:

$$[paa.2]\,x - [pal.2] = 0$$

Układ zaś równań zredukowanych będzie:

$$[pcc]\,z + [pbc]\,y + [pac]\,x - [pcl] = 0$$

$$[pbb.1]\,y + [pab.1]\,x - [pbl.1] = 0$$

$$[paa.2]\,x - [pal.2] = 0$$

skąd

$$x = \frac{+\,[pal.2]}{[paa.2]}$$

$$p_x = [paa.2].$$

Należy jednak pamiętać przy określaniu wartości symboli Gaussa, że przy pierwszej redukcji ruguwano niewiadomą z, przy drugiej y (porówn. uwagi o rozwijaniu symboli na str. 777 - 8).

Podobnie, ustawiając y na ostatniem miejscu w równaniach normalnych, z zaś na drugiem, otrzymalibyśmy

$$p_y = [pbb.2].$$

§ 344. Waga przedostatniej niewiadomej, wyrażona zapomocą wagi ostatniej niewiadomej.

Z I-ego układu równań zredukowanych (w wypadku 3 niewiadomych):

$$[paa]\,x + [pab]\,y + [pac]\,z - [pal] = 0$$
$$[pbb\,.\,1]\,y + [pbc\,.\,1]\,z - [pbl\,.\,1] = 0$$
$$[pcc\,.\,2]\,z - [pcl\,.\,2] = 0$$

otrzymujemy wagę ostatniej niewiadomej:

$$p_z = [pcc\,.\,2] = [pcc\,.\,1] - \frac{[pbc\,.\,1]\,[pbc\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]}$$

Dla określenia wagi y przestawmy niewiadomą, wówczas układ II-gi zredukowanych równań będzie:

$$[paa]\,x + [pac]\,z + [pab]\,y - [pal] = 0$$
$$[pcc\,.\,1]\,z + [pcb\,.\,1]\,y - [pcl\,.\,1] = 0$$
$$[pbb\,.\,2]\,y - [pbl\,.\,2] = 0$$

Stąd waga y

$$p_y = [pbb\,.\,2] = [pbb\,.\,1] - \frac{[pbc\,.\,1]\,[pbc\,.\,1]}{[pcc\,.\,1]} =$$

$$= \frac{[pbb\,.\,1]\,[pcc\,.\,1]}{[pcc\,.\,1]} - \frac{[pbc\,.\,1]\,[pbc\,.\,1]}{[pcc\,.\,1]} =$$

$$= \frac{[pbb\,.\,1]}{[pcc\,.\,1]}\left\{[pcc\,.\,1] - \frac{[pbc\,.\,1]\,[pbc\,.\,1]}{[pbb\,.\,1]}\right\} = \frac{[pbb\,.\,1]}{[pcc\,.\,1]}\,[pcc\,.\,2]$$

lecz

$[pcc\,.\,2] = p_z$ z układu I-ego zredukowanych równań

więc

$$p_y = \frac{[pbb\,.\,1]}{[pcc\,.\,1]}\,p_z \qquad (75)$$

analogicznie w wypadku 4 niewiadomych na wyraz wagi przedostatniej niewiadomej otrzymalibyśmy:

$$p_z = \frac{[pcc\,.\,2]}{[pdd\,.\,2]}\,p_n \qquad (76)$$

Ostatnie wzory dają możność, stosując należycie analogję, wyrażać wagę przedostatniej niewiadomej w drodze mnożenia wagi ostatniej niewiadomej przez stosunek znanych spółczynników (z układu zredukowanych równań normalnych). Każde więc przestawienie miejsc niewiadomych w ukła-

dzie równań normalnych daje możność określenia odrazu wag dwu niewiadomych, wskutek czego ilość przestawień staje się dwa razy mniejsza od ilości niewiadomych.

§ 345. Sredni błąd spostrzeżenia o jednostce wagi.

Gdyby spostrzeżenia dokonane były z jednakową dokładnością, a więc z jednakowemi wagami, czyli średni błąd spostrzeżenia o jednostce wagi wyraziłby się w zależności od prawdziwych błędów ε_1 ε_2 ... ε_n, według ogólnego wzoru na średni błąd:

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}$$

Jednak wzoru tego nie możemy stosować, ponieważ błędy prawdziwe są nieznane. Gdybyśmy zamiast prawdziwych błędów podstawili pozorne, licznik ułamka pod pierwiastkiem uległby zmniejszeniu, gdyż z własności

$$[vv] = \text{minimum}$$

wynika

$$[vv] < [\varepsilon\varepsilon]$$

Aby ułamek podpierwiastkowy nie uległ zmianie, należy zmniejszyć również jego mianownik, t. j. założyć:

$$m^2_0 = \frac{[vv]}{n - k} = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}$$

gdzie

$$k > 0$$

W wypadku, gdy ilość n równań błędów równa jest ilości niewiadomych q t. j. gdy

$$n = q$$

średni błąd winien być wielkością nieoznaczoną, nie możemy bowiem scharakteryzować dokładności wyniku, określonego jednoznacznie. Ponieważ wtedy błędy pozorne $= 0$ więc i $[vv] = 0$, skąd dla nieoznaczonej wielkości:

$$m_0^2 = \frac{[vv]}{q - k} = \frac{0}{0}$$

i ponieważ

$$q - k = 0$$

więc:

$$k = q$$

i ostatecznie

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n - q}}$$

W wypadku spostrzeżeń o różnej dokładności redukujemy błędy pozorne do jednostki wagi, mnożąc każdy z nich przez pierwiastek kwadratowy z jego wagi.

Skąd średni błąd o jednostce wagi:

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n - q}} \qquad (77)$$

LITERATURA:

Prof. *E. Warchałowski:* Rachunek wyrównawczy według metody najmniejszych kwadratów.

Prof. *K. Weigel:* Rachunek wyrównawczy.

ROZDZIAŁ XIII.

TRIANGULACJA NIŻSZYCH RZĘDÓW.

§ 346. Historja powstania triangulacji, jako działu geodezji.

Od najdawniejszych czasów szereg uczonych poświęcał się badaniu kształtu i wymiarów ziemi. Już w 4-tym wieku przed narodzeniem Chrystusa Arystoteles przytaczał w swej księdze „O niebie“ dowody kulistości ziemi, pierwszym jednak uczonym, który dał uzasadnione wymiary kuli ziemskiej był Eratostenes (3 wiek przed Chrystusem).

Zasadą, na jakiej Eratostenes oparł swe obliczenie, nie odbiega od przyjętych przez współczesną naukę metod postępowania. Określanie wielkości promienia ziemi składa się z dwu typowych czynności: określenia długości łuku południka, co należy do prac geodezyjnych, oraz określania różnicy spółrzędnych geograficznych dwu punktów południka, o czem stanowią prace astronomiczne.

Istnieją również metody określenia długości promienia ziemskiego, posługujące się wyłącznie czynnościami geodezyjnemi, jak sposób Wrighta, polegający na pomiarze depresji (poniżenia poziomu), i Keplera, polegający na pomiarze wzajemnych odległości zenitalnych dwu punktów na powierzchni ziemi.

Metoda Wrighta, stosowana w praktyce, daje wątpliwe wyniki, gdyż na wielkość małego kąta depresji bardzo znacznie oddziaływa refrakcja, której wpływu zupełnie ściśle ująć nie można, która zaś ogromnie się odbija na długości obliczanego promienia.

Takie same zastrzeżenie dotyczy metody Keplera, przy stosowaniu której, mając odległość $A\,B$ (rys. 698) i sprzężone odległości zenitalne z_1 i z_2 punktów A i B, obliczamy z nich kąt $A\,O\,B = \beta = z_1 + z_2 - 180^0$; ponieważ możemy obliczyć rzut d prostej $A\,B$ na powierzchnię $C\,D$, która jest powierzchnią oceanu (a takową przyjmujemy za powierzchnię ziemi), określimy promień ziemi R z proporcji:

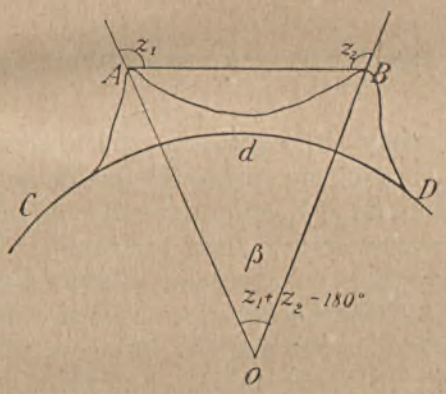
$$d : 2\pi\,R = \beta'' : (360 \cdot 60 \cdot 60)''$$

stąd

$$R = 206265'' \frac{d}{\beta''}$$

Przypuśćmy, że błąd określenia różnicy szerokości geograficznych wynosi około 1″, co w długości łuku południka stanowi powyżej 30 *m* Jeżeli mamy wielkość promienia ziemskiego określić z dokładnością np. do $\frac{1}{3000}$, t. j. do 2 *km.*, to z tą samą co najmniej dokładnością należy wymierzyć długość łuku południka między punktami o znanych szerokościach geograficznych. Ażeby więc błąd 30 *m*, powstały na skutek wpływu nieuniknionych błędów przy określeniu różnicy szerokości, odpowiadał dokładności pomiaru długości łuku południka, musiałby mieć łuk ten co najmniej długość, równą 30 *m* × 3000 = 90 *km.*

Łuk południka takiej długości bardzo trudno pomierzyć bezpośrednio z powodu przeszkód terenowych, to też dopóki ograniczano się



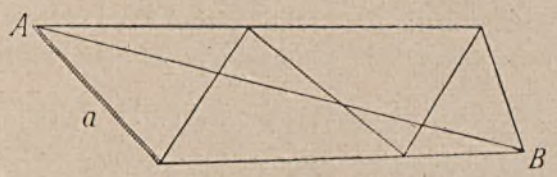
Rys. 698.

do bezpośrednich pomiarach długości, dopóty sprawa określania kształtu i wymiarów ziemi nie posuwała się naprzód.

Na początku XVII stulecia uczony holenderski Willebrord Snellius wpadł na pomysł pośredniego określania długości z szeregu trójkątów o wspólnych bokach. Trójkąty te dostatecznie dokładnie są oznaczone zapomocą jednego pomierzonego boku i wszystkich kątów; zrozumiałe jest, że w takim układzie trójkątów łatwo jest graficznie lub analitycznie obliczyć długości wszystkich boków i odległość między punktami *A* i *B*, które są wierzchołkami oddalonych od siebie trójkątów. Takie określanie długości *A B* zowie się pośredniem; zespół zaś czynności polowych i obliczeniowych, mających na celu określenie położenia wierzchołków trójkątów, wyznaczonych w terenie, zowie się *triangulacją* (rys. 609).

Następnym krokiem naprzód było wprowadzenie do czynności pomiarowych lunet z siatką nitek oraz tablic logarytmicznych do obliczeń przez Jean'a Picard'a w drugiej połowie XVII wieku.

Od tego czasu badania geodezyjne znacznie posunęły się naprzód; dzięki pomiarom triangulacyjnym ustalono, że ziemia nie jest kulą, a elipsoidą, powstałą od obrotu elipsy południkowej dokoła swej mniejszej osi.



Rys. 699.

W ciągu XVIII i XIX wieku dokonywano bardzo poważnych pomiarów łuków południków i równoleżników, na zasadzie których niejednokrotnie ustalano wymiary i spłaszczenie elipsoidy ziemskiej.

§ 347. Potrzeba oparcia pomiarów szczegółowych na punktach stałych.

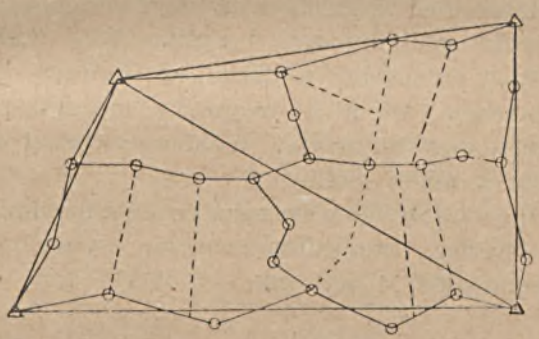
Skoro tylko mamy do czynienia z pomiarami bardzo znacznych przestrzeni i takowe probujemy wykonać metodami bądź to zakładania głównych i podrzędnych ciągów poligonowych, służących jako oparcie dla dalszych pomiarów szczegółowych, bądź to metodą zdjęć stolikowych, opartych już to na trójkątowaniu geometrycznem— lub na wyżej wymienionych ciągach teodolitowych, w krótkim bardzo czasie możemy się przekonać, że metody powyższe, wystarczające dla mniejszych obszarów, dla większych — wcale się nie nadają. Pomijając nawet wpływ krzywizny powierzchni ziemi na wyniki naszych pomiarów, musimy z konieczności stosować zawiłe w praktyce metody samoistnego wyrównania sieci poligonów; metody te w miarę powiększania się liczby zakładanych poligonów zaczynają stopniowo zawodzić i zniewalają nawet do wprowadzania niedopuszczalnych poprawek do prawidłowo pomierzonych ciągów. Aby pobieżnie chociaż uprzytomnić sobie trudności samoistnego wyrównania siatki poligonów, wyobraźmy sobie, że dla szczegółowego pomiaru wielkiego obszaru na gruncie założono bardzo wielką ilość poligonów mniej więcej w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach; wówczas okazałoby się, że wyrównać prawidłowo taki układ wielkiej ilości ciągów jest niemożliwością, zawsze bowiem ciągi, najprawidłowiej pomierzone, zostaną przy wyrównaniu wypaczone przez bardziej wadliwe, postępowanie zaś dalsze przy stopniowem powiększaniu liczby ciągów spowodowałoby:

1) zbyteczne wyszukiwanie błędów pomiaru nawet w tych ciągach, które zostały zupełnie ściśle pomierzone,

2) jaknajdalej posuniętą tolerancję w stosunku do niedopuszczalnych odchyłek w poszczególnych ciągach. Powstające trudności doprowadziłyby

wkońcu dla uzmysłowienia sobie faktu, że w tej powodzi ciągów każdy z nich jest jedynie fragmentem całości—drobnym jej szczegółem, ponieważ zaś praktyka miernicza poucza, iż kolejność pomiaru zawsze dąży od ogółu do szczegółu, a nigdy naodwrót, więc i w wypadku, gdy ciągi poligonowe ze względu na ich liczbę przybierają charakter szczegółów, należy oprzeć te ciągi na pomiarze ogólno-podstawowym mierzonych obszarów, mianowicie na triangulacji, czyli na trójkątowaniu trygonometrycznem.

Przez triangulację rozumiemy zespół czynności, mających na celu utworzenie układu dostatecznie wielkich trójkątów, których wierzchołki powinny być zupełnie ściśle wyznaczone tak w terenie zapomocą utrwalenia odpowiednich znaków, jak również w rachunku zapomocą odpowiednio obliczonych spółrzędnych. Rzut oka na rys. 700 wystarcza, żeby stwierdzić, że wyrównanie najzawilszej siatki poligonów, opartej na punktach triangulacyjnych, upraszcza się w bardzo wielkim stopniu i znacznie podnosi dokładność wyrównania, gdyż punkty triangulacyjne można łączyć ciągami poligonowemi I-szego rzędu, każdy z takowych ciągów zupełnie samodzielnie wyrówny-



Rys. 700.

wać między punktami triangulacyjnemi i dopiero wtedy, mając szkielet, utworzony z wyrównanych ciągów I-szego rzędu, możemy między ciągami I-szego rzędu wpleść cały systemat ciągów II-go rzędu, dowiązywanych do już wyrównanych punktów, dalej zaś dowiązywać do ciągów linje pomiarowe i zmierzyć szczegóły.

Ustalenie gradacji ciągów I-szo i II-rzędnych i linij pomiarowych spowodowane jest koniecznością odróżniania rzeczy bardziej od mniej ważnych; zrozumiałą więc jest rzeczą, że dokładniej będzie przeprowadzony pomiar i obliczenie ciągów I-go, niż II-go rzędu.

Zakładanych jednak zgóry norm dla pomiarów i obliczeń takich ciągów dać nie można, gdyż jakkolwiek gradacja ta może być zachowana wszędzie, to jednak wzgląd na kosztowność tej lub innej metody zmusza do obniżenia wymagań technicznych pod względem dokładności czynności pomiarowych. Tak więc przy pomiarach miejskich ciągi poligonowe zakładane będą zgodnie z wymaganiami instrukcji Ministerstwa Robót Publicz-

nych, przy pomiarach zaś gospodarczych, pracach regulacyjnych i t. p. — wymagania powyższej instrukcji byłyby zbyt uciążliwe.

To samo powiedzieć można o austrjackiej instrukcji katastralnej.

§ 348. Triangulacje wyższych i niższych rzędów.

Mówiliśmy poprzednio, że przy pomiarach większych przestrzeni należy założyć triangulację. Zwrócić jednak tutaj należy uwagę na rozciągliwość terminu „pomiary większych przestrzeni“ — gdyż możemy przez ten termin rozumieć państwo, powiat, duże miasto, lub, np., wielką wieś.

Już przez samą analogję do potrzeby zakładania różnorzędnych ciągów poligonowych nasuwa sie myśl, że i triangulacja w miarę wzrastania pokrytego nią obszaru, również winna mieć charakter kilkorzędnej. Rozpatrzmy, np., teren o przeciętnej długości i szerokości 300 *km*; poprzednio triangulację określiliśmy jako układ dostatecznie wielkich trójkątów, których wierzchołki są zupełnie ściśle wyznaczone tak w terenie, jak analitycznie. I w tem określeniu spotykamy nową niejasność, mianowicie: co znaczy układ dostatecznie wielkich trójkątów? Ponieważ triangulacja jest oparciem dla pomiarów poligonowych i stolikowych, więc za mniej więcej wystarczającą dla tych pomiarów wielkość, nie kłócącą się zbyt z określeniem układu dostatecznie wielkich trójkątów, możemy przyjąć dla boków trójkątów dwukilometrową odległość. Wystarczy ona i dla ciągów poligonowych i dla stolika w małej skali.

Otóż pobieżne obliczenie wskazuje, że powierzchnia trójkąta równobocznego o boku nawet czterokilometrowym wynosi około 7 km^2, dla naszego więc terenu 300 × 300 km^2 = 90000 km^2 takich trójkątów wypadnie 12000.

Ponieważ równoczesne obliczenie i wyrównanie tak wielkiego układu równorzędnych trójkątów byłoby zbyt zawiłe, więc przedewszystkiem należy założyć układ bardzo wielkich trójkątów, a dopiero później układ ten zapełnić drobniejszemi, nawiązanemi do większych. Lecz znów powstaje pytanie co mamy rozumieć przez bardzo wielkie trójkąty? Dotychczasowa, praktyka wskazuje, że trójkąty o bokach, przekraczających 100 *km*, są wyjątkami, spotykanemi w krajach górzystych; w krajach, jak Polska, pagórkowatych, lesistych warunki miejscowe pozwalają na budowę trójkątów o bokach 20 — 50 *km*, a często trudno osiągnąć wzajemną widoczność dwu punktów, nawet przy podniesieniu stanowisk obserwacyjnych o kilkanaście metrów ponad powierzchnią ziemi, z odległości już 20 *km*.

To też trójkąty powyżej 20 *km* będziemy uważać za trójkąty I-ego rzędu. W rozpatrywanym 90000 km^2 obszarze takich trójkątów ułożylibyśmy kilkaset. Od kilkuset trójkątów I-ego rzędu przejść do kilkunastu tysięcy trójkątów II-go rzędu, o bokach 3 — 4 *km* byłoby pominięciem zasad stopniowania. To też w Niemczech ustalono aż 4 kategorje trójkątów, a mianowicie:

I-ego rzędu o bokach ponad 20 *km*.
II-ego rzędu o bokach od 10 do 20 *km*.
III-ego rzędu o bokach od 3 do 10 *km*.

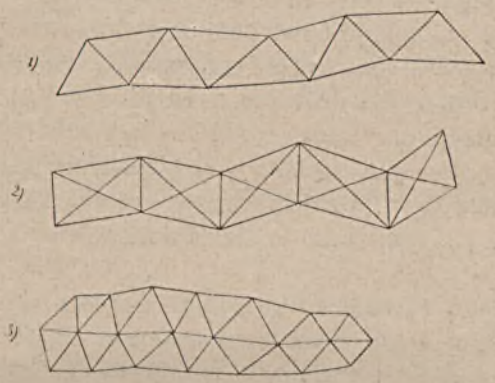
IV-ego rzędu o bokach do 3 *km*.

We Francji, Rosji, spotykamy 3 kategorje trójkątów:

1) ponad 20 *km*.

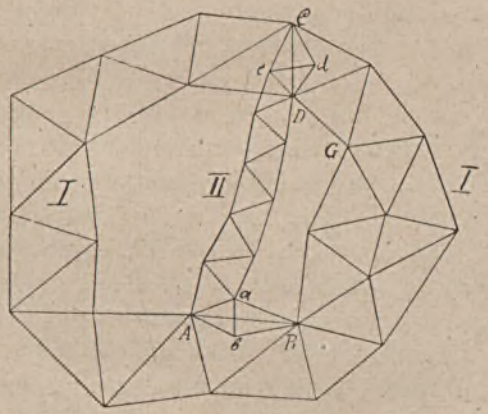
2) od 6 do 20 *km*.

3) o bokach, krótszych od 6-ciu *km*, przytem punkty trzeciorzędne wyznaczają się często tylko wcięciami wprzód lub wstecz.



Rys. 701.

Zaznaczyć należy, że nie wszystkie państwa mogły sobie pozwolić na pokrycie całego obszaru siecią trójkątów. Rosja, np., miała wyłącznie szeregi łańcuchów trójkątów I - rzędnych, łańcuchy te były łączone łańcu-



Rys. 702.

chami drugorzędnych trójkątów, pomiędzy któremi często zakładano t. zw. niwelacyjno-poligonowe ciągi, jako podstawę dla zdjęć szczegółowych.

Łańcuchy triangulacyjne zakładano w różny sposób, mianowicie spotykamy 3 typy łańcuchów:

1) łańcuch trójkątów, (rys. 701, 1)

2) łańcuch czworokątów, (rys. 701, 2)

3) łańcuch wielokątów (rys. 701, 3).

Pierwszy typ wymaga dla założenia, pomiaru i wyrównania najmniej czasu; drugi typ jest najdokładniejszy; trzeci typ jest dokładniejszy od pierwszego i kryje w kierunku prostopadłym do łańcucha większy obszar od obydwu poprzednich.

Łańcuchy triangulacyjne mogą tworzyć sieć łańcuchów trójkątów wyższego rzędu, która to sieć dla pełnego pokrycia terenu może być uzupełniona siecią trójkątów niższych rzędów, a te dopiero służą jako podstawa dla ciągów poligonowych lub zdjęć stolikowych.

Tak rys. 702 wskazuje przykład zapełnienia części obszaru wewnątrz wieńca trójkątów I-ego rzędu zapomocą łańcucha drugiego rzędu, związanego z I-ym rzędem czworobokami rombowemi $AaBb$ i $CcDd$.

Prócz triangulacji dla celów państwowych (dla zestawiania map) zakładano triangulacje dla celów ściśle naukowych wzdłuż południków, lub równoleżników; prace tego rodzaju bardzo często wykonywane były siłami i środkami kilku państw; jako najważniejsze przytoczyć można następujące pomiary:

1) pomiar 52-go równoleżnika objął prace angielskich, belgijskich, niemieckich i rosyjskich geodetów na przestrzeni $63^{0}\,40'$ równoleżnika,

2) szwedzko-rosyjski pomiar o rozciągłości $25^{0}\,20'$ łuku południka,

3) indyjski łuk południka o rozciągłości $23^{0}\,50'$,

4) amerykański pomiar 39-go równoleżnika o długości $48^{0}\,45'$,

5) środkowo-europejskie pomiary i wiele innych.

Niezależnie od powyżej rozpatrzonych typów triangulacji spotykamy takowe prowadzone w daleko skromniejszym zakresie; są to prace, prowadzone dla celów ściśle gospodarczych, jak np. przy regulacji rzek, dla potrzeb górnictwa, pomiarów miejskich, regulacyjnych, gospodarczych i t. p.

Wszystkie te triangulacje noszą nazwę triangulacyj lokalnych.

Przejdziemy do szczegółowego ich rozpatrzenia, pomijając triangulacje państwowe.

Zaznaczyć wreszcie należy, że punkty trygonometryczne wyższych rzędów: I-go do III-go włącznie, są określone co do swego położenia spółrzędnemi geograficznemi. Skoro takie punkty trygonometryczne mają być użyte dla celów geodezji niższej, przeliczamy spółrzędne geograficzne na prostokątne kuliste, odniesione do południka, przechodzącego przez punkt główny danego układu, a przyjętego za oś x-ów. Tak obliczone spółrzędne prostokątne punktów trygonometrycznych wyższego rzędu upraszczają rachunek punktów niższego rzędu, oraz umożliwiają nawiązanie do tych punktów sieci poligonowej. Tego rodzaju przeliczanie spółrzędnych geograficznych na prostokątne stosuje się u nas, np., w b. zaborze pruskim (formularz 6-ty pruskiej instrukcji katastralnej). Na ziemiach b. zaboru rosyjskiego triangulacji niższych rzędów prawie niema, wobec czego ma wielkie zastosowanie triangulacja lokalna.

§ 349. Triangulacja lokalna.

Triangulacja lokalna zakłada się, gdy dla wykonania dokładnego pomiaru w danym terenie nie mamy gotowych punktów triangulacji pań-

stwowej, lub jeżeli takowe istnieją, ale są albo zbyt odległe i niedogodnie dla potrzeb naszego pomiaru rozlokowane, albo są wyznaczone z mniejszą od wymaganej przez projektowany pomiar dokładnością. Aby określić całokształt czynności, z których składa się triangulacja lokalna, wróćmy znów do naszego zasadniczego określenia triangulacji, jako układu dostatecznie wielkich trójkątów, których wierzchołki są zupełnie ściśle wyznaczone w terenie zapomocą utrwalenia odpowiednich znaków, jak również w rachunku na zasadzie odpowiednio obliczonych spółrzędnych.

Przeanalizujmy to określenie szczegółowo.

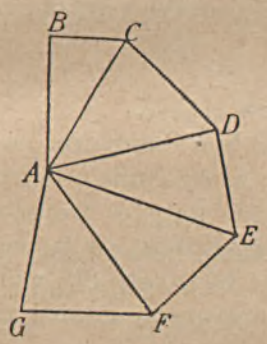
A. Przedewszystkiem termin „układ trójkątów“ wyraża, że trójkąty te są ze sobą powiązane w jeden układ, jako całość — może więc ten układ być w najprostszej swej formie:

1) łańcuchem trójkątów;

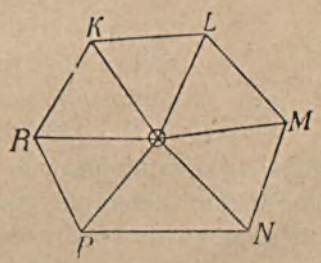
2) wielobokiem *ABCDEFG*, rozbitym na trójkąty przekątnemi, lub



Rys. 703.



Rys. 704.



Rys. 704a.

wielobokiem, podzielonym na △-ty prostemi, łączącemi pewien punkt *O* wewnątrz wieloboku *KLMNPTR* z jego wierzchołkami. Wielobok *ABCDEFG* możemy po rozbiciu go na trójkąty uważać za (rys. 704) rozwinięty wachlarzowato układ łańcuchowy, wielobok *MNPTRKL*, całkowicie zamknięty, po rozbiciu go na szereg wewnętrznych trójkątów, nosi swoistą nazwę układu centralnego trójkątów (rys. 704 a).

Wszystkie te układy cechuje ta właściwość, że sąsiadujące trójkąty mają wspólne boki; innego układu trójkątów nie nazwiemy triangulacją (rys. 705).



Rys. 705.

B. Definicja triangulacji wskazuje, że wierzchołki trójkątów winny być ściśle wyznaczone w terenie zapomocą utrwalenia odpowiednich znaków; należy więc określić typy, sposób budowy i utrwalenia tych znaków.

C. Wyznaczenie położenia wierzchołków trójkątów zapomocą odpowiednich spółrzędnych wymaga:

a) ustalenia układu spółrzędnych;

b) zestawienia wszystkich tych danych, z których możemy obliczyć spółrzędne wierzchołków trójkątów w danym układzie.

W triangulacjach lokalnych przyjmujemy, jako najprostszy, układ prostokątnych płaskich spółrzędnych, oznaczając kierunek południe—północ jednego punktu jako oś *XX*-ów, kierunek zachód—wschód, jako oś *YY*-ów.

Aby w takim układzie wyznaczyć spółrzędne wierzchołków trójkątów, należy uprzednio określić elementy danej siatki trójkątów:

1) azymuty boków;

2) długości boków;

3) spółrzędne dowolnego punktu siatki, które wyznaczymy dowolnie albo przy pomocy nawiązania do już określonego punktu.

Dla otrzymania azymutów boków należy mieć azymut dowolnego boku i wszystkie kąty, wówczas, oznaczając kolejne wierzchołki literami $n-1\,n$, $n-1$, dla azymutu boku następnego korzystamy ze wzoru $(n, n+1) = (n-1, n) \pm 180^0 \mp \frac{\beta}{\alpha}$, czytając go: azymut boku następnego równa się azymutowi boku poprzedniego, więcej albo mniej (co dogodniejsze w rachunku) 180^0, mniej kąt prawy, idąc od poprzedniego do następnego boku, lub więcej kąt lewy.

Rozpatrzmy trójkąt *ABC*, w którym mamy azymut (*AB*) i kąty *A B C*; wówczas, mając azymut *AB*, możemy wyznaczyć azymut *BC* dwukrotnie, a mianowicie:



Rys. 706.

1) za pośrednictwem kąta *B*,

2) za pośrednictwem kątów *A* i *C*.

Skoro obydwa wyniki mają być identyczne, wynika z tego konieczność uprzedniego zachowania warunku, by: $C + A + B = 180^0$, t. j. pomierzone kąty w trójkątach powinny być ściśle wyrównane przed obliczeniem azymutów, w przeciwnym bowiem razie, różnemi drogami idąc, otrzymywać będziemy dla wielkości azymutów tych samych boków różne wyniki, przyczem stopień rozbieżności zależy od dokładności pomiaru kątów.

Powstaje więc kwestja wyrównania siatki, co jest bardzo ważnym etapem obliczenia triangulacji.

Tylko po wyrównaniu sieci będziemy mogli obliczyć azymuty wszystkich boków.

Długość boków trójkątów możemy otrzymać z bezpośredniego pomiaru albo trygonometrycznie.

Pamiętając jednak, że boki trójkątów są dostatecznie wielkie, by teren na całej ich rozciągłości nadawał się do ścisłego pomiaru, oraz, że bezpośredni pomiar tych boków zająłby zbyt wiele czasu, pomijamy ten sposób otrzymywania długości boków trójkątów, zwany trójkątowaniem linjowem, a zajmiemy się wyłącznie metodą trygonometrycznego wyznaczenia długości boków.

Metoda ta polega na tem, że, mając bezpośrednio pomierzony jeden bok oraz wszystkie kąty wyrównane, do obliczenia długości boków stosujemy twierdzenie o stosunku boków trójkąta, odpowiadającym stosunkowi sinusów przeciwległych kątów — mianowicie, dla rysunku 707:

z trójkąta ABC : $CB = \frac{AB \,.\, \sin 2}{\sin 3}$;

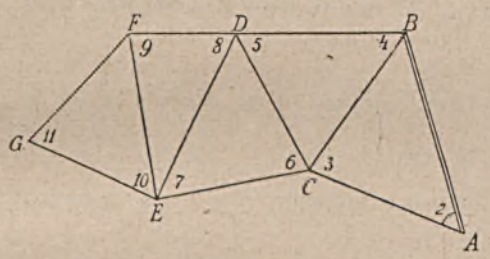
z trójkąta CBD : $CD = \frac{CB \cdot \sin 4}{\sin 5} = \frac{AB \cdot \sin 2 \cdot \sin 4}{\sin 3 \cdot \sin 5}$;

„ „ CDE : $ED = \frac{CD \cdot \sin 6}{\sin 7} = \frac{AB \cdot \sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6}{\sin 3 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7}$;

„ „ EFD : $EF = \frac{ED \cdot \sin 8}{\sin 9} = \frac{AB \cdot \sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8}{\sin 3 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7 \cdot \sin 9}$;

„ „ EFG : $EG = \frac{EF \cdot \sin 10}{\sin 11} = \frac{AB \cdot \sin 2 \cdot \sin 4 \cdot \sin 6 \cdot \sin 8 \cdot \sin 10}{\sin 3 \cdot \sin 5 \cdot \sin 7 \cdot \sin 9 \cdot \sin 11}$

A więc każdy bok wyznaczony został zapomocą boku AB, zwanego bazą lub podstawą, i sinusów wyrównanych kątów.



Rys. 707.

Jak widzieliśmy, punktem wyjścia do określenia długości boków służy bezpośrednio mierzony bok, zwany bazą lub podstawą. Ponieważ bazę należy mierzyć bardzo ściśle, a więc precyzyjnemi przyrządami i przytem kilkakrotnie, przeto pomiar taki jest uciążliwy, kosztowny i długi, prócz tego nie zawsze łatwo znaleźć odpowiednio długą prostą, nadającą się do pomiaru. Z tych względów rzadko właściwy bok układu trójkątów bywa mierzony; długość jego obliczamy zwykle trygonometrycznie z krótszej, bezpośrednio pomierzonej, bazy.

Przejście od bezpośrednio pomierzonej bazy do pierwszego boku triangulacji nazywamy przeniesieniem podstawy lub przeniesieniem bazowem.

Przeniesienia bazy b na bok trójkąta AB dokonywamy albo za pośrednictwem jednego trójkąta o pomierzonych wszystkich kątach i najkrótszym boku, bazie, bezpośrednio na gruncie pomierzonej, lub też zapomocą kilku trójkątów, ułożonych odpowiednio w układ trójkątów przeniesienia bazowego.

Przeniesienie bazy na bok trójkąta oraz pomiar bazy wymagają bardzo starannego wykonania, gdyż na tych czynnościach opiera się cała sieć triangulacyjna.

Aby zrozumieć związek, zachodzący między dokładnością pomiaru kątów a dokładnością określania boków sieci triangulacji lokalnej, nie zagłębiając się zbytnio w specjalne dociekania w tej dziedzinie, rozpatrzmy pobieżnie tę sprawę.

350

§ 320. O dokładności pomiaru kątów w trójkątach i o ilości trójkątów w danym terenie.

Załóżmy, że bazę pomierzono bez błędu, natomiast kąty są obarczone błędami prawdziwemi $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \ldots\ \varepsilon_n$ Wówczas $EG = X$ (rys. 707) obciążone zostaje błędem ε_x, będzie więc:

$$(X + \varepsilon_x) = b\,\frac{\sin(2+\varepsilon_2)\sin(4+\varepsilon_4)\ldots\sin(10+\varepsilon_{10})}{\sin(3+\varepsilon_3)\sin(5+\varepsilon_5)\ldots\sin(11+\varepsilon_{11})};$$

skąd

$$\log(X+\varepsilon_x) = \lg b + \lg\sin(2+\varepsilon_2) + \lg\sin(4+\varepsilon_4) + \ldots \lg\sin(10+\varepsilon_{10}) -$$
$$- \lg\sin(3+\varepsilon_3) - \lg\sin(5+\varepsilon_5) - \ldots \lg\sin(11+\varepsilon_{11});$$

lecz ponieważ

$\varepsilon_x, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_{11}$ są nieznaczne wobec X, 1, 2, ... 11,

więc

$$\lg(X+\varepsilon_x) = \lg X + \varepsilon_x r_x$$
$$\lg\sin(1+\varepsilon_1) = \lg\sin 1 + \varepsilon_1 r_1$$
$$\text{— — — — — — — — —}$$
$$\text{— — — — — — — — —}$$
$$\lg\sin(1+\varepsilon_1) = \lg\sin 1 + \varepsilon_{11} r_{11}$$

W wypisanych równaniach rozumiemy przez r_x zmianę logarytmu odpowiadającą zmianie liczby X o jednostkę, a przez $r_1, r_2, \ldots r_{11}$ zmianę logarytmu sinusa kąta, odpowiadającą zmianie kąta o jedną sekundę.

W ten sposób otrzymujemy:

$$\lg X + \varepsilon_x r_x = \lg b + \lg\sin 2 + \varepsilon_2 r_2 + \lg\sin 4 + \varepsilon_4 r_4 + \ldots - \lg\sin 11 - \varepsilon_{11} r_{11};$$

ponieważ zaś równanie na X daje:

$$\lg X = \lg b + \lg\sin 2 + \lg\sin 4 + \ldots - \lg\sin 11,$$

więc, odejmując 2-gie równanie od 1-go, mamy:

$$\varepsilon_x r_x = \varepsilon_2 r_2 + \varepsilon_4 r_4 + \ldots + \varepsilon_{10} r_{10} - \varepsilon_3 r_3 - \ldots - \varepsilon_{11} r_{11}.$$

oraz

$$\varepsilon_x = \varepsilon_2\frac{r_2}{r_x} + \varepsilon_4\frac{r_4}{r_x} + \ldots \varepsilon_{10}\frac{r_{10}}{r_x} - \varepsilon_3\frac{r_3}{r_x} - \ldots \varepsilon_{11}\frac{r_{11}}{r_x}$$

Przechodząc do błędów średnich, otrzymujemy:

$$m_{\varepsilon x} = \pm\sqrt{\left(\frac{r_2}{r_x} m_{\varepsilon 2}\right)^2 + \left(\frac{r_4}{r_x} m_{\varepsilon 4}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{r_{11}}{r_x} m_{\varepsilon 11}\right)^2};$$

lecz skoro błędy prawdziwe są różnicami pomiędzy prawdziwemi wielkościami X, I, II, ... i XI a wynikami pomiarów tych wielkości, więc średni błąd, np.

$$m_{\varepsilon x} = \pm \sqrt{m^2{}_x + m^2{}_x},$$

gdyż

$$\varepsilon_x = X - x,$$

a ponieważ średni błąd prawdziwej wielkości X jest zerem, przeto będzie

$$m_{\varepsilon x} = m_x$$

i analogicznie

$$m_{\varepsilon_1} = m_1$$

$$m_{\varepsilon_2} = m_2$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$m_{\varepsilon_{11}} = m_{11}$$

skąd

$$m_x = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_x}\, m_2\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_x}\, m_4\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_x}\, m_{11}\right)^2}$$

Jeżeli teraz założymy, że kąty pomierzono jednakowo dokładnie

i

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_{11} = m,$$

to otrzymamy z poprzedniego równania:

$$m_x = m \sqrt{\left(\frac{r_2}{r_x}\right)^2 + \left(\frac{r_4}{r_x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{r_{11}}{r_x}\right)^2} =$$

$$= \frac{m}{r_x} \sqrt{r_2{}^2 + \ldots + r_{11}{}^2}$$

W wypadku równobocznych △-ów

$$r_2 = r_4 = r_{11} = r,$$

zaś w wypadku dowolnych △-ów, zastępując liczbę podpierwiastkową n-krotną średnią r^2, gdzie n oznacza liczbę trójkątów, oddzielających bok X od bazy, otrzymamy:

$$m_x = \pm \frac{m}{r_x} \sqrt{n\, r^2} \qquad m_x = \pm \frac{rm}{r_x} \sqrt{n}$$

stąd wyciągamy ważny wniosek: średni błąd boku siatki rośnie proporcjonalnie do wzrostu średniego błędu pomiaru kątów i jest proporcjonalny do pierwiastku kwadratowego z ilości trójkątów, oddzielających dany bok od bazy, oraz wzrasta przy ostrych kątach, użytych do obliczenia boków.

Z powyższego wynika, że należy dążyć do możliwie dokładniejszego pomiaru kątów i do najmniejszej liczby trójkątów w danym terenie.

U W A G A: Zestawmy powyższy wniosek z zagadnieniem czysto praktycznem, a mianowicie określmy, z jakim średnim błędem należy mierzyć kąty, by przy 4-kilometrowych bokach wyznaczyć długość ich z dokładnością do 0,1 *m*. Przyjmijmy, że w trójkącie *A B C* określamy bok *b* z boku *c*, wymierzonego bardzo ściśle, i kątów *B* i *C* o średnich błędach m_β i m_c.

Ponieważ:

$$b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C};$$

wobec tego, że *c* przyjmujemy za zupełnie dokładną wielkość, więc średni błąd boku *b* będzie równy (ze wzoru na średni błąd funkcji):

$$m_b = c \cdot m \left(\frac{\sin B}{\sin C}\right) = c \sqrt{\left(\frac{\cos B}{\sin C}\right)^2 m^2{}_\beta + \left(\frac{\sin B \cdot \cos C}{\sin^2 C}\right)^2 m^2{}_c} =$$

$$= b \frac{\sin C}{\sin B} \sqrt{\left(\frac{\cos B}{\sin C}\right)^2 m^2{}_\beta + \left(\frac{\sin B \cdot \cos C}{\sin^2 C}\right)^2 m^2{}_c} =$$

$$= b \sqrt{\frac{\cos^2 B \cdot \sin^2 C}{\sin^2 B \cdot \sin^2 C} m^2{}_\beta + \frac{\sin^2 C \cdot \sin^2 B \cdot \cos^2 C}{\sin^2 B \cdot \sin^2 C \cdot \sin^2 C} m^2{}_c} =$$

$$= b \sqrt{\operatorname{ctg}^2 B \cdot m^2{}_\beta + \operatorname{ctg}^2 C \, m^2{}_c};$$

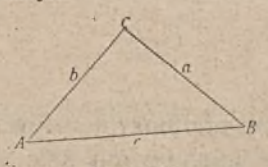
Przypuśćmy, że trójkąt nasz jest równoboczny, t. j. $B = C = 60^0$, i kąty mają być mierzone jednakowo ściśle, t. j. $m_B = m_c = m_k$.

Wówczas:

$$m_b = \pm b \sqrt{2 \operatorname{ctg}^2 60^0 m^2{}_k} = \pm b \, m_k \operatorname{ctg} 60^0 \sqrt{2};$$

stąd

$$m_k = \pm \frac{m_b}{b \cdot \operatorname{ctg} 60^0 \sqrt{2}};$$



Rys. 708.

lecz założyliśmy $m_b = 0{,}1$ *m*. przy $b = 4000$ metrów, zaś

$$\operatorname{ctg} 60^0 \sqrt{2} = 0{,}82,$$

więc

$$m_k = \frac{0{,}1}{3280} = \frac{1}{32800},$$

zatem w mierze kątowej otrzymujemy, że $m''_k = 6''$;

Aby 20-sekundowym teodolitem otrzymać jako średni błąd pomiaru kąta $6''$, przyjmując za średni błąd jednorazowego pomiaru kąta przy dwu

położeniach lunety 20″, należy wykonać pomiar kąta kilkakrotnie; wówczas ze wzoru na średni punkt średniej arytmetycznej $M = \frac{m}{\sqrt{n}}$; przyjmując $M = 6''$ i $m = 20''$, otrzymamy ilość niezbędnych pomiarów, mianowicie:

$$n = \frac{m^2}{M^2} = \frac{400}{36} = (12)$$

a przy 10-sekundowym teodolicie, otrzymamy:

$$n = \frac{m^2}{M^2} = \frac{100}{36} = (3) \quad \text{pomiary}$$

Ten przykład dosadnie podkreśla, jak dalece starannie należy prowadzić prace triangulacyjne, by dojść do ścisłych wyników, jeżeli nawet przy tak dokładnym pomiarze kątów otrzymujemy już 10 *cm.* błędu w boku tylko jednego trójkąta.

§ 351. Kształt trójkątów.

Powyżej określiliśmy średni błąd obliczonego boku; wypiszmy taki błąd dla boków b i a:

$$m_b = b\sqrt{ctg^2\ B\ m^2_B + ctg^2\ C\ m^2_c}$$

i przez analogję

$$m_a = a\sqrt{ctg^2\ A\ m^2_A + ctg^2\ C\ m^2_c}$$

Skąd kwadraty stosunkowych średnich błędów będą:

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = ctg^2\ B\ m^2_B + ctg^2\ C\ m^2_c$$

$$\left(\frac{m_a}{b}\right)^2 = ctg^2\ A\ m^2_A + ctg^2\ C\ m^2_c$$

Z tych wzorów widzimy, że średnie błędy obliczonych boków zależą nietylko od średnich błędów m_A i m_C pomiaru kątów, a więc od dokładności pomiaru, lecz także i od wielkości kątów A i C, a zatem od kształtu trójkątów.

Przyjmując średnie błędy pomiaru kątów za jednakowe, t. j.

$$m_A = m_B = m$$

ze wzorów

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = m^2\ (ctg^2\ B + ctg^2\ C)$$

$$\left(\frac{m_a}{a}\right)^2 = m^2 \, (ctg^2 A + ctg^2 C)$$

wnioskujemy, że jednakowe dokładne określenie boków a i b będzie miało miejsce wówczas, gdy

$$\frac{m_B}{b} = \frac{m_a}{a}$$

to zaś będzie zachodzić przy

$$A = B = x,$$

a więc w trójkątach równoramiennych.

Oczywiście

$$C = 180 - 2\,x$$

i każde równanie na stosunkowy średni błąd boku zmienia się na np.,

$$\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 = m^2 \, (ctg^2 x + ctg^2 \, 2\,x)$$

Odnajdźmy takie x przy stałem m, by

$$ctg^2 \, x + ctg^2 \, 2\,x = \text{Min.}$$

Mamy:

$$ctg^2 \, 2\,x = \left(\frac{ctg^2 \, x - 1}{2 \, ctg \, x}\right)^2$$

oznaczmy:

$$ctg^2 \, x = y$$

i znajdźmy takie y, by

$$y + \frac{(y-1)^2}{4\,y} = \text{Min.}$$

Otrzymujemy

$$1 + \frac{8\,y\,(y-1) - 4\,(y-1)^2}{16\,y^2} = 0,$$

skąd

$$20\,y^2 = 4$$

oraz

$$y = \sqrt{\frac{1}{5}}$$

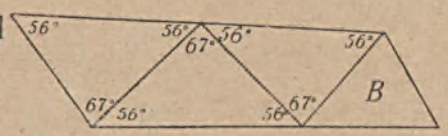
i

$$ctg\,x = \sqrt{y} = \sqrt[4]{\frac{1}{5}}$$

skąd

$$A = B = x = 56^0\,15' \quad \text{i} \quad C = 67^0\,30'$$

Stosowanie w praktyce układu trójkątów o kątach, nie odbiegających od powyższych wielkości, mających tylko teoretyczne znaczenie, jest po pierwsze zbyt trudne i wobec zmiennych warunków terenowych niemożliwe, a po drugie prowadziłoby do stopniowego zmniejszania długości boków (idąc od *A* do *B*), lub odwrotnie (patrz rys. 709), co jest niepożądane, gdyż wówczas na danym terenie należałoby zakładać dość wiele trójkątów, znacznie różniących się co do wielkości.



Rys. 709.

Wobec tego w praktyce dążymy do zakładania trójkątów równobocznych, dopuszczając wobec trudności terenowych dość daleko idące ustępstwa, mianowicie: unikamy kątów mniejszych od 30° i większych od 120°.

Poprzestając na przytoczonych rozważaniach, które wyjaśniły pobieżnie, jakie kąty i trójkąty są najodpowiedniejsze przy triangulacjach i jak dokładnie należy wykonywać pomiary kątów, możemy obecnie przejść do ustalenia kolejności poszczególnych czynności przy pomiarach triangulacyjnych.

Stwierdzamy więc, że każda triangulacja lokalna składa się z następujących czynności:

1) obranie podstawy i punktów sieci lokalnej w terenie,
2) utrwalenie punktów triangulacyjnych,
3) pomiar azymutu,
4) pomiar podstawy,
5) pomiar kątów w sieci głównej i podstawowej,
6) wyrównanie i obliczenie triangulacji,
7) uzupełnianie sieci,
8) wykorzystanie sieci lokalnej dla ciągów teodolitowych i zdjęć stolikowych.

§ 352. Obranie podstawy i punktów sieci lokalnej w terenie.

Ponieważ triangulacja lokalna służy za podstawę do szczegółowych pomiarów, więc punkty triangulacji lokalnej powinny być w terenie obrane w taki sposób, by mogły służyć za punkty wyjścia dla ciągów poligonowych lub zdjęć stolikowych.

Zadanie takie nie zawsze jest łatwe do wypełnienia, często bowiem pewne szczegóły topograficzne uniemożliwiają obranie punktu triangulacyjnego na linji głównych ciągów poligonowych, które, zgodnie z wymaganiami teorji, powinny bardzo niewiele odchylać się od linji prostej i winny biec w terenie, najkorzystniejszym do pomiaru prostych.

Punkty zaś triangulacyjne powinny być tak obierane, by:

1) wzajemnie były widoczne,

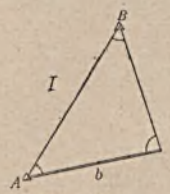
2) trójkąty, których wierzchołkami są punkty triangulacyjne, były możliwie zbliżone do równobocznych, a w drodze ustępstwa dla warunków terenowych kąty zupełnie odrębnych trójkątów w sieci mogą się wahać w granicach od 30° do 120°.

Nie zawsze udaje się obrać punkty triangulacyjne w ten sposób, by czyniły zadość warunkowi uzgodnienia ich położenia z położeniem ciągów poligonowych.

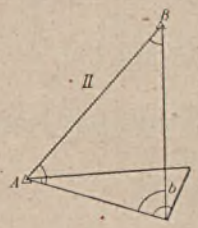
Sprawę komplikuje ponadto konieczność trygonometrycznego przeniesienia bazy na bok trójkąta sieci; w wypadku, gdy boki sieci są zbyt długie, lub nie nadają się do bezpośredniego pomiaru długości, trójkąty przeniesienia bazy na bok sieci głównej podlegają również pewnym warunkom; sama baza powinna być obrana tam tylko, gdzie jest odpowiedni teren do jej pomiaru i, jakkolwiek zawsze można ułożyć trójkąty przeniesienia bazowego w pewien układ, oparty na punktach sieci głównej — to jednak pamiętać należy, że im układ ten jest prostszy, tem ściślej wyznaczy się z bazy bok trójkąta sieci głównej.

Ze spotykanych w praktyce goedezyjnej przeniesień bazy na bok trójkąta sieci głównej podać można cały szereg siatek podstawowych.

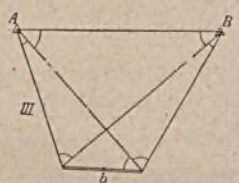
Na umieszczonych rysunkach linja, oznaczona dwiema prostemi jest bazą; prosta AB oznacza bok trójkąta sieci głównej, na który trygonome-



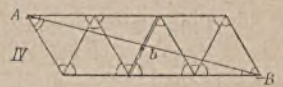
Rys. 710.



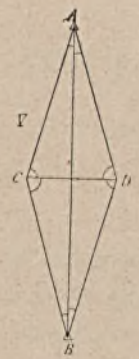
Rys. 710a.



Rys. 710b.



Rys. 710c.



Rys. 710d.



Rys. 710e.

trycznie przenosimy bazę b; przy wierzchołkach oznaczone są kąty, które bezwzględnie należy pomierzyć rys. 710, b, c, d, e.

Rysunki oznaczają co następuje:

I — przeniesienie bazy za pośrednictwem jednego trójkąta;

II — przeniesienie bazy za pośrednictwem dwu trójkątów;

III — przeniesienie bazy za pośrednictwem czworokąta geodezyjnego;

IV — przeniesienie bazy za pośrednictwem łańcucha trójkątów;

V — przeniesienie bazy za pośrednictwem czworokąta geodezyjnego, kształtu rombu, którego mniejsza przekątna jest bazą;

VI — podwójną kombinację rysunku V.

Za najbardziej racjonalne przeniesienie bazy w triangulacjach uważać należy proste rombowe przeniesienie (rys. V), gdyż, aby przejść na bok trójkąta o danej długości, w przeniesieniu rombowem wypadnie pomierzyć krótszą bazę, osiągając tę samą dokładność, którą osiągnęlibyśmy zapomocą pomierzenia dłuższej bazy w innego rodzaju przeniesieniu.

Jeśli więc za kształt siatki podstawowej przyjmiemy rombowe przeniesienie, to, mając w terenie bazę o pewnej długości, musimy obrać jako

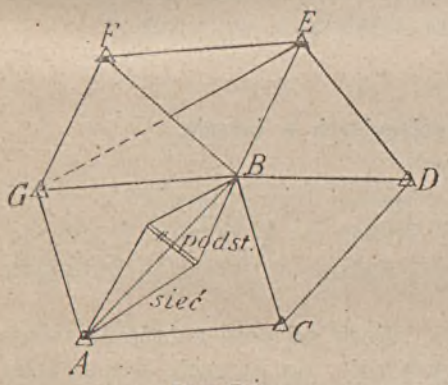
wierzchołki pierwszego boku sieci głównej punkty, leżące mniej więcej na prostopadłej do środka bazy, a oddalone od niej o odległości, równe dwom do dwu i pół długościom bazy.

Punkty te będą pierwszemi punktami sieci lokalnej, dalsze punkty należy obierać w zależności od konfiguracji terenu, na którym ma być założona sieć lokalna.

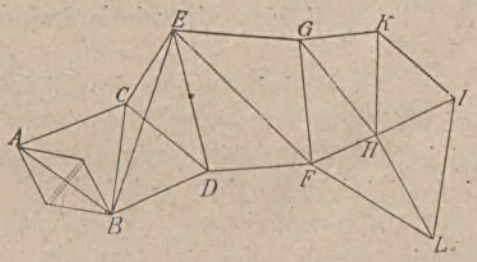
Inny typ przeniesienia bazowego, dający dobre wyniki, jest układem podobnych prostokątnych △-ów, z których każdy opiera się na boku poprzedniego. Baza jest wtedy bokiem pierwszego △-a, bok sieci — łączy punkty, możliwie najdalej w tym układzie położone.

Jeżeli więc teren nasz ma kształt, zbliżony do koła, staramy się obrać takie punkty dla wierzchołków trójkątów, by mieć sieć układu centralnego *BACDEFG* (rys. 711) o wspólnym wierzchołku *B* (punkcie centralnym). W sieci tej mogą być wzajemnie widoczne punkty, służące jako wierzchołki różnych trójkątów, np. *E* i *G* — wskutek czego do układu centralnego wejdzie jeszcze i czworokąt geodezyjny *BEFG*; odległe punkty różnych trójkątów mogą być jednostronnie widoczne, np., z punktu *E* widoczna jest wideta punktu *G*, w *G* nie widzimy zaś widety punktu *E* i t. d.

Jeżeli zaś teren nasz ma kształt bardzo rozciągniętej figury, wówczas punkty sieci lokalnej z konieczności obieramy w ten sposób, by utworzył się układ łańcuchowy trój-



Rys. 711.



Rys. 712.

kątów *ABCDEFGHIJKL* (rys. 712), do którego może wejść i czworobok geodezyjny *BCDE* i układ centralny *HFGIKL*, które znikną, gdy odrzucimy obserwację kierunków *BE* i *FL*.

Przy bardzo wydłużonym terenie, na którym zakłada się triangulacja lokalna, np., w wypadku pomiarów rzek, należy co pewien czas wykonywać pomiar bazy coraz to w nowem miejscu, oddzielonem od 1-ej bazy kilkunastu trójkątami.

Odpowiednie miejsca do pomiaru bazy należy więc w tych wypadkach obierać już przy wywiadzie, uzgodniając wybór punktów sieci lokalnej z wyborem punktów siatek podstawowych.

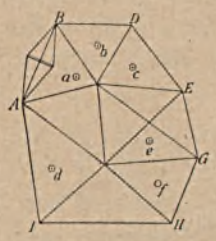
Przy obiorze punktów należy wykorzystać wszelkie już istniejące nadające się znaki, jak wieże kościołów (za punkt służy spód krzyża), kominy fabryczne (za punkt służy spód piorunochronu) i t. p.

Specjalnie w miastach można znaleźć w obfitości takie znaki, lub wykorzystać warunki, sprzyjające stworzeniu ich, dodając do istniejących

budowli sygnały sztuczne w postaci utrwalonych krzyżaków na płaskich dachach, trwałych balkonach, lub też oszalowanych piramidek i t. p.

Przy obieraniu punktów należy notować wszystkie punkty terenu, nadające się jako punkty trygonometryczne.

Wciągając szereg takich punktów do szkicu, notujemy z busoli azymuty prostych, łączących poszczególne punkty; po ukończeniu wywiadu wykreślamy na zasadzie tych azymutów, lub danych istniejących planów, wszystkie zarejestrowane przez nas punkty i dopiero wówczas, kierując się kształtem geometrycznym trójkątów, ustalamy projekt sieci, odrzucając mniej szczęśliwie położone punkty (jak np.: *a*, *b*, *c*, *d*, *e* i *f*), zupełnie lub też pozostawiając je, jako punkty drugorzędne sieci, do określenia zapomocą wcięć, o ile te punkty nadają się do wciągnięcia ich do sieci poligonowej.



Rys. 713.

Jeżeli mamy kilka miejsc, nadających się do pomiaru bazy, wybieramy z nich przy jednakowych innych warunkach ten teren, w którym można wytyczyć prostą o spadku, mniejszym od 3%. Unikać należy miejscowości o ruchu ciężarowym; ruch osobowy nie stanowi przeszkody w pomiarze.

Poza tem winno być możliwe zwykłe przejście na bok sieci głównej, a więc końce bazy i boku sieci powinny być wzajemnie widoczne.

§ 353. Utrwalenie punktów triangulacyjnych w terenie.

Poprzednio wzmiankowaliśmy, że za punkt triangulacyjny przyjęty być może już istniejący znak, jak np., spód krzyża na kościele. W ogromnej jednak większości wypadków gotowych znaków w obranych punktach niema i takowe należy założyć w terenie.

Konstrukcja tych wszystkich znaków zależy od celu założenia triangulacji. Jeżeli więc triangulacja służy wyłącznie do potrzeb dorywczego pomiaru, po ukończeniu którego żadne prace, oparte bezpośrednio na sieci triangulacyjnej, prowadzone nie będą, co zachodzi w pracach komasacyjnych, parcelacyjnych, pomiarach gospodarczych i t. p., wówczas zrozumiałą jest rzeczą, że punkty triangulacyjne utrwalają się w terenie w sposób mniej trwały; jeżeli zaś triangulacja lokalna służy za podstawę do pomiarów górniczych lub do regulacji miasta, rzeki lub t. p. — wówczas punkty triangulacyjne należy tak utrwalać, by można było z nich korzystać w ciągu dłuższego czasu.

Stosownie więc do potrzeby należy zakładać znaki tymczasowe i znaki trwałe.

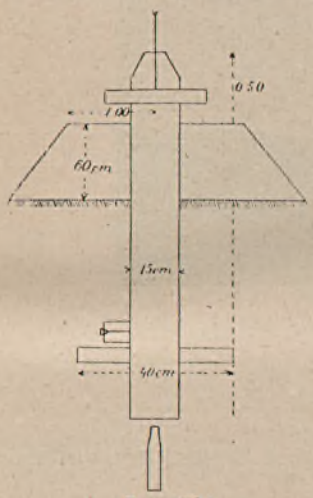
Znaki tymczasowe.

1) W pracach pomiarowych, przy komasacjach i t. p., w terenach pagórkowatych, przy niezbyt wielkiej, od 1 do 3 *km*, długości boków trójkątów, gdy obrane w terenie punkty są wzajemnie widoczne z ziemi, możemy przyjąć za znak tymczasowy (rys. 714) zwykły pal długości 2 *m*, gru-

bości od 12 do 15 *cm*, zakopany w ziemię na 1 metr, osypany kopcem (o wysokości 0,60 *m*, a dolnej średnicy 3 *m*), zaopatrzony w 2 krzyżaki, przybite u dołu, każdy 40 *cm* długości, oraz w duże deseczki, szerokości każda po 10 *cm*, długości po 30 *cm* — jedna przybita swym środkiem na wysokości 15 *cm* nad kopcem, druga, krzyżowo do pierwszej, tuż nad nią.

Na dnie dołu pod takim palem zakopuje się butelka szyjką do góry, sączek denarski lub cegła, ewentualnie kamień z wyciętym krzyżem, nad któremi ustawia się centrycznie słup (rys. 714).

Środek szyjki butelki lub wycięty na kamieniu krzyż, w razie potrzeby wznowienia znaku w przyszłości, są punktem triangulacyjnym, zabezpieczonym od uszkodzenia.

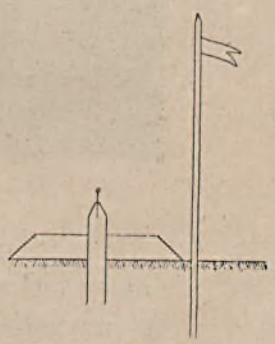


Rys. 714.

Jeżeli pomiar triangulacyjny ma być dokonany w zimie, część słupa, wystająca nad kopiec, wraz z krzyżowemi deseczkami maluje się na czarno, w innych porach roku na biało (wapnem).

Wierzchołkowi słupa nadaje się postać ściętego stożka, w środek słupa u góry wbija się 12-calowy gwóźdź.

Bardzo często, dla łatwiejszego odnalezienia przez lunetę takiego punktu, w odległości 3 — 4 *m*. od znaku ustawia się wysoka żerdź z chorągwią lub wiechą (rys. 714 a).


Rys. 714 a.

2. *Zwykła piramida.*

Piramida zwykła (rys. 715), zwana często widetą, również buduje się w wypadkach, gdy sąsiednie punkty są wzajemnie z ziemi widoczne; znak ten należy uważać za praktyczniejszy od poprzednio opisanego wobec tego, że jest wyraźnie widoczny zdaleka o każdej porze roku, bez względu na wzrost zbóż.

Składa się: z pionowo ustawionego czopa, podtrzymywanego w tej pozycji 4 długiemi żerdziami, zbitemi przy czopie w kształcie piramidy i zakopanemi dolnemi końcami w ziemię. W środek czopa wbija się pionowo 12-calowy gwóźdź; środek czopa służy za punkt celu przy obserwacjach punktu, nad którym piramida jest ustawiona.

Ściśle na rzucie poziomym środka czopa w ziemię wkopuje się słup $1^1/_2$-metrowy, wystający z ziemi na 0,5 metra, w środek tego słupa wbija się mały gwóźdź również ściśle na pionie środka czopa.

Nad małym gwoździem w słupie centruje się teodolit w czasie pomiaru.

Pod słup, jak przy poprzednim znaku, zakłada się ukryte centrum w postaci rurki drenarskiej i t. p.

Lepiej jest zamiast słupa używać kamienia ciosanego lub bloku betonowego o wymiarach 60 × 15 × 20 *cm.* z wyciętym u góry krzyżem.

Dla łatwiejszego odnalezienia piramidy przez lunetę teodolitu, znacznie oddalonego, górne końce czterech żerdzi—nóg piramidy—oszalowane są dokoła kilkoma rzędami listewek, pomalowanych na biało.



Rys. 715.

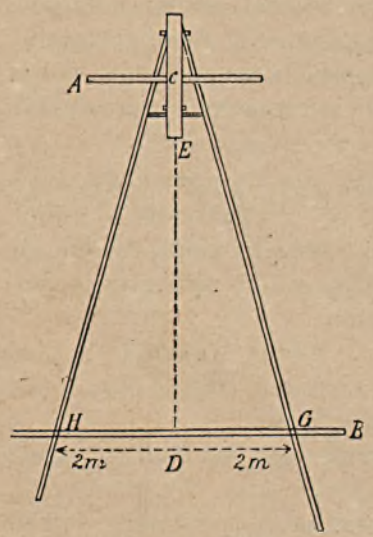
Budowa piramidy ma następujący przebieg:

a) przygotowanie części składowych piramidy i wzajemne dopasowanie tych części;

b) wyznaczenie na gruncie środka piramidy i wykopanie dołów dla nóg piramidy;

c) podniesienie i zbicie piramidy;

d) utrwalenie środka piramidy pod- i nadziemne.



Rys. 716.

A. Przygotowanie części piramidy:

Dla sporządzenia nóg zwykłej piramidy wybieramy suche żerdzie o średnicy od 8 do 12 *cm*, 8 *m* długie; czop długości $1^1/_2$—2 *m* o średnicy o 2—3 *cm*, większej od średnicy górnych części żerdzi nożnych, może być ociosany na 4 kanty. Dopasowania nóg do czopa dokonamy w następujący sposób: układamy w mniej więcej równem miejscu dwa równoległe okrąglaki *A* i *B*, jeden 1,5 *m*, drugi 4,5 metra długi, we wzajemnej odległości 6—7 *m*, w ten sposób by ich środki leżały na wspólnej prostopadłej do obydwu okrąglaków (rys. 716).

Układamy w punkcie *C* czop w linji *C D* i utrzymujemy go w tem położeniu,

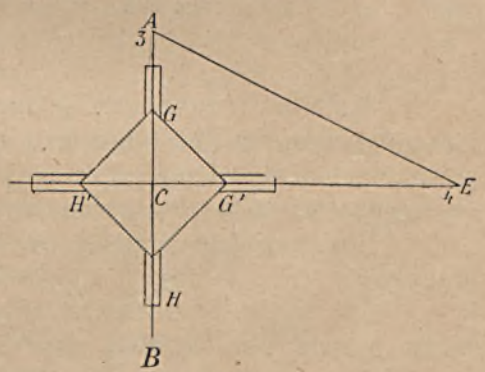
podkładając kawałek żerdzi i wbijając w ziemię po obydwu stronach czopa, przy jego końcach, paliki. Od punktu *D* w obydwie strony odmierzamy na okrąglaku *B* po 2 — 2,5 *m.* i w oznaczonych punktach *G* i *H* układamy 2 żerdzie nożne piramidy tak, by swemi cieńszemi końcami dotknęły czopa, poniżej jego wierzchołka; przy punktach *G* i *H*, stycznie do żerdzi, wbijamy w żerdź *B* po gwoździu.

Żerdzie przy czopie obciosamy w ten sposób, by szczelnie przylegały do czopa, w takiem położeniu żerdzi, gdy te w punktach *G* i *H* są styczne do uprzednio wbitych w okrąglak *B* gwoździ.

Następnie, po oznaczeniu wspólnych miejsc dopasowań na czopie i żerdziach cyframi 1 i 2, odkładamy obydwie żerdzie, obracamy czop o 90° dokoła osi i powtarzamy to samo dopasowanie z dwiema drugiemi żerdziami, oznaczając wspólne miejsca dopasowań na czopie i żerdziach cyframi 3 i 4.

Wreszcie w środek czopa w kierunku jego osi wbijamy gwóźdź.

B. Wyznaczenie na gruncie dołów dla nóg piramidy odbywa się w sposób następujący: wbijamy palik w punkcie triangulacyjnym, naciągając tasiemkę płócienną odcinkami 3, 4 i 5-metrowemi w ten sposób, że te naciągnięte odcinki tworzą zamknięty trójkąt prostokątny; trzymamy wierzchołek kąta prostego (pomiędzy bokami ruletki 3 i 4 metry) nad punktem, pomocników zaś, naciągających ruletkę w dwu pozostałych wierzchołkach trójkąta, przesuwamy dopóty, póki żaden z nich nie będzie zasłaniać nam sąsiednich punktów triangulacyjnach. Oczywiście, jeżeli obserwator nad punktem zasłania pomocnikom jakiś inny punkt triangulacyjny — wówczas należy obydwu pomocników, wciąż naciągających swe odcinki ruletki, nieco przesunąć.



Rys. 717.

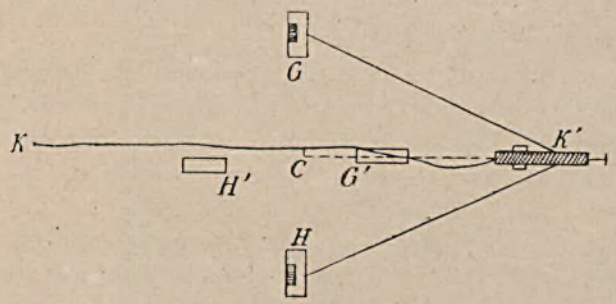
Obydwaj pomocnicy opuszczają ruletkę do ziemi i, mocno ją naciągnąwszy, wbijają w ziemię paliki *A* i *B* w wierzchołkach kątów, utworzonych odcinkami ruletki.

Następnie od punktu środkowego *C* odmierzamy ku punktom *A* i *B* i w przeciwnych kierunkach po 2 — 2,25 *m.* i oznaczamy je na gruncie palikami, z których każde 2 przeciwległe odpowiadają punktom *G* i *H* poprzedniego rysunku. Od tych punktów w kierunku odwrotnym od punktu *C* kopiemy wąskie (40 *cm.*) doły, głębokości 1,25 metra, odsuwając je od punktów *G* i *H* na 50 cm. We wszystkie doły wrzucamy na dno kamienie, których warstwa winna mieć 20 *cm.* grubości.

C. Ustawienie piramidy poprzedza identyczne z przedstawionem na pierwszym rysunku ułożenie nóg i czopa; każda z dwu nóg piramidy, dopasowana do czopa, przybija się doń 3-ma sześciocalowemi gwoździami, a następnie przybijamy 6-centymetrową żerdź, jako poprzeczkę do czopa i nóg piramidy o pół metra poniżej punktów przytwierdzenia nóg do czopa. Drugą taką poprzeczkę przybijamy do nóg o 2 metry niżej. Następnie do

jednej z nóg przybijamy szczeble, a do obydwu u spodu łapy. Wtedy przystępujemy do ustawienia piramidy. Układamy piramidę na ziemi w ten sposób, by końce jej nóg zwisały nad dołami w punktach *G* i *H*, czop zaś leżał poza punktem *B* na przedłużeniu linji *C B*.

Wówczas naprzeciwko nóg opuszczamy na ścianki dołów deski, by przy opuszczaniu nóg (rys. 719) nie zsypywać ziemi. Następnie dokoła czopa i górnych końców nóg zakładamy pętlicę linki, której drugi koniec trzymać będzie robotnik, ustawiony w punkcie *K*; druga w taki sam sposób zawieszona linka zwisa wolno. Trzech robotników zaczyna podnosić każdą nogę, zaczynając od czopa; po jednym robotniku ustawiamy przy dołach, by dbali o prawidłowe opuszczanie nóg w doły w miarę podnoszenia czopa.



Rys. 718.

Stopniowo robotnicy, podnosząc czop, przesuwają się ku spodowi piramidy; wówczas już tylko dwu robotników podnosi każdą nogę, dwu zaś pozostałych podnosi nogi u czopa przy pomocy ręcznych koziołków z pętlicą, podnosząc na pętlicy górną część piramidy.

Równocześnie ciągnie za linę robotnik, ustawiony w *K*; koziołki, przesuwane coraz bliżej ku spodowi piramidy, podnoszą ją coraz to wyżej, aż nareszcie robotnik z liną doprowadza prawie bez wysiłku czop do pionowego położenia. Wtedy należy ująć drugą linkę za zwisający koniec i ustawić jednego z robotników z linką symetrycznie do *K* w *K'*.


Rys. 719.

Zapomocą dwu pionów, ustawionych w dwu prostopadłych kierunkach o kilka metrów od piramidy, sprawdzamy i regulujemy pionowe ustawienie czopa, podsypując pod jedną z nóg ziemię lub podkopując się pod drugą.

Następnie zasypujemy obydwa doły ziemią, ubijając ją przy nogach piramidy.

Wreszcie jeden robotnik wchodzi do góry po przybitych uprzednio szczeblach na jednej z nóg piramidy. Ustawiamy spód jednej z pozostałych nóg nad trzecim dołem, drugi zaś koniec nogi podnosimy do góry, przesuwając ją po jednej ze stojących już nóg. Równocześnie spód podnoszonej nogi opuszcza się do wykopanego dołu. Pamiętać należy o tem, że nogi są ponumerowane odpowiednio, więc przed podnoszeniem trzeciej nogi należy zapytać robotnika, siedzącego u góry, o rozmieszczenie numerów na czopie.

Kiedy nogę podsuniemy aż do czopa, robotnik u góry winien wskazać, jak przesunąć spód nogi, od środka, czy ku środkowi piramidy, by noga szczelnie przylegała do czopa. Gdy to zostanie osiągnięte przy pomocy przesuwania, podkopywania lub podsypywania ziemi pod spód nogi, wów-

czas robotnik u góry zbija nogę z czopem dwoma sześciocalowemi gwoździami. To samo powtarzamy z 4-tą nogą. Po zbiciu wszystkich nóg robotnik u góry dopasuje podawane do oszalowania deseczki, na dole spiłuje się je, o ile są za długie i następnie przybije się do nóg piramidy u góry przy czopie ze wszystkich 4-ech stron, w ilości 6-ciu sztuk z każdej strony, pozostawiając 10-centymetrowe odstępy pomiędzy deseczkami, których szerokość wynosi do 20 *cm*.

Ostatnią czynnością robotnika u góry jest pomalowanie wapnem oszalowania.

D. Utrwalenie środka piramidy. Po wykopaniu dołu pod środkiem czopa, ustawiamy teodolit kolejno w 2 prostopadłych kierunkach, ze środka piramidy idących, w odległości 15 metrów.

Pionujemy środek czopa przy każdem z obydwu ustawień teodolitu w ten sposób, że po obydwu stronach domniemanego środka oznaczamy na ziemi ślad płaszczyzny kolimacyjnej w obydwu położeniach lunety, zapomocą wetknięcia gwoździ w ziemię. W ten sposób w obydwu kierunkach po obydwu stronach środka otrzymamy po dwa gwoździe; określając środek łączących każdą parę odcinków, otrzymamy cztery gwoździe, które połączymy naciągniętemi nakrzyż nitkami; skrzyżowanie nitek pionujemy wdół dla odpowiedniego ułożenia na spodzie wykopanego w tym celu dołu środka ukrytego znaku. Następnie takowy zasypujemy ziemią i w punkcie skrzyżowania się nitek wbijamy pal.

Następnie znów pionujemy zapomocą teodolitu środek czopa na wierzchołek pala, oznaczając środek zapomocą wbicia gwoździka.

Dość często pal 1 *m* z łapami poprzecznemi u spodu zakopuje się na głębokość 90 *cm*; wówczas niema obawy o poruszenie.

Podwójna piramida.

Często zachodzi wypadek, że należy obserwatora umieścić o kilka metrów ponad obranym w terenie punktem, by mógł obserwować sąsiednie.

Wówczas budujemy piramidę podwójną, składającą się z 2 części: piramidy zewnętrznej, wyższej, której czop służy jako cel przy obserwacjach z sąsiednich punktów triangulacyjnych, i niższego wewnętrznego trójnoga (lub piramidy) którego czop służy jako podstawa dla teodolitu*).

Budowa podwójnej piramidy rozpoczyna się od budowy piramidy zewnętrznej. Ponieważ obserwator przy pomiarze będzie chodzić dokoła czopa piramidy wewnętrznej, więc dla umożliwienia tego budujemy platformę, przymocowaną do nóg piramidy zewnętrznej, mającą nie mniej niż 4 m^2.

Żerdzie na nogi piramidy zewnętrznej należy brać znacznej długości. Obliczmy je: gdy wysokość instrumentu nad ziemią ma wynosić 6 *m*, więc pomost winien być urządzony na wysokości 5 metrów; jeżeli zatem damy nogom piramidy przy ziemi 5-metrowe rozpięcie, wówczas, oznaczając OA i OB nogi piramidy ponad ziemią i przyjmując $DC = 5$ *m*, napiszemy (rys. 720):

*) Części piramidy wewnętrznej nie mogą dotykać części piramidy zewnętrznej.

$$\frac{OC}{OD} = \frac{AB}{EF} = 2;$$

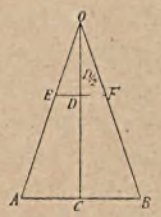
$$\frac{OC - OD}{OD} = \frac{2-1}{1} = 1,$$

stąd

$$DC = OD = 5\ m$$

$$OA = \sqrt{OC^2 + AC^2} = \sqrt{100 + 4} = 10{,}2$$

obliczając zaś długość nóg w ziemi na 1,3 m, otrzymujemy dla całkowitej długości nóg 11,5 do 12 m.



Rys. 720.

Piramidę zewnętrzną ustawiamy zupełnie tak samo, jak zwykłą; ciężar jednak tej piramidy wymaga większej liczby robotników.

Wyznaczenie dołów dla nóg trójnoga wewnętrznego widoczne jest na rys. 721, na którym $ABCD$ są dołami dla nóg piramidy zewnętrznej, F, G i E dołami dla trójnoga wewnętrznego.

FG jest $\parallel$-łe do AB

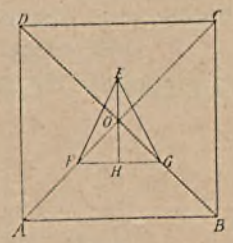
$OE = OF = OG = 2\ m.$

$FG = \sqrt{8} = 2{,}83$

$OH = 1{,}45;$

$AB = 4.0\ m.$

$EH = 3{,}45\ m.$



Rys. 721.

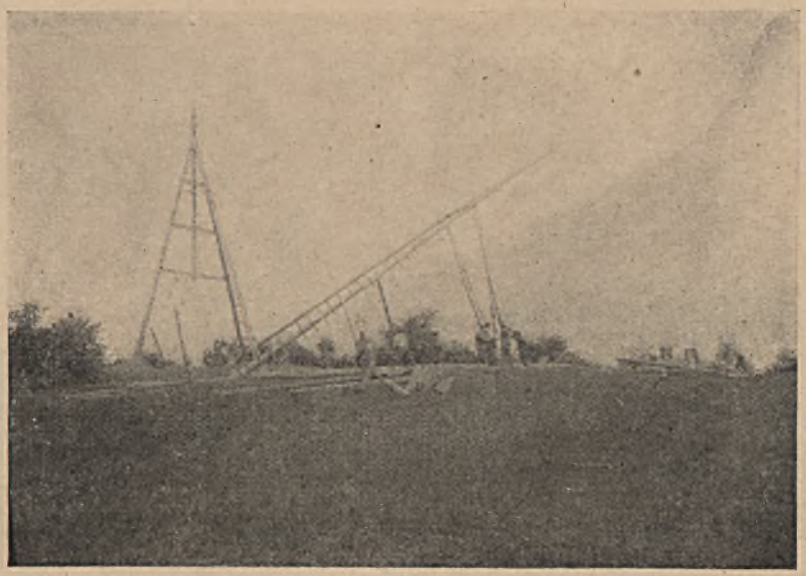
Z punktu O przecięcia się przekątnych spuszczamy prostopadłą do AB i odkładamy na niej $OH = 1{,}45$ oraz w przeciwnym kierunku $OE = 2{,}0\ m.$

Wyznaczenie punktów F i G, odległych od O o 2 $m.$ i od H o 1,41 $m.$, nie nastręcza trudności.

Ponieważ do nóg piramidy zewnętrznej są przybite na 5-metrowej wysokości poziome żerdzie i do nich przybija się po bokach dla utworzenia pomostu kilka desek, na których robotnicy mogą się dość swobodnie poruszać, więc podniesienie żerdzi trójnoga wewnętrznego nie jest trudne.

Żerdzie trójnoga zasypują się w wykopanych dołach i ziemia ubija się przy takiem położeniu nóg, przy którem wierzchołki ich nieco nie dochodzą do czopa, a ściągają się do całkowitego zetknięcia się z czopem, gdy takowy włączamy do trójnoga, zapomocą sznura, obejmującego wierzchołek trójnoga. Sznur ten skręca się zapomocą kawałka drąga, obracanego

w pionowej płaszczyźnie. Po osiągnięciu zetknięcia żerdzi i czopa, zbijamy je silnie gwoździami Fragment podnoszenia pary nóg piramidy zewnętrznej przedstawia rys. 722, w innej kolejności ustawiania obydwu części.

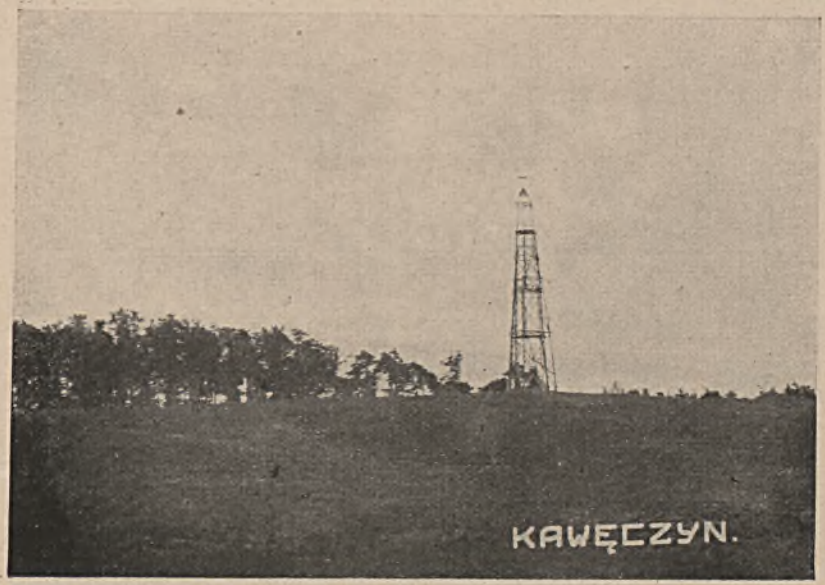


Rys. 722.



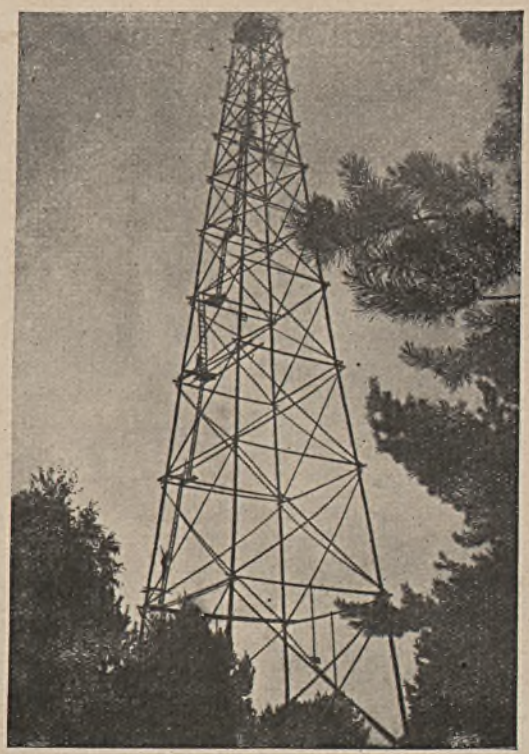
Rys. 723.

Rzecz prosta, czop piramidy wewnętrznej winien znajdować się na pionie czopa piramidy zewnętrznej. Dla wypełnienia tego warunku uży-



Rys. 724.

wany jest pion, zawieszony na haczyku, wśrubowanym w środek spodu czopa piramidy zewnętrznej.

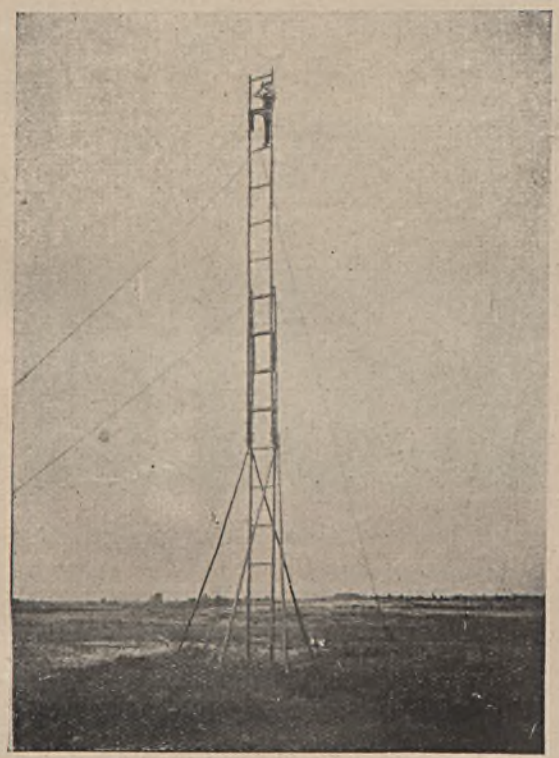


Rys. 725.

Położenie pionu wskazuje miejsca, właściwe dla ustawienia czopa trójnoga. Aby na czopie trójnoga mieć możność dokonywania teodolitem obserwacji, przybijamy gwoździami grubą deskę do czopa wewnętrzuej piramidy. Teodolit ustawia się na desce i podkładamy krążki metalowe pod śruby nastawowe teodolitu.

Utrwalenie środka piramidy w ziemi dokonywa się tak samo, jak przy piramidzie zwykłej. Rys. 723 przedstawia podwójną piramidę.

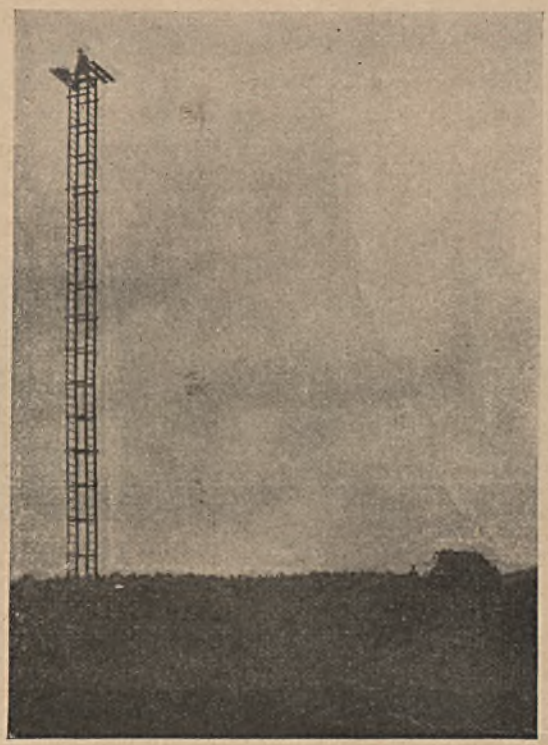
Przy triangulacjach wyższych rzędów spotykamy t. zw. wieże trygonometryczne, w których wysokość stolika obserwacyjnego sięga kilkunastu i dwudziestu kilku metrów.



Rys. 726.

Rysunki 724 i 725 przedstawiają wysokie sygnały triangulacji państwowej. Wywiad trygonometryczny w takich wypadkach jest bardzo utrudniony; określanie wysokości projektowanego znaku na podstawie mapy warstwicowej i sporządzanych z niej profilów prostych, łączących projektowane miejsca ustawienia sygnału, daje tylko podstawę dla przybliżonego określenia wzniesienia obserwatorów nad ziemią w obydwu punktach, przy którem przeszkody terenowe nie będą stanowić przeszkód do obserwacji. Oczywiście, przy takiem projektowaniu należy uwzględniać krzywiznę ziemi i refrakcję. Tak zaprojektowane wysokości sygnałów powinny być w terenie sprawdzone. Sprawdzenie umożliwia składana drabina wywiadowcza (rys. 726), lub specjalnie przygotowany sygnał wywiadowczy (rys. 727).

Na większych odległościach dla uwidocznienia punktów używamy heljotropów, za pośrednictwem których wysyłamy w kierunku do sąsiedniego punktu stożek odbitych promieni słonecznych (rys. 728).



Rys. 727.

Jak dalece nie należy przebierać w obieraniu miejsc na punkty trygonometryczne, świadczy rys. 729, z którego możemy wnioskować o trudnościach transportu instrumentów na taki punkt.



Rys. 728.

Użycie lin i bloków jest konieczne w takich wypadkach.

Zbyt wysokich sygnałów nie buduje się w triangulacjach lokalnych ze względu na związane z ich budową koszty; niema zresztą potrzeby ich

budowania w triangulacjach lokalnych, gdyż teren pomiaru nie jest tak rozległy. W wyjątkowych jedynie wypadkach mogłyby wieże trygonome-

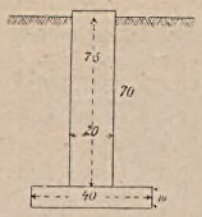


Rys. 729.



Rys. 730.

tryczne znaleźć zastosowanie, mianowicie przy pomiarach wielkich zalesionych terenów lub dużych miast.



Rys. 731.

Zwykle jednak lepiej jest wykorzystać, np., kościoły (patrz rys. 730). Na rysunku mamy specjalne rusztowanie nad kamiennym krzyżem bazyliki na Pradze. Krzyż ten jest punktem trygonometrycznym.

Znaki trwałe.

Znaki trwałe tem się różnią od tymczasowych, że centra ich naziemne i podziemne zbudowane są z materjałów trwałych.

Jest to słup betonowy o wymiarach: 75 × 20 × 20 *cm*, wystający z ziemi na 5 *cm*, z wyrytym na wierzchu słupa krzyżykiem, jako centrum. Słup ten jest znakiem naziemnym. Znakiem podziemnym jest płyta 40 × 40 × 10 *cm* z wyrytym pośrodku krzyżykiem.

Ustawienie tego znaku wykonywa się w następującej kolejności: wykopuje się dół odpowiednich wymiarów pod środkiem piramidy; na spodzie dołu układa się płyta, którą się podsuwa pod odpowiednio zawieszony pion do czasu, gdy krzyżyk ściśle znajdzie się pod pionem, zwisającym na przedłużeniu osi piramidy; następnie zasypuje się płytę po bokach i ustawia się na niej słup betonowy, który znów ustawiany jest tak, by krzyżyk zajął odpowiednie położenie. Wówczas dół ostrożnie zasypujemy, lekko ubijając ziemię.

§ 354. Pomiar kątów.

Pomiary kierunków i kątów poziomych ukuteczniają się metodami:

a) obserwacji kierunków w poczet (serjami),

b) repetycji,

c) Schreiber'a.

Ogólne uwagi: ponieważ przy pomiarze kątów przy triangulacjach chodzi o możliwie najściślejsze wyznaczenie wielkości każdego kąta, więc pomiar należy przeprowadzić w taki sposób, aby sam tryb postępowania pomiarowego umożliwiał chociażby częściowe usunięcie wpływu błędów instrumentalnych. Szereg tych błędów da się usunąć przy stosowaniu pomiaru przy dwu położeniach lunety, np., błąd kolimacji, błąd mimośrodkowości lunety, błąd pochylenia osi obrotu lunety w stosunku do poziomu; inne, jak błędy przypadkowe podziału limbusu przez kilkakrotny pomiar kąta w różnych, zupełnie dowolnych miejscach limbusu, usuwają się częściowo; również usuwa się częściowo wpływ błędów regularnych w podziale limbusu przez taki kilkakrotny pomiar kąta, by odczyty na limbusie przy kilkakrotnem jego przesuwaniu (dla każdego nowego pomiaru kąta) dokonywane były równomiernie wzdłuż całego limbusu, innemi słowami każde przesunięcie limbusu powinno być dokonane o taki kąt, którego wielokrotnością przybliżoną jest 360°, nie chodzi bowiem o zupełnie ścisłe przestawienie limbusu, np. o 60° przy każdym pomiarze, wystarczy, gdy to przesunięcie będzie równe około 60°. Co się tyczy użycia tego lub innego typu teodolitu dla lokalnej triangulacji, zaznaczyć trzeba, że najbardziej odpowiednim teo-

dolitem byłby pięciosekundowy mikroskopowy, lub nowe teodolity Wilda czy Zeissa, a co najmniej 10″ nonjuszowy. Bardzo dokładne, np. 2-u i 1-sekundowe teodolity, przy triangulacjach lokalnych byłyby nieuzasadnionym luksusem.

§ 355. Metoda kierunkowa.

Metoda ta ma na celu kilkakrotne określenie zespołu kątów pomiędzy kilku obserwowanemi kierunkami w drodze notowania odczytów na nonjuszach przy kolejnem celowaniu do wszystkich obserwowanych punktów.

Każdorazowe określenie zespołu tych kątów, zwane pocztem lub serją, winno się dokonywać przy różnych położeniach limbusu, w celu usunięcia wpływu błędów przypadkowych i regularnych w podziale limbusu.

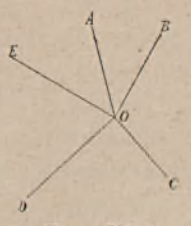
Ilość tych seryj uzależniona będzie od stopnia pożądanej dokładności, w każdym razie ilość ta nie powinna być mniejsza od 3-ch.

Jeżeli zaś siatka lokalna ma służyć za podstawę do bardzo dokładnego pomiaru licznego zespołu szczegółów, co ma miejsce w miastach, wówczas liczbę seryj powiększają do 6-ciu, a w dużych miastach, jak Łódź, Warszawa, pomiaru dokonano w 12 serjach.

Stopień przesunięcia limbusu dla każdej serji ustala się z następujących przesłanek: w każdym poczcie każdy kierunek ustala się z 2-ch odczytów na nonjuszach; ponieważ te odczyty winny przy n serjach rozłożyć się równomiernie na całym limbusie, więc stopień przesunięcia limbusu dla każdej serji ustali się zapomocą wzoru:

$$\frac{360^0}{2n} = \frac{180^0}{n}$$ (n oznacza ilość serji)

Po ścisłem ustawieniu teodolitu w danym punkcie O, przebieg pomiaru w każdym poczcie jest następujący: wybieramy z pośród obserwowanych punktów najmniej wyraźnie widoczny punkt A i przy kole prawem celujemy doń, starając się mieć pierwszy nonjusz mniej więcej na zerze.



Rys. 732.

Po sprzęgnięciu limbusu naprowadzamy oś celową ściśle na punkt A i notujemy odczyty z obydwu nonjuszów, wypisując stopnie i minuty z pierwszego, sekundy z obydwu. Średni odczyt przy celu do punktu A oznaczmy literą a; celując do B i notując odczyty z obydwu nonjuszów, otrzymujemy średni odczyt b; celujemy kolejno dalej do punków C, D, E i znów celujemy do A, notując średni odczyt a, który w nonjuszowym teodolicie może się różnić od odczytu a nawet o podwójną dokładność odczytu; w razie większej różnicy należy pomiar powtórzyć. Średnia $\frac{a + a}{2}$ daje odczyt kierunku A.

Otrzymujemy więc przy kole prawem szereg wyników: a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, a'_1. Zespół wypisanych przy jednem kole wyników nazywamy szeregiem obserwacji, co tworzy połowę serji. By ukończyć poczet kierunków

należy przerzucić lunetę przez zenit i napisać, postępując analogicznie w odwrotnym kierunku, II-gi szereg wyników obserwacyj kierunków *A*, *E*, *D*, *C*, *B*, *A*, a mianowicie:

$$a_2,\ e_2,\ d_2,\ c_2,\ b_2,\ a'_2.$$

Średnia $\frac{a_2 + a'_2}{2}$ daje odczyt kierunku *A* w drugiej połowie pocztu. Średnia ze średnich w obydwu szeregach daje kierunek *A* w całej serji (patrz § 146). Konieczność obserwowania kierunków drugiego szeregu w odwrotnej kolejności jest spowodowana potrzebą zlikwidowania wpływu tarcia alhidady o limbus, t. j. t. zw. porywania limbusu; zjawisko to likwiduje się w znacznym stopniu w wypadku odwrotnego przesuwania alhidady na limbusie w drugiej półserji.

Po ukończeniu każdego pocztu należy go obliczyć, t. j. utworzyć średnie $\frac{1}{2}(K\,P + K\,L)$ oraz podwójny wpływ błędu kolimacyjnego $K\,P - K\,L$, a następnie (patrz § 146), majac te wielkości, tworzymy dla

Punkty	½ (*KP* + *Kh*)	*KP*—*Kh*	Zredukowane kierunki
Krzyżak	60° 40′ 15.″0	— 10	0 0 0
Oleksin	80 45 27.5	— 5	20 5 11.3
Dołobowo	126 10 20.0	— 10	65 30 3.8
Brzeźnica	252 41 40.0	— 10	192 1 23.8
Brańsk	335 44 40.0	— 10	275 4 23.8
Krzyżak	60 40 17.5	— 5	
	60 40 16.2		62.7
	160.0		

początkowego kierunku średnią z 1-ego i ostatniego wiersza (60° 40′. 16″. 2) i odejmujemy ją od pozostałych kierunków, przyjmując, że pierwszy kierunek odpowiada utworzonej średniej. W ten sposób otrzymujemy grupę zredukowanych kierunków. Jeżeli teraz utworzymy sumę sekund wszystkich kierunków w kolumnie $\frac{1}{2}(K\,P + K\,l)$, równą 160.0, oraz w kolumnie zredukowanych kierunków, równą 62.7, to oczywiście kontrolą prawidłowości obliczenia zredukowanych kierunków będzie równanie, ułożone dla 6 wypisanych kierunków:

$$62.7 + 16.2 \times 6 = 160.0$$

ścisłe w granicach wpływu zaokrąglenia średniej, przyjętej, zamiast za 16.25, za 16.2.

§ 356. Metoda repetycyjna pomiaru kątów.

Często zdarza się, że przy obserwacjach teodolit jest ustawiony w miejscu niedogodnem do obchodzenia przyrządu dokoła (okno na wieży), lub obchodzenie to odbija się na ustawieniu do poziomu (np. punkt na łące), musimy wtedy zastosować taką metodę pomiaru, przy której wpływy powyższych niedogodności redukują się do minimum.

W tych wypadkach możemy stosować metodę repetycyjną pomiaru kątów. Metoda powyższa opiera się na następujących zasadach: załóżmy, że mamy do pomiaru pojedyńczy kąt $A\,C\,B$; 1) po ustawieniu w C teodolitu do poziomu i 2) połączeniu zer limbusu i pierwszego nonjuszu, 3) kierujemy lunetę przy sprzęgniętych alhidadzie i limbusie na lewy punkt A; ścisłe ustawienie krzyża nitek na punkt dokonywa się leniwką limbusu; 4) odczytujemy i notujemy obydwa nonjusze; 5) zwalniamy alhidadę i celujemy do punktu B, ustawiając dokładnie krzyż na p. B leniwką alhidady; 6) przy zamknietym sprzęgu alhidady, a zwolnionym limbusu, celujemy znów dokładnie na A, działając leniwką limbusu, wskutek czego ta podziałka limbusu, która poprzednio odpowiadała celowi do B, przesunęła się w kierunku lewym o tyle, że obecnie odpowiada celowi do punktu A; 7) przy zamkniętym sprzęgu limbusu i zwolnionym alhidady celujemy znów ściśle do B.



Rys. 733.

Jeżeli skończymy na tych dwu powtórzeniach (repetycjach) pomiaru kąta C i odczytamy nonjusze, to różnica między średnią tych odczytów a średnią odczytów przy pierwszym celu do A (która była bliska zera lub równa zeru) oczywiście da podwójną ilość kąta.

Gdybyśmy chcieli dokonać w ten sposób trzykrotnej repetycji, należałoby przy ostatnim celu do B nie notować odczytów, a znów przy zwolnionym limbusie i sprzęgniętej alhidadzie celować ściśle do A, używając leniwki limbusu, następnie zwolnić alhidadę i celować ściśle do B, używając leniwki alhidady i wtedy dopiero notować obydwa nonjusze i średnią z nich. Wówczas różnica pomiędzy tą średnią a pierwszą ($0^0\ 0'\ n''$) da potrójną wielkość kąta.

Aby usunąć wpływ wad ustawienia poszczególnych osi teodolitu, należy lunetę przerzucić przez oś, zwolnić limbus i lunetę przy sprzęgniętej alhidadzie skierować ściśle na B, poczem, zwolniwszy sprzęg alhidady, skierować lunetę na A w kierunku lewym, ustawić ściśle krzyż nitek na A leniwką alhidady i znów zwolnić limbus i obrócić go z zamkniętą alhidadą do B, ustawiając krzyż dokładnie na B leniwką limbusu; zwolnić alhidadę i przy zamkniętym limbusie znów ściśle ustawić oś celową lunety na A, przesuwając alhidadę w kierunku lewym.

Przy dwukrotnej repetycji odczytujemy obydwa nonjusze przy ostatnim celu, biorąc stopnie i minuty z pierwszego, a z obydwu sekundy, przy trzykrotnej repetycji należy jeszcze raz zwolnić limbus, oś lunety znów skierować ściśle na B, i przy zamkniętym limbusie a zwolnionej alhidadzie znów lunetę przesunąć w kierunku lewym ściśle do A i wówczas notować nonjusze.

Zaznaczyć należy, że przy metodzie repetycyjnej obserwator może nie schodzić z jednego miejsca dla odczytywania nonjuszów, lecz, zwolniwszy sprzęg limbusu przy zamkniętej alhidadzie, posuwa nonjusze do siebie; w ten sposób ogranicza się liczba poruszeń obserwatora, wskutek czego drżenie podłogi lub uginanie się gruntu w bardzo ograniczonej mierze przenosi się na podstawę teodolitu.

Następnie przy rozpatrzonym porządku przesuwania alhidady po limbusie, przy jednem położeniu koła pionowego w kierunku prawym, przy drugiem zaś położeniu koła — w kierunku lewym, osiągamy obniżenie wpływu różnych wad, wynikających z tarcia i sprzęgania.

Powiedzieliśmy, że przy trzykrotnej repetycji kąta bierzemy przy obu położeniach lunety tylko cztery odczyty z nonjuszów: I-szy przy pierwszem ustawieniu lunety na lewy przedmiot, II-gi przy ostatniem ustawieniu na prawy przedmiot, przy tem samem położeniu koła pionowego, i takie same odczyty przy naprowadzeniu lunety, przy drugiem położeniu koła pionowego, na obydwa przedmioty. Wszelako przy takiem założeniu można byłoby dojść w praktyce do zgoła nieoczekiwanych wyników; wyobraźmy sobie np., kąt 140°, mierzony w taki sposób; przy pierwszem położeniu koła pionowego, przy czworokątnej, np., repetycji pierwszym odczytem powinien być 0° 0′, drugim zaś $140^0 \times 4 = 560^0$, w praktyce ten drugi odczyt odnotowaliśmy więc jako 200, co dla wartości kąta dałoby $\frac{200^0 - 0^0\,0'}{4} = 50$, wynik oczywiście błędny; dla uniknięcia tego, już przy pierwszym celu do punktu prawego notujemy odczyt w stopniach i minutach: odczyt ten, bezpośrednio dający wielkość kąta, pomnożony przez ilość repetycyj, nie powinien dawać wyniku, niezgodnego z ostatnim odczytem przy tem samem kole, o ile zwiększymy ten odczyt o odpowiednią wielokrotną 360°.

Protokół polowy trzykrotnej repetycji należałoby więc prowadzić zgodnie z podanym wzorem. (Patrz tabelkę str. 833).

Sposób notowania: do 1 kolumny wpisujemy kierunki od lewego do prawego, tworzące ramiona kątów.

Po odnotowaniu celu do lewego punktu w pierwszym wierszu, mierzymy kąt w wyznaczonej ilości repetycyj; przy pomiarze notujemy w trzecim wierszu pierwszy raz wzięty kierunek na prawy przedmiot, jako pośredni odczyt; również, ale zupełnie już ściśle z obydwu nonjuszów, notujemy w wierszu czwartym odczyt kierunku na prawy punkt w ostatniej repetycji, przy tem samem położeniu lunety; po przerzuceniu lunety i po pomiarze w odwrotnym kierunku od prawego do lewego przedmiotu, notujemy ostatni lewy odczyt w drugim wierszu; w rubryce „średnie“ notujemy średnie z pierwszego i drugiego wiersza z obydwu nonjuszów, liczbę stopni wypisując tu z tego koła, przy którem był wzięty kierunek na prawy przedmiot, oraz średnią czwartego wiersza.

Często w postaci gwiazdek notujemy, ile razy zero pierwszego nonjuszu przeszło przez 360°.

Różnice średnich odczytów dzielimy przez liczbę repetycyj — otrzymujemy w wyniku wielkość pomierzonego kąta.

STANOWISKO

punkt Brzeźnica

kolum. / wiersz	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Punkty obserwowane	Ilość repetycyj	Położenie lunety	NONJUSZ		ŚREDNIE	RÓŻNICA	Kąt obliczony	UWAGI:
				I-szy	II-gi				
1	Δ 1	3	*K. P.*	0° 0' 0"	10"	0° 0' 10"			
2			*K. L.*	180° 0' 10"	20"				
							128° 8' 15"	42° 42' 45"	
3				42° 42' 40"		pośred. odczyt			
4	Δ 2		*K. P.*	128° 8' 20"	30"	128° 8' 25"			
1	Δ 1	3	*K. L.*	180° 0' 10"	20"	180° 0' 20"			
2			*K. P.*	0° 0' 20"	30"				
							133° 52' 35"	44° 37' 31"8	
3				224° 37' 30"		pośred. odczyt			
4	Δ 3		*K. L.*	313° 52' 50"	60"	313° 52' 55"			
1	Δ 2	4	*K. P.*	0° 0' 20"	30"	0° 0' 20"			
2			*K. L.*	180° 0' 10"	20"		100° 30' 20" +		
							360° × 2 =	205° 7' 35"	
3				205° 7' 35"		pośred. odczyt	= 820° 30' 20"		
4		5	*K. P.*	100° 30' 40"	40"	100° 30' 40"			

Często pomiar repetycyjny uskutecznia się w nieco odmiennej kolejności cząstkowych działań: ustawiamy lunetę na przedmiot lewy i odczytujemy nonjusze; ruchem alhidady ustawiamy lunetę na przedmiot prawy i, zamknąwszy alhidadę, przerzucamy lunetę przez oś; znów kierujemy obrotem zwolnionego limbusu lunetę na lewy przedmiot, zamykamy limbus i obracamy alhidadę dla ustawienia lunety na przedmiot prawy. Odczyt z nonjuszów w zestawieniu z poprzednim, daje, jako połowę różnicy obydwu odczytów, wartość kąta.

Jest to więc pomiar repetycyjny kąta przy obydwu położeniach lunety; taki pomiar różni się od rozpatrzonego poprzednio tem, że nieco w większym stopniu osłabia wpływ błędów przypadkowych i stałych podziału limbusu, natomiast układem czynności wcale nie przeciwdziała skutkom porywania limbusu ruchem alhidady, ani wadom sprzęgania.

Przy n-krotnej repetycji oś celową naprowadzamy na punkty 2 n razy, przy każdem położeniu lunety dokonywamy dwu odczytów z każdego nonjuszu; przy obydwu położeniach lunety przy pierwszym systemie pomiaru repetycjami wszystkich celowań mamy 4 n, i przyjmijmy, że mamy 2 odczyty.

Jeżeli średni błąd odczytu oznaczymy literą m_0, średni zaś błąd celu literą m_c, wówczas: średni błąd średniej arytmetycznej z odczytów na każdym nonjuszu będzie: $\frac{m_0}{\sqrt{2}}$, średni zaś błąd n razy powtórzonego kąta, jako różnicy pomiędzy dwoma odczytami, będzie:

$$m = \sqrt{\left(\frac{m_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{m_0}{\sqrt{2}}\right)^2} = m_0$$

Jest to średni błąd odczytu n-krotnego kąta, więc średni błąd kąta będzie $\frac{m_0}{n}$. Na otrzymanie n-krotnego kąta sumowało się algebraicznie 4 n celowań każde o średnim błędzie m_c; więc średni błąd n-krotnego kąta będzie:

$$m_c \sqrt{4n} = 2\, m_c \sqrt{n}$$

średni zaś błąd pojedyńczego kąta będzie

$$\frac{2\, m_c \sqrt{n}}{n} = \frac{2\, m_c}{\sqrt{n}}$$

Błąd zaś wyznaczenia kąta wskutek błędów odczytu i celu, które wpłynęły na wielkość kąta, sumując się algebraicznie, będzie:

$$m^2{}_k = \left(\frac{m_0}{n}\right)^2 + \left(\frac{2\, m_c}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{m_0{}^2}{n^2} + \frac{4\, m_c{}^2}{n}$$

Ze wzoru tego widać, że przy stosowaniu metody repetycyjnej ilość repetycyj bardziej wpływa na zmniejszenie się błędu odczytu, niż celu; stąd: metoda repetycyjna najbardziej dodatnie wyniki da wówczas, gdy przy pomiarach używa się teodolit, którego dokładność odczytu jest mniejsza od dokładności celu, co zachodzi już przy 10 sekundowych teodolitach, a tembardziej w mniej dokładnych, jak 20 — 30 sekundowych.

§ 357. Metoda Schreibera pomiaru kątów we wszelkich kombinacjach.

Dążenie do osiągnięcia jaknajdalej posuniętej dokładności w pomiarze kątów zmusza do zwrócenia uwagi na nieznaczne nawet źródła błędów, jak wpływ tarcia alhidady o limbus, wadliwe oświetlenie punktów, wskutek

którego wzrasta błąd celu oraz zmienność układu osi instrumentalnych w przeciągu nawet krótkiego okresu czasu. Przyczyny te składają się na potrzebę zastosowania takiego systemu pomiarów, przy którym czas pomiaru byłby możliwie jaknajkrótszy, a z drugiej strony pomiar obejmowałby każdorazowo najbardziej ostro widoczne punkty. Przy podobnej metodzie osiągnęlibyśmy nawet możność zwalczenia źródeł takich błędów, jak porywanie limbusu przez alhidadę w czasie jej ruchu, gdyż czas ten byłby najkrótszy, oraz uniknięcia zmian w położeniu podstawy teodolitu, jak np., skręcanie czopa wewnętrznej piramidy na skutek działania promieni słonecznych.

Schreiber wprowadził do triangulacji metodę, czyniącą zadość powyższym warunkom, polegającą na takim pomiarze kątów we wszelkich kombinacjach, przy którym zawsze dokonywamy pomiaru tylko jednego kąta, wskutek czego czas pomiaru redukuje się do minimum; obserwacje, dokonane przy zastosowaniu tej metody, dają szereg spostrzeżeń kątów pojedyńczych, czyli grup po dwa kierunki.



Rys. 734.



Rys. 735.

Jeżeli na pewnem stanowisku mamy do pomiaru n kierunków, wówczas ilość kątów we wszelkich kombinacjach wyrazi liczba $\frac{n\,(n-1)}{2}$. W wypadku więc, np., 6-ciu kierunków, ilość kątów wyrazi się liczbą $\frac{6\,.\,5}{2} = 15$, a mianowicie (rys. 734):

1,2				
1,3	2,3			
1,4	2,4	3,4		
1,5	2,5	3,5	4,5	
1,6	2,6	3,6	4,6	5,6

W celu umożliwienia opanowania wpływu błędów przypadkowych i regularnych podziału limbusu, żaden odczyt z limbusu nie powinien wchodzić do dwu kątów, czyli każdy kąt winien być pomierzony na nowem miejscu limbusu, a więc przy niezmiennem położeniu limbusu w wypadku:

parzystej liczby kierunków pomierzymy $\frac{n}{2}$ kątów,

nieparzystej liczby kierunków wymierzymy $\frac{n-1}{2}$ kątów,

z których żaden nie będzie mieć wspólnych z innemi odczytów (rys. 735,6).

By pomierzyć wszystkie $\frac{n\,(n-1)}{2}$ kątów w ten sposób, aby żaden z nich nie miał wspólnych z innemi odczytów, należy przestawiać limbus.

Jeżeli więc przy jednem położeniu limbusu dokonamy pomiaru $\frac{n}{2}$ (parzystego n) i $\frac{n-1}{2}$ (nieparzystego n) liczby kątów, to przestawień limbusu musi być w wypadku parzystego n

$$\frac{n\,(n-1)}{2} : \frac{n}{2} = \underline{n-1}$$

w wypadku zaś nieparzystego n

$$\frac{n\,(n-1)}{2} : \frac{n-1}{2} = \underline{n}$$

Wówczas każdy kąt byłby pomierzony bez wspólnych kierunków z innemi kątami jednorazowo; a więc te $n-1$ (parzystego n) i n (przy nieparzystem n) przestawień limbusu tworzą zespół położeń limbusu dla jednorazowego pomiaru kątów, czyli jeden poczet.

Oznaczmy liczbę przestawień limbusu literą k (zastąpi ona n i $n-1$ przy nieparzystem lub parzystem n), wówczas, jeżeli każdy kąt chcemy pomierzyć q razy, t. j. utworzyć q seryj i, następnie założymy warunek, aby wielkości przesunięć limbusu były jednakowe, to stopień każdorazowego przesunięcia τ limbusu wyznaczymy, oznaczając liczbę nonjuszów, ewentualnie mikroskopów literą M, ze wzoru

$$\tau = \frac{360^0}{M \,.\, k \,.\, q}$$

Ustalmy obecnie wielkość q, która winna być w związku z dokładnością pomiaru. Wyjdziemy z założenia, że dokładność pomiaru metodą Schreibera nie powinna się różnić od dokładności pomiaru serjami.



Rys. 736.

Jeżeli pomiarowi kierunku przy obu położeniach lunety przyswoimy wagę jednostkową, wówczas waga kierunku, otrzymanego z s serji, będzie s.

W metodzie Schreibera mamy pomierzone $n\,(n-1)$ kierunków $\left(\frac{n\,(n-1)}{2}\right.$ kątów$\left.\right)$ w jednej serji, więc w q serjach kierunków tych będzie $qn\,(n-1)$.

Jeżeli przy pomiarze kąta pierwszy kierunek potraktujemy, jako początkowy, a drugi, jako wyznaczający, wówczas wyznaczających kierunków będzie $\frac{1}{2}\,qn\,(n-1)$. A ponieważ przy n kierunkach jeden jest początkowy, zaś $n-1$ wyznaczających, średni kierunek otrzymamy z wziętych przy obu położeniach lunety $^1/_2\,qn$ wyznaczających kierunków.

Ponieważ zaś wagę takiego kierunku ustaliliśmy powyżej na jednostkę, przeto wagę wyznaczającego średniego kierunku ustalimy na $^1/_2\ qn$. Lecz waga średniego kierunku w metodzie kierunkowej jest s; aby więc dokładność pomiaru metodą Schreibera odpowiadała dokładności pomiaru metodą kierunkową, winien mieć miejsce związek $s = {}^1/_2\ qn$,
skąd

$$q = \frac{2\,s}{n}.$$

Ze wzoru tego wynika, że ilość seryj nie jest w metodzie Schreibera wielkością stałą, lecz zmienną, zależną od ilości obserwowanych punktów.

Dla ściślejszych triangulacyj lokalnych $2\,s$ przyjmujemy w wypadku bardziej dokładnych pomiarów za 12, w wypadku triangulacji przy pracach, wymagających mniejszych dokładności, za 6, co odpowie 3 pocztom metody kierunkowej.

Ułóżmy tabelkę

$$q = \frac{2\,s}{n}$$

$2s = 12 \quad s = 6$

przy n punktach	q serji	q
2	6	3
3	4	2
4	3	2
5	3	1
6	2	1
7	2	1
8	2	
9	2	
10	1	
11	1	
12	1	

z tabelki widać, że np., dla $2\,s = 12$ przy 5 punktach możemy brać 2 lub 3 serje — zmieni to jedynie ilość seryj i stopień przesunięcia limbusu ze wzoru

$$\tau = \frac{360^0}{M.k.q}$$

Tablice pomiaru kątów metodą Schreibera.

Ustaliliśmy poprzednio, że przy nieparzystej liczbie n kierunków dokonywamy również n przestawień limbusu, przy parzystej zaś liczbie n kierunków dokonywamy $n - 1$ przestawień limbusu dla zachowania warunku, aby żaden z kierunków przy pomiarze kątów nie był brany dwukrotnie na tem samem miejscu limbusu.

Zestawmy teraz tabelki kątów, wyrażonych połączeniem kierunków pionowych kolumn z kierunkami górnego szeregu, oraz odpowiadającem każdemu kątowi tem kolejnem przestawieniem limbusu, przy którem żaden z pomierzonych przy niem kątów nie ma wspólnego kierunku.

W tabelce liczby arabskie oznaczają kierunki, rzymskie — kolejne przedstawienia limbusu.

Kierunki	*K*	*i*			*e*				*r*					*un*						*ki*						
	2		2	3		2	3	4		2	3	4	5		2	3	4	5	6		2	3	4	5	6	7
1	I	1	I	II	1	I	II	III	1	I	II	III	IV	1	I	II	III	IV	V	1	I	II	III	IV	V	VI
		2		III	2		III	II	2		III	IV	V	2		III	IV	V	II	2		III	IV	V	VI	VII
					3			I	3			V	I	3			V	I	IV	3			V	VI	VII	I
									4				II	4				II	I	4				VII	I	II
														5					III	5					II	III
																				6						IV

Jeżeli z którejkolwiek tabelki wypiszemy kąty (z połączenia kierunku, oznaczonego cyfrą arabską w kolumnie bocznej z kierunkiem szeregu u góry) odpowiadające któremukolwiek z przestawień, to przekonamy się, że kąty te nie mają wspólnych kierunków (liczb arabskich). Wybierzmy np. z tabelki dla 7 kierunków III-e przestawienie: wejdą doń kąty 1—4, 2—3, 5—7, podobnież dla innych przestawień.

Kolejność przestawień limbusu jest widoczna w pionowych kolumnach i poziomych wierszach z wyjątkiem ostatniej pionowej kolumny parzystej liczby kierunków, gdyż wtedy w ostatniej pionowej kolumnie numery przestawień rosną co dwa.

Ponieważ teraz znamy już 1) liczbę przestawień limbusu w każdej serji, 2) ilość seryj, 3) kąty, które przy każdem przesunięciu limbusu należy mierzyć i 4) stopień każdorazowego przesunięcia limbusu, więc przy znanej liczbie kierunków zgóry możemy ułożyć plan pomiaru.

Jest to ważną zaletą metody Schreibera, gdyż, mając plan pomiaru, wybieramy do pomiaru te punkty, które są najwyraźniej widoczne, łączymy je po dwa i wpisujemy do odpowiednich rubryk wyniki obserwacji; w ten sposób unikamy łączenia w grupę obserwacyjną punktów, z których jeden jest źle widoczny (i wyniki obserwacji mało pewne), a drugi dobrze widoczny. Zawsze osiągniemy wkońcu, mierząc poszczególne kąty, ostrą widoczność pozostałych kierunków.

Zestawmy, np., plan pomiarów dla 6-ciu kierunków przy dwunonjuszowym (lub mikroskopowym) teodolicie.

$$q = \frac{2\,s}{n} = \frac{12}{6} = 2 \text{ serjom}; \quad \tau = \frac{360^0}{2\,kq},$$

ponieważ $k = n - 1 = 5$ gdyż n jest parzyste,

więc

$$\tau = \frac{360^0}{2.5.2} = 18^0$$

TABELKA.

	2	3	4	5	6	
1	I	II	III	IV	V	I = 0°
2		III	IV	V	II	II = 18°
3			V	I	IV	III = 36°
4				II	I	IV = 54°
5					III	V = 72°

PLAN POMIARU.

Kąty \ Serje	I	II
1—2	0	90
1—3	18	108
1—4	36	126
1—5	54	144
1—6	72	162
2—3	36	126
2—4	54	144
2—5	72	162
2—6	18	108
3—4	72	162
3—5	0	90
3—6	54	144
4—5	18	108
4—6	0	90
5—6	36	126

Od tabelki przechodzimy do planu pomiaru, zastępując kolejne przestawienia limbusu odczytami pierwszego dla danego kąta kierunku.

Odpowiednio do danego planu pomiaru przygotowujemy rubryki w protokule pomiaru kątów, a w polu mierzymy najdogodniejsze do obser-

wacji kąty, zapełniając odpowiednio rubyki, aż do wypełnienia planu pomiaru. Oczywiście, każdy kąt mierzymy przy dwu położeniach lunety.

Przebieg opracowania wyników pomiaru kątów metodą Schreibera polega na:

1) utworzeniu dla każdego z $\frac{n\,(n-1)}{2}$ kątów średniej arytmetycznej wszystkich serji,

2) obliczeniu $n-1$ głównych kątów, jako ogólnych średnich arytmetycznych z a) wyników bezpośredniego pomiaru o wadze 2 i b) utworzonych z innych kątów różnic o wadze jednostkowej.

Rozpatrzmy przykład:

Niech średnie z serji kątów, wybranych dla obliczenia kąta 1 — 5 będą (rys. 737):



Rys. 737.

1 — 5	192°	8'	18"42
1 — 2	66	2	9 99
1 — 3	127	13	41 27
1 — 4	184	12	4 84
1 — 6	209	21	30 97
2 — 5	126	6	9 11
3 — 5	64	54	37 27
4 — 5	7	56	12 43
5 — 6	17	13	10 63

Wyrównanie kąta 1 — 5 ułożymy w tabelkę:

1 — 4	1 — 5	1 — 6
1,5	192° 8' 18"42	Kąt 1—5 wpisaliśmy
1,5	18 42	podwójnie, gdyż wa-
1,2 + 2,5	19 10	ga jego, jako bezpo-
1,3 + 3,5	18 54	średnio pomierzone-
1,4 + 4,5	17 27	go, jest równą dwu.
1,6 — 5,6	20 34	
Średnia . .	192° 8' 18"68	

Gdy w taki sposób wyrównamy wszystkie główne kąty 1—2, 1—3, 1 — 4, 1 — 5, 1 — 6 możemy wypisać tabelkę wyrównanych na stanowisku kierunków:

1	0°	0	0″
2	66	2	9,91
3	127	13	41,69
4	184	12	5,70
5	192	8	10,68
6	209	21	29,51

Dane tej tabelki posłużą jako materjał do wyrównania sieci.

§ 358. Obliczenie średniego błędu kąta, pomierzonego i wyrównanego metodą Schreibera.

Jeżeli zestawimy różnicę między średniemi kątów z serji a ich najprawdopodobniejszemi wielkościami, wówczas różnice te możemy traktować jako powstałe na skutek działania błędów przypadkowych.

Piszemy więc:

$$v_{1-2} = (1 - 2) - \text{I}$$
$$v_{1-3} = (1 - 3) - \text{II}$$
$$v_{1-4} = (1 - 4) - \text{III}$$
$$- - - - - - -$$
$$v_{2-3} = (2 - 3) - [2 - 3]$$
$$v_{2-4} = (2 - 4) - [2 - 4]$$
$$- - - - - - - - - -$$

oznaczając I II... wyrównane główne kąty (1 — 2) (1 — 3)... oraz [2 — 3] [2 — 4] i t. d. wyrównane kąty (2 — 3) (2 — 4) i t. d.

Liczba odchyłek równa się ilości $\frac{n\,(n-1)}{2}$ pomierzonych kątów; głównych zaś kątów, których właściwie szukamy, mamy $n - 1$; więc średni błąd głównych kątów, a zatem i określonych ostatecznych kierunków, określimy ze wzoru:

$$M = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-m}},$$

gdzie n jest liczbą spostrzeżeń, m liczbą określonych wielkości. W naszym wypadku n odpowiada $\frac{n\,(n-1)}{2}$, m zaś odpowiada $n - 1$,

otrzymamy więc:

$$M = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{\frac{1}{2}\,n\,(n-1) - (n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{2\,[vv]}{(n-1)\,.\,(n-2)}}.$$

Jeżeli za jednostkę wagi przyjmiemy wagę bezpośrednio pomierzonego kąta, różnicy zaś lub sumy dwu kątów nadajemy wagę $^1/_2$, wtedy, ponieważ każdy kąt główny określa się z $n - 1$ kątów, z których jeden jest kątem o jednostkowej wadze, a pozostałe $n-2$ są kątami o połowicznej wadze, waga wartości wyrównanej kąta będzie równa:

$$p = 1 + \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2},$$

średni zaś błąd najprawdopodobniejszej wartości kąta będzie:

$$M_k = \pm \sqrt{\frac{M}{\frac{n}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{4\,[v\,v]}{n\,(n-1)\,.\,(n-2)}}$$

§ 359. Uzasadnienie wyrównania wyników pomiaru kątów metodą Schreibera.

Jak widzieliśmy, w metodzie Schreibera każdy z kątów we wszelkich kombinacjach w ilości $\frac{n(n-1)}{2}$ mierzy się q razy, ogółem więc mamy $\frac{qn(n-1)}{2}$ pomierzonych kątów. Tymczasem przy n obserwowanych punktach dla ścisłego wyznaczenia wzajemnego położenia wystarczy $n - 1$ kątów.

Powstaje więc kwestja wyrównania wszystkich spostrzeżeń. Przebieg wyrównania jest następujący:



Rys. 738.

1. Każdy kąt z ogólnej liczby $\frac{n(n-1)}{2}$ przy q serjach jest pomierzony q razy; średnia arytmetyczna wyników pomiaru każdego kąta we wszystkich q serjach da $\frac{n(n-1)}{2}$ średnich kątów.

2. Każdy z niezbędnych $n - 1$ kątów (dla określenia wzajemnego położenia n kierunków) może być określony ze średniej serji, jako wynik bezpośredniego pomiaru, oraz z sumy lub różnicy innych kątów.

Np., dla wypadku 5 kierunków kąt 1 — 2 wyznaczy się z następujących danych:

1) (1 — 2)

2) (1 — 3) — (2 — 3)

3) (1 — 4) — (2 — 4)

4) (1 — 5) — (2 — 5)

Oznaczmy średni błąd bezpośrednio pomierzonego kąta literą m, wagę literą p, wówczas średni błąd kąta, otrzymanego z różnicy dwóch kątów o średnim błędzie m, będzie:

$$m^2_{\ 1} = 2\,m^2,$$

zaś p waga kąta, otrzymanego z różnicy dwu innych, określi się z proporcji:

$$p_1 : p = m^2 : m^2{}_1$$

$$p_1 : p = m^2 : 2m^2$$

$$p_1 : p = \frac{1}{2},$$

skąd

$$p_1 = \frac{p}{2}$$

lub

$$p = 2\, p_1$$

Czyli: waga bezpośrednio pomierzonego kąta jest 2 razy większa od wagi tegoż kąta, otrzymanego z różnicy 2 innych.

Przejdźmy teraz do właściwego wyrównania. Oznaczmy wyrównane kąty odpowiedniemi rzymskiemi liczbami,

mianowicie:

I — wyrówn. (1 — 2)

II — „ (1 — 3)

III — „ (1 — 4)

IV — „ (1 — 5)

Każdy z tych kątów otrzymuje się z szeregu wielkości, z których bezpośrednio pomierzonym przypisaliśmy wagę 2, otrzymanym z różnic 2 kątów wagę 1, np. kąt 1-y:

	wagi
$(1 - 2) = (1 - 2)$	2
$(1 - 2) = (1 - 3) - (2 - 3)$	1
$(1 - 2) = (1 - 4) - (2 - 4)$	1
$(1 - 2) = (1 - 5) - (2 - 5)$	1
	$[p] = 5$

a stąd

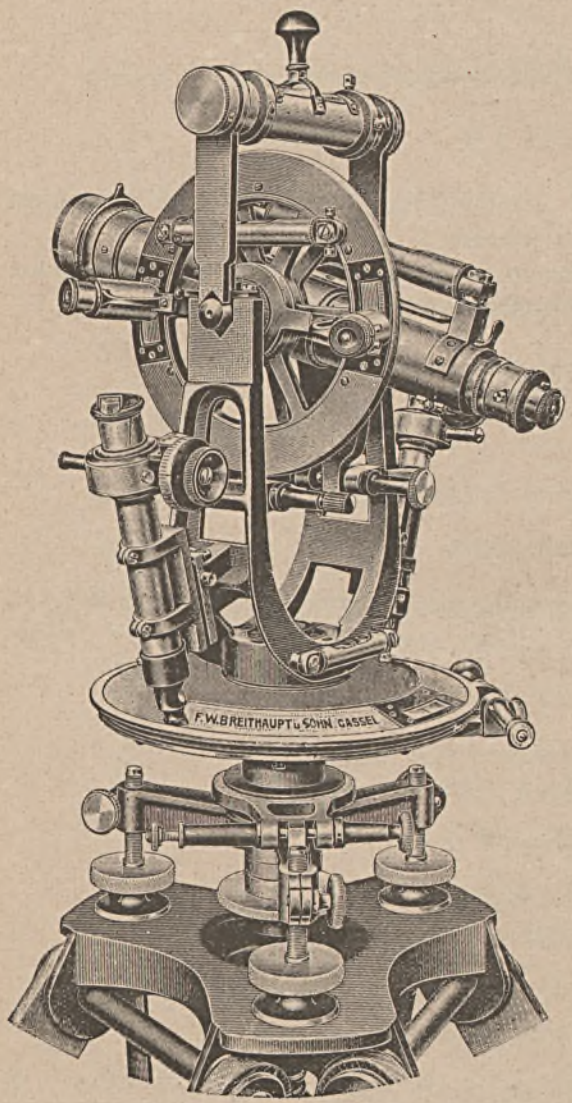
$$I = \frac{2\,(1-2) + (1-3) - (2-3) + (1-4) - (2-4) + (1-5) - (2-5)}{5}$$

czyli wyrównany kąt wyznaczy się jako ogólna średnia arytmetyczna z wag; waga zaś wyrównanego kąta będzie się równać ilości kierunków (n) z danego stanowiska pomierzonych, gdyż wyrównaniu podlega $n - 1$ kątów, z nich 1-y o wadze 2, pozostałych $(n - 2)$ o wadze jednostkowej; waga zaś ogólnej średniej arytmetycznej jest sumą

$$[p] = 2 + 1\,.\,(n - 2) = n.$$

§ 360. Teodolity mikroskopowe ze śrubą mikrometryczną.

Dla podniesienia dokładności pomiaru kątów, używamy teodolitów mikroskopowych. Podniesienia dokładności odczytów w teodolitach nonjuszowych nie można osięgnąć przez wydłużanie nonjuszów, o ile chodzi o odczyty dokładniejsze od 10″, gdyż już w 5″-owych teodolitach zbyt trudno określić ścisły odczyt, wobec tego, że kilka kresek limbusu i nonjuszu wzajemnie się przedłużają.



Rys. 739.

Rysunek 739 przedstawia teodolit z mikroskopami koła poziomego i kołem pionowem z nonjuszami, rys. 740 przedstawia teodolit mikroskopowy bez koła pionowego.

Rozpatrzmy budowę mikroskopu i jego śruby mikrometrycznej.

Mikroskopy osadzone są w pierścieniach, trwale połączonych z podstawkami lunety. Właściwy mikroskop połączony jest z pudełkiem *p*, zaopatrzonem w śrubę mikrometryczną *M*.

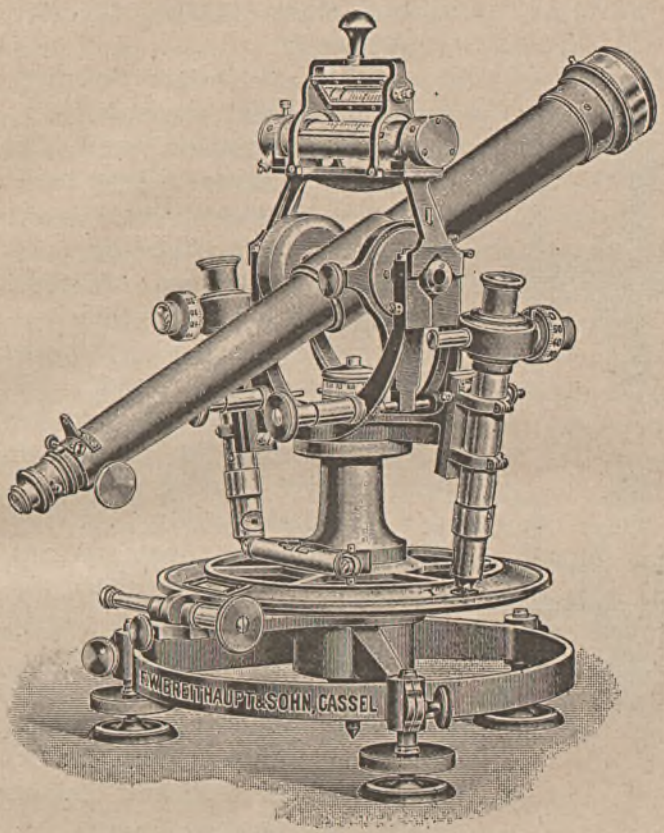
U góry mikroskop jest zakończony rurką okularu, która może być przesuwana wzdłuż osi mikroskopu w pewnych granicach wdół i ku górze. W dolnym końcu rurki mikroskopu znajduje się wewnątrz rurka objektywu z jedną płasko wypukłą soczewką i dwiema diafragmami.

Wewnątrz pudełka *p* znajduje się rama z dwiema zwykle pajęczemi równoległemi nitkami, w konstrukcji zaś firmy Breithaupta, z płytką, na której są wycięte dwie ||-e rysy. Rama może się przesuwać w lewo i w prawo pod wpływem obrotu śruby mikrometrycznej *M*. Na śrubie osadzony jest bębenek z podziałem. Indeks *r*, przymocowany do pudełka (widoczny na rysunku 741), umożliwia odczytywanie z bębenka.

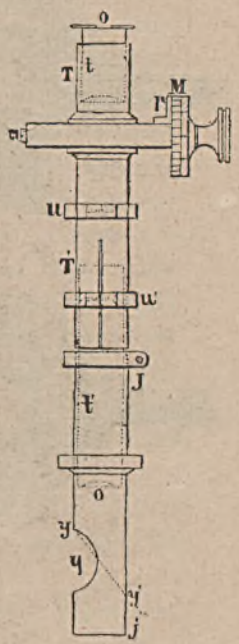
Z odwrotnej w stosunku do bębenka strony pudełka znajduje się pręcik z nawiniętą dokoła niego sprężyną, umożliwiającą sprawne przesu-

wanie się ramy z nitkami. Odliczanie ilości całkowitych obrotów śruby umożliwia ząbek i kilka pod nim znajdujących się kresek, pozostających nieruchomemi przy przesuwaniu się szklanej płytki z równoległemi rysami.

Gdy równoległe rysy znajdują się na średniej kresce pod ząbkiem, symetrycznie do niej, wówczas odczyt z bębenka winien być zerem. Jeżeli



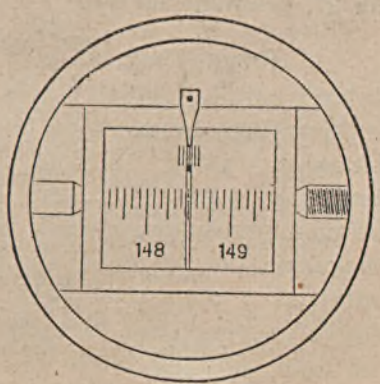
Rys. 740.



Rys. 741.

jest inny, należy odciągnąć śrubę *M* od bębenka palcami prawej ręki, lewą zaś ręką obracamy wówczas zwolniony bębenek do czasu, gdy zero znajdzie się przy indeksie.

Konstrukcję śrub mikrometrycznych w teodolitach innych firm przedstawia przekrój pionowy i poziomy rys. 743. Okular OO_1 może się przesuwać w zewnętrznej rurce mikroskopu do czasu, gdy obraz, utworzony wewnątrz rurki *m n*, będzie zupełnie wyraźny. Główna część mikrometru składa się z przesuwającej się wzdłuż osi śruby płytki *r r* z dwiema pionowemi nitkami 2 — 2 i 3 — 3 oraz poziomą 1 — 1. Płytka *r r* przesuwa się pod wpływem obrotu śruby wzdłuż ramy *p p*.

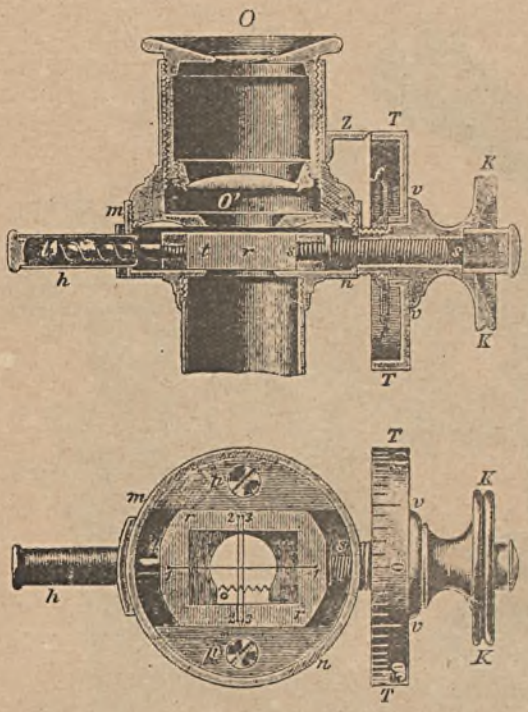


Rys. 742.

Z lewej strony płytka jest naciskana wśrubowanym w nią pręcikiem *t* z nawiniętą nań sprężyną, z prawej w płytkę wkręco-

ny jest koniec śruby *s*. Bęben *TT* naciskany jest sprężyną *ff* i dzięki temu obraca się razem z obrotem główki *KK*. Gdy jednak uciskiem palców unieruchomimy główkę *KK*, wówczas możemy bęben (dla celów rektyfikacyjnych) obrócić dowolnie dokoła śruby.

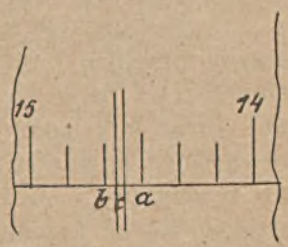
Obwód bębna jest podzielony na części, tak że każdorazowe ustawienie śruby można odczytać z indeksu *Z*.



Rys. 743.

Ząbki na białem tle przekroju poziomego oznaczają licznik obrotów bębna; licznik ten pozostaje nieruchomy przy obrocie śruby. Kółeczko z lewej strony licznika oznacza dziureczkę pod pierwszym ząbkiem; odległość między ząbkami odpowiada krokowi śruby. Bęben winien dawać odczyt zerowy, gdy środek ||-ych nitek kryje ostrze ząbka; całkowity obrót bębenka od zera do zera przesuwa środek nitek o jeden przedział między ząbkami. Ząbek z dziurką odpowiada zeru nonjuszu. W innych typach teodolitów mikroskopowych zerowy ząbek znajduje się w środku.

Ażeby ustalić wartość kątową podziałki bębenka, ustawiamy równoległe nitki symetrycznie do obrazu jednej z kresek limbusu. Ząbki wskażą ilość obrotów bębna, na którym z indeksu dokonamy drugiego odczytu. Przypuśćmy, że limbus jest podzielony co 10″, przesunięcie od kreski do kreski limbusu odpowiada 5 obrotom całkowitym bębna, wówczas jeden obrót bębenka wynosi 2′; jeżeli zaś bęben jest podzielony na 60 części, wówczas każda działka bębna odpowiada 2″, oceniana na oko $\frac{1}{10}$ działki odpowiada 0″,2.



Rys. 744.

Przypuśćmy, że przy t. zw. normalnem położeniu nitek (symetrycznie do zerowego ząbka) nitki takiego mikroskopu znajdują się między kreskami $a = 14^{0}30'$ i $b = 14^{0}40'$ w punkcie *c*. Odczytem więc właściwym jest $14^{0}30' + a\,c$. Ponieważ stopień przesunięcia nitek od zerowego położenia wskazuje odczyt z bębna, więc gdy przesuniemy nitki od *c* do *a* (rys. 744), odczyt z bębenka wskaże wielkość łuku *a c* (gdyż przyjmujemy, że obrót bębna na łuku *c a* tak się ma do obrotu bębna na łuku *a b*, jak wielkości tych łuków). Ponieważ odczytem w normalnem położeniu nitek jest zawsze zero, więc regułą dla odczytu będzie: odczytać

ilość ząbków od zerowego do najbliższej sąsiedniej kreski limbusu, położonej w kierunku malejących działek, ustawić nitki symetrycznie do niej, i odczytać sam bęben.

Pamiętać należy, że przy wkręcaniu śruby sprężyna działa prawidłowo, niż przy jej wykręcaniu; wskutek tego sprowadzenie nitek na obraz kreski limbusu należy zakończyć, wkręcając śrubę.

Jeżeli przesunięciu nitek od kreski do kreski odpowiada jeden, lub całkowita ilość obrotów bębna (2,5), wówczas ten sam odczyt z bębna winniśmy otrzymać przy ustawieniu nitek na każdą z sąsiednich kresek. Ponieważ zaś błędy w podziale limbusu lub ustawieniu mikroskopu powodują drobną różnicę w odczytach przy ustawieniu nitek na sąsiednie kreski, (przedział między kreskami tylko z pewną dokładnością równa się określonej ilości obrotów bębna; ujawnione odchylenie nazywa się r u n' e m), więc za ostateczny odczyt na danym mikroskopie uważać należy średnią arytmetyczną odczytów odpowiadających obydwu kreskom.

Jak i w teodolitach nonjuszowych, średnia z obydwu mikroskopów usuwa błąd ekscentryczności alhidady. Podział na bębnie może być opisany albo normalnie, t. j. co dziesięć lub dwadzieścia sekund, albo jest wyrażony w tak zwanych półsekundach. Mianowicie, ponieważ właściwy odczyt jest średnią arytmetyczną odczytów z obydwu mikroskopów, a więc równa się sumie połówek odczytów, zatem skoro napisy na bębnie odpowiadać będą połowom nominalnych wartości, wówczas wprost suma odczytów z tak opisanych bębnów da odczyt ostateczny. Przed użyciem teodolitu należy więc zbadać, czy mamy na bębnach właściwy opis podziału, czy też opis półsekundowy. Gdy jeden obrót bębna odpowiada kilku minutom, wówczas bęben jest podzielony na minuty i, np., dziesiątki sekund.

Jeżeli przy przesunięciu od kreski do kreski limbusu bęben daje zbyt wielką różnicę w odczytach, to mikroskop należy ustawić na nowo, a więc:

1) nitki winny być wyraźnie widoczne, co uzyskamy zapomocą odpowiedniego przesunięcia rurki okularu;

2) obrazy kresek limbusu winny być jasno i bez paralaksy widoczne; uzyskamy taką widoczność, zwalniając śrubki pierścieni mikroskopu i przesuwając w nich odpowiednio cały mikroskop;

3) zakończamy poprzedni punkt takim obrotem mikroskopu dokoła osi, aby nitki były równoległe do kresek limbusu, poczem zaciskamy pierścienie mikroskopu;

4) sprowadzamy zero bębenka I-ego mikroskopu na indeks przy normalnem położeniu nitek mikroskopu;

5) przy normalnem położeniu nitek I mikroskopu leniwką alhidady sprowadzamy mikroskop do takiego położenia, by nitki I mikroskopu ustawiły się symetrycznie do 0^0 limbusu; poczem przechodzimy do II mikroskopu, ustawiamy jego nitki na 180^0 i, utrzymując nitki nieruchomo, obracamy bęben zerem na indeks. Wówczas w odczytach z obydwu mikroskopów na poszczególnych miejscach limbusu nie będzie większych różnic;

6) dla sprawdzenia powiększenia mikroskopu ustawiamy jego nitki na dwie sąsiednie kreski limbusu, odczytując bębenek przy obydwu usta-

Protokuł pomia

Data 5.VII.26. Punkt:

początek: 14 g. 02 m.
koniec 14 g. 20 m.

Elementy redukcji:
$m = 0$; $\Theta = 0$

Szkice celów	PUNKTY	KOŁO PRAWE: Odczyty °	Odczyty ′	MIKROSKOPY I $\frac{a}{b}$	MIKROSKOPY II $\frac{a}{b}$	I $\frac{1}{2}(a+b)$	II $\frac{1}{2}(a+b)$	P °	P ′	P ″
	⊙ Zbawiciela	0	0	0 29,8 0 30,9	0 27,3 0 28,3	1 0,7	0 55,6	0	0	58,2
	⊙ Serca Marji	1	0	1 34,2 1 31,1	1 33,7 1 33,1	3 5,3	3 6,8	1	3	6,0
	⊙ N. Marji Panny	26	20	4 3,2 4 3,5	4 10,6 4 9,5	8 6,7	8 20,1	26	28	13,4
	Warsztaty kolejowe komin	50	10	3 36,5 3 37,8	3 46,6 3 49,0	7 14,3	7 35,6	50	17	25,0
	⊙ Zerżeń	293	20	1 2,4 1 2,0	1 0,6 1 1,6	2 4,4	2 2,2	293	22	3,3
	Wilanów	312	40	1 31,6 1 31,2	1 34,2 1 33,2	3 2,8	3 7,4	312	43	5,1
	⊙ Zbawiciela	0	0	0 30,8 0 32,2	0 34,4 0 34,1	1 3,0	1 8,5	0	1	5,8

UWAGI: Podział na bębenku półsekundowy. Nitki mikroskopu ustawiano na dwie sąsiednie kreski limbusu. Pomiaru dokonano 2"-owym teodolitem Breithaupta.

ru kierunków.

Kawęczyn. Serja I.

Pogoda: wiatr.
Wysokość instrumentu nad ziemią: 25 *m*.

KOŁO LEWE: Odczyty limbusu °	Odczyty limbusu ′	MIKROSKOPY I $\frac{a}{b}$	MIKROSKOPY II $\frac{a}{b}$	I $\frac{1}{2}(a+b)$	II $\frac{1}{2}(a+b)$	L °	L ′	L ″	$2c$	$\frac{P+L}{2}$ °	$\frac{P+L}{2}$ ′	$\frac{P+L}{2}$ ″
180	0	0 38,4 0 38,0	0 38,8 0 38,2	1 16,4	1 17,0	180	1	16,7	18,5	0	1	7,4
181	0	1 39,6 1 39,0	1 36,2 1 37,4	3 18,6	3 13,6	181	3	16,1	10,1	1	3	11,0
206	20	4 12,1 4 13,0	4 4,8 4 4,0	8 35,1	8 18,8	206	28	27,0	13,6	26	28	25,2
230	10	3 54,3 3 52,6	3 46,1 3 43,0	7 46,9	7 29,1	230	17	38,0	13,0	50	17	31,5
113	20	1 8,4 1 9,0	1 8,7 1 8,8	2 17,4	2 17,5	113	22	17,4	14,1	293	22	10,4
132	40	1 42,5 1 41,6	1 40,4 1 39,0	3 24,1	3 19,4	132	43	21,8	16,7	312	43	13,4
180	0	0 35,0 0 35,0	0 36,0 0 35,8	1 10,0	1 11,8	180	1	10,9	5,1	0 0	1 1	8,3 7,8

Rubryka 2 *c* wskazuje, w jakim stopniu zachodziły wahania wpływu błędu kolimacyjnego.

wieniach; jeżeli odczyty się nie różnią — powiększenie jest dostateczne; jeżeli obrót bębna między dwoma ustawieniami jest większy od nominalnego, wówczas powiększenie mikroskopu jest zbyt duże i wówczas należy, nie poruszając całego mikroskopu, odsunąć od limbusu rurkę objektywu po zwolnieniu dolnych śrubek mikroskopu, przytem o tyle, aby obraz przedziału między kreskami wymagał odpowiedniego obrotu bębenka; wówczas zaciśniemy dolne śrubki; przy zbyt małem powiększeniu objektyw należy przysunąć odpowiednio do limbusu. Jeżeli wskutek przesunięcia objektywu powstaje paralaksa, to w celu jej usunięcia należy zwolnić pierścienie mikroskopu i przesunąć go do czasu, gdy usuniemy paralaksę.

U dołu każdy mikroskop zakończony jest iluminatorem, t. j. rurką, obracającą się lekko dokoła osi mikroskopu, ze znajdującą się wewnątrz białą płytką z otworem pośrodku; płytka jest pochylona o 45° do osi mikroskopu i wskutek tego odbija światło, wpadające przez boczny otwór rurki, ku górze. Oczywiście wymieniony otwór boczny należy przy ustawianiu nitek na kreski limbusu kierować w stronę światła.

Zaznaczyć wreszcze należy (patrz rys. 740), że teodolity mikroskopowe często nie posiadają śrub leniwych, mikrometrycznie przesuwających limbus; przestawienie limbusu w teodolitach tego typu dokonywa się odręcznie, gdyż niema potrzeby ściśle ustawiać osi celowej w danym kierunku ściśle na 0°, 30° i t. d. Wystarczy przybliżone ustawienie.

W takich teodolitach limbus jest całkowicie izolowany od alhidady i jej osi; osie takiego teodolitu noszą nazwę układu osiowego Repsolda; wielka waga górnej części teodolitu nie powoduje w taki sposób tarcia osi limbusu i alhidady, co zachodzi w teodolitach mikroskopowych repetycyjnych o układzie osiowym typu Reichenbacha. Układ osiowy Repsolda stosuje się w teodolitach większych, posiadających średnicę limbusu powyżej 20 *cm*.

Główną zasadą użycia mikroskopowych teodolitów jest należyte ustawienie mikroskopów; wpływ r u n'u jest wówczas o tyle mały, że niema celu obliczać poprawek na r u n, o ile chodzi o triangulację niższych rzędów.

Protokuł pomiaru kierunków teodolitem mikroskopowym załączony jest na str. 848 — 849.

§ 361. Mikroskopy skalowe.

Mikroskopy te są przytwierdzone do dźwigarków lunety w ten sposób, że w polu widzenia znajduje się podział na limbusie. Przez ognisko okularu przechodzi cienka płytka szklana z podziałką, składającą się z 10 ściśle równych części (11 kresek). Środkowa kreska, zwana indeksem, jest dłuższa od pozostałych. Odległość między skrajnemi kreskami winna być taka, by równała się odległości między obrazami sąsiednich kresek limbusu. Odczytu dokonamy w następujący sposób (patrz rys. 745): indeks skali *o* położony jest między 112° 20′ i 112° 40′; działka płytki odpowiada 20′ : 10 = 2′; indeks jest odsunięty w prawo od 112° 20′ o 6,3 podziałki (liczone na oko), co stanowi 12′ 36″; całkowity więc odczyt wynosi 112° 32′ 36″.

Cały mikroskop może być przesuwany w kierunku swej osi po zwolnieniu śrubek zaciskowych pierścieni; okular może się również przesuwać wzdłuż osi mikroskopu przy wkręcaniu go — lub wykręceniu. U dołu mikroskop zaopatrzony jest w iluminator. Jeżeli obrotem leniwką alhidady złączymy indeks z obrazem dowolnej kreski limbusu, to ostatnia kreska płytki winna pokryć obraz następnej kreski limbusu. Gdy mamy do czynienia z paralaksą, wówczas przesuwamy rurkę okularu, dopóki kreski płytki nie będą wyraźnie widoczne. Następnie dla uzyskania obrazu kresek limbusu w płaszczyźnie płytki, należy przesunąć cały mikroskop (po zwolnieniu zacisków pierścieni) do takiego położenia, przy którem obraz będzie widoczny zupełnie wyraźnie i bez paralaksy. W takiem położeniu mikroskop zaciskamy w pierścieniach. Gdyby odstęp między skrajnemi kreskami płytki był większy od podziałki limbusu, widzianej przez mikroskop, wówczas powiększenie mikroskopu jest za małe i obraz działki limbusu należy powiększyć; w tym celu rurkę objektywu wewnątrz mikroskopu przesuwamy ku limbusowi, dopóki działka limbusu odpowiednio się nie zwiększy; jeżeli obraz kresek limbusu stanie się niewyraźnym i zachodzi paralaksa, wypadnie następnie cały mikroskop odsunąć od limbusu. Kilka takich stopniowo coraz mniejszych przesunięć objektywu i całego mikroskopu we wzajemnie odwrotnych kierunkach doprowadzi do równości obrazu działki limbusu z długością skali na płytce, oraz do usunięcia paralaksy.



Rys. 745.

Gdy długość skali na płytce jest mniejsza od obrazu działki limbusu, należy objektyw odsuwać od limbusu, a cały mikroskop następnie przysuwać ku limbusowi, aż do uzyskania obrazu podziałki limbusu odpowiedniej długości i jasności.

Mikroskopy nonjuszowe.

Firma Breithaupt wyrabia t. zw. mikroskopy nonjuszowe. Limbus takiego teodolitu posiada podział na poszczególne stopnie, z których każdy jest zaopatrzony w odpowiednią liczbę, wypisaną pod kolejną kreską. Przedział między stopniami jest podzielony na 12 części. Rozpatrywany przez okular mikroskopu nonjusz posiada 10 podziałek, stąd wartość podziałki nonjusza wynosi $5' : 10 = 30''$. Odczyt z rysunku 746 wynosi więc $104^{\circ}\,37'\,30''$.



Rys. 746.

§ 362. Nowy teodolit Zeissa.

Nowy typ teodolitu Zeissa umożliwia zapomocą jednego mikroskopu odczytywanie koła poziomego i pionowego. Przyspiesza to w znacznym stopniu pracę specjalnie w tych warunkach obserwacji, gdzie swoboda ruchów obserwatora jest skrępowana czy to dzięki właściwościom terenu, czy stanowiska, jak to zachodzi w oknach wież i t. p. Mikroskop tego teodolitu H_3 (rys. 750) znajduje się zboku podstawek lunety i może być odwracany o 180° po przerzuceniu lunety przez oś obrotu lunety. Iluminator K_3 daje oświetlenie jednakowe przy odczytywaniu obydwu kół.



Rys. 747.

Własności przyrządu cechują: mała waga (3,9 *kg*), niewielkie wymiary, (wysokość 20 *cm*, szerokość 15 *cm*), długość lunety 13,7 *cm* i osiemnastokrotne powiększenie.

Rozpatrywane przez mikroskop H_3 obrazy średnicowo-przeciwległych części limbusu układają się w polu widzenia mikroskopu jeden nad drugim (rys. 747), tak jednakże, że numeracja biegnie w przeciwnych kierunkach.

Nad górną podziałką i pod dolną oznaczone są dwie kreski, tworzące indeks.

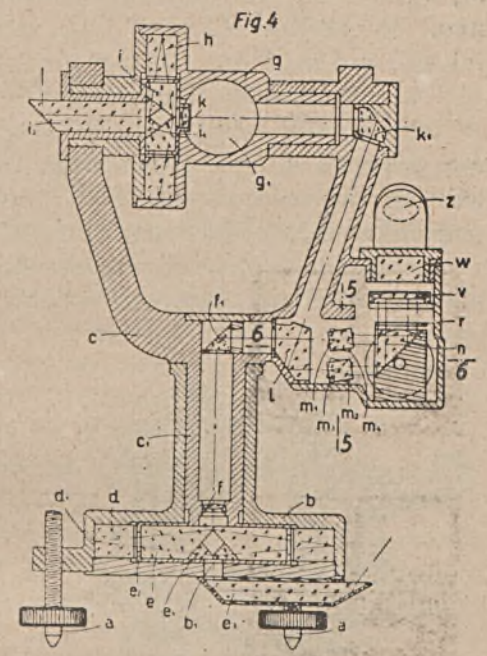
Suma odczytów z obydwu obrazów jest jednakowa dla każdego położenia indeksu. Indeks na górnym rys. w prawem okienku znajduje się między 90° i 91° na dolnej podziałce i powyżej nad górną. Odczytujemy przedewszystkiem stopnie; obraz lewej części limbusu ma prosty kierunek opisu, prawej — wsteczny. Czytamy z dolnej podziałki S_1 (z koła poziomego) 90°; kreska limbusu średnicowo przeciwległa, a symetryczna na obrazie w stosunku do indeksu, daje odczyt 270°; odstęp między temi kreskami wynosi 3,5 podziałki; mnożąc 3,5 przez połowę wartości działki limbusu otrzymujemy zgruba odczyt 90°35′. W lewej połowie pola widzenia na podziałce H_1 odczytamy z koła pionowego 78°42′. Dla dokonania ścisłego odczytu zapomocą mikrometru optycznego, który rozpatrzymy poniżej, przesuwamy jego kreskę, znajdującą się w dolnem okienku pod podziałkami H_1 i S_1 do czasu, gdy kreska 90° w okienku S_1 znajdzie się na przedłużeniu pierwszej na prawo kreski górnej podziałki (środkowy rys. 747). Przy odczytywaniu koła pionowego przesuwamy obrazy dopóki kreska 78° podziałki 1, nie znajdzie się na przedłużeniu położonej dotychczas po prawej stronie najbliższej kreski dolnej podziałki (dolny rys. 747). Wówczas (dla każdego koła powyższe postępowanie powinno być dokonane oddzielnie) z długiej wąskiej, zwanej dolną, podziałki pod H_1 i S_1 odczytamy dokładnie: dla koła poziomego 90° 35′ 3″ z kreski mikrometru (środkowy prawy i dolny rys. 747), dla koła pionowego: (lewy i dolny rys. 747) 78° 41′ 52′ (pojedyńcze minuty— dolne cyfry, sekundy — górne, skośnie na prawo).

Rys. 748—9 wskazują przekroje teodolitu: pionowy oraz wzdłuż 5—5 i 6—6. Wewnątrz dolnej części *b* przyrządu znajduje się szklany pierścień

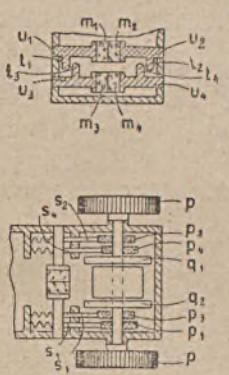
d, na zewnętrznej walcowatej powierzchni d_1 którego naniesiony jest podział koła poziomego. Wewnątrz przestrzeni, ograniczonej pierścieniem d, znajdują się dwa zwierciadlane pryzmaty e i dwa mniejsze takież pryzmaty e_1, sklejone z pryzmatami e.

Pryzmaty te spoczywają w ściankach pudełka e_2, trwale połączonego z tuleją c_1. Światło przechodzi przez pryzmat e_1 i przez środkowy otwór b_1, skąd pada na podział limbusu w dwu średnicowo-przeciwległych miejscach podziału d_1. Odbite promienie idą przez pryzmaty e i wpadają przez soczewkę f do zwierciadlanego pryzmatu f_1.

Podobnie odbite zostają promienie, przechodzące przez pryzmat i_2 w wydrążonej osi obrotu lunety g_1 kierowane do koła pionowego. Podział koła pionowego znajduje się na powierzchni pierścienia h. Promienie, padające na średnicowo przeciwległe punkty koła pionowego, po odbiciu zostają przesłane zapomocą pryzmatów i do wydrążenia osi obrotu, skąd przez soczewkę k, grającą, jak i f, rolę objektywu mikroskopu, padają na pryzmat zwierciadlany k_1 skąd po odbiciu przechodzą wewnątrz wydrążenia podstawki osi obrotu lunety do pryzmatu l, z którego zostają przesłane dalej równolegle i poniżej do promieni, idących od koła poziomego, w niewielkiej od nich odległości. Promienie poziome idą dalej przez optyczny mikrometr m_1, m_2, zostają odbite o 90° ku górze od pryzmatu n ku okularowi z do odczytywania, składającemu się z soczewki v, zwierciadlanego pryzmatu w i soczewki z. Podobnie przez optyczny mikrometr m_3 m_4 dochodzą do oka promienie, idące od koła pionowego.



Rys. 748.


Rys. 749.

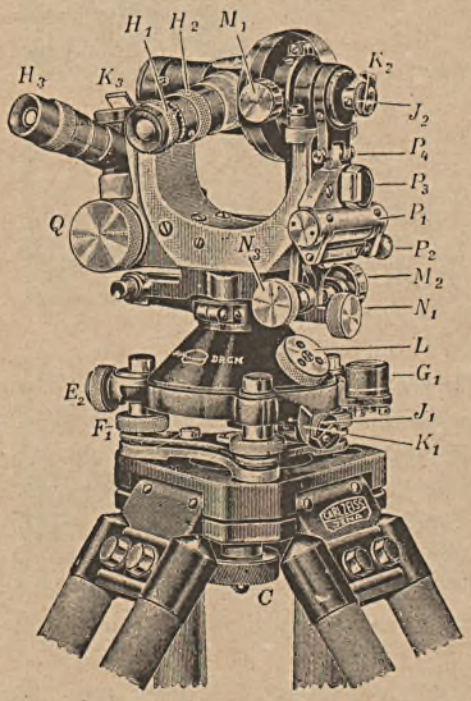
Mikrometr optyczny składa się z dwu par płytek m_1 m_2 i m_3 m_4 szklanych o równoległych ściankach. Promień, przechodzący przez taką płytkę, ulega równoległemu przesunięciu, tem większemu, im większy jest kąt padania. Jeżeli literą g oznaczymy grubość płytki, α kąt padania i z kąt załamania, wówczas przesunięcie promienia l wyniesie:

$$l = \frac{\sin(\alpha - z)}{\cos z} g$$

Płytki mikrometru optycznego są tak ku sobie pochylone, że promienie, idące od przeciwległych końców średnicy limbusu, odchylają się przy przejściu przez płytki w przeciwnych kierunkach, biegnąc dalej znów równolegle.

Przy obrocie połączonych bębenków pp (rys. 749) przesuwają się sztyfty s_1, s_2, s_3 i s_4 pod działaniem ekscentrycznie na osi pp osadzonych krążków p_1, p_2, p_3 i p_4. Płytki m_1, m_2, m_3 i m_4 obracają się na osiach u_1, u_2, u_3 i u_4, których odgałęzienia t_1, t_2, t_3 i t_4 są przyciskane sprężynami do sztyftów s_1, s_2, s_3 i s_4. Stąd przy obrocie pp zachodzi obrót płytek m_1, m_2, m_3 i m_4. Oś pp jest połączona z dwoma szklanemi krążkami q_1 i q_2, na obwodzie których naniesiony jest podział na minuty i sekundy, w taki sposób obliczony, że przesunięcie wzajemne obrazów, np. s_1 od rys. górnego do rys. środkowego, powoduje odpowiednie przesunięcie krążków q, widocznych na tych rysunkach przez podłużne okienko (dolna podziałka) z podziałem pod literami H_1 i S_1.

Teodolit Zeissa przedstawiony jest na rys. 750. Na trójnożnej podstawce o śrubach nastawowych F_1 znajduje się pudełkowa libela G_1 oraz wysuwany iluminator J_1, którego wysunięcie powoduje uniewidocznienie obrazów w mikroskopie. Śruba C sprzęga podstawkę ze statywem. Śruba E_2 służy do unieruchomienia teodolitu na podstawce. Luneta posiada zacisk M_1 i leniwkę M_2. Obrót górnej części teodolitu dokoła pionowej osi powoduje leniwka zacisku N_1. Limbus może być przesunięty działaniem śruby L.



Rys. 750.

Koła pionowe i poziome są podzielone co 20′, opisane zaś co 1°. Koło pionowe oświetla się zapomocą pryzmatu J_2. Odczytu z koła pionowego dokonamy, gdy sprowadzimy do środka bańkę libeli P_1 śrubką N_3. Libela jest oświetlana od dołu lusterkiem P_2. Zapomocą obrotu pryzmatu P_3 możemy sprawdzać ustawienie libeli, jak w niwelatorze Zeissa, mianowicie: obrazy końców libeli mają być złączone; śrubkami korekcyjnemi libeli są P_4. Pierścień H_2 zastępuje kremoljerę; obrót pierścienia przesuwa wewnętrzną soczewkę lunety, której analaktyczny punkt znajduje się prawie zupełnie ściśle na przecięciu się osi pionowej z osią obrotu lunety. Spółczynnik dalekomierza wynosi 100. Pierścień H_1 służy do ustawienia na ostrość krzyża nitek.

K_3 jest iluminatorem mikroskopu H_3 dla podziałki minut i sekund. Śruba Q służy do ustawienia indeksu podziałki minut i sekund na zero oraz do łączenia odpowiednich kresek obydwu podziałek S_1 czy też H_1. Uzyskiwana dokładność odczytu może wynosić części sekundy, jednakże tkwić w wyniku będą co najmniej: 2″-owy błąd celu i 2″-owy w przybliżeniu błąd złączenia (koincydencji) kresek dolnej i górnej w każdem okienku. Luneta może być przerzucana objektywem wdół. Na lunecie mamy pod literą M_1

ostrze do centrowania pod punktami górniczemi. Nad objektywem znajduje się drugie takie ostrze, tworzące z pierwszem celownik do wprowadzenia celu w pole widzenia lunety. Dla oświetlania włącza się wówczas baterję elektryczną.

§ 363. Teodolit Wilda.

Teodolit Wilda jest podobny do teodolitu Zeissa. Idea budowy przyrządów tego rodzaju należy do Wilda. Głównem ulepszeniem w teodolicie Wilda jest umieszczenie okularu mikroskopu tuż przy okularze lunety. Wskutek tego łatwo po dokonaniu odczytów sprawdzić przez okular lunety położenie krzyża w stosunku do celu. Dalszą zaletą teodolitów Wilda jest dostosowanie ich do potrzeb triangulacji, a więc przyrządy te umożliwiają uzyskiwanie dokładnych wyników, są przytem nadzwyczajnie dogodne do transportu wobec nieznacznych rozmiarów i dobrego opakowania. Rys. 751 przedstawia teodolit Wilda, ustawiony na statywie.

Górna część przyrządu ustawia się na metalowej trójnożnej podstawce, z którą sprzęga się zapomocą zacisku. Punkt zawieszenia pionu leży w płaszczyźnie, przechodzącej przez ostrza śrub nastawowych, co umożliwia dokładne scentrowanie teodolitu nawet przed spoziomowaniem przyrządu. Pokrywka śruby, przesuwającej limbus, uniemożliwia poruszenie go wskutek nieostrożności.

Limbus jest sporządzony ze szkła. Na rys. 753 uwidoczniono rozmieszczenie leniwek do przesuwania lunety w poziomej i pionowej płaszczyźnie, oraz leniwki libeli koła pionowego. Libela teodolitu pod lunetą (rys. 753) ma 2-milimetrową podziałkę o przewadze 20″.

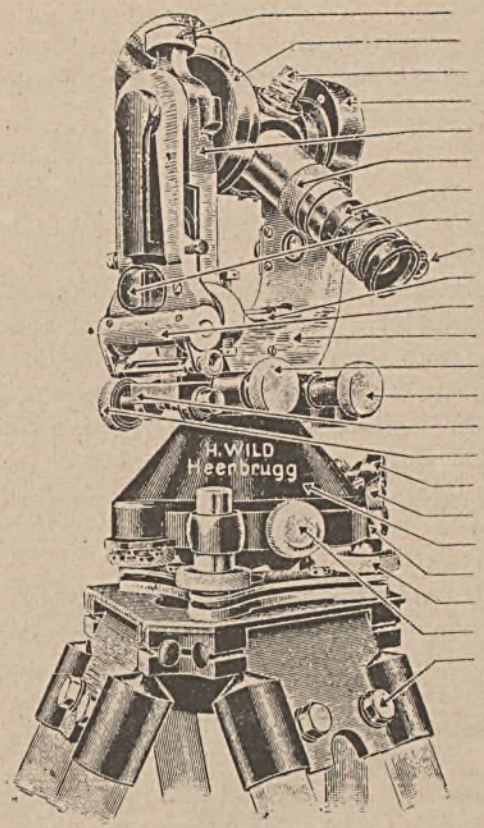
Koło pionowe jest trwale połączone z lunetą, a więc obraca się z nią razem. Luneta daje powiększenie 24 przy 9 *mm* okularze.

Jasność lunety jest znacznie wyższa niż w teodolitach innych typów; z tego względu przyrząd jest bardzo dogodny przy pracach tunelowych i kopalnianych. Luneta jest analaktyczna. Spółczynnik dalekomierza wynosi 100. Ustawienie obrazu umożliwia gwint pierścieniowy lunety, dzięki czemu dokładność nastawienia jest wyższa, niż przy użyciu zwykłej kremoljery. Wewnętrzna soczewka L_2 (rys. 754) lunety przesuwa wprawdzie punkt analaktyczny lunety, ale w tak nikłych rozmiarach, że punkt ten dla celów praktyki można rzeczywiście uważać za stały.

Na rys. 754 L_1 jest objektywem, ogniskowa = 136 *mm*, L_2 jest przesuwaną wewnątrz lunety rozpraszającą soczewką o 101-milimetrowej ogniskowej.

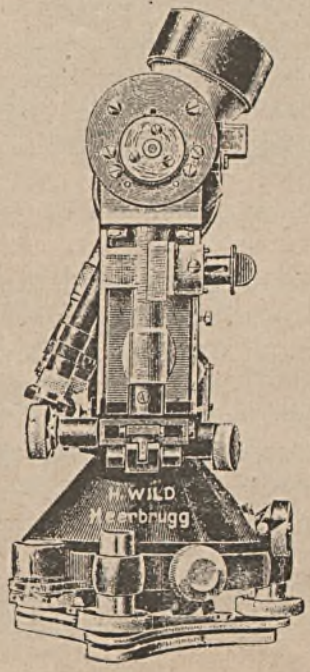
Przy celu do odległych przedmiotów odległość między temi soczewkami wynosi 100 *mm*. Ogniskowa układu tych dwu soczewek wynosi wówczas 211,32 *mm*, odległość y płaszczyzny B obrazu od rozpraszającej soczewki — 55,94 *mm*. Długość l lunety wynosi 155,94 *mm*. Punkt stały A, leżący w przecięciu się osi pionowej teodolitu z osią obrotu lunety, znajduje się w odległości c = 65,18 *mm* od objektywu.

Promień, idący ku punktowi A pod kątem α do ogniskowej, załamuje się, przechodząc przez objektyw, i przecina ogniskową w odległości

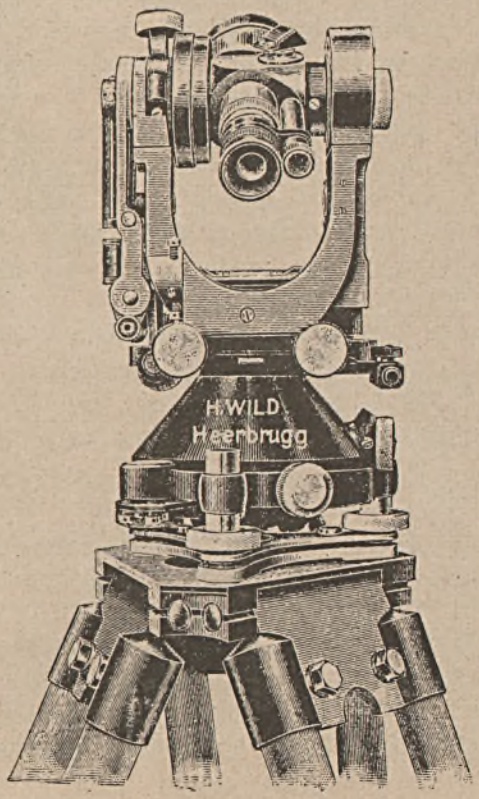


sprzęg lunety
koło pionowe
iluminator koła pionowego
łożysko prawe
łożysko lewe
pierścień, przesuwający wewnętrzną soczewkę
luneta
pryzmat libeli
okular mikroskopów
libela alhidady
libela koła pionowego
podstawa dźwigarków lunety
śrubka mikrometryczna lunety
śrubka mikrometryczna alhidady
rama dla mikrometrycznych przesunięć
śrubka mikrometryczna libeli koła pionowego
pokrywka i
śrubka przesuwająca limbus
stożkowy dźwigarek górnej części teodolitu
trójnożna podstawka
śruba nastawowa
sprzęg alhidady
śruby statywowe

Rys. 751.



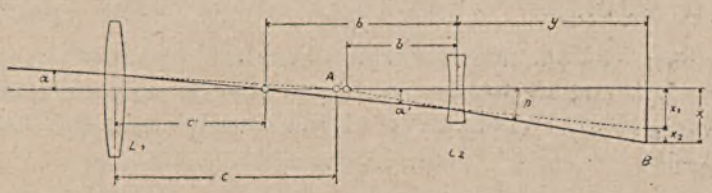
Rys. 752.



Rys. 753.

Bębenek optycznego mikrometru.

$c' = 44{,}06$ *mm* od objektywu w punkcie, zwanym sprzężonym analaktycznym punktem. Odległości $b = y = 55{,}94$ *mm* oznaczają odległość soczewki rozpraszającej od sprzężonego punktu analaktycznego i płaszczyzny obrazu.



Rys. 754.

Z rysunku 754 mamy:

$$x = x_1 + x_2 = (b + y)\ tg\ \alpha' + y\ (tg\ \beta - tg\ \alpha')$$

ponieważ:

$$b tg\ \alpha' = b'\ tg\ \beta$$

więc

$$tg\ \beta = \frac{b}{b'}\ tg\ \alpha' = \frac{f_2 - b}{f_2}\ tg\ \alpha'$$

$$x_2 = y\ \left(tg\ \alpha' \frac{f_2 - b}{f_2} - tg\ \alpha'\right)$$

a stąd:

$$x_2 = y\ tg\ \alpha' \left(\frac{f_2 - b}{f_2} - 1\right) = -\frac{by}{f_2}\ tg\ \alpha'$$

oraz

$$x = (b + y)\ tg\ \alpha' - \frac{by}{f_2}\ tg\ \alpha'$$

Maximum x_2 zajdzie dla $b = y$ i wówczas zmiana wielkości obrazu będzie zerem. Przy przesunięciu soczewki rozpraszającej o pewne i, x_2 zmieni się na

$$x_2 + \Delta x = -\frac{(b + i)\ (y - i)}{f_2}\ tg\ \alpha';$$

Przy $b = y$ licznik ułamka będzie równy $by + i^2$, a stąd:

$$\Delta x = \frac{i^2}{f_2}\ tg\ \alpha'$$

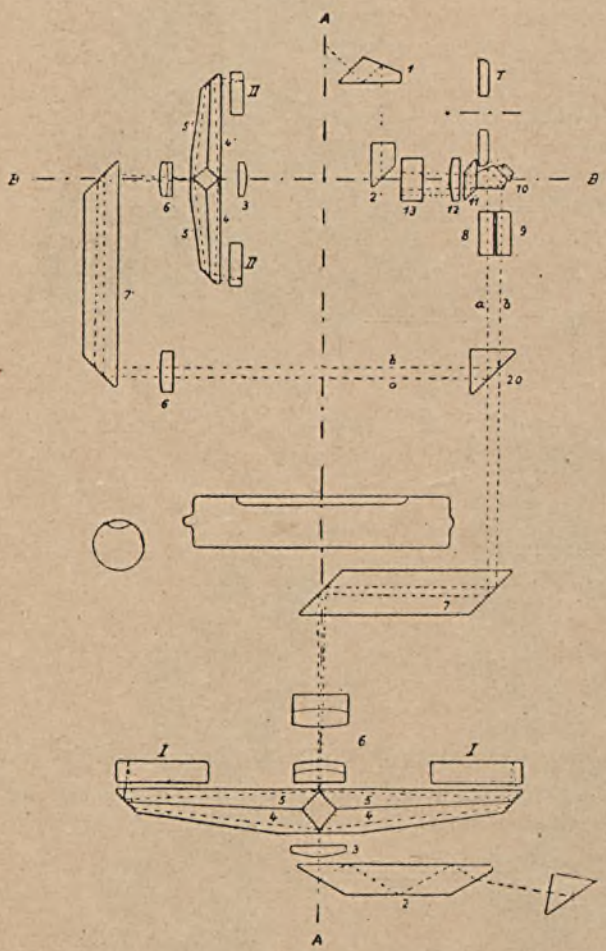
Wobec ujemnego f_2, Δx jest też ujemne, a więc x zostanie zwiększone i wskutek tego z łaty uzyskamy odczyt, zwiększony o wielkość:

$$\Delta D = -\frac{\Delta x}{x} D$$

Przy	$D = 5\ m$	10	20	50	100	∞
	$i = 6{,}79\ mm$	3,28	1,62	0,63	0,325	0,000
	$\Delta D = 0{,}016\ m$	0,007	0,004	0,001	0,001	0,000

Jak stąd wynika, przesunięcia wewnętrznej soczewki są praktycznie nieszkodliwe, poczynajac już od ustawienia lunety na przedmioty, odległe o 10 i wyżej metrów. Wobec tego można lunetę teodolitu Wilda uważać za analaktyczną.

Przebieg promieni, przechodzących przez mikroskop do oka, jest przedstawiony na rys. (755).



Rys. 755.

Limbus I-I jest szklanym pierścieniem. Średnica limbusu wynosi 95 *mm*. Podział znajduje się na górnej płaskiej ściance pierścienia. Każdy stopień jest oznaczony odpowiednią liczbą.

Promień światła, idący przez pryzmaty 2, 4, odbija się od podziału limbusu i przez pryzmat 5—5 wpada do objektywu 6, znajdującego się na pionowej osi teodolitu. Następnie promień załamuje się w pryzmacie 7-ym i obrazy obydwu średnicowo przeciwległych części limbusu łączą się w rozdzielczym pryzmacie 10-ym stycznie do prostej, tworzącej ich granicę. Pryzmat 20, jako wchodzący w układ pryzmatów koła pionowego, odsuwa się przy odczytywaniu poziomego koła. Od rozdzielczego pryzmatu promień, przechodząc przez pryzmaty 12 i 13, idzie przez okular mikroskopu do oka. Płytki (plan—paralele) 8 — 9 tworzą optyczny mikrometr.

Płytki te są obracane symetrycznie zapomocą dwu dźwigni dokoła poziomej osi; przy tym samym obrocie przesuwa się bębenek szklany *T* mikroskopu.

Obrazy obydwu części limbusu zapomocą płytek 8—9 przesuwają się w odwrotnych kierunkach o odcinki tej samej długości.

Bębenek szklany posiada podział, odpowiadający połowie działki limbusu, t. j. 10'-om; poszczególne działki bębenka wynoszą 1" i są widoczne przez okular mikroskopu jako milimetrowe odcinki.

Stan bębenka przesyła do oka rombowy pryzmat *H*.

Oświetlenia dostarczają pryzmaty 1, 2, 4 oraz soczewka 3. Zamiast pryzmatu 1 można wkręcić lampkę elektryczną, dla której wystarczy bateryjka kieszonkowa. Podobny jest przebieg promieni, idących od koła pionowego II—II przez pryzmaty 5', 7', 20. Ten ostatni włączamy przy odczytywaniu koła pionowego. Pryzmaty 4' i 5' są połączone w stały, lecz dający się rektyfikować, sposób z libelą koła pionowego. Koło pionowe posiada podwójny opis stopni; różnica odczytów z obydwu położeń lunety daje odległość zenitową. Zapomocą rektyfikacji libeli koła pionowego możemy ustawić jego miejsce zera do właściwego położenia.



Rys. 756.

Natomiast oś obrotu lunety i oś celowa nie wymagają rektyfikacji, gdyż fabryka przestrzega, by błąd montowania tych osi nie przekroczył 10".

Zamiast pudełka przyrząd posiada metalową puszkę. Ma to swoje zalety, gdyż wpływ wilgoci nie posiada znaczenia (rys. 756).

Prócz zalet konstrukcyjnych — przyznać należy, że teodolit Wilda daje dobre wyniki i oszczędność czasu przy obserwacjach. Przy użyciu teodolitu Wilda i Zeissa można dwukrotnie odczytywać mikroskop, mianowicie, po zanotowaniu pierwszego odczytu, odsuwamy od siebie obrazy i znów je łączymy; w ten sposób zmniejszamy błąd koincydencji.

§ 364. Pośrednie pomiary kątowe.

W dwu wypadkach zachodzi potrzeba dokonania pośredniego pomiaru kąta:

1) gdy teodolit nie może być ustawiony nad wierzchołkiem mierzonego kąta,

2) gdy podlegający obserwacji punkt nie jest widoczny, natomiast obserwujemy taki punkt, którego położenie względem pierwszego może być zupełnie ściśle wyznaczone.

W pierwszym wypadku mamy do czynienia z mimośrodkowym pomiarem kątą, w drugim z mimośrodkowym pomiarem celu; w obydwu wypadkach mamy do czynienia z tak zwanemi pośredniemi pomiarami kątów.

Pomiary takie zawsze są spowodowane konkretną potrzebą; wyobraźmy sobie następujący wypadek:

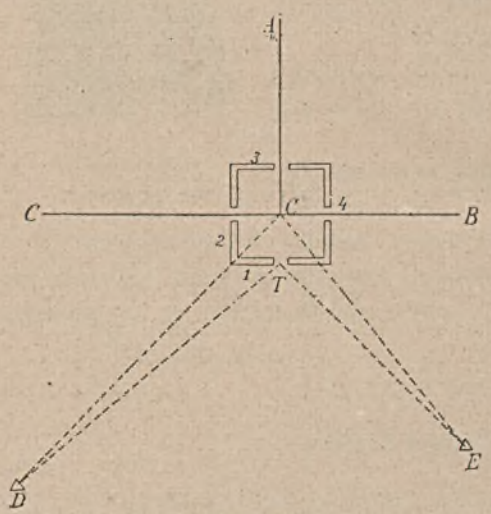
Punktem triangulacyjnym jest spód krzyża na wieży kościelnej; dla właściwego pomiaru kierunków z takowego punktu należałoby ustawić teodolit ściśle nad spodem krzyża, co jest w większości wypadków bardzo

trudne nawet wówczas, gdy zaopatrzymy wierzchołek wieży w zupełnie trwałą nadbudówkę w postaci platformy do obserwacyj; ponieważ jednak koszty budowy takiej platformy są znaczne, a sposoby docierania do niej dość przykre nawet dla osób z tem oswojonych, więc staramy się znaleźć innego rodzaju wyjście.

Jednem z nich będzie jakikolwiek pomost, czy też już istniejąca podłoga wewnątrz wieży na poziomie okien wieży; wówczas należy spionować punkt, który uważamy za triangulacyjny, w danym wypadku środek spodu krzyża, na powierzchnię pomostu lub stolika, specjalnie dla wykonania obserwacji przygotowanego.

Bezpośrednie spionowanie punktu poprzez dach jest niemożliwe; uciekamy się więc do wyznaczenia rzutu punktu, jako punktu przecięcia się dwu krzyżowych płaszczyzn pionowych, przechodzących przez środek krzyża, z płaszczyzną naszego stolika. W tym celu w dostatecznej odległości od wieży ustawiamy teodolit, ściśle go poziomujemy i kierujemy oś celową teodolitu na środek krzyża.

Następnie opuszczamy lunetę do chwili, gdy oś celowa będzie skierowana na poziom okna, przy którem wewnątrz wieży mamy nasz stolik.



Rys. 757.

Odpowiednio, dając od teodolitu wskazówki, kierujemy czynnościami pomocnika, wyznaczającego na parapecie okna punkt, leżący w pionowej płaszczyźnie, przechodzącej przez oś celową.

Punkt na parapecie oznaczymy w jakikolwiek sposób — czy to zapomocą przesuwania pionowo ustawionego ołówka, czy też zapomocą specjalnego przyrządu do pionowania tego rodzaju, że ostrze górne przyrządu służy jako cel dla osi celowej teodolitu, ostrze zaś dolne dla wyznaczenia punktu na płaszczyźnie, na której przyrząd został ustawiony.

Ustaliwszy pierwszy punkt, należy ustalić i drugi, który w stosunku do pierwszego winien leżeć poza stolikiem.

Ponieważ teodolit stoi znacznie niżej od okna, więc drugi punkt przecięcia się osi celowej teodolitu z jakąś powierzchnią materjalną (ściana, belka i t. d.) będzie leżeć znacznie wyżej i przytem wewnątrz wieży, a więc w miejscu, zacienionem dla obserwatora, stojącego przy teodolicie.

Jako przedmiot obserwacji służyć będzie świeca o jasnym płomieniu, przesuwana obok ściany lub belek dopóty, dopóki środek płomienia nie znajdzie się na osi celowej teodolitu.

Wówczas świecę należy ściśle przyłożyć do odpowiedniej powierzchni, punkt zaś, leżący na osi celowej, oznaczymy gwoździkiem, wbitym w ścianę lub belkę o tyle, aby jego główka zajęła środek płomyka.

Wtedy nić, silnie naciągnięta poprzez punkty 1 i 2-gi, da nam prostą, leżącą w pionowej płaszczyźnie osi celowej.

Drugą taką prostą otrzymamy po przestawieniu teodolitu o 90^0 w stosunku do wieży w identyczny sposób.

Aby teraz otrzymać punkt przecięcia się płaszczyzn pionowych, przechodzących przez obydwie pary wyznaczonych punktów, z płaszczyzną stolika, po wyższej nitce przesuniemy zawieszony na cienkiej nitce pion do czasu, aż nić pionu zajmie położenie styczne do obydwu nici. Spód pionu wyznaczy na stoliku rzut punktu trygonometrycznego na wierzchołku wieży.

Przypuśćmy więc, iż na otrzymanym punkcie ustawiliśmy teodolit i przystępujemy do obserwacji przez 4 okna wieży; w większości wypadków spotkamy się z takiem rozlokowaniem punktów, że przez okna zobaczymy, np, 3 punkty A, B, C siatki triangulacyjnej, pozostałe zaś punkty, np. D i E, będą zasłonięte ścianami (rys. 757).

Wówczas, by wyznaczyć kąt DCE, uciekamy się do pośredniego pomiaru kątów, a mianowicie w danym wypadku: na parapecie okna 1-go obieramy punkt T, z którego punkty E i D są widoczne.

Mierzymy kąt DTE i, mając jego wielkość bezpośrednio wyznaczoną, — obliczamy wielkość kąta DCE. Taki sposób wyznaczania kąta nazywamy pośrednim pomiarem kąta lub dośrodkowaniem (redukcją) mimośrodkowo (ekscentrycznie) pomierzonego kąta, do właściwego stanowiska (do centrum).

§ 365. Dośrodkowanie kątów lub kierunków mimośrodkowo pomierzonych.

Ponieważ przy triangulacjach mierzymy kąty lub kierunki, kąt zaś zawsze możemy określić z różnicy kierunków, zatem rozpatrzmy zasadniczo dośrodkowanie kierunków (rys. 758).

Wyobraźmy sobie, że mierzymy kąt KCP mimośrodkowo, a więc z pomiaru otrzymujemy wielkość kąta KTP. Punkt C oznacza środek (centrum) sygnału, t. j. właściwy punkt triangulacyjny, punkt T — pewien punkt pomocniczy, na którym mogliśmy dokonać pomiaru. Zakładamy, że odległość TC, t. j. linjowy mimośród $TC = m$, może być pomierzony oraz że punkty C i T są wzajemnie widoczne. Przypuśćmy dla uproszczenia, że pomiar w punkcie T kierunków TK i TC dokonywał się przy takiem położeniu limbusu, że dla celu do punktu C otrzymaliśmy odczyt $0^0\ 0'\ 0''$.

Wówczas przez kierunki rozumieć możemy kąty, zawarte pomiędzy kierunkiem TC a innemi kierunkami, licząc w kierunku prawym; wtedy α_d kierunek dośrodkowany wyrazi się równaniem:

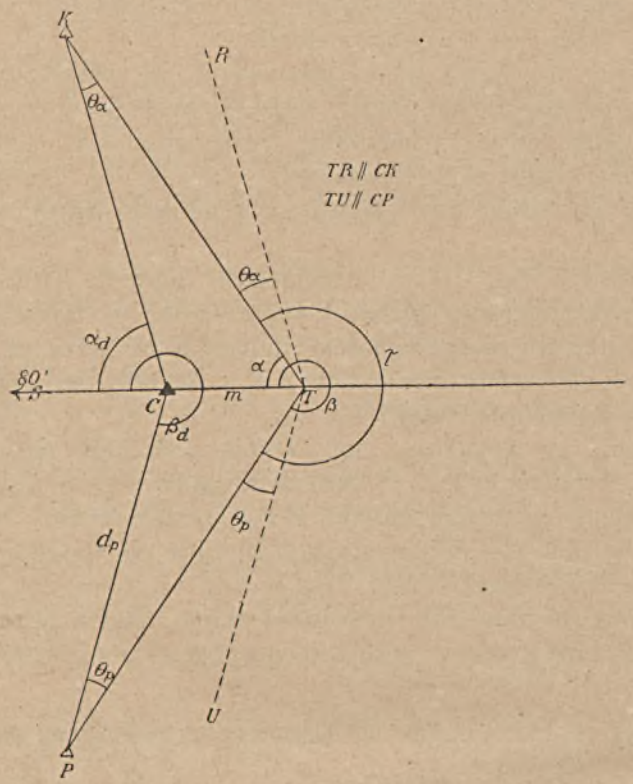
$$\alpha_d = \alpha + \Theta_\alpha$$

w którem kąt α oznacza kierunek TK pomierzony, kąt zaś Θ — kąt CKT, pod którym widzimy z punktu triangulacyjnego K linjowy mimośród m punktu T przy punkcie triangulacyjnym C,
lecz:

$$\sin \Theta_\alpha = \frac{m \sin \alpha}{d_k}$$

gdzie przez d_k rozumiemy odległość punktu C od punktu K.

Ponieważ linjowy mimośród m jest nieznaczną wielkością w zestawieniu z wielkością d_k, która przy triangulacjach lokalnych sięga kilku,



Rys. 758.

przy triangulacjach zaś wyższych rzędów kilkunastu i kilkudziesięciu kilometrów, więc kąt Θ określimy z powyższego wzoru jako:

$$\Theta_k'' = 206265\ m\ \frac{\sin\alpha}{d_k},$$

a stąd

$$\alpha_d = \alpha + 206265\ m\ \frac{\sin\alpha}{d_k}$$

Podobnie określimy dośrodkowany kierunek $(TP) = \beta_d$ z pomierzonego β_p. Będzie: $\beta_d = \beta - \Theta_p$, co określimy na zasadzie następującej:

$$< SCP = < STP + \Theta_p;$$

$$360^0 - SCP = 360^0 - STP - \Theta_p;$$

$$\beta_d = \beta - \Theta_p$$

zaś

$$\frac{\sin\Theta_p}{\sin STP} = \frac{m}{d_p}$$

więc

$$\sin \Theta_p = \frac{m}{d_p} \sin STP$$

lecz

$$\sin STP = \sin (360^0 - \beta) = - \sin \beta$$

skąd

$$\sin \Theta_p = \frac{m}{d_p} . (- \sin \beta)$$

stąd

$$\Theta_p'' = 206265\ m \frac{- \sin \beta}{d_p} = - 206265\, m \frac{\sin \beta}{d_p}$$

a stąd

$$\beta_d = \beta - \Theta''_p = \beta + 206265\ m \frac{\sin \beta}{d_p}$$

Widzimy więc, że wzór ogólny na dośrodkowany kierunek jest zawsze ten sam:

$$\alpha_d = \alpha + 206265\, m \frac{\sin \alpha}{d}$$

niezależnie od ćwiartki, w której leży α (można dowieść tego dla $90^0 < \alpha < 270^0$), jeżeli w wyrazie na poprawkę kierunku, t. j. $206265\ m \frac{\sin \alpha}{d}$, kąt α liczyć będziemy od kierunku na centrum znaku C do odpowiednio mierzonego kierunku. Kąty α, β i t. d., wzięte dla odpowiednich kierunków, nazywamy kątami dyrekcyjnemi.

Wyraz $206265\ m \frac{\sin \alpha}{d}$ może być dodatni, lub ujemny, w zależności od wielkości kąta α; przy $\alpha < 180^0$ będzie znak +, przy $180^0 < \alpha < 360^0$ będzie znak —.

Zaznaczyć należy, że założenie nasze, iż kierunki do punktów triangulacyjnych braliśmy od kierunku TC, jako zerowego, przyjęte zostało dla uproszczenia wnioskowania i na wzór:

$$\alpha = \alpha + 206265 \frac{m}{d} \sin \alpha$$

zupełnie nie wpłynie fakt, że przy pomiarach obieramy niezależny od TC kierunek zerowy, gdyż, odejmując odczytany przy pomiarze kierunek TC od innych, otrzymamy tem samem kierunek TC jako zerowy.

Dośrodkowanie kąta $KTP = \tau$ wyznaczy się z różnicy dośrodkowanych kierunków (TP) i (TK), a mianowicie:

$$\tau_d = \beta_d - \alpha_d = \beta + 206265\ m \frac{\sin \beta}{d_p} - \left(\alpha + 206265\ m \frac{\sin \alpha}{d_k}\right)$$

$$\tau_d = \beta - \alpha + 206265\ m \left(\frac{\sin \beta}{d_p} - \frac{\sin \alpha}{d_k} \right)$$

Aby różnicę

$$\frac{\sin\ \beta}{d_p} - \frac{\sin\ \alpha}{d_k}$$

przedstawić w kształcie logarytmicznym, oznaczamy:

$$\frac{\sin\ \beta}{d_p} = tg\ \varphi_1;\quad \frac{\sin\ \alpha}{d_k} = tg\ \varphi_2$$

co jest możliwe, gdyż tangens zmienia się nieograniczenie.

Przekształćmy różnicę $tg\ \varphi_1 - tg\ \varphi_2$

$$tg\ \varphi_1 - tg\ \varphi_2 = \frac{\sin\ \varphi_1}{\cos\ \varphi_1} - \frac{\sin\ \varphi_2}{\cos\ \varphi_2} = \frac{\sin\ \varphi_1\ \cos\ \varphi_2 - \cos\ \varphi_1\ \sin\ \varphi_2}{\cos\ \varphi_1\ \cos\ \varphi_2} =$$

$$= \frac{\sin\ (\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos\ \varphi_1\ \cos\ \varphi_2}$$

A wobec tego wyraz na poprawkę kąta przyjmie postać:

$$206265\ m \left(\frac{\sin \beta_p}{d_p} - \frac{\sin \alpha_k}{d_k} \right) = 206265\ m\ \frac{\sin\ (\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos\ \varphi_1\ \cos\ \varphi_2}$$

Skąd wzór na sprowadzony do środka sygnału kąt zamieni się na:

$$\tau_d = \beta - \alpha + 206265\ m\ \frac{\sin\ (\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos\ \varphi_1\ \cos\ \varphi_2}$$

W praktyce kąty dyrekcyjne dla wszystkich kierunków otrzymujemy w drodze odejmowania średniego kierunku na centrum od średnich wartości pozostałych kierunków.

Przy pomiarze zaś metodą repetycyjną lub Schreibera, należy specjalnie dla otrzymania kątów dyrekcyjnych połączyć centrum ze wszystkiemi kierunkami w jeden poczet.

Linjowy mimośród mierzymy bezpośrednio, o ile to nie jest połączone ze zbyt wielkim nakładem pracy, co zachodzi wówczas, gdy sam znak triangulacyjny (np. spód krzyża na wieży) jest niedostępny, albo miejscowe warunki w wysokim stopniu utrudniają spionowanie punktu do poziomu stanowiska teodolitu T. Wówczas i bezpośrednie wyznaczenie kątów dyrekcyjnych jest również niemożliwe lub utrudnione i zniewoleni jesteśmy stosować pośrednie metody wyznaczania elementów mimośrodkowości.

Ponieważ pośrednie czy bezpośrednie pomiary elementów mimośrodkowości wykonywają się zawsze na miejscu równocześnie z pomiarem kątów, pomiary te noszą nazwę miejscowych; rozpatrzymy je po ukończeniu działu o mimośrodkowych obserwacjach i błędach dośrodkowań.

PRZYKŁAD.

Piramida Lewicpol.

Pomierzone kierunki α_p: Annopol . . . . . $0^0\ 0'$
Kawęczyn . . . . . $226^0\ 55'$
Cedergren . . . . . $301^0\ 28'$
mimośród . . . . . $m = 0{,}122$

kąt dyrekcyjny, liczony od centrum do Kawęczyna, wynosi

$$\alpha_k = 51^0\ 30'$$

Kąt dyrekcyjny kierunku zerowego (Annopol) wyniesie tedy α równe:

$$\begin{array}{r} 411 \\ 51^0\ 30' \\ -\ 226^0\ 55' \\ \hline \alpha_A = 184^0\ 35' \end{array}$$

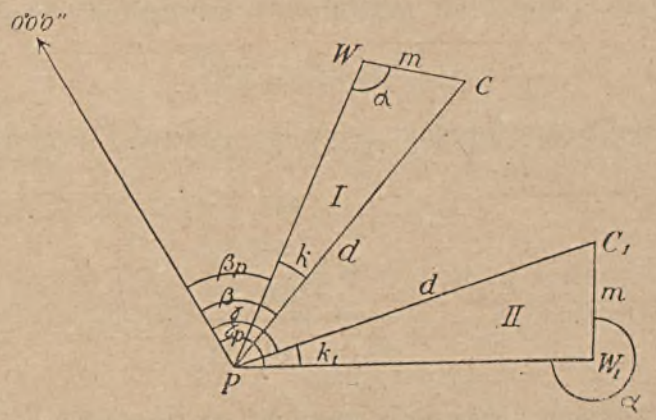
Sprowadzamy wszystkie kierunki do kierunku na centrum, jako kierunku zerowego.

	Annopol	Kawęczyn	Cedergren
Kierunki pomierzone α_p	$0^0\ 0'$	$226^0\ 55'$	$301^0\ 28'$
α_A	$184^0\ 35'$	$184^0\ 35'$	$184^0\ 35'$
α	$184^0\ 35'$	$51^0\ 30'$	$126^0\ 3'$
log m	9.0864		
log ρ	5.3144	4.4008	4.4008
log sin α	8.9026_n	9.8935	9.9077
c log d	6.3516	6.2096	6.0827
log Θ	9.6550_n	0.5039	0.3912
Θ	— 0,45	+ 3,19	+ 2,46

Uwaga: log m i log ρ wypisujemy tylko w I-ej kolumnie; w pozostałych wypisujemy tylko sumę: log ρm.

§ 366. Dośrodkowanie celu.

Przypuśćmy, że mamy do czynienia z obserwacją kierunku na pewną piramidę, o której wiemy, że jej czop W, służący za punkt do obserwacji z sąsiednich znaków trygonometrycznych, zmienił swe położenie względem utwalonego centrum C t. j. nie leży z nim na jednym pionie.



Rys. 759.

Ponieważ zaś punktem triangulacyjnym we właściwem tego słowa znaczeniu jest centrum, więc obserwowany z punktu P kierunek PW należy przeliczyć na PC.

Elementami dośrodkowania w tym wypadku będą: $m = WC$ odległość od centrum do rzutu punktu W (czop), który służy za cel zamiast centrum dla sąsiednich punktów triangulacyjnych, oraz kąt dyrekcyjny:

$\alpha = \sphericalangle\ CWP$, liczony z punktu W, który służy za cel, pomiędzy kierunkiem na centrum C a kierunkiem na punkt P, licząc w prawo.

Poprawkę w kierunku $k = \sphericalangle\ WPC$, o którą należy obrócić kierunek prostej PW, by go dośrodkować do punktu C, t. j. zamienić na właściwie wymagany kierunek β prostej PC, odnajdziemy ze wzoru:

$$\sin k = \frac{m \sin \alpha}{d}$$

oraz

$$k'' = 206265\ m \frac{\sin \alpha}{d}$$

i

$$\beta = \beta_p + 206265\ m \frac{\sin \alpha}{d_p}$$

W wypadku, gdy kąt dyrekcyjny $\alpha > 180^0$ będzie

$$\sin k_1 = \frac{m \sin C_1 W_1 P}{d} = \frac{m \sin (360^0 - \alpha)}{d_p} = -\frac{m . \sin \alpha}{d}$$

skąd

$$k_1'' = -206265\ m \frac{\sin \alpha}{d_p}$$

i dośrodkowany kierunek będzie:

$$\gamma = \gamma_p - k_1 = \gamma_p + 206265\ m \frac{\sin \alpha}{d_p}$$

Ogólnym więc wzorem na dośrodkowanie celu będzie:

$$\beta = \beta_p + 206265\ m \frac{\sin \alpha}{d_p}$$

Znak poprawki

$$206265\ m \frac{\sin \alpha}{d_p}$$

wyznaczy wielkość kąta α, tak więc przy $\alpha < 180^0$ znak poprawki będzie dodatni, przy $180^0 < \alpha < 360^0$ znak poprawki będzie ujemny.

Rachunek dośrodkowania celu należy łączyć z dośrodkowaniem stanowiska w jeden schemat ze wspólnemi log ρ i clog d.

§ 367. Błędy dośrodkowania.

Wielkość przesunięcia kierunku przy dośrodkowaniu wyraża się ogólnym wzorem:

$$\Theta'' = \rho''\ m \frac{\sin \alpha}{d}$$

By określić, w jakim stopniu na wielkość Θ wpływają błędy pomiaru m i α, zróżniczkujemy powyższy wzór, a otrzymamy:

$$\Delta\Theta = \frac{\rho \sin \alpha}{d} \Delta m + \frac{\rho\, m \cos \alpha}{d} \Delta \alpha''$$

Błąd określenia linjowego mimośrodu Δm ma największy wpływ na Θ przy $\alpha = 90^0$, będzie wówczas:

$$\Delta\Theta = \frac{\rho}{d} \Delta m$$

Załóżmy $\Delta m = 0{,}01$ *mtr*, oraz $d = 1000$ *mtr*, która to odległość bardzo często spotyka się przy triangulacjach lokalnych.

Obliczamy wówczas:

$$\Delta\Theta = \frac{206265 \times 0{,}01}{1000} = 2'',1$$

Zaś przy 500 metrowej odległości błąd ten przekroczy 4".

Stąd wynika, że przy triangulacjach lokalnych, wobec stosunkowo krótkich boków, mimośród linjowy należy mierzyć ściśle, a więc przy $m < 10$ *mtr.* — łatami, w obydwu wypadkach dwukrotnie, notując milimetry.

Błąd określenia kąta dyrekcyjnego ma największy wpływ na $\Delta\,\Theta$ przy $\alpha = 0$,

będzie wtedy:

$$\Delta\,\Theta'' = \frac{\rho''\,m}{d}\,\Delta\,\alpha$$

Wpływ ten będzie tem większy, im mniej dokładnie jest pomierzony kąt dyrekcyjny, t. j. im większe jest $\Delta\,\alpha$; to ostatnie zaś najmniej ściśle jest wyznaczone przy niewielkim linjowym mimośrodzie m, gdyż jeśli, np., kąt α wyznaczony jest graficznie, może dać $\Delta\,\alpha$ równe około $30' = 1800''$, a wówczs, przyjmując $d = 500$ *mtr.*,

otrzymamy:

$$\Delta\,\Theta'' = \frac{0.5 \times 1800''}{500} = 1.''8$$

W miarę powiększenia się m, maleje $\Delta\,\alpha$, ponieważ, np., przy $m = 20$ *mtr.* możemy już $\Delta\,\alpha$ zredukować do $1'$,

a wówczas:

$$\Delta\,\Theta = \frac{20\,.\,60''}{500} = 2.''4$$

Widzimy więc, że błąd $2'$ w określeniu dyrekcyjnego kąta przy 500-metrowej odległości powoduje przy $\alpha = 0^0$ błąd w dośrodkowaniu kierunku, równy już około $5.''$

Jest to o tyle poważny błąd, że należy dążyć do najdalej w granicach możliwości posuniętej dokładności w określeniu kąta dyrekcyjnego,

a mianowicie:

1)	przy m w granicach	$0.0 < m < 0.25$	*mtr.*	mierzyć α należy z dokładnością do		1^0
2)	„ „	$0{,}25 < m < 0.50$	*mtr.*	„ „ „		$30'$
3)	„ „	$0.5 < m < 1$	*mtr.*	„ „ „		$15'$
4)	„ „	$1 < m < 2.5$	*mtr.*	„ „ „		$7'$
5)	„ „	$2.5 < m < 7.5$	*mtr.*	„ „ „		$3'$
6)	„ „	$7.5 < m < 15$	*mtr.*	„ „ „		$1'$

Wówczas przy długości boku 1000 *mtr.* błąd dośrodkowania nie przekroczy $0.''9$ nawet przy $\alpha = 90^0$; stąd dwa wnioski:

a) pomiar kątów dyrekcyjnych należy wykonywać z dokładnością nie mniejszą, niż to wskazane jest w powyższej tabelce, i nie mniej niż dwukrotnie,

b) stanowisko dla teodolitu, jeżeli centrycznych obserwacyj dokonać nie można, należy obierać możliwie blisko i unikać mimośrodu linjowego większego od 10 *mtr.*; bardzo niedogodne w praktyce są mimośrody od 0.5 m — do 2 m.

Co do stopnia dokładności obliczeń ze wzoru: $\Theta = \rho'' m \frac{\sin \alpha}{d}$ pamiętać należy, że zależy ona od stopnia dokładności w wyznaczeniu kąta dyrekcyjnego, tak więc przy:

$^1/_2{}^0$ dokładności wyznaczenia kąta dyrekcyjnego z tablic logarytmów bierzemy [3 znaki

1′ „ „ „ „ „ „ 4 „

10″—30″ „ „ „ „ „ 5 znaków.

UWAGA: Dla obliczenia wzoru $\Theta = \rho'' m \frac{\sin \alpha}{d}$ należy mieć odległości od centrum sygnału do sąsiednich punktów triangulacyjnych, kierunki na które, lub z których, zostały mimośrodkowo lub mimocelowo pomierzone; odległości te należy obliczyć prowizorycznie, jako długości boków w trójkątach, na zasadzie jednego znanego boku i pomierzonych kątów, w założeniu, że są kątami △-a. Błędy określenia na skutek przybliżonego obliczenia odległości są zupełnie nikłe.

Znak na Θ dla każdego kierunku wskaże sin α.

Przy bardzo krótkich bokach △-ów np. 300 m i kilkumetrowym, np. 10 m, mimośrodzie należy zamiast wzoru dla małych Θ:

$$\Theta = \rho'' m \frac{\sin \alpha}{d}$$

stosować wzór

$$\sin \Theta = m \frac{\sin \alpha}{d}$$

gdyż inaczej Θ będzie obarczone błędem kilku sekund.

Jeżeli obliczone Θ jest o tyle wielkie, że po zmianie pomierzonego kierunku na kierunek dośrodkowany, obliczony w przybliżeniu bok Δ-a ulegnie znacznej zmianie, np. o $\frac{1}{1500}$ swej długości, lub więcej, wówczas po nowem obliczeniu długości boku, znowu obliczamy kąt Θ.

Jakkolwiek wypadki tego rodzaju zachodzą dość rzadko, to jednak, częściej się z niemi możemy spotkać przy triangulacjach lokalnych (głównie w miastach), niż przy triangulacjach wyższych rzędów.

Ze względu na okoliczność, że właśnie na lokalnych triangulacjach mamy najczęściej stosunkowo duże mimośrody linjowe przy względnie krótkich bokach, należy sprawę dośrodkowania kierunków traktować bardzo oględnie.

Należy również możliwie ostrożnie wykonywać rachunek dośrodkowania. W tym celu należy rachunek wykonywać dwukrotnie, sprawdzając wciągnięte do obliczeń kierunki i boki. I-e obliczenie wykonamy ze wzoru na Θ, drugie na sin Θ. Ponieważ jednak przy takiem postępowaniu można powtórzyć ten sam błąd, lepiej więc byłoby zastosować graficzno-matematyczne II-e obliczenie.

W tym celu na arkuszu papieru wykreślamy od punktu *T*, dowolnie za stanowisko instrumentu przyjętego, wszystkie kierunki, kreśląc dowolnie kierunek zerowy. W skali 1:20 odkładamy na odpowiednim kierunku (na centrum) mimośród linjowy *TC*. Z punktu *C* spuszczamy na wszystkie kierunki lub ich przedłużenia prostopadłe. Przypuśćmy, że długości tych prostopadłych, pomnożone przez 20, wynosiły h_1, h_2 .... h_n. Jeżeli długości boków, na które spuściliśmy prostopadłe, wynoszą d_1, d_2 ... d_n, wówczas:

$$\Theta_1 = \rho'' \frac{h_1}{d_1}$$

$$\Theta_2 = \rho'' \frac{h_2}{d_2}$$

— — — —

$$\Theta_n = \rho'' \frac{h_n}{d_n}$$

Znak Θ będzie +, kiedy *C* leży w lewo od danego kierunku; znak — odpowiada *C*, położonemu w prawo od kierunku.

§ 368. Pomiary miejscowe.

Pomiary te obejmują wszelkie czynności, związane z określeniem elementów mimośrodkowości. Rozpatrzmy je w zastosowaniu do sygnałów sztucznych, jak piramidy, wieże trygonometryczne i t. d., oraz do sygnałów stałych, jak wieże kościelne, nadbudówki na dachach, kominach i t. p.

Rozpatrujemy te dwa typy sygnałów oddzielnie dlatego, że w wypadku sygnałów sztucznych łatwo spionować czop znaku do poziomu teodolitu i centrum, w wypadku zaś sygnałów stałych i o spionowanie trudno i często sam wierzchołek sygnału (np. spód krzyża na wieży kościelnej) służy jako centrum. Pomiary miejscowe mogą zatem znacznie różnić się przy obydwu typach.

A. *Sygnały sztuczne.*

Podczas pomiarów miejscowych przy sygnałach sztucznych będziemy rozróżniali wypadki, kiedy mamy do określenia bardzo mały mimośród, albo stosunkowo wielki.

I. Pierwszy wypadek zajdzie:

1) na podwójnej piramidzie lub na wieżach trygonometrycznych, gdy teodolit stoi na specjalnie przygotowanym stoliku, lub

2) przy zwykłej widecie, gdy teodolit, o ile nie był ustawiony nad centrum, to bardzo nieznacznie był odeń odsunięty.

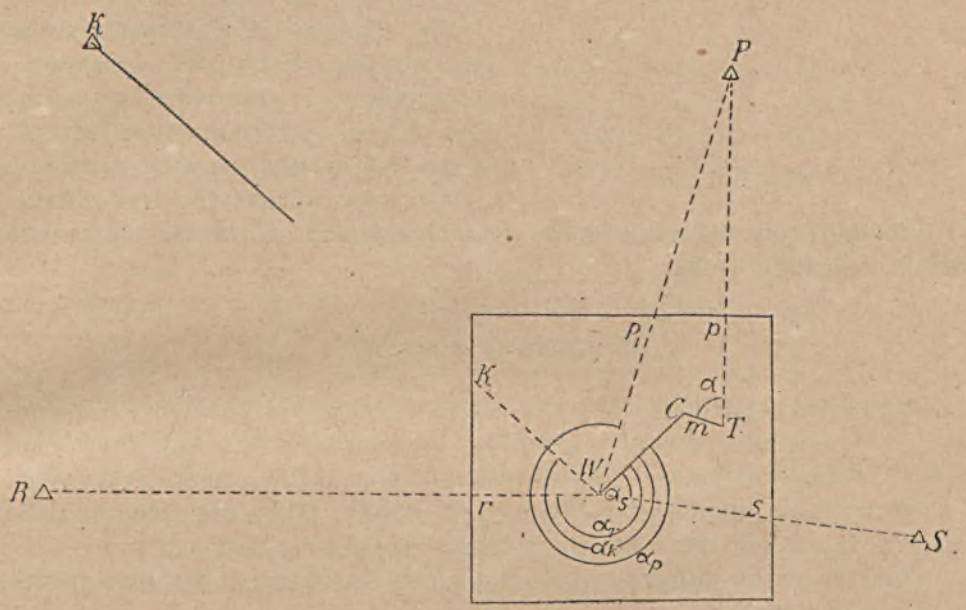
W obydwu tych wypadkach ustawiamy nad centrum duży stolik mierniczy, lub zwykły stół, pokryty papierem, i przy pomocy dodatkowego

teodolitu, ustawionego w odpowiedniej odległości, kolejno na trzech stanowiskach (pod kątami 60° z centrum) trzykrotnie wyznaczamy na stoliku ślady płaszczyzn pionowych, poprowadzonych przez oś celową teodolitu oraz

a) cenrum *C*,

b) czop lub wierzchołek *W*,

c) oś pionową teodolitu *T* głównego, czyli jego stanowisko przy pomiarze kierunków.



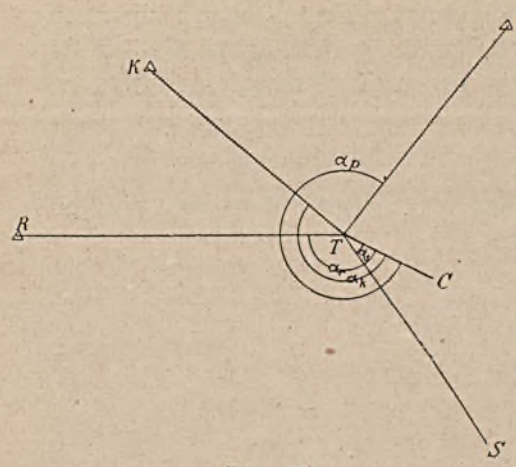
Rys. 760.

Na podwójnych i wyższych piramidach projektujemy *C* i *W* na stolik piramidy wewnętrznej; *T* oznaczamy ukłuciem.

W przecięciu odpowiednich śladów na papierze stolikowym otrzymamy rzuty powyższych 3 punktów, leżące wewnątrz utworzonych △-ów błędów. Przy niezmienionem położeniu stolika mocno wbijemy cienką igłę pionowo w rzut osi teodolitu i drugą wetkniemy w stolik, ściśle w kierunku na dowolny sąsiedni punkt triangulacyjny *P* (rys. 760).

Otrzymamy w ten sposób wszystko, co jest niezbędne dla określenia elementów dośrodkowania kierunków; mianowicie mierzymy $m = C\,T$ i kąt dyrekcyjny $C\,T\,P = \alpha$ przenośnikiem; dla pozostałych kierunków kąty dyrekcyjne otrzymamy, dodając w każdym wypadku do α różnicę pomiędzy każdym następnym kierunkiem a kierunkiem $C\,P$.

Następnie dla wyznaczenia elementów na dośrodkowanie celu dla kierunków, wziętych z sąsiednich punktów triangulacyjnych do punktu *W*, zamiast *C*, wetkniemy w punkcie *W* na stoliku igłę i, celując przez nią do sąsiednich znaków, we wszystkich kierunkach powtykamy igiełki p_1, *k*, *r* i *s*; wówczas elementami dośrodkowania każdego celu będą mimośród linjowy $c = C\,W$ i kąty dyrekcyjne α_s, α_r, α_k, α_p. Wszystkie kąty dyrekcyj-



Rys. 761.

ne weźmiemy z przenośnika. Wystarczy także jedna iglełka p_1; pozostałe kąty dyrekcyjne możemy obliczyć.

II. W wypadku stosunkowo wielkiego mimośrodu linjowego przy sygnałach sztucznych, mimośród linjowy mierzymy bezpośrednio dwukrotnie łatami lub skomparowaną taśmą stalową z dokładnością do milimetrów, kąty zaś dyrekcyjne otrzymamy z włączenia do jednej lub więcej seryj centrum, od którego w kierunku prawym będziemy liczyć kąty dyrekcyjne (rys. 761).

Elementy dla dośrodkowania celu otrzymamy w drodze opisanego w punkcie *I* postępowania.

B. *Sygnały stałe.*

Typowym przykładem sygnału stałego jest wieża kościelna. Rozpatrzymy w odniesieniu do niej pomiary miejscowe, gdyż dadzą one nam niezbędny zakres wiadomości dla określania elementów mimośrodkowości przy wykorzystaniu sygnałów stałych, jak komin fabryczny, nadbudówka na dachu kościoła lub domu, wieża ciśnień, wieża strażacka i t. p.

Pomiary kątów lub kierunków na wieży kościelnej mogą być prowadzone w 4 odmianach:

1) z centrum,
2) z parapetów okien wieży lub z konsol,
3) z balkonów wieży, ze słupów kamiennych lub specjalnie urządzonych podmurówek,
4) z ziemi.

I. Pomiar z centrum na wieży prowadzimy albo w wypadku, gdy punkt wieży (spód krzyża na metalowej kuli lub t. p.), służący za punkt triangulacyjny, daje się spionować do środka wieży zapomocą teodolitu, ustawionego na ziemi w takich 3 punktach, do których kierunki ze środka wieży tworzą kąty, zbliżone do 60^0, albo też w tym rzadkim wypadku, gdy nad wieżą zbudujemy trwałe rusztowanie z pomostem dla obserwatora i izolowanym stolikiem dla teodolitu.

W tych wypadkach, o ile wszystkie podlegające obserwacji punkty są widoczne, niema potrzeby określać elementów mimośrodkowości, gdyż pomiar uskutecznia się centrycznie.

II. Pozostałe wypadki pomiaru mimośrodkowego na wieży lub przy niej w zasadzie są zupełnie podobne; mogą jednak zachodzić drobne różnice między niemi, np.: z okna wieży nie ujrzymy punktu triangulacyjnego na niej (spód krzyża), podczas gdy stanowisko na ziemi obieramy tak, aby punkt triangulacyjny na wieży był widoczny, co nam umożliwi bezpośrednie pomierzenie kątów dyrekcyjnych; następnie, gdy wieża ma u spodu

dwoje drzwi pod prostym do środka kątem, lub takież drzwi i okna, wówczas punkt triangulacyjny możemy zapomocą dwu lub trzech krzyżowych ustawień teodolitu spionować do spodu wieży, jeżeli pomiar kierunków prowadzony był na takiem stanowisku na wieży lub przy niej, którego rzut można połączyć prostą ze środkiem wieży — wówczas i mimośród linjowy możemy pomierzyć bezpośrednio.

Pomiar na słupie kolumnady kamiennej balkonu wieży czasami stwarza możność, przy sprzyjającym kształcie wieży, wciągnąć w poczet kierunków i centrum, t. j. punkt triangulacyjny na wieży, co umożliwia bezpośredni pomiar kątów dyrekcyjnych.

Bezpośredni pomiar kątów dyrekcyjnych na wieży w zasadzie mógłby być zawsze dokonany, mianowicie w sposób następujący: zapomocą teodolitu pomocniczego znajdziemy, stopniowo przesuwając się, punkt na ziemi, który leży w jednej pionowej płaszczyźnie z osią teodolitu, ustawionego na wieży, i spodem krzyża.

Następnie nad odnalezionym punktem na ziemi ustawimy pomocniczy teodolit ściśle do poziomu i o tyle go przesuniemy na statywie, by ostatecznie centrum i oś pionowa głównego teodolitu znalazły się ściśle w jednej płaszczyźnie pionowej.

Wówczas zmieniony o 180° kierunek z głównego teodolitu na oś pionową pomocniczego da kierunek na centrum, a kierunek taki, wciągnięty w poczet obserwowanych kierunków, daje możność bezpośredniego obliczenia kątów dyrekcyjnych.

Nie zawsze jednak jest taki sposób możliwy do wykonania; często mogą nie pozwolić na to miejscowe warunki,—parapet okienny jest osadzony głęboko w ścianie, wolna zaś przestrzeń przy wieży jest niewielka.

Gdy podłoga w wieży znajduje się na poziomie balkonu, wówczas możemy skierować oś celową głównego teodolitu na oś pionową teodolitu pomocniczego, ustawionego na dole w powyższy sposób; przerzuciwszy lunetę przez zenit, wyznaczymy po obydwu stronach przypuszalnego centrum po punkcie; to samo wykonamy w drugiem położeniu lunety.

Otrzymamy po dwa punkty po obydwu stronach centrum; prosta, łącząca środki odcinków, przechodzących przez oznaczone z każdej strony centrum punkty, jest miejscem geometrycznem punktów, wśród których leży centrum.

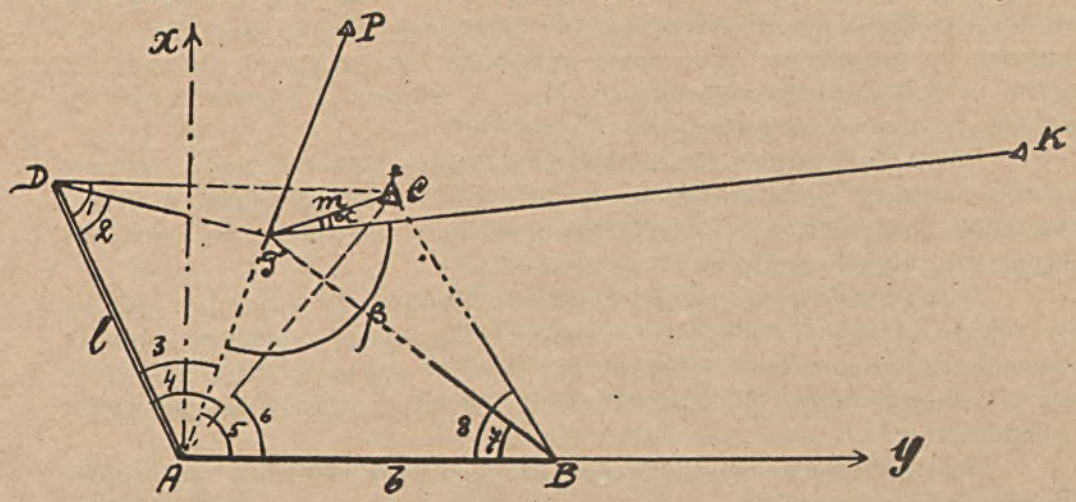
Powtórzenie postępowania w trzech oknach da trzy miejsca geometryczne. Tworzą one, przecinając się, mały △ błędów, w środku którego znajduje się rzut centrum. Oznaczamy go, wbijając gwoździk, który obserwować będziemy dla określenia kąta dyrekcyjnego łącznie z jakimkolwiek punktem sieci. Równie łatwo wówczas pomierzyć mimośród linjowy.

Gdy ze stanowiska teodolitu głównego na wieży nie można określić kierunku do centrum, należy pośrednio określić kąty dyrekcyjne i mimośród linjowy (rys. 762).

Niech punkt C oznacza punkt triangulacyjny na wieży; punkt T stanowisko głównego teodolitu w oknie, na balkonie, lub przy wieży; należy określić mimośród linjowy $m = TC$ i kąt dyrekcyjny $\alpha = CTK$ zapomocą pomiaru pośredniego.

Przystępujemy do pomiarów miejscowych.

Obieramy na gruncie 2 bazy DA i AB, obejmujące kąt około 120°, by trójkąty niemi i centrum utworzone, były zbliżone do równobocznych.



Rys. 762.

Wymierzamy ściśle obie bazy; niech $AB = b$, $AD = l$; następnie mierzymy trzykrotnie 10-sekundowym teodolitem kąty:

$CDA = 1$	$DAC = 4$	$TBA = 7$
$TDA = 2$	$TAB = 5$	$CBA = 8$
$DAT = 3$	$CAB = 6$	

oraz włączamy w poczet kierunków TK na T i punkt A, skąd obliczymy kąt β.

Przyjmujemy za osie miejscowych spółrzędnych: AB za oś y-ów, punkt A za początek układu spółrzędnych, $Ax \perp$ do AB za oś X-ów. Obliczamy:

1. Długości boków

$$DC = \frac{l \sin 4}{\sin(4+1)} \qquad DT = \frac{l \sin 3}{\sin(3+2)}$$

$$AT = \frac{l \sin 2}{\sin(2+3)} = \frac{b \sin 7}{\sin(7+5)}$$

$$AC = \frac{l \sin 1}{\sin(1+4)} = \frac{b \sin 8}{\sin(8+6)}$$

$$BT = \frac{b \sin 5}{\sin(5+7)} \qquad BC = \frac{b \sin 6}{\sin(6+8)}$$

2. Azymuty na zasadzie azymutu $(AB) = 90^0$

$$(AD) = (AB) - \frac{1}{2}(3+5+4+6)$$

$$(DC) = (AD) + 180^0 - 1$$

$$(D\,T) = (A\,D) + 180^0 - 2$$

$$(A\,T) = (A\,B) - 5 \qquad (A\,C) = (A\,B) - 6$$

$$(B\,T) = 270^0 + 7 \qquad (B\,C) = 270^0 + 8$$

3. Spółrzędne A, B i D:

$$x_A = 0 \qquad x_B = 0 \qquad x_d = l \cos (A\,D)$$

$$y_A = 0 \qquad y_B = b \qquad y_d = l \sin (A\,D)$$

4. Spółrzędne punktów T i C:

$$x_T = x_d + D\,T \cos (D\,T) = A\,T \cos (A\,T) = B\,T \cos (B\,T)$$

$$y_T = y_d + D\,T \sin (D\,T) = A\,T \sin (A\,T) = b + B\,T \sin (B\,T)$$

$$x_c = x_d + D\,C \cos (D\,C) = A\,C \cos (A\,C) = B\,C \cos (B\,C)$$

$$y_c = y_d + D\,C \sin (D\,C) = A\,C \sin (A\,C) = b + B\,C \sin (B\,C)$$

5. Biorąc średnie otrzymanych spółrzędnych punktów C i T, obliczamy azymut $T\,C$ ze wzoru:

$$tg\ (T\,C) = \frac{y_c - y_T}{y_c - y_T}$$

oraz mimośród

$$m = T\,C = \frac{y_c - y_T}{\sin (T\,C)} = \frac{x_c - x_T}{\cos (T\,C)}$$

6. Stąd azymut

$$(T\,C) = \text{arc tg}\ \frac{y_c - y_T}{x_c - x_T}\ \text{i},$$

jeżeli obliczymy azymut miejscowy $(T\,K) = (T\,A) - \beta$, wówczas kąt dyrekcyjny α otrzymamy z różnicy azymutów miejscowych $(T\,K)$ i $(T\,C)$, a mianowicie $\alpha = (T\,K) - (T\,C)$.

Ponieważ punkt stały jest punktem triangulacyjnym, przeto dośrodkowań celu kierunków, zaobserwowanych do tego punktu z sąsiednich, oczywiście nie będzie.

§ 369. Pomiar bazy łatami.

Jako typ łat, pozwalający na zaoszczędzenie czasu i materjałów drzewnych przy pomiarze, należy zalecać łaty 5-metrowej długości.

Końce łat winny być okute stalą hartowaną, przytem jeżeli jeden koniec łaty kończy się okuciem o ostrzu pionowem, wówczas drugi winien mieć ostrze poziome.

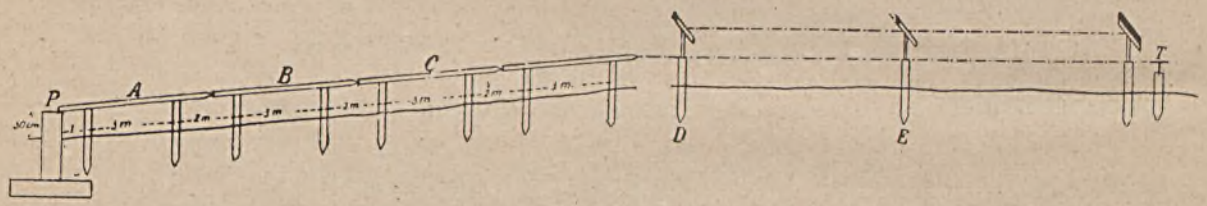
Okucia, zakończone ostrzami, winny mieć kształt klinowy o rozwartości 60°. Dla zabezpieczenia od rdzewienia winny być wysmarowane wazeliną. Komplet łat, niezbędnych do pomiaru bazy, winien się składać z co najmniej trzech, lepiej czterech sztuk.

Po sporządzeniu łat, przed przystąpieniem do pomiaru, na początku i końcu każdej dłuższej przerwy w pomiarach, oraz przy ukończeniu pomiaru, bezwzględnie należy porównywać długość każdej łaty z metrami normalnemi na komparatorze.

Właściwy pomiar poprzedza przygotowanie odpowiednio obranego terenu do pomiaru bazy.

Ponieważ teren powinniśmy obierać poziomy, lub o spadkach możliwie poniżej 3°, więc skoro się trafiają w linji obranej bazy drobne pagórki, dołki i t. p. nieregularności terenu, to takie nieregularności winny być usunięte przy pomocy rozrzucenia, lub zasypywania, w taki sposób, aby otrzymać linję bazy o jednostajnych spadkach.

Mając z pomiaru taśmą punkty początkowy i końcowy bazy, obrane w ten sposób, by ich odległość wynosiła wielokrotność 5 *m*, wytyczamy zapomocą teodolitu, ustawionego nad punktem początkowym bazy, punkty co 100 metrów, leżące w linji bazy, wbijając kołki w ziemię i już zupełnie ściśle w linji bazy wbijamy w kołki gwoździki.



Rys. 763.

Punkty te posłużą za stanowiska teodolitu przy palikowaniu bazy. Niech *PT* jest odcinkiem wytrasowanej bazy; *P* oznacza punkt początkowy bazy, utrwalony zapomocą słupa betonowego, wystającego z ziemi na 25 *cm*; *T* oznacza punkt, leżący w linji bazy, służący do palikowania bazy. Zapomocą teodolitu, ustawionego w *P*, wytyczać będziemy w linji bazy kołki do połowy *PT*, poczem drugą połowę wypalikujemy, ustawiając teodolit w *T*.

Kołki winny być ustawione w ten sposób, by ich wierzchołki znajdowały się na odcinkach o stałym spadzie i aby wierzchołki pali leżały w linji bazy. Rozstawienie kołków winno być przytem takie, by każda łata odcinkami metrowemi wystawała poza dwa pod nią stojące kołki.

A więc, poczynając od punktu *P*, należy wbić kołki w kolejnych odległościach, równych 1, 3, 2, 3, 2, 3, 2, i t. d. metrom, odmierzonym taśmą. Wbijamy je początkowo w linji bazy w ten sposób, aby wystawały około 40 *cm* ponad ziemią; a następnie (np., dla odcinka *DT*) ustawiamy 2 krzyżaki na skrajnych, wystających na 25 *cm* z ziemi palikach, przyczem

krzyżak w T ma deszczułkę dwa razy szerszą, ale od góry do połowy wymalowaną na czarno tak, by granica kolorów była pozioma przy ustawieniu pionowem krzyżaka; wysokości wszystkich krzyżaków (licząc w ostatnim do linji czarnej) powinny być równe.

Trzeci krzyżak ustawiamy na paliku, którego wierzchołek chcemy wprowadzić do linji wierzchołków pali D i T. Patrząc przez wierzch krzyżaka D na granicę kolorów krzyżaka w T, dopóty wbijamy kołek E, dopóki wierzch krzyżaka, stojącego na E, znajdzie się na prostej, łączącej wierzchołek pierwszego krzyżaka ze spodem czarnego pasa na desce krzyżaka T.

Analogicznie regulujemy położenie wszystkich wierzchołków pali.

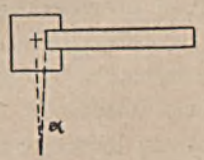
Wówczas zgodnie z sygnałami, podanemi od teodolitu, wbijamy lekko cienkie gwoździki w wierzchołki pali, zgodnie ze wskazówkami, podawanemi przez obserwatora, który, patrząc przez lunetę teodolitu, ustawionego ściśle w linji bazy, reguluje umieszczenie gwoździ w linji bazy.

Ponieważ łata przy swych końcach ma szerokość około 6 *cm.*, więc w kierunku, poprzecznym do linji bazy, wbijamy w pale po obydwu stronach środkowego gwoździa po gwoździku w odległości 3.5 *cm.* od środkowego, poczem środkowe gwoździki wyjmujemy.

W ten sposób otrzymujemy pokład dla łat w postaci wierzchołków pali; dwa zaś poboczne gwoździki na każdym palu ustalają ułożenie łaty i zabezpieczają ją od strącenia na ziemię.

Możemy zatem ustalić wymiary pali — mianowicie średnica ich winna być równa 9 — 10 *cm.*; pale te powinny być mocno osadzone w ziemi, a więc, jeżeli na 25 *cm.* pala nad powierzchnią ustalić 55 *cm.* w ziemi, to pal będzie trwale osadzony.

Gdy chcemy zaoszczędzić materjału na pale, (rys. 765) można zdecydować się na 80-centymetrowe pale o średnicy 6 *cm.*, ale zato należy do pali u góry przybić 12-centymetrowej długości deseczki, które przy zabijaniu pali w ziemię zajmą poprzeczne do bazy położenie; przytem pal z deseczką ustawia się w linji w ten sposób, aby czubek gwoździka a znalazł się ściśle w linji bazy, gwoździki zaś b i c wbijają się w deseczkę na odległości 3.5 *cm.* zboku od a. Przystępujemy do zniwelowania punktów załamania spadów bazy. Niech różnice wysokośći punktów załamania spadów będą h_1 h_2 h_3 h_4 h_5.

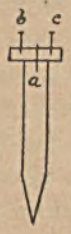


Rys. 764.

Różnice te będą nam potrzebne przy obliczeniu rzutu poziomego bazy; oczywiście przy pomiarze bazy będziemy notować długości d_1 d_2... d_5 odcinków, łączących punkty załamania spadów. Po wykonaniu niwelacji przystępujemy do właściwego pomiaru bazy.

Ustawiamy nad punktem początkowym bazy teodolit i po odnotowaniu odczytu przy celu na koniec bazy, obracamy alhidadę ściśle o 90° i wyznaczamy przez lunetę w odległości 5 *m.* od teodolitu punkt na gruncie, wbijając gwóźdź. Gwóźdź znajduje się więc ściśle na prostopadłej do bazy na jej końcu. Następnie (rys. 764) ustawiamy teodolit ściśle nad gwoździem; układamy łatę A na pierwsze dwa pale w ten sposób, by jej początek znalazł się nad początkiem bazy, a ponieważ trudno to ściśle

wykonać, więc wymierzamy kąt pomiędzy początkiem bazy (krzyżyk w kamieniu) a początkiem łaty; poprawka na odchylenie początku łaty od początku bazy będzie równa co do wielkości $p_1 = 5\,000\ tg\ \alpha\ mm.$, co się tyczy znaku poprawki — będzie on dodatni, gdy oś celowa lunety, podniesionanad krzyżykiem, nie przetnie ostrza łaty; w przeciwnym razie znak poprawki będzie ujemny.

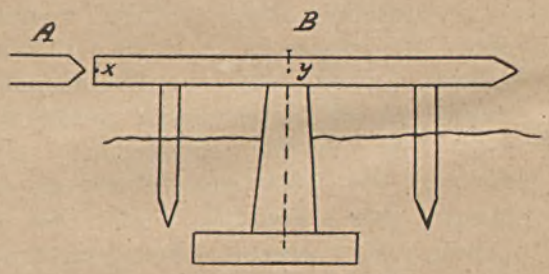


Rys. 765.

Układamy łatę B za łatą A, pozostawiając między niemi małą przerwę, którą wymierzymy klinem. Tak samo ułożymy łatę C i wymierzymy klinem przerwę między końcem łaty B a początkiem C, poczem ostożnie podnosimy łatę A, by nie trącić sąsiedniej łaty, i przenosimy ją naprzód, układając z małą wymierzaną klinem przerwą za łatą C. Można również łaty dosuwać do siebie.

Analogicznie prowadzimy pomiar aż do końca, notując każde przeniesienie łaty A i kolejne odczyty z klina, oraz długości odcinków, łączących punkty załamania spadów. Przypuśćmy, że łatę A przenieśliśmy n razy i jeszcze raz ułożyliśmy łatę B, która pewną swą częścią przesunęłaby się poza koniec bazy; ustawiwszy więc uprzednio ściśle nad końcem bazy teodolit, wbijamy gwóźdź w ziemię dokładnie na prostopadłej do bazy w odległości około 5 m. (rys. 766).

Następnie ustawimy centrycznie nad gwoździem teodolit i, celując na krzyżyk na słupie betonowym (koniec bazy), odrzutujemy go na łatę, wyznaczając bardzo dokładnie przecięcie się osi celowej lunety ze środkiem górnej powierzchni łaty w punkcie y, jeżeli ostrze pionowe łaty B oznaczymy literą x, to odmierzymy odległość $x\,y$ jaknajściślej cyrklem drążkowym przy pomocy długiej skali metalowej.



Rys. 766.

Wówczas wymierzona długość będzie równa:

$$L = n\,s + s_a + [k] + x\,y + p$$

we wzorze tym n oznacza liczbę przeniesienia łaty A, s — łączną długość wszystkich trzech łat: $s = s_a + s_b + s_c$, $[k]$ — sumę odczytów klina, p i $x\,y$ — poprawki na odsunięcie początków pierwszej i ostatniej łaty od początku i końca bazy, s_a — długość łaty A.

Jeżeli literami $d_1\ d_2 \ldots d_n$ oznaczymy długości odcinków między punktami załamania spadów, musi być: $d_1 + d_2 + \ldots + d_n = L$

Pomiaru bazy dokonać należy po dwa razy tam i zpowrotem; otrzymamy na L i każde d 4 wyniki, z których ustalimy średnie. Pomiar łatami jest bardzo uciążliwy: zabiera wiele czasu. Dogodniej jest stosować pomiar taśmą precyzyjną lub przyrządem Jaederina.

§ 370. Obliczenie długości bazy.

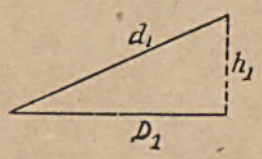
Dla obliczenia długości bazy należy obliczyć średnie długości łat z komparacji. Następnie, mając ustalone długości łat A, B i C, mianowicie S_a S_b S_c, obliczamy odcinki między punktami załamania spadów. Załóżmy, że długości pierwszego odcinka d_1 odpowiada różnica wysokości h_1 początku i końca danego spadu.

Obliczmy rzut poziomy D odcinka d bazy:

$$D_1 = \sqrt{d^2_1 - h^2_1} = (d^2_1 - h^2_1)^{1/2} =$$

$$= d_1 \left(1 - \frac{h^2_1}{d^2_1}\right)^{1/2} = d_1 \left(1 - \frac{h^2_1}{2\,d^2_1} \ldots\right) =$$

$$= d_1 - \frac{h^2_1}{2\,d_1} \ldots$$



Rys. 767.

Dalszych wyrazów rozwinięcia nie bierzemy pod uwagę, gdyż $\frac{1}{8}\frac{h^2}{d^3}$ jest wyrazem zbyt małym, przy $d_1 = 100$ *m.* i przy $h_1 = 1$ *m.* $\frac{1}{8}\frac{h^4}{d^3} =$

$$= \frac{1}{8.100.100.100} = \frac{1}{8\,000}\ mm.$$

Jako poprawkę pomierzonej długości d_1 przy różnicy poziomów h_1 ostatecznie przyjmiemy wyraz $-\frac{h^2}{2\,d}$

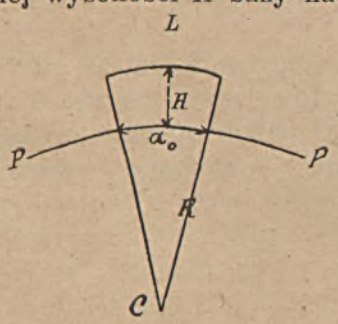
Długość więc bazy pomierzona

$$L = d_1 + d_2 + \ldots + d_k$$

przetworzy się na

$$L = [d] - \left[\frac{h^2}{2\,d}\right]$$

Obliczoną w ten sposób długość bazy odnosimy do poziomu morza, t. j. odnajdujemy rzut bazy na poziom morza. W tym celu korzystamy ze średniej wysokości H bazy nad poziomem morza, biorąc takową albo z istniejących map, albo z nawiązania niwelacji bazy do reperów niwelacji państwowej.



Rys. 768.

Na rys. 768 C oznacza centrum ziemi, L — bazę na powierzchni, $P\,P$ — poziom morza, H — średnią wysokość bazy nad poziomem morza, L_0 — rzut bazy na poziom morza, R — promień ziemi przy danej szerokości geograficznej.

$$L : L_0 = (R + H) : R,$$

skąd

$$\frac{L - L_0}{L} = \frac{(R + H) - R}{R + H},$$

stąd

$$\frac{L - L_0}{L} = \frac{H}{R + H} = \frac{H}{R}\left(1 - \frac{H}{R} + \frac{H^2}{R^2} \cdots\right)$$

ponieważ $\frac{H}{R}$ jest wielkością bardzo małą,

np. $H = 120\ m. = 0{,}1\ km.$

$$\frac{H}{R} = \frac{0{,}1}{6300} = \frac{1}{63000},$$

więc $\frac{H^2}{R^2}$ można odrzucić jako znikomo małą wielkość, a tem bardziej $\frac{H^3}{R^3}$ it. d., będzie więc

$$\frac{L - L_0}{L} = \frac{H}{R},$$

skąd

$$L - L_0 = \frac{LH}{R},$$

i wreszcie rzut bazy na poziom morza wyrazi się zapomocą wzoru:

$$L_0 = L - \frac{LH}{R}$$

Przykład: Baza 1-kilometrowej długości na wysokości 200 *m.* nad poziomem morza otrzymałaby więc poprawkę:

$$\frac{LH}{R} = \frac{1.0{,}2}{6300} = \left(\frac{1}{32000}\right)\ km. = \left(\frac{1}{32}\right)\ m. = (3{,}1)\ cm.$$

§ 371. Pomiar bazy taśmą precyzyjną.

Taśma, używana do pomiaru bazy, ma długość 20 lub 24 *m.* Na obydwu końcach taśmy znajdują się podziałki milimetrowe, biegnące od zera na każdej w jednym kierunku do 100 *mm.* Odległość między zerami obydwu podziałek jest długością taśmy, określaną z komparacji z miarą sprawdzoną lub normalną. Obydwa końce taśm zakończone są okrągłemi pierścieniami, przez które przechodzą kostury. Jeżeli tedy wyobrazimy sobie dwa nieruchome indeksy, rozstawione o odległość, równą długości taśmy, z dokładnością do kilku *cm.*, wówczas ta odległość może być ściśle odliczona z taśmy.

Tak np., odległość d między indeksami a i b (jeżeli długość taśmy t. j. odległość między zerami oznaczymy literą l) będzie równa

$$d = l + b - a,$$

gdzie b i a oznaczają odczyty z podziałek przy indeksach b i a.



Rys. 769.

Jeżeli więc przy układaniu taśmy w kierunku bazy odczyt a nazwiemy odczytem wstecz, b — odczytem wprzód, wówczas należy odczyt wprzód dodawać, odczyt zaś wstecz odejmować.

Po odpowiedniem rozstawieniu indeksów w linji bazy, otrzymamy dla poszczególnych odcinków wyrazy:

$$d_1 = l + b_1 - a_1$$

$$d_2 = l + b_2 - a_2$$

$$- - - - - -$$

$$d_n = l + b_n - a_n$$

Jeżeli więc pierwszy indeks ustawiony został nad punktem początkowym bazy, ostatni zaś nad końcem bazy, wówczas długość całej bazy, jako suma odcinków składowych, równa będzie, pomijając poprawki:

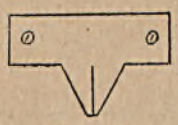
$$D = [d] = nl + [b] - [a] = nl + [b - a]$$

Ponieważ dokonanie jednej tylko pary odczytów przy każdem ułożeniu taśmy wprowadziłoby szereg błędów odczytów, więc na każdem stanowisku należy odczyty wykonać co najmniej podwójnie, przesuwając nieco taśmę przy indeksach po dokonaniu każdej pary odczytów. W ten sposób otrzymamy na każdem stanowisku dwukrotnie lub trzykrotnie różnice $b—a$; zgodność wyników (różnic $b - a$) stanowi o prawidłowości odczytów. Różnice nie powinny się wzajemnie różnić więcej, niż o 0,5 *mm*.

Zapis jest następujący:

Ułożenie taśmy	b	a	$b - a$	Średnia $b - a$
— — —	— — —	— — —	— — — —	— — — —
— — —	— — —	— — —	— — — —	— — — —
	156	278	— 122	
11	322	446	— 124	— 123,0
	605	728	— 123	
— — —	— — —	— — —	— — — —	— — — —
— — —	— — —	— — —	— — — —	— — — —

Przy pracy indeksy winny być nieruchome; uskutecznia się to przez wbicie w linji bazy okrągłych pali, 50 *cm.* długich. Górny koniec każdego pala winien być dokładnie spiłowany prostopadle do osi pala.



Rys. 770.

W pal wciska się płytka metalowa o ściętym języczku z kreską. Koniec języczka winien leżeć dokładnie w linji bazy. Warunek ten zachowany będzie, jeżeli ustawimy teodolit centrycznie nad początkiem bazy i płaszczyznę kolimacyjną skierujemy na koniec bazy; wówczas przy sprzężonej alhidadzie można, obserwując przez teodolit wbijane płytki, korektować położenie języczka, wprowadzając jego koniec ściśle w linję bazy.

Wystarczy w zupełności mieć trzy takie płytki, aby zmierzyć całą bazę; płytka końcowa przenosi się wówczas naprzód tylko wtedy, gdy odcinek między dwiema przedniemi jest pomierzony. Przy większej ilości płytek pomiar może posuwać się nieco szybciej.

Wierzchołki pali winny leżeć w najmniejszej liczbie linij o stałych spadkach. Z tego względu stopień wbicia pali w ziemię wskażą krzyże, zapomocą których ustalamy położenie wierzchołków poszczególnych pali.

W toku samego pomiaru taśma winna być naciągana z siłą około 8 *kg.*; w tym celu do uszek taśmy dołączamy dynamometry, wskazujące stopień pożądanego pochylenia kostura w czasie obserwacji.

Dla uniknięcia zwisania taśmy, wbijamy co 5 *m.* paliki (między palami dla indeksów), o wierzchołkach w linji spadu danego odcinka bazy.

Bezpośrednio przed lub po pomiarze następuje niwelacja wierzchołków pali, na które przypada ustawienie płytek z indeksami (przygotowanie linji bazy winno przewidzieć okoliczność, że spadki linji bazy mogą się zmieniać na tych właśnie palach).

Poprawka na pochylenie do poziomu odcinka o pomierzonej długości d i różnicy wysokości h końców tego odcinka, gdy rzut poziomy odcinka oznaczymy literą d_0, będzie równa:

$$p = d_0 - d,$$

lecz

$$d_0 = (d^2 - h^2)^{1/2} = d\left(1 - \frac{1}{2}\frac{h^2}{d^2} - \frac{1}{8}\frac{h^4}{d^4} \ldots\right)$$

więc, odrzucając trzeci i dalsze wyrazy rozwinięcia, przy spadkach mniejszych od 4%,

otrzymamy:

$$d_0 = d - \frac{h^2}{2d}$$

skąd

$$p = -\frac{h^2}{2d}$$

Przy spadkach zaś, większych od 4%:

$$p = -\frac{h^2}{2d} - \frac{h^4}{8d^3}$$

Suma wyrazów p, obliczonych dla poszczególnych odcinków bazy, da poprawkę na pochylenie bazy do poziomu.

Przy pomiarze bazy co piąty odcinek notujemy temperaturę powietrza. Poprawki na temperaturę obliczamy dla 100-metrowych odcinków (5 taśm) dla odpowiednich średnich odczytów termometru. Jeżeli literą l_0 oznaczymy nominalną długość taśmy przy t^0 Celsjusza, przez t temperaturę pomiaru tego odcinka, wówczas długość taśmy przy t wyniesie:

$$l = l_0 \{1 + c\,(t - t^0)\}$$

gdzie c jest spółczynnikiem rozszerzalności linjowej stali, równym 0,000011. W naszych warunkach l_0 winno być podawane dla pewnej średniej temperatury, np. 10^0 — 15^0.

Poprawka więc każdego stumetrowego odcinka przy średniej temperaturze t pomiaru tego odcinka dla 20-metrowej taśmy wyniesie:

$$p = 100\,c\,(t - t_0)$$

Poprawkę zaś dla całej bazy otrzymamy, jako

$$P = \Sigma\, p = 100\,c\,\Sigma\,(t - t_0) + r\,c\,(t' - t_0)$$

gdzie $\Sigma\,(t - t_0)$ odpowiada sumie różnic $t - t_0$ dla stumetrowych odcinków, r zaś oznacza ostatni odcinek bazy, mniejszy od 100 m, którego średnia temperatura pomiaru wynosi t'.

W ten sposób przy n całkowitych ułożeniach taśmy rzut poziomy bazy wyrazi wzór:

$$L = n\,l_0 + k + \Sigma\,(b - a) - \Sigma\,\frac{h^2}{2\,d} + 100\,c\,\Sigma\,(t - t_0) + r\,c\,(t' - t_0)$$

Ostatni wyraz jest niewielki. Odcinek k między ostatnim indeksem bazy a jej końcem mierzy się z dostateczną dokładnością zapomocą sprawdzonej stalowej ruletki, lub też korzystamy z nacięć na taśmie, oznaczonych ściśle co 1 metr. Przykładamy zero taśmy ściśle do indeksu, liczymy całkowite metry do końca bazy, resztę, mniejszą od 1 m, odliczamy z cyrkla i podziałki.

§ 372. Przyrząd Jaederina do pomiaru baz.

Właściwy przyrząd Jaederina do pomiaru długości jest drutem invarowym, (invar — stop 64% stali i 36% niklu) 24 m. długim zaopatrzonym przy obydwu końcach w milimetrowe (długości 1 dcm.) podziałki, na których podział biegnie od zera w tym samym kierunku do 8 cm.

Podziałki są zakończone nazewnątrz kółeczkami, któremi w toku pomiaru spinamy druty ze strunami metalowemi ciężarów 10-kilogramowych, przerzucanemi przez bloki specjalnych statywów. Statywy tak są ustawione,

by napięty drut dotykał podziałkami nieruchomych indeksów, już to wyciętych na metalowych walcach, dających się w różnych kierunkach przesuwać na trójnożnych statecznych statywach, które znajdują się ściśle w linji bazy, już to wyciętych na czopkach metalowych, które swemi ostrzami wciskane są w pale, rozstawione z kilkucentymetrową dokładnością ściśle w linji bazy co 24 *m*.

Jak widzimy więc, system odczytywania jest taki sam, jak przy precyzyjnej taśmie.

Przyrząd Jaederina znajduje teraz szerokie zastosowanie, dzięki następującym okolicznościom:

1) Pomiar posuwa się bardzo szybko w porównaniu z pomiarem przy użyciu innych przyrządów bazowych używanych do bardzo ścisłych pomiarów, jak przyrząd Bessela.

Szybkość pomiaru uzależniona jest od długości przyrządu; zrozumiałem jest, że pomiar posuwa się bardziej szybko przy użyciu przyrządu o 24 *m*. długości, niż przyrządów 1, 2 lub 4-metrowej długości, które dotychczas były wyłącznie stosowane na pomiarach baz.

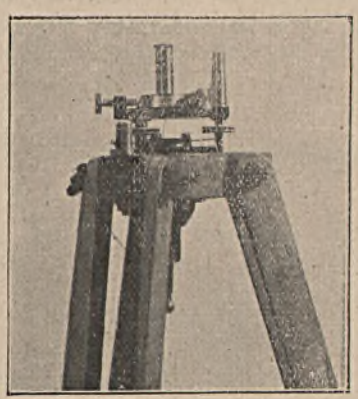
Dzienna wydajność przyrządu Jaederina, nawet przy komplecie trzech drutów na jedną partję obserwatorów, waha się około 2 *km*.

2) Nieznaczny spółczynnik rozszerzalności invaru (10 razy mniejszy od spółczynnika platyny) pozwala na mniej ścisłe określanie temperatury w toku pomiaru.

3) Drobne błędy wytyczenia indeksów w linji bazy nie grają roli. Natomiast na niekorzyść przyrządu Jaederina przemawia fakt, że długość drutu (odległość między zerami podziałek) zmienia się okresami, a nawet skokami (przy mocnych uderzeniach, silnych szarpnięciach i t. p.).

Stąd wynika konieczność bardzo delikatnego obchodzenia się z przyrządem oraz potrzeba komparowania przyrządu z etalonem bezpośrednio przed i po pomiarze, w miarę zaś możliwości i w toku pomiaru.

Na bardzo długich bazach, jak np. bazy triangulacji państwowej, wskazane jest w środku pomiaru urządzenie jedno lub dwudniowej przerwy dla odwiezienia drutu do komparacji.



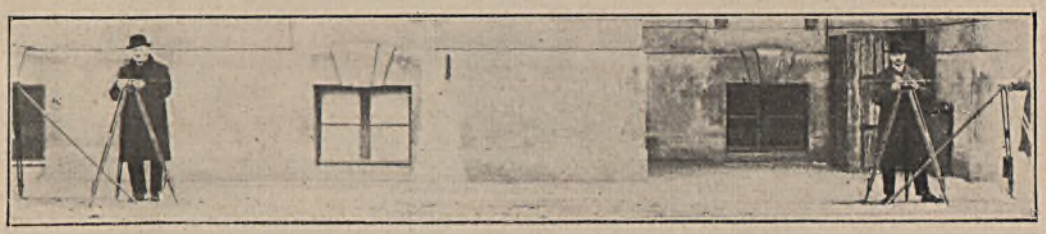
Rys. 771.

Rys. 771 przedstawia statyw Carpentier'a z walcowym czopkiem, którego górna część jest do połowy ścięta w kształcie płaszczyzny. Na tej płaszczyźnie znajduje się indeks w postaci wyciętej kreski, uwidocznionej na rys. 774. Czopek jest częścią ściętego stożka, który może być przesuwany w różnych kierunkach, dopóki górna pozioma krawędź ścięcia nie ustawi się w pożądanym kierunku. W ten sposób indeks może być wprowadzony w linję bazy.

Na rys. 772 mamy ustawiony przyrząd Jaederina. Obserwatorowie stoją przy statywach Carpentiera, trzymając w palcach podziałki drutu. Na krańcach rysunku wi-

dzimy trójnogi z blokami, przez które przerzucono struny, połączone z drutem invarowym, obciążone ciężarami 10-kilogramowemi.

Na poziomych ramionach trójnogów widzimy ręce robotników, ustawiających bloki w linji indeksów według wskazań obserwatorów. Odsuwa-



Rys. 772.

nie lub przysuwanie długiej nogi trójnoga powoduje obniżanie lub podwyższanie bloku, a więc i drutu.

Rys. 773 przedstawia statyw i trójnóg ustawionego przyrządu oraz połączenie struny z drutem. Obok stoi pudełko z aluminjowym bębnem, na który nawijamy drut po skończonej pracy. Sposób utrzymywania drutu przy ustawianiu przyrządu wskazuje rys. 774.

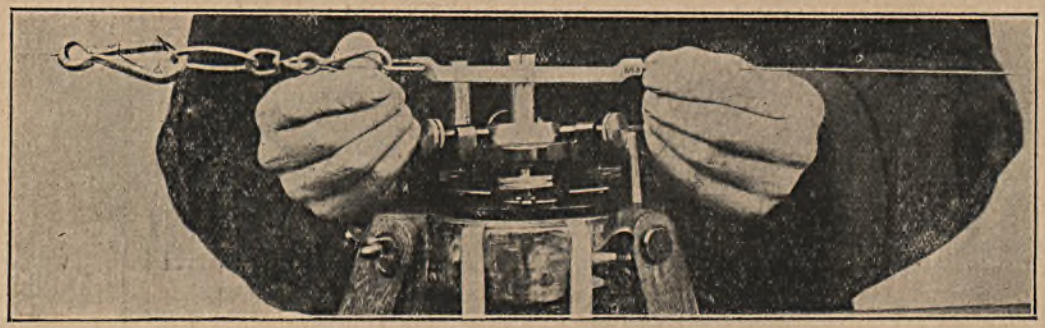


Rys. 773.

Komparacja przyrządu wymaga 1) ustalenia długości komparatora zapomocą etalonu (miara normalna, zwykle trzymetrowa, porównana ściśle z metrem normalnym) i 2) określenia różnicy pomiędzy długością komparatora i każdego drutu (określenie długości drutu).

Długość komparatora ustala się przed i po określeniu długości drutu. Sam komparator składa się z 9-u głównych mikroskopów ze śrubami mikro-

metrycznemi. Mikroskopy są przymocowane co 3 *m.*, zwykle do takiej ściany, która jest osłonięta od wpływów zewnętrznych. Osie mikroskopów są równoległe do siebie.

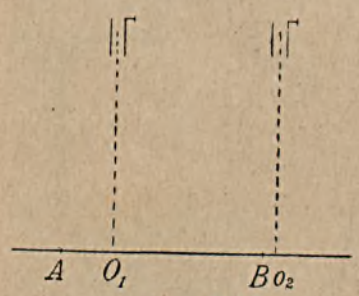


Rys. 774.

Jeżeli literami o_1 i o_2 oznaczymy przecięcia się celowych osi zerowych mikroskopów z etalonem, literami A i B końcowe kreski etalonu, wówczas odległość między o_1 i o_2 określamy ze wzoru

$$O_1\ O_2 = A\,B + B\,o_2 - A\,o_1$$

Wielkości Ao_1 i Bo_2 odczytamy z indeksów i bębenków mikroskopów, ustawiając nitki na kreski A i B (rys. 775).



Rys. 775.

Ponieważ wartość linjowa obrotu bębna dla etalonu w położeniu $A\,B$ jest znana, przeto z odczytów z bębenków obliczymy Ao_1 i Bo_2.

O dokładności komparacji świadczy najlepiej powtórzony pomiar odcinka $o_1\ o_2$ po minimalnem przesunięciu etalonu. Różnice wyników są znikomo małe, wahają się około 1—2 mikronów.

Jeżeli kilkakrotnie określimy odstępy $o_1\ o_2$ między osiami wszystkich sąsiednich mikroskopów, wówczas długością komparatora będzie

$$d = 8\ A\,B + [Bo_2 - Ao_1]^8_1$$

Długość AB jest znana i podana jest w postaci równania etalonu, np.

$$AB = N = 3\ m - 25{,}7^{\mu} + 3^{\mu}\ (1{,}311\ T - 0{,}00312\ T^2)$$

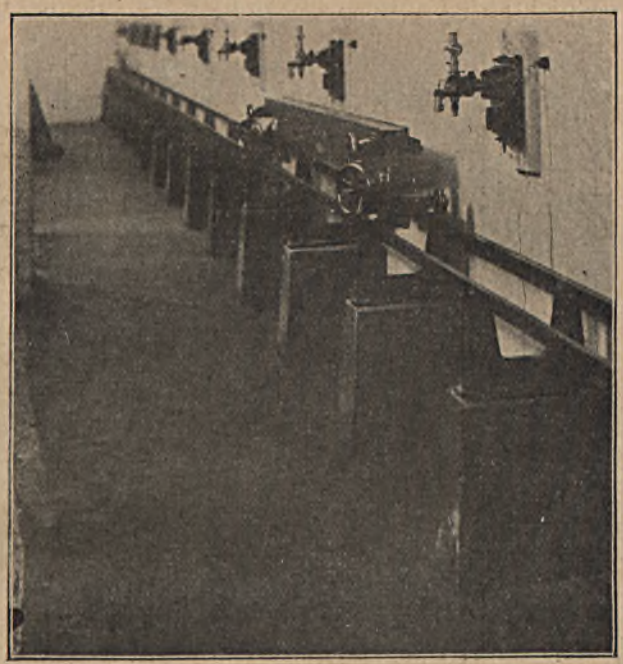
gdzie μ oznacza mikron, T — temperaturę miary według Celsjusza.

Komparator przyrządu Jaederina (w gmachu Ministerstwa Przemysłu i Handlu) znajduje się w pracowni, kompletnie izolowanej od ścian głównego budynku i posiadającej własne fundamenty. Do ścianki komparacyjnej pracowni przymocowane są (rys. 776) mikroskopy, których osie znaj-

dują się dokładnie w jednej pionowej płaszczyźnie, płytki zaś mikrometrów położone są ściśle w tej samej płaszczyźnie poziomej.

Pod mikroskopami na trwałych podstawkach ułożone są poziomo szyny, po których może się toczyć wózek, którego górna powierzchnia jest płaszczyzną. Na tej płaszczyźnie układa się futerał z metrem normalnym lub z 3-metrowym etalonem. Wózek posiada urządzenie, umożliwiające mikrometryczne przesunięcia górnej jego płaszczyzny w kierunku podłużnym, poprzecznym i pionowym.

Zapomocą działania odpowiedniemi śrubami możemy więc wprowadzać kreski miar normalnych dokładnie w pole widzenia mikroskopów, a tem samem uzyskiwać wyraźne obrazy kresek miary.



Rys. 776.

Kiedy pomiar długości komparatora jest ukończony, wówczas drut invarowy łączymy zapomocą strun metalowych, przerzuconych przez bloki, z 10-kilogramowemi ciężarkami.

Podziałki invarowego drutu wprowadzamy w pole widzenia mikroskopów zapomocą odpowiednich przesunięć bloków.

Kształt, materjał i wymiary bloków przy komparatorze powinny być ściśle takie same, jak w blokach trójnogów, używanych przy pracach polowych, aby wielkość tarcia była taka sama.

Ustawiamy w taki sposób podziałkę, aby jej zerowa lub pierwsza centymetrowa kreska znalazła się wpobliżu punktu zerowego mikrometru.

Po dokonaniu odczytów z mikrometrów I-ego i IX-ego mikroskopu, przesuwamy nieco drut i powtarzamy odczytywanie; czynność tę powtarzamy kilkakrotnie, jak np.:

	I	IX
	o b r o t ó w	
	9,376	3,367
	410	371
	410	352
	383	378
	385	358
średnie:	9,393	3,363

Średnie obrotów mnożymy przez odpowiednie wartości obrotów każdego mikrometru, np. 99,74 mikrona, i tworzymy różnicę wyników. Znając długość komparatora, łatwo obliczyć długość drutu.

§ 373. Pomiar bazy przyrządem Jaederina.

Partja pomiarowa składa się z kierownika całego pomiaru, kierownika grupy obserwacyjnej (dwu obserwatorów, dwu robotnikach przy trójnogach, po dwa przy każdym drucie, dwu do przenoszenia ciężarów, oraz zapasowego obserwatora i dwu zapasowych robotników), grupy do wytyczania (dwu



Rys. 777.

techników i trzech robotników) i grupy niwelacyjnej (jeden technik i trzech robotników). Każda partja posiada swój komplet przyrządów: do tyczenia teodolit 5″-owy, do niwelacji — niwelator, łaty, parasol i do pomiaru — przyrząd Jaederina.

Grupa do wytyczania przybywa pierwsza w celu ustawienia w linji bazy słupów betonowych co odcinek, wielokrotny 24 *m*, bliski 1 *km*; u góry na tych słupach wystają czopki stalowe (o kulistej powierzchni z dwiema rysami wzajemnie prostopadłemi, z których jedna skierowana jest w linji bazy). Krzyż czopka powinien leżeć dokładnie w linji bazy.

W dniu ukończenia tyczenia tych kilku pośrednich punktów bazy, przyjeżdża cała partja pomiarowa (rys. 777).

Pierwszą czynnością jest wytyczenie w linji bazy statywów Carpentiera na pierwszym odcinku. Rys. 778 przedstawia fragment ustawienia statywów w linji. Przy tem tyczeniu dwu robotników z linką stalową odmierza odcinki po 24 *m*. dla miejsc ustawień statywów. Kierujemy oś celową teodolitu, ustawionego centrycznie nad punktem początkowym



Rys. 778.

bazy, na punkt końcowy bazy, sprzęgamy alhidadę i, dając odpowiednie sygnały, wprowadzamy ściśle w linję bazy czopek najdalej odsuniętego statywu. Kolejno wprowadzamy w linję bazy następne czopki, rozpoczynając od dalszych, i po ustawieniu ostatniego — przenosimy teodolit na punkt, wytyczony uprzednio w odległości 300 *m*. od początku odcinka, skąd będziemy wprowadzać w linję bazy następne statywy, te mianowicie, na których pomiar drutem już ukończono i które można przenosić naprzód.

Im więcej mamy statywów, tem sprawniej posuwa się pomiar; 12 statywów jest dostateczną ilością. W toku ustawiania statywów partja pomiarowa rozwija z bębnów druty (rys. 779) i zawiesza je na haczykach specjalnie do tego celu przygotowanych tyczek, wbitych dostatecznie mocno w ziemię.

Zauważyć należy, że czasem zamiast statywów z czopkami wbija się lub wkopuje ściśle w linji bazy pale o średnicy 10 *cm.*, na których



Rys. 779.

ustawiamy zapomocą sygnałów, podawanych od teodolitu, czopki specjalnej konstrukcji.



Rys. 780.

Czopek taki jest walcem o średnicy około 1 *cm.*; u dołu walec się rozszerza i zakończony jest igłą 2 *cm*-owej długości, znajdującą się na osi walca. Igłę tę zagłębiamy w pal po ustawieniu jej w linji bazy. Górna powierzchnia walca jest powierzchnią wypukłą z wyciętym na niej krzyżykiem. Dolne rozszerzenie walca służy do wbijania czopka zapomocą specjalnego młotka, opierającego się swym futerałem na tem właśnie rozszerzeniu walca.

Oczywiście pale z czopkami stwarzają cały szereg nowych źródeł błędów, a stąd należy je uważać za dopuszczalne jedynie w braku statywów. Każda grupa pomiarowa — (może ich bowiem być dwie) jest zaopatrzona w dwa, trzy lub cztery druty. Dążyć należy raczej do powiększania ilości grup pomiarowych, niż do zaopatrywania jednej grupy w większą ilość drutów. Rys. 781 i 782 przedstawiają grupę o 3-ch drutach przy pracy.



Rys. 781.

W czasie całego pomiaru obserwatorzy i naczelnik partji, notujący odczyty obserwatorów, znajdują się z prawej strony linji statywów, licząc od kierunku pomiaru, robotnicy zaś z drutami podają kolejno swe druty z lewej strony, poczem przechodzą na drugą stronę statywów, zabierają po dokonaniu odczytów swe druty i idą do następnej pary statywów, gdzie ustawiają się na swych miejscach w kolei: najbliżej statywów pierwszy drut, dalej drugi i trzeci.

Po zawieszeniu drutów na blokach trójnogów i takiem ich ustawieniu, że podziałki są styczne do krzyżyków na czopach i drut posuwa się powoli lub jest nieruchomy, na sygnał, dany gwizdkiem przez obserwatora przy końcu druta (lub przez naczelnika partji), obydwaj obserwatorowie

głośno podają naczelnikowi odczyty, dokonane w momencie sygnału. Takich par odczytów należy dokonać nie mniej niż trzy; w razie zaś rozbieżności w wynikach — należy jeszcze dopełnić odczyty.

Druty na początku pomiaru powinny być tak ułożone, by zera obydwu podziałek były skierowane w stosunku do samych podziałek w kierunku na początek pomiaru odcinka. Bezpośrednio za partją pomiarową lub przed nią posuwa się partja niwelacyjna, zaopatrzona w zwykły niwelator



Rys. 782.

i lekkie, trójgraniaste łaty, metrowej długości, delikatnie ustawiane na bocznych walcach statywu Carpentiera, lub na czopkach na palach.

Niwelujemy odrazu trzy statywy, uważając końcowy za związkowy. Rys. 782 przedstawia fragment niwelacji rozstawionych w linji bazy statywów.

Podajemy wyciąg z dziennika pomiaru bazy triangulacji m. st. Warszawy, wykonanej dwoma drutami.

Dziennik pomiaru bazy.

Naczelnik partji *inż. Bem.*
Obserwatorzy:
inż. Subczyński
inż. Szymański.

№ № drutów	Numer pali		$-r+v$	Czas Temperatura
	tylny r	przedni p		
	1	2		
	Sz.	*S.*		
670	98	427	+ 329	
	171	500	329	$9^h 20^m$
	204	533	329	+ 21°, 7
	281	609	328	
			+ 328,75	
	61	396	+ 335	
678	116	449	333	
	238	573	335	
	348	682	334	
			+ 334,25	
	2	3		
	S.	*Sz.*		
670	338	470	+ 132	

i t. d.

Temperaturę powietrza notujemy co 5 statywów.

Ostatni odcinek bazy różni się zwykle od 24 *m.*; dla określenia t. zw. reszty bazy służą 8 *m*-owy drut invarowy i 4 *m.* taśma invarowa,

podzielona na końcach tak samo, jak podziałki zwykłych drutów. Prócz tego taśma 4 *m*-owa podzielona jest na decymetry.

Drut 8 *m*-owy i taśma invarowa tak samo są zawieszane na blokach, jak zwykłe 24 *m*-owe druty. Nad końcem bazy ustawia się specjalny statyw, z krążkiem metalowym, na którym jest wycięty krzyżyk, scentrowany nad końcem bazy.

Pomiar reszty prócz powyższego sposobu należy wykonać dla kontroli sprawdzoną 10 *m*-ową tasiemką stalową.

Obliczenie długości bazy, pomierzonej przyrządem Jaederina, obejmuje:

1) utworzenie średnich różnic z każdego stanowiska dla każdego drutu; ponieważ same odczyty podawane są do 0,1 *mm*, więc średnie uwzględniają 0,005 *mm*.;

2) średnie różnice sumujemy dziennemi odcinkami bazy dla każdego drutu;

3) poprawki na temperaturę, obliczane dla odcinków 120 *m*-owych, ze średniej temperatury pomiaru takiego odcinka;

4) poprawki na pochylenie każdego drutu do poziomu, liczone ze wzoru

$$-\Sigma\frac{h^2}{2\,l}-\Sigma\frac{h^4}{8\,l^3}$$

przytem drugi wyraz uwzględniany jest tylko przy większych różnicach wysokości;

5) obliczenie rzutu bazy na przedłużoną pod lądami powierzchnię oceanów.

Dokładność pomiaru bazy przyrządem Jaederina jest bardzo wysoka; błąd stosunkowy zmniejsza się w miarę wzrastania długości bazy; tak np., uzyskany względny błąd pomiaru bazy m. st. Warszawy (pomiaru dokonano w r. 1925) wyniósł 1 : 3.000,000.

§ 374. Orjentowanie lokalnej sieci triangulacyjnej.

Gdy sieć lokalna nie może być nawiązana do boku triangulacji państwowej o znanym azymucie, musimy wówczas nawiązywać naszą sieć do południka geograficznego przy pomocy określenia kierunku linji południowej i kąta, zawartego pomiędzy tą linją a ustalonym na gruncie kierunkiem boku trójkąta (lub poligonu).

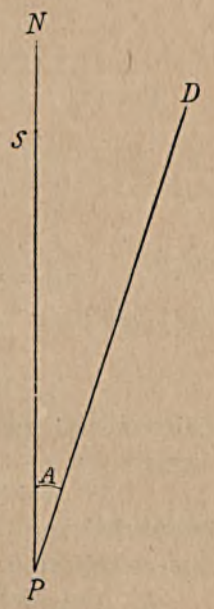
Kierunek linji południowej daje, jak wiadomo z kosmografji, przecięcie płaszczyzny południka z płaszczyzną poziomą; skoro więc lunetę teodolitu, ustawionego do poziomu w pewnym punkcie *P*, skierujemy na dowolny punkt *S*, znajdujący się na południku, wówczas płaszczyzna kolimacyjna lunety kryje płaszczyznę południka; gdy w takiem położeniu lunety odczytamy z limbusu a_1 i b_1, skierujemy lunetę na dowolny punkt *D* sieci i dokonamy z nonjuszów odczytów a_2 i b_2, wówczas różnica

$$\frac{a_2+b_2}{2}-\frac{a_1+b_1}{2}=A$$

będzie zaobserwowanym azymutem boku *PD*. (rys. 783).

Punktem ciężkości zagadnienia o określeniu azymutu geograficznego jest więc odnalezienie dowolnego punktu w południku danego miejsca.

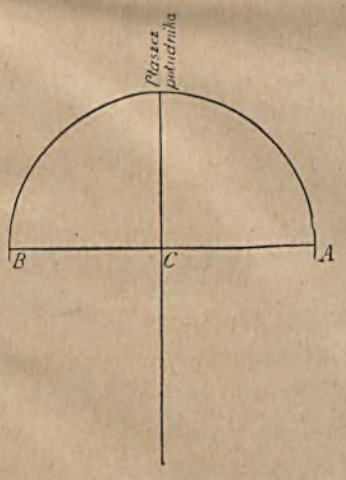
Z kosmografji wiadomo, że wszystkie gwiazdy w czasie swego pozornego ruchu dziennego górują w południku; skoro zatem, prowadząc oś celową lunety za dowolną gwiazdą, uchwycimy moment, w którym wysokość gwiazdy jest największa wówczas gwiazda leży w płaszczyźnie południkowej; gdy więc w tym momencie oś celowa lunety kryje gwiazdę, wtedy płaszczyzna kolimacyjna lunety kryje się z płaszczyzną południka.



Rys. 783.

Ten rodzaj postępowania przy wyznaczaniu położenia płaszczyzny południka jest niedość ścisły, mianowicie z tego względu, że trudno oś celową teodolitu prowadzić równomiernie z gwiazdą, gdyż wymaga to jednoczesnego poprawiania położenia lunety w dwu płaszczyznach, pionowej i poziomej, zapomocą śrub leniwych lunety i alhidady koła poziomego; z drugiej strony gwiazda w okresie górowania w ciągu jakiegoś czasu nieuchwytnie zmienia wysokość, tak że za położenie jej w południku można obierać jeden z szeregu tych punktów, w których gwiazda, posuwając się po sklepieniu niebieskiem, prawie nie zmienia swej wysokości.

Z powyższych względów określenie położenia gwiazdy w południku nie prowadzi do celu, wobec czego stosuje się metoda odpowiadających wysokości.



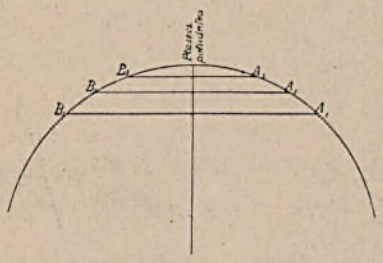
Rys. 784.

Metoda ta polega na tem, że jeżeli krzyż nitek skierujemy na gwiazdę przed górowaniem w położeniu s_1 i po odnotowaniu odczytu A na limbusie, nie zmieniając pochylenia lunety, przesunięciem alhidady znów uchwycimy na krzyżu nitek tę samą gwiazdę po górowaniu i dokonamy odczytu B z limbusu, wówczas średnia arytmetyczna $\frac{A+B}{2} = C$ wskazuje na odczyt z limbusu, odpowiadający takiemu ustawieniu alhidady, przy którem oś celowa lunety leży w płaszczyźnie południkowej.

Jeżeli więc postępowanie to powtórzymy, jako grupę spostrzeżeń, to jest przed górowaniem gwiazdy uchwycimy ją w trzech położeniach A_1, A_2, A_3, odpowiadających odczytom h_1, h_2, h_3 z koła pionowego, a po górowaniu, nie zmieniając pochylenia lunety, znów uchwycimy gwiazdę (przy odczycie h_3 na kole pionowem) na skrzyżowaniu nici, w punkcie B_1; gdy następnie pochylimy lunetę w ten sposób, by odczytać z koła pionowego h_2, i uchwycimy gwiazdę przesuwaniem alhidady w punkcie B_2 na skrzyżo-

waniu nitek, i znów pochyliwszy lunetę do odczytu h_1 z koła pionowego, przesuwaniem alhidady uchwycimy gwiazdę w położeniu B_1 na krzyżu nitek, wówczas, jeżeli położeniom gwiazdy A_1, A_2, A_3, B_3, B_2, B_1 odpowiadają odczyty z limbusu a_1, a_2, a_3, b_3, b_2, b_1, to średnia arytmetyczna

$$p = \frac{1}{3}\left(\frac{a_1 + b_2}{2} + \frac{a_2 + b_2}{2} + \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$$



Rys. 785.

wskazuje na odczyt z limbusu, odpowiadający takiemu ustawieniu alhidady, przy którem oś lunety już dość ściśle jest ustawiona w południku (rys. 785).

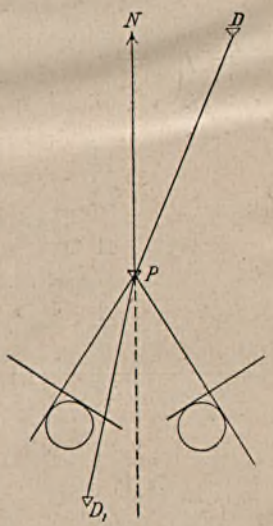
Jeżeli teraz dokonamy odczytu K z limbusu przy celu do dowolnego punktu D triangulacyjnego, wówczas

$$\varphi = K - p$$

daje azymut geograficzny prostej, łączącej stanowisko obserwacyjne z punktem D.

W praktyce mierniczej przy triangulacjach lokalnych pomiar azymutu geograficznego dowolnego boku sieci wykonywamy najczęściej w drodze obserwacji słońca metodą wysokości odpowiadających.

Na półkuli północnej słońce obserwujemy w kierunku południowym, co należy brać pod uwagę przy określaniu azymutu; mianowicie odczyt, odpowiadający kierunkowi południka, otrzymany z obserwacji słońca, należy zmienić o 180°, by otrzymać kierunek północy. Następnie, ponieważ trudno krzyż nici skierować na środek słońca, musimy obserwować samą tarczę słońca; przytem i przed i po południu pozioma środkowa nić siatki musi w chwili obserwacji być styczna w obydwu wypadkach albo do górnej albo do dolnej części słońca (rys. 786).



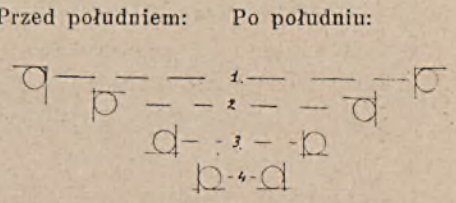
Rys. 786.

Pionowa zaś nić siatki dotyka po południu innej strony słońca, niż przed południem; jeżeli więc doprowadziliśmy do styczności z pionową nitką przed południem lewy brzeg słońca, wówczas po południu należy doprowadzać do styczności prawy brzeg słońca i odwrotnie. Jednym słowem słońce odnośnie do siatki nitek może zajmować jedno z położeń rys. 787.

Obserwacje same należy wykonywać w takim czasie, gdy słońce szybko zmienia swą wysokość, a więc przed 10-ą rano i po 2-giej po południu według czasu miejscowego.

Kąt pochylenia należy zmieniać co 30′ i takich obserwacyj dokonać przed południem i po południu możliwie najwięcej. W każdym razie pożądane jest wykonanie około 12 obserwacyj.

Gdy jedną taką serję spostrzeżeń przy jednem położeniu lunety wykonamy jednego dnia, wówczas drugiego dnia powtórzymy obserwacje przy drugiem położeniu lunety.



Rys. 787.

W pogodne dnie możemy zdążyć wykonać obydwie serje spostrzeżeń: połowę 1-szej przy kole prawem od 5-ej do 7-ej rano; przy kole lewem połowę drugiej od 7-ej do 9-ej rano, następnie drugą połowę 2-giej serji przy kole lewem od 3-ej do 5-ej po południu i drugą połowę 1-szej serji przy kole prawem od 5-ej do 7-ej po południu.

Przed rozpoczęciem obserwacji słońca należy założyć na okular pryzmatyczny ciemnik dla ochrony oczu. Przed rozpoczęciem i po ukończeniu obserwacji należy odnotować z limbusu odczyty, odpowiadające celowi do dowolnego punktu sieci triangulacyjnej.

Jeżeli literami $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ oznaczymy odczyty z limbusu, odpowiadające położeniu słońca przed południem przy odczytach $h_1\ h_2\ h_3 \ldots\ h_n$ na kole pionowem, a literami $q_2\ q_2\ q_3 \ldots\ q_n$ — odczyty z limbusu, odpowiadające celowym do słońca przy tych samych odczytach z koła pionowego, wówczas odczyt, odpowiadający położeniu osi celowej w południku byłby równy:

$$P = \frac{1}{n}\left(\frac{p_1 + q_1}{2} + \frac{p_2 + q_2}{2} + \frac{p_3 + q_3}{2} + \ldots + \frac{p_n + q_n}{2}\right);$$

mówimy byłby równy, gdyby nie ta okoliczność, że jednakowym kątom godzinnym po obydwu stronach południka odpowiadają różne wysokości słońca i koła wierzchołkowe, poprowadzone przez środek słońca w dwu jego położeniach o równych wysokościach po obydwu stronach południka, nie są jednakowo odległe od południka.

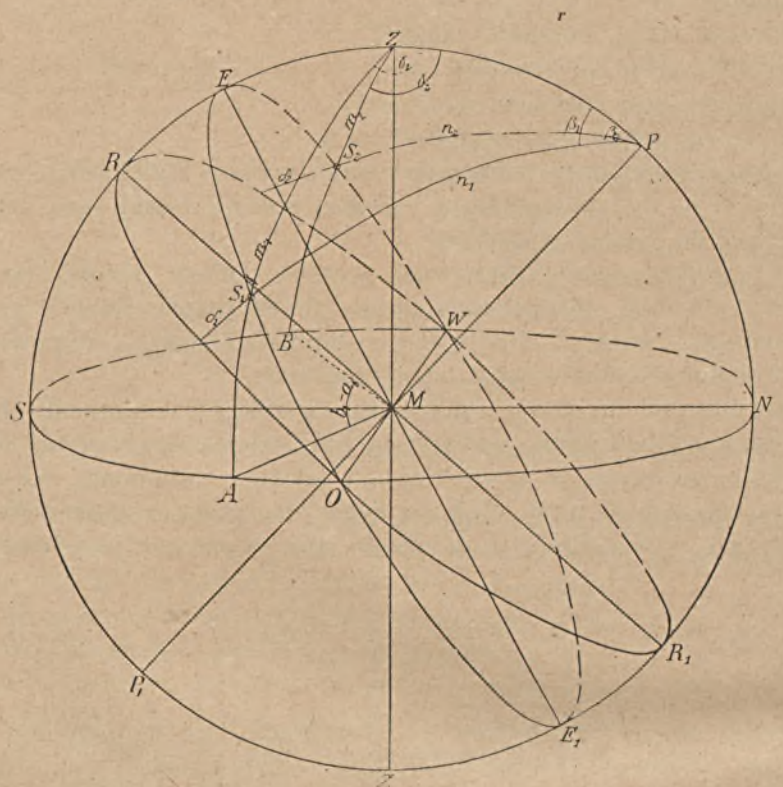
Mianowicie od 21 grudnia do 21 czerwca, gdy zboczenie słońca zwiększa się, kąt godzinny słońca przy odczycie h z koła pionowego przed południem jest mniejszy, niż kąt godzinny, odpowiadający tej samej wysokości słońca po południu. Odwrotne zjawisko zachodzi w czasie od 21 czerwca do 21 grudnia.

Należy więc odczytowi R z limbusu, otrzymanemu jako średnia arytmetyczna z limbusu przy celowaniu do słońca przy odpowiadających wysokościach przypisać pewną poprawkę. Przejdźmy do jej wyznaczenia.

Oznaczamy (rys. 788):

Z — zenit miejsca M obserwacji,
PP_1 — oś świata,
PNP_1S — płaszczyzna południka,
EWE_1O — płaszczyzna ekliptyki,
RWR_1O — płaszczyzna równika,
$SWNO$ — płaszczyzna poziomu miejsca obserwacji M,
S_1 i S_2 — położenia słońca na równych wysokościach przed i po południu,

$ZS_1 A$ — koło wierzchołkowe słońca w S_1,
$ZS_2 B$ — „ „ „ w S_2,
δ_1 i δ_2 — zboczenia słońca,
$ZP = r$ odległość zenitowa bieguna.



Rys. 788.

Odległości zenitowe, równe dopełnieniom wysokości $S_1 A$ i $S_2 B$ do 90°: $ZS_1 = m_1$ i $ZS_2 = m_2$.

Odległości biegunowe: $PS_1 = n_1$ i $PS_2 = n_2$
Kąty godzinne: $\sphericalangle ZPS_1 = \beta_1$ i $ZPS_2 = \beta_2$,
Kąty $PZS_1 = \gamma_1$ i $PZS_2 = \gamma_2$
Mamy na zasadzie sferycznej trygonometrji.

z PZS_1:

$$\cos n_1 = \cos r \,.\, \cos m_1 + \sin r \,.\, \sin m_1 \,.\, \cos \gamma_1$$

z PZS_2:

$$\cos n_2 = \cos r \,.\, \cos m_2 + \sin r \,.\, \sin m_2 \,.\, \cos \gamma_2$$

a stąd

$$\cos \gamma_1 = \frac{\cos n_1 - \cos r \,.\, \cos m_1}{\sin r \,.\, \sin m_1}$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{\cos n_2 - \cos r \,.\, \cos m_2}{\sin r \,.\, \sin m_2}$$

Lecz założyliśmy, że S_1 i S_2 leżą na równych wysokościach, więc $m_1 = m_2$, będzie zatem

$$\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1 = \frac{\cos n_2 - \cos n_1}{\sin r \,.\, \sin m_1}$$

Rozpatrzmy licznik.

Niech

$$n_2 = n_1 + \Delta n,$$

więc

$$\cos n_2 = \cos (n_1 + \Delta n) = \cos n_1 \,.\, \cos \Delta n - \sin n_1 \,.\, \sin \Delta n$$

Ponieważ przy tych samych wysokościach słońca różnica zboczeń jest nieznaczna, możemy założyć

$$\cos \Delta n = 1$$

$$\sin \Delta n = \Delta n$$

$$\cos n_2 = \cos n_1 - \Delta n \,.\, \sin n_1$$

stąd

$$\cos n_2 - \cos n_1 = - \Delta n \,.\, \sin n_1$$

a więc

$$\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1 = - \frac{\Delta n \,.\, \sin n_1}{\sin r \,.\, \sin m_1}$$

Zakładamy:

$$\gamma_2 = \gamma_1 + \Delta \gamma$$

skąd

$$\cos \gamma_2 = \cos \gamma_1 \,.\, \cos \Delta \gamma - \sin \gamma_1 \,.\, \sin \Delta \gamma,$$

rozumując jak poprzednio, otrzymamy

$$\cos \gamma_2 = \cos \gamma_1 - \Delta \gamma \,.\, \sin \gamma_1$$

oraz

$$\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1 = - \Delta \gamma \sin \gamma_1$$

a stąd

$$\Delta \gamma \,.\, \sin \gamma_1 = \frac{\Delta n \,.\, \sin n_1}{\sin r \,.\, \sin m_1}$$

$$\Delta \gamma = \frac{\Delta n \,.\, \sin n_1}{\sin r \,.\, \sin m_1 \,.\, \sin \gamma_1}$$

Lecz

$$n_1 = 90 - \delta_1$$

$$n_2 = 90 - \delta_2$$

więc

$$\Delta n = n_2 - n_1 = - (\delta_2 - \delta_1)$$

i

$$\Delta\gamma = -\frac{(\delta_2 - \delta_1) \cdot \sin n_1}{\sin r \cdot \sin m_1 \cdot \sin \gamma_1}$$

a ponieważ $r = 90 - \smile PN = 90 - \varphi$ gdyż PN jako wysokość bieguna jest szerokością geograficzną, więc $\sin r = \cos \varphi$.

Następnie, biorąc pod uwagę proporcję:

$$\frac{\sin n_1}{\sin m_1} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \beta_1}$$

przekształcimy wzór na $\Delta\gamma$:

$$\Delta\gamma = -\frac{(\delta_2 - \delta_1)}{\cos \varphi \cdot \sin \beta_1}$$

Ponieważ w przybliżeniu

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)$$

zaś

$$\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)$$

oznacza połowę czasu $2t$ między obserwacjami słońca przed południem i po południu przy tych samych wysokościach słońca, więc

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) = t$$

a w jednostkach łukowych

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) = 15\,t$$

skąd

$$\Delta\gamma = -\frac{(\delta_2 - \delta_1)}{\cos \varphi \cdot \sin 15\,t}$$

Jeżeli odczyt z limbusu przy obserwacji słońca przed południem oznaczymy literą a_1, przy tej samej zaś wysokości słońca po południu literą b_1, wówczas wyraz

$$R = \frac{a_1 + b_1}{2} + 180^0$$

oznacza odczyt z limbusu, w przybliżeniu odpowiadający położeniu osi celowej w południku, a skierowanej na północ.

Oznaczmy literą d równe sobie wyrazy:

$$b_1 - a_1 = 360^0 - (\gamma_1 + \gamma_2) = d$$

stąd

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 360^0 - d$$

lecz

$$\gamma_2 = \gamma_1 + \Delta\gamma$$

więc:

$$\gamma_2 + \gamma_1 = 2\gamma + \Delta\gamma$$

lub:

$$360^0 - d = 2\gamma_1 + \Delta\gamma$$

skąd:

$$\gamma_1 = 180^0 - \frac{d}{2} - \frac{\Delta\gamma}{2}$$

biorąc dopełnienie obydwu stron równania do a_1:

$$a_1 - \gamma = a_1 - 180^0 + \frac{d}{2} + \frac{\Delta\gamma}{2}$$

otrzymujemy w lewej części równania wyraz $a_1 - \gamma$, oznaczający odczyt, odpowiadający ustawieniu osi celowej w południku, a skierowanej na północ. Oznaczymy ten odczyt literą A

$$A = a_1 - 180^0 + \frac{d}{2} + \frac{\Delta\gamma}{2}$$

lecz

$$\frac{d}{2} = \frac{b_1 - a_1}{2}$$

więc

$$a_1 + \frac{d}{2} = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2} = R_1 \mp 180^0$$

skąd:

$$A = R_1 \pm 180^0 - 180^0 + \frac{\Delta\gamma}{2}$$

lub:

$$A = R_1 + \frac{\Delta\gamma}{2}$$

skąd jako wyraz odczytu, odpowiadającego położeniu osi celowej lunety, skierowanej ściśle na północ,

otrzymujemy:

$$A = R_1 - \frac{\delta_2 - \delta_1}{2 \cos \varphi \,.\, \sin 15\, t}$$

W kalendarzach astronomicznych mamy dla każdego dnia zmianę deklinacji D słońca przypadającą na jednostkę czasu; zmiany logarytmów deklinacji słońca w każdym dniu, odpowiada 1 minucie czasowej podane są również w tablicy XI umieszczonej w załącznikach, razem z przykładem.

Jeżeli zmianę deklinacji słońca, na jednostkę czasu, oznaczamy literą D,

wówczas $$\delta_1 - \delta_2 = 2\,tD$$

skąd ostatecznie mamy wyraz:

$$A = R_1 - \frac{tD}{\cos\varphi \,.\, \sin 15\,t}$$

na odczyt z limbusu, odpowiadający kierunkowi północy.

Pamiętać należy, że D jest dodatnie w okresie czasu od 21 grudnia do 21 czerwca i ujemne od 21 czerwca do 21 grudnia; w ostatnim wypadku będzie $A > R_1$, w pierwszym odwrotnie.

Jeżeli więc średni z dwu odczytów, wziętych przed obserwacją i po obserwacji słońca, przy tem samem położeniu limbusu, przy celu na pewien punkt triangulacyjny lub poligonowy, oznaczymy literą P, wówczas róznica

$$P - A$$

daje azymut prostej, łączącej stanowisko teodolitu z punktem, któremu odpowiada odczyt P.

§ 375. Przebieg wyznaczenia azymutu geograficznego boku trójkąta lub poligonu z obserwacji odpowiadających wysokości słońca.

1. Ustawiamy i poziomujemy teodolit centrycznie nad danym punktem.

2. Przy sprzęgniętym na 0° 0′ 0″ limbusie z alhidadą celujemy na punkt pomiarowy, tworzący z danym punktem bok, którego azymut zamierzamy określić.

3. Przy zwolnionej alhidadzie wykonamy dwie serje spostrzeżeń przy dwu różnych położeniach lunety.

Każda z tych seryj w jednym lub dwu dniach obejmuje obserwacje słońca przy odczytach z koła pionowego:

dla 1-szej serji $h_1, h_2 \ldots h_{n-1}, h_n, h_n, h_{n-1}, \ldots h_2, h_1$

„ 2-giej „ $h'_1, h'_2, \ldots h'_{n-1}, h'_n, h'_n, h'_{n-1}, \ldots h'_2, h'_1$

i odpowiadających im odczytach, branych z limbusu:

dla 1-szej serji $a_1, a_2 \ldots a_n, b_n \ldots b_2, b_1$

„ 2-giej „ $a'_1, a'_2 \ldots a'_n, b'_n \ldots b'_2, b'_1$

oraz odczytach z wyregulowanego według czasu średniego zegarka, branych w chwili każdej obserwacji:

dla 1-szej serji $z_1, z_2 \ldots z_n, z_{n+1} \ldots z_{2n-1}, z_{2n}$

„ 2-giej „ $z'_1, z'_2 \ldots z'_n, z'_{n+1} \ldots z'_{2n-1}, z'_{2n}$

Po ukończeniu każdej serji notujemy odczyty przy celu na punkt, poprzednio obserwowany.

4. Dla każdej pary odczytów z limbusu, odpowiadających obserwacjom słońca przy jednakowych odczytach z koła pionowego, w każdej serji tworzymy średnie arytmetyczne, zmienione o 180°

w 1-szej serji:

$$R_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \pm 180^\circ; \qquad R_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \pm 180^\circ \ldots.$$

w 2-giej serji:

$$R_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \pm 180^\circ; \qquad R'_2 = \frac{a'_2 + b'_2}{2} \pm 180^\circ \ldots.$$

5. Obliczamy poprawki $\gamma = \frac{t\ D}{\cos\varphi\ .\ \sin 15\ t}$ dla wyznaczonych powyżej średnich arytmetycznych, przyjmując za t kolejno wielkości:

w 1-szej serji:

$$t_1 = \frac{z_{2n} - z_1}{2}; \qquad t_2 = \frac{z_{2n-1} - z_2}{2} \ldots$$

w 2-giej serji:

$$t'_1 = \frac{z'_{2n} - z'_2}{2}; \qquad t'_2 = \frac{z'_{2n-1} - z'_2}{2} \ldots$$

Niech będzie, np.:

$$h_1 = 34^\circ\ 30';$$
$$t_1 = 3^h\ 2^m\ 25^s = 182{,}4$$
$$R_1 = 318^\circ\ 15'{,}6$$

obliczamy

$$15\ t = 45^\circ\ 36'{,}74;$$

log t	=	2.261
log D	=	9.933 n
clg cos φ	=	0.215
clg sin 15 t	=	0.146
log V_1	=	2.555 n

$$A_1 = R_1 - V_1 = 318^\circ\ 15'{,}6 + 6'.0 = 318^\circ\ 21'{,}6$$

6. Ze wszystkich w ten sposób poprawionych odczytów tworzymy średni odczyt:

$$A = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_n + A'_1 + A'_2 + \ldots + A'_n}{2\,n}$$

odpowiadający kierunkowi północy geograficznej.

7. Jeżeli średni odczyt, odpowiadający kierunkowi obserwowanego boku, jest P, wówczas różnica

$$P - A$$

daje azymut geograficzny tego boku.

§ 376. Równania warunkowe w siatce trygonometrycznej.

Przypuśćmy, że sieć triangulacyjna składa się z n punktów; ponieważ pierwszy bok sieci co do swego położenia zawsze jest określony, przeto należy ustalić w stosunku do 1-go boku położenie pozostałych n—2 punktów. Każdy △ sieci, idąc kolejno od danego boku, rozwiązany być może, gdy pomierzymy w nim dwa kąty; ponieważ każdy nowy punkt może być określony zapomocą trójkąta, ktorego jest wierzchołkiem, przeto i tych △-ów winno być $n-2$ dla określenia $n-2$ punktów trygonometrycznych. Wobec tego zaś, że każdy △ może być określony, jeśli w nim pomierzymy dwa kąty, więc sieć może być obliczona, gdy w niej pomierzymy $(n-2)2$ odpowiednich kątów.

Ze względu na konieczność kontroli i potrzebę uzyskania możliwie wysokiej dokładności, nie ograniczamy się do pomiaru niezbędnej ilości $2(n-2)$ kątów, lecz mierzymy wszystkie kąty w △-ach, a nadto obserwujemy wszystkie możliwe do spostrzeżenia celowe, łączące nawet oddzielone kilku △-ami punkty triangulacyjne.

Ponieważ wyniki naszych spostrzeżeń są zawsze obarczone koniecznemi błędami, przeto w żadnym z △-ów suma kątów nie zamknie się na 180°; następnie, obliczając długość jakiegokolwiek boku na zasadzie boku danego i kątów, otrzymywać będziemy coraz to inne wyniki, w zależności od tego, przez jakie △-y dochodzimy od boku danego do określanego.

Ponieważ zaś rozwiązanie każdej siatki przy danej ilości spostrzeżeń może być tylko jedno, przeto powstaje zadanie odpowiedniego w tym celu wyrównania wyników spostrzeżeń.

Przy wyrównywaniu metodą najmniejszych kwadratów, stawiamy warunek, by 1) suma kwadratów poprawek przy jednakowo dokładnych spostrzeżeniach była minimum, t. j. $[v\,v] = min.$, lub przy spostrzeżeniach nie jednakowej dokładności, by zachodził warunek $[p\,v\,v] = min.$

Poza tem poprawki winny być tak dobrane, aby odpowiadały t. zw. warunkom geometrycznym, zachodzącym w danej sieci. Rozpatrzmy je.

§ 377. Warunki figur zamkniętych.

Warunkiem każdego zamkniętego wieloboku jest suma kątów:

$$S = 180^0\,(n - 2)$$

Temu zatem warunkowi podlegają pomierzone w △-ach i wogóle wielobokach kąty.

Ponieważ kąty pomierzone obarczone są błędami pomiaru, więc wyrównanie ma na celu zaopatrzenie kątów w takie poprawki, by warunek geometryczny był zachowany.

Oznaczmy pomierzone kąty △-a cyframi 1, 2, 3, sumę ich $S_{pr} = 1 + 2 + 3$ (suma praktyczna), ich poprawki literami v_1, v_2 i v_3; poprawki te winny mieć taką wielkość, aby:

$$1 + v_1 + 2 + v_2 + 3 + v_3 - 180^0 = 0$$

lecz mamy:

$$1 \quad +2 \quad +3 \quad - \quad S_{pr} = 0$$

więc, odejmując, otrzymamy:

$$v_1 \quad + v_2 \quad + v_3 + (S_{pr} - 180^0) = 0$$

Ponieważ wielkość sumy praktycznej S_{pr} możemy obliczyć, mając wielkości pomierzonych kątów, więc oznaczając:

$$S_{pr} - 180^0 = l$$

napiszemy równanie warunkowe △-a:

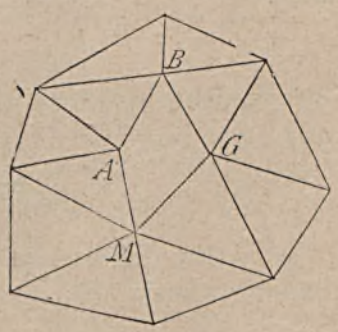
$$v_1 + v_2 + v_3 + l = 0$$

Gdy cyframi 1, 2, 3, 4, 5, 6 oznaczymy wielkości spostrzeżonych kierunków, tak że ich poprawki będą v_1, v_2 ... v_6, to, ponieważ kąt jest różnicą dwu kierunków, przeto

$$S_{pr} = (1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6);$$

wobec tego zaś, że poprawka kąta jest równa różnicy poprawek dwu odpowiednich kierunków, więc równanie warunkowe figury w wypadku spostrzeżeń kierunkowych przedstawi się, jak następuje

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + v_5 - v_6 + l = 0$$



Rys. 789.

Przy większej ilości wierzchołków wieloboku ilość poprawek będzie odpowiednio większa, tak, np., dla czworoboku równaniem warunkowem w wypadku poprawek kątowych będzie

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + l = 0,$$

w którem

$$l = S_{pr} - 360^0$$

Przy tworzeniu warunków figur obieramy trójkąty, unikając czworoboków i t. p. W wyjątkowych wypadkach taki warunek może mieć

miejsce, przy wzajemnie niewidocznych parach punktów A i G oraz B i M, wówczas prócz warunków figur w zamkniętym łańcuchu △-ów zajdzie warunek (rys. 789).

$$v_a + v_b + v_g + v_m + l = 0.$$

§ 378. Warunki sumy lub różnicy.

Gdy przy pomierzeniu kątów 1, 2 i 3 jeden z nich wynosi sumę dwu pozostałych, otrzymujemy równanie sumy.

Ponieważ

$$1 + 2 - 3 = l$$

możemy obliczyć, przeto powinno być:

$$1 + v_1 + 2 + v_2 - 3 - v_3 = 0 \qquad (1)$$

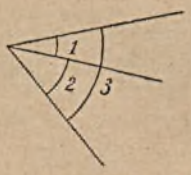
lecz jest

$$1 + 2 - 3 - l = 0$$

więc z I-ego:

$$v_1 + v_2 - v_3 + l = 0$$

otrzymamy równania warunkowe sumy.



Rys. 790.

Równanie różnicy odpowiada założeniu, że różnica kątów 3 — 1 stanowić winna kąt 2.

powinno być:

$$3 + v_3 - 1 - v_1 - 2 - v_2 = 0$$

jest:

$$3 - 1 - 2 = l$$

więc:

$$v_3 - v_1 - v_2 + l = 0$$

otrzymujemy równanie warunkowe różnicy.

§ 379. Warunek poziomu (horyzontu).

Gdy dokoła punktu pomierzono wszystkie kąty, wówczas ich suma winna wynosić 360°,

Winno być:

$$1 + v_1 + 2 + v_2 + 3 + v_3 + 4 + v_4 - 360^0 = 0$$

jest

$$1 + 2 + 3 + 4 = S_{pr}$$

otrzymujemy:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + (S_{pr} - 360^0) = 0$$



Rys. 791.

lub, oznaczając

$$S_{pr} - 360^0 = l,$$

otrzymujemy równanie poziomu:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + l = 0.$$

Jak stąd widzimy, tworzenie warunków figur, sumy, różnicy i poziomu jest jednakowe.

Rozpatrzmy przykład:

$$\begin{aligned} 1 &= 170^0\ 35'\ 20'' \\ 2 &= 80_0\ 24'\ 32'' \\ 3 &= 40^0\ 0'\ 7'' \\ 4 &= 69^0\ 0'\ 5'' \end{aligned}$$

$$S_{pr} = 360^0\ 0'\ 4''$$

$$l = S_{pr} - 360 = 4$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + 4 = 0.$$

Przy spostrzeżeniach kierunkowych równanie poziomu jest zawsze zachowane, ponieważ $l = 0$.

§ 380. Warunek boku.

Nazwijmy biegunem punkt, który jest połączony prostemi z wierzchołkami zamkniętej figury. Tak, np., w czworoboku $ABCD$ (rys. 792):

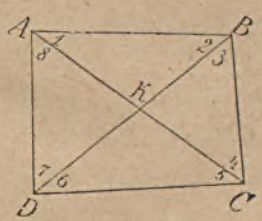
punkt A jest biegunem dla figury BCD

„ B „ „ „ „ ACD

„ C „ „ „ „ ADB

„ D „ „ „ „ ABC

Dla układu centralnego biegunem będzie punkt O dla figury $ABCDE$. W poprzednio wykreślonym czworoboku za biegun możemy obrać punkt K przecięcia się przekątnych; wówczas K będzie biegunem figury $ABCD$.

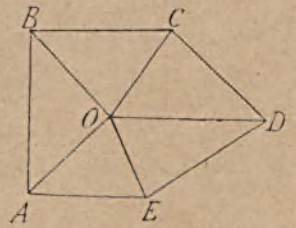


Rys. 792.

Dla bieguna, np., A w czworoboku można napisać tożsamość

$$\frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AD}{AB} = 1$$

Dla układu centralnego o biegunie O tożsamość ta będzie (rys. 793):



Rys. 793.

$$\frac{OA}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} \cdot \frac{OC}{OD} \frac{OD}{OE} \cdot \frac{OE}{OA} = 1$$

Jak widzimy:

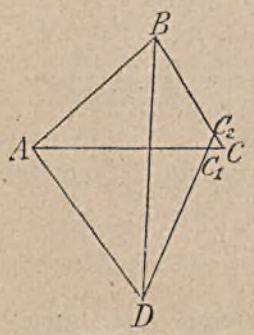
1) pierwszy licznik równa się ostatniemu mianownikowi,

2) pierwsza litera każdego odcinka jest nazwa bieguna,

3) licznik każdego następnego ułamka równą się mianownikowi poprzedniego.

Tożsamości powyższe zachodzą dla figur zamkniętych.

Przypuśćmy, że w rozpatrywanych figurach są pomierzone kąty △-ów, utworzonych bokami każdego ułamka, (np. $\frac{AB}{AC}$ leży w trójkącie $A\,B\,C$),



Rys. 794.

położonemi naprzeciw boków, będących licznikiem i mianownikiem każdego ułamka. Przypuśćmy następnie, że są pomierzone w każdym △-cie wszystkie kąty i że kąty te wyrównano do sum teoretycznych.

Gdy na boku AB z kątów zbudujemy (lub obliczymy) punkt C, oraz punkt D, wówczas wszystkie punkty czworoboku będą wyznaczone jednoznacznie. Gdy jednak teraz na boku AD z kątów △-a ADC budować będziemy ten trójkąt, wówczas prosta $D\,C$ przetnie bok $A\,C$ w punkcie C_1, bok $B\,C$ w punkcie C_2, tworząc △-błędów $C\,C_1\,C_2$.

Jak stąd wnioskujemy, określając punkt C zapomocą różnych △-ów, otrzymujemy odmienne wyniki.

Jednoznaczny zaś wynik uzyskamy wtedy, kiedy punkt C będzie biegunem, t. j. kiedy będzie punktem, dla którego zachodzić winna tożsamość

$$\frac{CD}{CA} \cdot \frac{CA}{CB} \cdot \frac{CB}{CD} = 1$$

Ponieważ boki △-ów obliczamy na podstawie kątów, przeto pomierzone kąty należy zmienić o takie poprawki, by tożsamość powyższa zachodziła i wówczas, kiedy każdy ułamek zastąpimy stosunkiem sinusów kątów, położonych naprzeciw odpowiednich boków △-ów, utworzonych bokami, które są wypisane w każdym ułamku.

Jeżeli kąty oznaczymy cyframi 1, 2 ... 8, to poprawki ich oznaczymy literami v_1, v_2 ... v_8.

Tak więc (rys. 792):

$$\frac{CD}{CA} = \frac{\sin(8 + v_8)}{\sin(7 + 6 + v_7 + v_6}$$

$$\frac{CA}{CB} = \frac{\sin(2 + 3 + v_2 + v_3)}{\sin(1 + v_1)}$$

$$\frac{CB}{CD} = \frac{\sin(6 + v_6)}{\sin(3 + v_3)}$$

Zatem tożsamość poprzednią przepiszemy w postaci:

$$\frac{\sin(8+v_8)}{\sin(7+6+v_7+v_6)} \cdot \frac{\sin(2+3+v_2+v_3)}{\sin(1+v_1)} \cdot \frac{\sin(6+v_6)}{\sin(3+v_3)} = 1$$

Zlogarytmujmy to równanie:

$$\log\sin(8+v_8) + \log\sin(2+3+v_2+v_3) + \log\sin(6+v_6) -$$
$$- \log\sin(7+6+v_7+v_6) - \log\sin(1+v_1) - \log\sin(3+v_3) = 0 \qquad (1)$$

A. Lecz naturalny logarytm

$$Lg\sin(A+\Delta A) = Lg\sin A + \Delta A\ ctg\ A,\ ^*)$$

a mnożąc to równanie przez modul M,

otrzymamy

$$\log\sin(A+\Delta A) = \log\sin A + M\,\Delta A\ ctg\ A,$$

lub w mierze linjowej:

$$\log\sin(A+\Delta A) = \log\sin A + M\,\Delta A\sin 1''\ ctg\ A,$$

stosując to rozwinięcie do poprzedniego równania,

otrzymamy:

$$\log\sin 8 + Mv_8\sin 1''\ ctg\ 8 + \log\sin(2+3) +$$
$$+ M(v_2+v_3)\sin 1''\ ctg\ (2+3) + \log\sin 6 + Mv_6\sin 1''\ ctg\ 6 -$$
$$- \log\sin(7+6) - M(v_7+v_6)\sin 1''\ ctg\ (7+6) - \log\sin 1 -$$
$$- Mv_1\sin 1''\ ctg\ 1 - \log\sin 3 - Mv_3\sin 1''\ ctg\ 3 = 0$$

skąd, po podzieleniu równania przez $M\sin 1''$,

otrzymamy:

$$v_8\ ctg\ 8 + (v_2+v_3)\ ctg\ (2+3) + v_6\ ctg\ 6 -$$
$$- (v_7+v_6)\ ctg\ (7+6) - v_1\ ctg\ 1 - v_3\ ctg\ 3 +$$
$$+ \frac{1}{M\sin 1''}\log\frac{\sin 8\sin(2+3)\sin 6}{\sin(7+6)\sin 1\sin 3} = 0 \qquad (2)$$

W ostatnim wyrazie $\frac{1}{M\sin 1''}$ dzielimy przez 10^7, logarytm zaś ułamka odniesiemy do 7 znaku mantysy. Ostatnie równanie nazywamy równaniem boku.

*) UWAGA: Rozwinięcia logarytmu dokonaliśmy na mocy szeregu Taylora:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \ldots$$

gdy więc

$$f(x) = Lg \sin A$$

i

$$f(x + h) = Lg \sin (A + \Delta A))$$

to

$$f'(x) = \frac{\cos A}{\sin A} = ctg\ A$$

i, odrzucając dalsze wyrazy rozwinięcia, jako znikomo małe, otrzymujemy

$$Lg \sin (A + \Delta A) = Lg \sin A + \Delta A\ ctg\ A.$$

B. Równanie boku (2) najczęściej przedstawia się w prostszej formie; mianowicie, ponieważ możemy napisać:

$$\log \sin (A + \Delta A) = \log \sin A + r_A \Delta A$$

gdzie r_A jest zmianą (braną z tablic logarytmicznych) logarytmu sinusa przy zmianie kąta o 1″ i $\triangle A$ ma być wyrażone w sekundach, więc równanie (1) możemy przepisać:

$$\log \sin 8 + r_8 v_8 + \log \sin (2 + 3) + r_{2+3} (v_2 + v_3) +$$

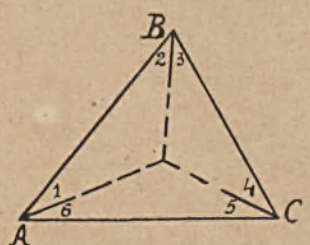
$$+ \log \sin 6 + r_6 v_6 - \log \sin (6+7) - r_{6+7} (v_6 + v_7) -$$

$$- \log \sin 1 - r_1 v_1 - \log \sin 3 - r_3 v_3 = 0$$

Skąd po zredukowaniu wyrazów otrzymujemy równanie boku w postaci:

$$r_8 v_8 + r_{2+3} v_2 + (r_{2+3} - r_3) v_3 + (r_6 - r_{6+7}) v_6 - r_{6+7} v_7 - r_1 v_1 +$$

$$+ \log \frac{\sin 8 \sin (2+3) \sin 6}{\sin (6+7) \sin 1 \sin 3} = 0$$



Rys. 795.

Obliczenie równania boku układamy w schemat, w którym jednocześnie z wypisywaniem poszczególnych logarytmów sinusów wypisujemy zmiany logarytmów sinusów przy zmianie kątów o 1″. Zmiany te w 7 cyfrowych logarytmach podane są w kolumnie d dla 10″, należy więc je dzielić przez 10. Przytem zmiany te dla kątów, zawartych między 0° a 90°, są dodatnie, między 90° a 180° są ujemne.

PRZYKŁAD

$$\frac{OA}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} \cdot \frac{OC}{OA} = 1$$

$$r_2 v_2 - r_1 v_1 + r_4 v_4 - r_3 v_3 + r_6 v_6 - r_5 v_5 +$$

$$+ \log \frac{\sin 2 \sin 4 \sin 6}{\sin 1 \sin 3 \sin 5} = 0$$

№ № kątów	Wielkości kątów	log sin	r
1	24° 19′ 39″,0	9.614 8464	+ 46,6
3	22 14 29, 0	9.578 0768	+ 51,4
5	46 24 33, 0	9.859 9078	+ 20,0
		9.052 8310	
		—9.052 8030	
		280	
2	30° 45′ 26″,0	9.708 7619	+ 35,4
4	25 54 45, 0	9.640 4795	+ 43,3
6	30 21 8, 0	9.703 5616	+ 35,9
		9.052 8030	

Logarytmy sinusów kątów w liczniku wypisane są w grupie u góry, mianownika u dołu. Suma dolna odjętą jest od sumy górnej; $l = 280$. Można dolną grupę podać w cologarytmach, i wyraz l utworzyć przez dodanie wszystkich 6 liczb.

Równanie boku ma postać:

$$35{,}4\, v_2 - 46{,}6\, v_1 + 43{,}3\, v_4 - 51{,}4\, v_3 + 35{,}9\, v_6 - 20{,}0\, v_5 - 280 = 0$$

Wszystkie zmiany logarytmów r i wyraz wolny l podane są w tych samych jednostkach, jak tutaj, w siódmym znaku mantysy.

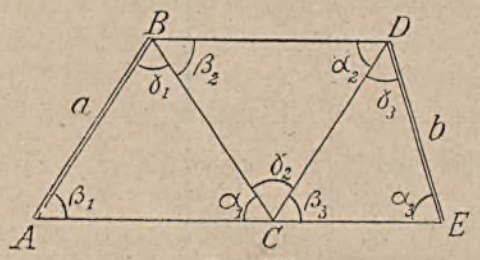
Równania boku w siatkach spotykamy przy układach centralnych, gdy pewien punkt siatki, przyjęty za biegun, połączony jest z wierzchołkami otaczającej go figury, lub też w siatkach innego typu, o przecinających się bokach.

Należy pamiętać, że przyjęte jest oznaczanie ciągłemi linjami w sieciach trygonometrycznych celowych, obserwowanych z obydwu jej końców; natomiast kierunek, jednostronnie zaobserwowany, przy punkcie, gdzie spostrzeżenie było dokonane, wykreśla się w postaci ciągłej prostej, przy obserwowanym punkcie — prostej przerywanej. Tak więc rysunek naszego przykładu wskazuje, że w punkcie O obserwacji nie dokonano.

Przeprowadzenie w siatce, w której każdy punkt jest określony jednoznacznie, nowej dwustronnej celowej (po uzyskaniu na jej końcach odpowiednich spostrzeżeń) stwarza dwa nowe warunki: warunek figury i boku, podczas gdy przeprowadzenie jednostronnej celowej w takiej sieci stwarza tylko jeden warunek boku.

§ 381. Równania baz.

Jeżeli pomiędzy dwoma otrzymanemi z pomiaru baz bokami sieci lub łańcucha znajduje się szereg wiążących te boki △-ów, wówczas, gdy na podstawie jednego z tych boków i odpowiednich kątów obliczać będziemy drugi dany bok, wyniki jego pomiaru i obliczenia winny być identyczne. W praktyce jednak dzięki błędom pomiarów powstaje rozbieżność, która, o ile jest dopuszczalna, daje materjał do wyrównania spostrzeżeń, przytem takiego wyrównania by po dokonaniu go rozbieżność była doprowadzona do zera. Każda baza, prócz 1-ej, stwarza w sieci nowy warunek bazowy, przy n bazach — będzie więc tych warunków $n-1$. Pomierzono wszystkie kąty α i β, oraz boki a i b. Jeżeli dokładność pomiaru baz jest wyższa od dokładności pomiaru kątów, np., przy dokładności $\frac{1}{300\,000}$ pomiaru bazy i przy pomiarze kątów z dokładnością $1''-2''$ i więcej sekund, wówczas określamy tylko poprawki kątów.



Rys. 796.

Mamy:
$$DE = a\,\frac{\sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3}$$

lecz obliczone DE wtedy równe będzie pomierzonej wielkości b, kiedy zaopatrzymy kąty α i β w takie poprawki v i v', przy których

otrzymamy:
$$b = a\,\frac{\sin(\beta_1 + v_1')\sin(\beta_2 + v_2')\sin(\beta_3 + v_3')}{\sin(\alpha_1 + v_1)\sin(\alpha_2 + v_2)\sin(\alpha_3 + v_3)}$$

Logarytmując to równanie i rozwijając logarytmy sinusów, jak w równaniu boków,

otrzymamy:
$$r_1' v_1' + r_2' v_2' + r_3' v_3' - r_1 v_1 - r_2 v_2 - r_3 v_3 +$$
$$+ \log\frac{a \sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3}{b \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3} = 0.$$

Równanie to nosi nazwę równania baz.

Różni się tem od równania boków. że wyraz wolny l prócz sumy i różnicy logarytmów sinusów zawiera wyraz $\log\frac{a}{b}$.

§ 382. Liczba równań warunków w sieci.

Jeżeli w danej sieci utworzymy wszystkie niezależne od siebie warunki to po wyrównaniu sieci kąty czy kierunki będą czynić zadość nietylko uwzględnionym warunkom, ale także tym wszystkim, które wypływają z warunków uwzględnionych.

Ponieważ zaś (jak to następnie wykażemy) wprowadzenie do układu równań warunkowych warunków, wynikających z już wprowadzonych do układu, uniemożliwia rozwiązanie, przeto konieczne jest ustalenie w sieci przed przystąpieniem do wyrównania liczby rzeczywiście niezależnych równań warunkowych. Liczba ta określa się z jednych wzorów przy spostrzeżeniach kątowych, z innych — przy spostrzeżeniach kierunkowych:

A. *Spostrzeżenia kątowe.*

Oznaczmy literami:

p — ilość punktów sieci,

k — ilość pomierzonych kątów,

l — ilość prostych dwustronnych (ciągłych),

l_1 — ilość prostych jednostronnych i dwustronnych.

Określamy ilość W wszystkich równań warunkowych.

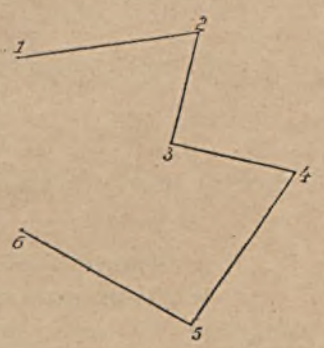
Pierwszy bok jest dany, więc i położenie jego końców, t. j. dwu punktów jest znane; pozostaje zatem do określenia $p - 2$ punktów. Każdy wierzchołek △-a, poczynając od bazy (czy 1-ego boku), może być określony na podstawie odpowiednich dwu kątów, gdyż te kąty w połączeniu z danym czy określonym bokiem, rozwiązują △, a więc określają trzeci jego wierzchołek. Idąc przez odpowiednie ▽-y od pierwszego boku, zapomocą dwu tylko kątów możemy określić każdy następny punkt. Ponieważ zaś tych punktów mamy do określenia $p - 2$, przeto niezbędną ilością kątów, zapomocą których można już sieć obliczyć, jest

$$2\,(p - 2) = 2\,p - 4$$

Wobec tego zaś, że spostrzeżenie każdego kąta ponad tę liczbę stwarza już warunek (figury, boku czy poziomu), przeto ilością warunków będzie

$$W = k - (2\,p - 4) = k - 2\,p + 4$$

Warunki figur obliczymy zapomocą następującego rozwazania: połączmy wszystkie punkty triangulacyjne prostemi dwustronnemi tak, żeby 1) otrzymać poligon niezamknięty, 2) żeby nie otworzył się ani jeden trójkąt i 3) żeby przez każdy punkt sieci przeszła jedna dwustronna prosta. Przy p punktach takich prostych, odpowiadających powyższym warunkom, będzie $p - 1$. Każda zaś następna prosta, łącząca dwa punkty sieci, zamknie jakiś obwód, a więc stworzy warunek figury, których liczba F przy l prostych dwustronnych będzie równa



Rys. 797.

$$F = l - (p - 1) = l - p + 1.$$

Przypuśćmy że dany jest I-y bok, połączony jedną prostą. Pozostaje określić $p - 2$ punktów. Każdy z nich, idąc kolejno od danego boku, określi się na podstawie przecięcia się dwu prostych (jednostronnych czy dwustronnych). Niezbędną więc ilością dla $p - 2$ punktów jest $2p - 4$ prostych; zatem dla całej siatki, włączając I-y bok,

należy mieć:

$$2p - 4 + 1 = 2p - 3 \text{ prostych.}$$

Każda, ponad tę liczbę, poprowadzona prosta przecina już istniejące i tworzy warunek boku, ponieważ prosta taka może już być różnemi drogami obliczona. Gdy więc wszystkich prostych mamy l_1, to warunków boku B będzie:

$$B = l_1 - (2p - 3) = l_1 - 2p + 3.$$

Jeżeli W nie równa się $F + B$, wówczas wchodzą w grę albo równania poziomu, albo równania sumy czy różnicy. Warunki baz liczymy oddzielnie, mianowicie przy n bazach liczba równań baz wynosi n—1.

Przy obliczaniu ilości równań warunków obserwacji kierunków na punkty, określane tylko wcięciami, nie należy uwzględniać.

B. *Spostrzeżenia kierunkowe.*

W siatce mamy p punktów; w każdym z nich jeden kierunek jest początkowy — a więc mamy p początkowych kierunków. Dla określenia pozostałych (prócz końców I-ego boku) $p - 2$ punktów należy mieć $2(p - 2) = 2p - 4$ kierunków, a zatem wszystkich niezbędnych kierunków, przyjmując, że na każdem stanowisku początkowy kierunek odpowiada już ustalonemu bokowi,

będzie

$$p + 2p - 4 = 3p\ 4$$

Przy d zaś pomierzonych kierunkach nadliczbowych spostrzeżeń, z których każde tworzy warunek,

będzie

$$W = d - 3p + 4$$

W tem równań figur mamy, jak i w kątowych spostrzeżeniach,

$$F = l - p + 1$$

i równań boków również tyle, ileśmy określili dla spostrzeżeń kątowych, t. j.

$$B = l_1 - 2p + 3.$$

Warunek poziomu przy spostrzeżeniach kierunkowych zawsze jest zachowany. To samo dotyczy warunków sumy i różnicy. Stąd wynika, że przy spostrzeżeniach kierunkowych

$$W = F + B$$

a więc

$$d - 3p + 4 = l - p + 1 + l_1 - 2p + 3$$

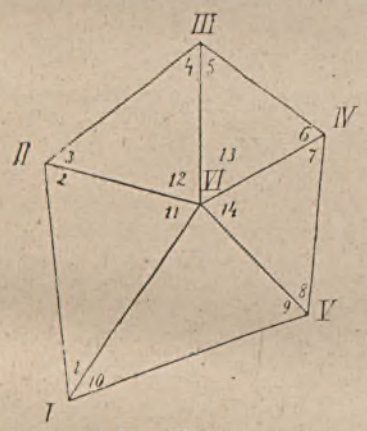
$$d = l + l_1,$$

co się zresztą samo przez się rozumie.

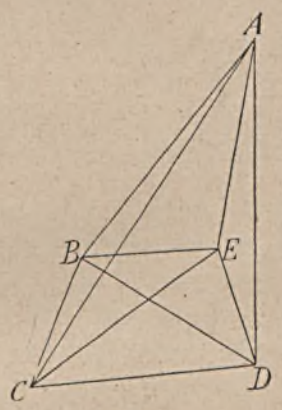
§ 383. Dobór równań warunkowych.

Z wszelkich możliwych niezależnych warunków wybieramy najprostsze; tak więc przy układaniu warunków figur obieramy trójkąty, a nie wielokąty, przy równaniach boku, jeżeli jest wybór, obieramy trójkąty, połączone z ich biegunem, a nie wielokąty.

Ponieważ z twierdzenia Zachariae wynika, że dokładności równań warunkowych boku w czworokącie są odwrotnie proporcjonalne do odległości biegunów do przeciwległych przekątnych, oraz ponieważ błędy obliczenia poprawek są odwrotnie proporcjonalne do wielkości spółczynników tych



Rys. 798.



Rys. 799.

poprawek w równaniach warunkowych, przeto z równań boków wybieramy te niezależne równania, które mieć będą największe spółczynniki, a zatem takie, które zawierają najbardziej ostre kąty.

Tak np., dla rys. 799 najdogodniejszemi czworobokami będą

$A\,B\,C\,E$ o biegunie B

$B\,C\,D\,E$ „ B

$D\,B\,A\,E$ „ E

Podstawami dla biegunów będą Δ-y.

Przykłady na obliczenia ilości równań warunkowych.

I. (Do rys. 798).

Ilość kątów $k = 15$, ilość punktów $p = 6$, ilość dwustronnych kierunków $l = 10$, ilość wszystkich prostych $L = 10$,

ilość wszystkich warunków

$$W = k - 2p + 4 = 15 - 12 + 4 = 7,$$

ilość warunków figur

$$F = l - p + 1 = 10 - 6 + 1 = 5,$$

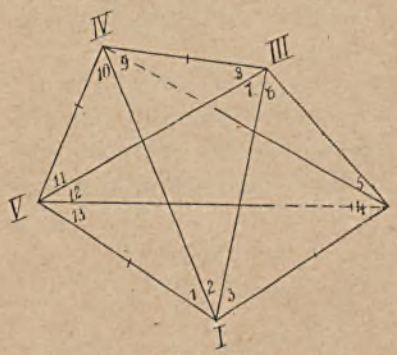
ilość warunków boków

$$B = L - 2p + 3 = 10 - 12 + 3 = 1,$$

ilość warunków poziomu

$$H = 1 \qquad W = F + B + H = 7$$

II (Do rys. 800).



Rys. 800.

$$k = 13$$
$$p = 5$$
$$l = 8$$
$$L = 10$$

$$W = k - 2p + 4 = 13 - 10 + 3 = 7$$
$$F = l - p + 1 = 8 - 5 + 1 = 4$$
$$B = L - 2p + 3 = 10 - 10 + 3 = 3$$
$$W = F + B = 7$$

ROZDZIAŁ XIV.

WYRÓWNANIE TRIANGULACJI NIŻSZYCH RZĘDÓW.

§ 384. Rozwiązanie układu równań warunkowych.

Równania warunkowe sieci trygonometrycznej dzielą się na dwa typy: pierwszy (równania figur poziomu i t. p.) obejmuje równania, w których spółczynniki przy poprawkach są równe jedności, drugi (równania boków i baz) — w którym spółczynnikami są zmiany logarytmów sinusów przy zmianie kątów o 1″.

Zestawiając układ wszystkich niezależnych równań warunkowych, w pierwszym rzędzie wypisywać będziemy równania poprawek o spółczynnikach, równych jedności, pozostałe zaś równania wypisujemy na końcu. Kolejność wypisywania w każdej grupie tych równań uzależniamy od liczby poprawek, wchodzących w skład danego równania; tak więc równania o mniejszej liczbie poprawek poprzedzać będą zwykle równania o większej liczbie poprawek.

W każdym układzie równań warunkowych liczba poprawek n (niewiadomych) jest zawsze większa od liczby q równań; przytem do każdego z poszczególnych równań wchodzi zwykle tylko część poprawek. Jeżeli więc wypisać w każdem równaniu wszystkie poprawki, wchodzące do układu równań, wówczas spółczynnikami wielu poprawek byłoby zero (w tych równaniach, do których nie wchodzą dane poprawki).

Pamiętając o tem, możemy napisać układ równań warunkowych w ogólnej postaci, oznaczając literami $a_1\ a_2\ \ldots\ a_n$ spółczynniki poprawek I równania, literami $b_1\ b_2\ \ldots\ b_n$ — II-ego równania, $c_1\ c_2\ \ldots\ c_n$ — III równania i t. d.

Będzie więc:

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots + a_n v_n + l_1 &= 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \ldots + b_n v_n + l_2 &= 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \ldots + c_n v_n + l_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

$$- - - - - - - - - - - - - - -$$

$$- - - - - - - - - - - - - - -$$

$$q_1 v_1 + q_2 v_2 + q_3 v_3 + \ldots + q_n v_n + l_b = 0$$

Przy q (liczba równań) $< n$ (liczba poprawek) tego układu nie możemy rozwiązać. Wprowadzając jednak warunek $[p v v] = Min.$ dla spostrzeżeń o różnej dokładności lub $[v v] = Min.$ dla jednakowo dokładnych spostrzeżeń, możemy już określić jednoznacznie wielkości poprawek.

Jeżeli teraz równania warunkowe pomnożymy przez nieokreślone narazie czynniki: pierwsze przez $- 2 k_1$, drugie przez $- 2 k_2$ i t. d. (wielkości $k_1 k_2 \ldots$ nazywamy korelatami) i dodamy tak utworzone równania do równania

$$[p v v] = \text{Min.},$$

wówczas otrzymamy funkcję:

$$\begin{aligned} Q = {} & p_1 v_1^2 - 2 k_1 (a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n + l_1) + \\ & p_2 v_2^2 - 2 k_2 (b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n + l_2) + \\ & - - - - - - - - - - - - - \\ & + p_q v_q^2 - 2 k_q (q_1 v_1 + q_2 v_2 + \ldots + q_n v_n + l_q) + \\ & p_{q+1} v_{q+1}^2 + \ldots + p_{n-1} v_{n-1}^2 + p_n v_n^2 = \text{Min.} \end{aligned}$$

Zgrupujmy wyrazy w nawiasach, usuwając z nich poszczególne poprawki:

$$\begin{aligned} Q = {} & p_1 v_1^2 - 2 v_1 (a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \ldots + q_1 k_q) + \\ & + p_2 v_2^2 - 2 v_2 (a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \ldots + q_2 k_q) + \\ & + p_3 v_3^2 - 2 v_3 (a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 + \ldots + q_3 k_q) + \\ & - - - - - - - - - - - - - \\ & + p_q v_q^2 - 2 v_q (a_q k_1 + b_q k_2 + c_q k_3 + \ldots + q_q k_q) + \\ & + p_{q+1} v_{q+1}^2 - 2 v_{q+1} (a_{q+1} k_1 + b_{q+1} k_2 + c_{q+1} k_3 + \ldots + q_{q+1} k_q) + \\ & - - - - - - - - - - - - - \\ & + p_n v_n^2 - 2 v_n (a_n k_1 + b_n k_2 + c_n k_3 + \ldots + q_n k_q) = \text{Min.} \end{aligned}$$

Wypisując kolejno cząstkowe pochodne:

$$\frac{\partial Q}{\partial v_1} = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial v_2} = 0 \ldots \qquad \frac{\partial Q}{\partial v_n} = 0$$

i skracając przez 2, otrzymamy n równań:

$$\begin{aligned} p_1 v_1 - (a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \ldots + q_1 k_q) &= 0 \\ p_2 v_2 - (a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \ldots + q_2 k_q) &= 0 \\ p_3 v_3 - (a_3 k_1 + b_3 k_1 + c_3 k_3 + \ldots + q_3 k_q) &= 0 \end{aligned}$$

— — — — — — — — — —

$$p_n v_n - (a_n k_1 + b_n k_2 + c_n k_3 + \ldots + q_n k_q) = 0$$

Układ (1) daje q równań o n niewiadomych, układ (2) wprowadza nowe q niewiadomych $k_1 k_2 \ldots k_q$, związanych n równaniami; mamy zatem w obydwu układach równań $n + q$ niewiadomych w $q + n$ równaniach. Rozwiązanie będzie więc jednoznaczne.

Z (2) układu wynika:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{a_1}{p_1} k_1 + \frac{b_1}{p_1} k_2 + \frac{c_1}{p_1} k_3 + \ldots + \frac{q_1}{p_1} k_q \\
v_2 &= \frac{a_2}{p_2} k_1 + \frac{b_2}{p_2} k_2 + \frac{c_2}{p_2} k_3 + \ldots + \frac{q_2}{p_2} k_q \qquad (3) \\
v_3 &= \frac{a_3}{p_3} k_1 + \frac{b_3}{p_3} k_2 + \frac{c_3}{p_3} k_3 + \ldots + \frac{q_3}{p_3} k_q \\
&\text{— — — — — — — — — — — —} \\
&\text{— — — — — — — — — — — —} \\
v_b &= \frac{a_n}{p_n} k_1 + \frac{b_n}{p_n} k_2 + \frac{c_n}{p_n} k_3 + \ldots + \frac{q_n}{p_n} k_q
\end{aligned}$$

Podstawiamy otrzymane wyrazy do I równania grupy (1) równań:

$$\begin{aligned}
a_1 v_1 &= \frac{a_1 a_1}{p_1} k_1 + \frac{a_1 b_1}{p_1} k_2 + \frac{a_1 c_1}{p_1} k_3 + \ldots + \frac{a_1 q_1}{p_1} k_q \\
a_2 v_2 &= \frac{a_2 a_2}{p_2} k_1 + \frac{a_2 b_2}{p_2} k_2 + \frac{a_2 c_2}{p_2} k_3 + \ldots + \frac{a_2 q_2}{p_2} k_q \\
a_3 v_3 &= \frac{a_3 a_3}{p_3} k_1 + \frac{a_3 b_3}{p_3} k_2 + \frac{a_3 c_3}{p_3} k_3 + \ldots + \frac{a_3 q_3}{p_3} k_q \\
&\text{— — — — — — — — — — — — — —} \\
&\text{— — — — — — — — — — — — — —} \\
a_n v_n &= \frac{a_n a_n}{p_n} k_1 + \frac{a_n b_n}{p_n} k_2 + \frac{a_n c_n}{p_n} k_3 + \ldots + \frac{a_n q_n}{p_n} k_q
\end{aligned}$$

$$l_1 = l_1,$$

dodając, otrzymamy

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n + l_1 = \left[\frac{a\,a}{p}\right] k_1 + \left[\frac{a\,b}{p}\right] k_2 +$$

$$+ \left[\frac{a\,c}{p}\right] k_3 + \ldots + \left[\frac{a\,q}{p}\right] k_q + l_1 = 0$$

Postępując podobnie ze wszystkiemi q równaniami układu (2), otrzymamy zamiast nich układ równań normalnych korelat:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{a\,a}{p}\right] k_1 + \left[\frac{a\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{a\,c}{p}\right] k_3 + \ldots + \left[\frac{a\,q}{p}\right] k_q + l_1 = 0 \\
\left[\frac{a\,b}{p}\right] k_1 + \left[\frac{b\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{b\,c}{p}\right] k_3 + \ldots + \left[\frac{a\,q}{p}\right] k_q + l_2 = 0 \\
\left[\frac{a\,c}{p}\right] k_1 + \left[\frac{b\,c}{p}\right] k_2 + \left[\frac{c\,c}{p}\right] k_3 + \ldots + \left[\frac{c\,q}{p}\right] k_q + l_3 = 0 \qquad (4) \\
- - - - - - - - - - - - - - - \\
- - - - - - - - - - - - - - - \\
\left[\frac{a\,q}{p}\right] k_1 = \left[\frac{b\,q}{p}\right] k_2 + \left[\frac{c\,q}{p}\right] k_3 + \ldots + \left[\frac{q\,q}{p}\right] k_q + l_q = 0
\end{aligned}$$

Równań tych mamy q o q niewiadomych $k_1\ k_2\ \ldots\ k_q$.

Stąd określić już możemy korelaty $k_1\ k_2\ \ldots\ k_q$ i, podstawiając obliczone ich wielkości do układu (3), otrzymamy wielkości wszystkich poprawek $v_1\ v_2\ v_n$.

Obliczenie upraszcza się znacznie dla spostrzeżeń o jednakowej dokładności, gdyż wówczas

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$$

i układ (3) przepiszemy, jako:

$$\begin{aligned}
v_1 &= a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \ldots + q_1 k_q \\
v_2 &= a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \ldots + q_2 k_q \\
v_3 &= c_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 + \ldots + q_3 k_q \qquad 3\,a \\
&- - - - - - - - - - \\
&- - - - - - - - - - \\
v_n &= a_n k_1 + b_n k_2 + c_n k_3 + \ldots + q_n k_q
\end{aligned}$$

Równania zaś normalne korelat układu (4) przepiszemy jako:

$$\begin{aligned}
[aa]\, k_1 + [ab]\, k_2 + [ac]\, k_3 + \ldots + [aq]\, k_q + l_1 = 0 \\
[ab]\, k_1 + [bb]\, k_2 + [bc]\, k_3 + \ldots + [bq]\, k_q + l_2 = 0 \\
[ac]\, k_1 + [bc]\, k_2 + [cc]\, k_3 + \ldots + [cq]\, k_q + l_3 = 0 \qquad 4\,a \\
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - \\
- - - - - - - - - - - - - - - - - - -
\end{aligned}$$

$$[aq]\ k_1 + [bq]\ k_2 + [cq]\ k_3 + \ldots + [qq]\ k_q + l_q = 0$$

W praktyce przechodzimy od układu (1) do (4)-ego, a po określeniu korelat przystępujemy do obliczenia poprawek.

§ 385. Rozwiązanie układu równań normalnych.

Ponieważ liczba równań normalnych równa się liczbie niewiadomych, przeto układ równań normalnych można rozwiązywać wszelkiemi metodami, stosowanemi przy rozwiązywaniu równań I stopnia.

Ze względu jednak na symetrję spółczynników i konieczność sprawdzania rachunku już w toku pracy, stosujemy metodę rugowania niewiadomych z równań normalnych, zwaną algorytmem Gaussa.

Rozpatrzmy tę metodę w odniesieniu do trzech równań normalnych, gdyż przy większej ich liczbie postępowanie jest analogiczne.

$$\begin{aligned} [aa]\ k_1 + [ab]\ k_2 + [ac]\ k_3 + l_1 &= 0 \\ [ab]\ k_1 + [bb]\ k_2 + [bc]\ k_3 + l_2 &= 0 \qquad (1) \\ [ac]\ k_1 + [bc]\ k_2 + [cc]\ k_3 + l_3 &= 0 \end{aligned}$$

Z I-ego równania wynika:

$$k_1 = -\frac{[ab]}{[aa]}\,k_2 - \frac{[ac]}{[aa]}\,k_3 - \frac{l_1}{[aa]} \qquad (a)$$

Wyrugujmy k_1 z drugiego i trzeciego równania, podstawiając obliczone k_1 do tych równań, a otrzymamy:

$$\left\{[bb] - \frac{[ab]\ [ab]}{[aa]}\right\} k_2 + \left\{[bc] - \frac{[ab]\ [ac]}{[aa]}\right\} k_3 + \left\{l_2 - \frac{[ab]\ l_1}{[aa]}\right\} = 0$$

$$\left\{[bc] - \frac{[ab]\ [ac]}{[aa]}\right\} k_2 + \left\{[cc] - \frac{[ac]\ [ac]}{[aa]}\right\} k_3 + \left\{l_3 - \frac{[ac]\ l_1}{[aa]}\right\} = 0$$

Wprowadzając symbole Gaussa:

$$[bb\,.\,1] = [bb] - \frac{[ab]\ [ab]}{[aa]}$$

$$[bc\,.\,1] = [bc] - \frac{[ab]\ [ac]}{[aa]}$$

$$[cc\,.\,1] = [cc] - \frac{[ac]\ [ac]}{[aa]}$$

Oznaczmy analogicznie

$$[l_2\,.\,1] = l_2 - \frac{[ab]\ l_1}{[aa]}$$

$$[l_3 \,.\, 1] = l_3 - \frac{[a\,c]\; l_1}{[a\,a]}$$

Wówczas dwa zredukowane równania przepiszemy w postaci:

$$\begin{aligned} [b\,b \,.\, 1]\; k_2 + [b\,c \,.\, 1]\; k_3 + [l_2 \,.\, 1] &= 0 \\ [b\,c \,.\, 1]\; k_2 + [c\,c \,.\, 1]\; k_3 + [l_3 \,.\, 1] &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Z I-ego równania określmy k_2 i podstawmy do II-ego:

$$k_2 = -\frac{[b\,c \,.\, 1]}{[b\,b \,.\, 1]}\, k_3 - \frac{[l_2 \,.\, 1]}{[b\,b \,.\, 1]} \qquad (b)$$

$$\left\{[c\,c \,.\, 1] - \frac{[b\,c \,.\, 1]\;[b\,c \,.\, 1]}{[b\,b \,.\, 1]}\right\} k_3 + \left\{[l_3 \,.\, 1] - \frac{[b\,c \,.\, 1]\;[l_2 \,.\, 1]}{[b\,b \,.\, 1]}\right\} = 0$$

I wprowadzając symbole:

$$[c\,c \,.\, 2] = [c\,c \,.\, 1] - \frac{[b\,c \,.\, 1]\;[b\,c \,.\, 1]}{[b\,b \,.\, 1]}$$

$$[l_3 \,.\, 2] = [l_3 \,.\, 1] - \frac{[b\,c \,.\, 1]\;[l_2 \,.\, 1]}{[b\,b \,.\, 1]}$$

otrzymamy

$$[c\,c \,.\, 2]\; k_3 + [l_3 \,.\, 2] = 0 \qquad (3)$$

Stąd określimy k_3, podstawimy do równania (b) dla określenia k_2 wreszcie z (a) obliczymy k_1.

W wypadku czterech równań normalnych:

$$\begin{aligned} [a\,a]\; k_1 + [a\,b]\; k_2 + [a\,c]\; k_3 + [a\,d]\; k_4 + l_1 &= 0 \\ [a\,b]\; k_1 + [b\,b]\; k_2 + [b\,c]\; k_3 + [b\,d]\; k_4 + l_2 &= 0 \\ [a\,c]\; k_1 + [b\,c]\; k_2 + [c\,c]\; k_3 + [c\,d]\; k_4 + l_3 &= 0 \\ [a\,d]\; k_1 + [b\,d]\; k_2 + [c\,d]\; k_3 + [d\,d]\; k_4 + l_4 &= 0 \end{aligned}$$

przechodzimy do układu zredukowanych równań normalnych:

$$\begin{aligned} [a\,a]\; k_1 + [a\,b]\; k_2 + [a\,c]\; k_3 + [a\,d]\; k_4 + l_1 &= 0 \\ [b\,b.1]\; k_2 + [b\,c.1]\; k_3 + [b\,d.1]\; k_4 + [l_2.1] &= 0 \\ [c\,c.2]\; k_3 + [c\,d.2]\; k_4 + [l_3.2] &= 0 \\ [d\,d.2]\; k_4 + [l_4.2] &= 0 \end{aligned}$$

w których symbole przy k_2, k_3, k_4 są wynikami rugowania poszczególnych niewiadomych i oznaczają:

$$[b\,d\,.\,1] = [b\,d] - \frac{[a\,b]\ [a\,d]}{[a\,a]}$$

$$[c\,c\,.\,2] = [c\,c\,.\,1] - \frac{[b\,c\,.\,1]\ [b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]} \qquad [l_3\,.\,2] = [l_3\,.\,1] - \frac{[b\,c\,.\,1]\ [l_2\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}$$

$$[c\,d\,.\,2] = [c\,d\,.\,1] - \frac{[b\,c\,.\,1]\ [b\,d\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]} \qquad [l_4\,.\,3] = [l_4\,.\,2] - \frac{[c\,d\,.\,2]\ [l_3\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}$$

$$[d\,d\,.\,3] = [d\,d\,.\,2] - \frac{[c\,d\,.\,2]\ [c\,d\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}$$

Jeżeli cyfry przy połączeniu dwu liter w klamrach nazwiemy wskaźnikami, wówczas każdy symbol typu, np. $[c\,d\,.\,2]$, równa się różnicy dwu wyrazów, z których:

1) odjemna jest tym samym symbolem o wskaźniku o 1 mniejszym ($[c\,d\,.\,1]$), zaś

2) odjemnik jest ułamkiem, w którym wskaźniki są wskaźnikiem odjemnej;

a) litery symbolu mianownika składaja się z dwu takich jednakowych liter, których miejsce w alfabecie, licząc od początku, odpowiada wskaźnikowi rozwijanego symbolu $[c\,d\,.\,2]$ (liczba 2 wywołuje zastosowanie drugiej litery alfabetu, t. j. litery *b*);

b) licznik składa się z dwu symboli, będących połączeniem liter mianownika $[b\,b\,.\,1]$ z literami rozwijanego symbolu *c* i *d*.

Co się tyczy wyrazów wolnych, jak np. $l_4\,.\,3$, czytanych, „*l* ze znaczkiem cztery i wskaźnikiem trzy“, to również symbol ten odpowiada różnicy, przytem:

1) wskaźniki odjemnej i odjemnika są o 1 mniejsze od wskaźnika rozwijanego symbolu;

2) odjemna zachowuje znaczek rozwijanego symbolu;

3) odjemnik jest ułamkiem, którego

a) mianownik składa się z jednakowych liter, których kolejność od początku alfabetu wyznacza wskaźnik rozwijanego symbolu (np. 3 odpowie literze *c*);

b) licznik składa się z dwu wyrazów:

litery pierwszego są połączeniem liter alfabetu w kolejności, wskazanej przez wskaźnik i znaczek rozwijanego symbolu (np. $[l_3\,.\,2]$ pociąga za sobą litery *b c*);

drugi symbol jest odjemną o zmniejszonym o jedność znaczku.

Analogicznie tworzymy układ zredukowanych równań normalnych w wypadku większej ich liczby.

§ 386. Kontrole rachunku.

A. *Kontrola sumowa.*

Po utworzeniu układu równań warunkowych tworzymy sumy spółczynników przy każdej poprawce, t. j. sumy w kierunku pionowym z układu równań warunkowych:

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 + c_1 + \ldots + q_1 &= s_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 + \ldots + q_2 &= s_2 \qquad (1) \\ - - - - - - - - - - - - \\ - - - - - - - - - - - - \\ a_n + b_n + c_n + \ldots + q_n &= s_n \end{aligned}$$

Jeżeli pierwsze równanie pomnożymy przez $\frac{a_1}{p_1}$, drugie przez $\frac{a_2}{p_2}$ i ... n-te przez $\frac{a_n}{p_n}$,

wówczas:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 a_1}{p_1} + \frac{a_1 b_1}{p_1} + \frac{a_1 c_1}{p_1} + \ldots + \frac{a_1 q_1}{p_1} &= \frac{a_1 s_1}{p_1} \\ \frac{a_2 a_2}{p_2} + \frac{a_2 b_2}{p_2} + \frac{a_2 c_2}{p_2} + \ldots + \frac{a_2 q_2}{p_2} &= \frac{a_2 s_2}{p_2} \\ - \\ - \\ \frac{a_n a_n}{p_n} + \frac{a_n b_n}{p_n} + \frac{a_n c_n}{p_n} + \ldots + \frac{a_n q_n}{p_n} + \frac{a_n s_n}{p_n} & \end{aligned}$$

dodając, otrzymamy:

$$\left[\frac{aa}{p}\right] + \left[\frac{ab}{p}\right] + \left[\frac{ac}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{aq}{p}\right] = \left[\frac{as}{p}\right]$$

Mnożąc równania (1)-ego układu kolejno każde:

1) przez ilorazy

$$\frac{b_1}{p_1}, \frac{b_2}{p_2} \ldots \frac{b_n}{p_n}$$

(spółczynników drugich poprawek przez ich wagi) i dodając,

2) przez ilorazy spółczynników c trzecich poprawek przez ich wagi $\frac{c}{p}$ i dodając, i t. d. aż do ostatnich spółczynników, analogicznie do I-ego wyniku, otrzymamy cały ich układ:

$$\left[\frac{aa}{p}\right] + \left[\frac{ab}{p}\right] + \left[\frac{ac}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{aq}{p}\right] = \left[\frac{as}{p}\right]$$

$$\left[\frac{ab}{p}\right] + \left[\frac{bb}{p}\right] + \left[\frac{bc}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{bq}{p}\right] = \left[\frac{bs}{p}\right]$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\left[\frac{aq}{p}\right] + \left[\frac{bq}{p}\right] + \left[\frac{cq}{p}\right] + \ldots + \left[\frac{qq}{p}\right] = \left[\frac{qs}{p}\right]$$

Wyrazy w prawej części równań, obliczane przy rozwiązywaniu równań warunkowych, dają kontrolę prawidłowości obliczenia spółczynników równań normalnych. W wypadku jednakowo dokładnych spostrzeżeń wagi odpadają. Kontrole sumowe zredukowanych równań normalnych nie obejmują wyrazów wolnych.

B. *Kontrola obliczenia poprawek.*

Mnożąc każde równanie układu (3)-ego § 383 przez iloczyn danej poprawki i jej wagi, otrzymujemy:

$$p_1 v_1^2 = a_1 v_1 k_1 + b_1 v_1 k_2 + \ldots + q_1 v_1 k_q$$

$$p_2 v_2^2 = a_2 v_2 k_1 + b_2 v_2 k_2 + \ldots + q_2 v_2 k_q$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\underline{p_n v_n^2 = a_n v_n k_1 + b_n v_n k_2 + \ldots + q_n v_n k_q}$$

i, dodając te równania, otrzymujemy

$$[pvv] = [av] k_1 + [bv] k_2 + \ldots + [qv] k_q$$

lecz

$$[av] = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n = -l_1,$$

$$[bv] = -l_2 \ldots [qv] = -l_q,$$

stąd

$$[pvv] = -l_1 k_1 - l_2 k_2 - \ldots - l_q k_q,$$

więc

$$\underline{[pvv] = -[kl]}$$

w wypadku spostrzeżeń różnej dokładności i

$$[vv] = -[kl]$$

przy jednakowo dokładnych spostrzeżeniach.

Jeżeli w toku rachunku kontrole sumowe sprawdzają się, po obliczeniu zaś poprawek sprawdza się $[pvv] = -[kl]$, wówczas cały rachunek, począwszy od ukończenia ułożenia równań warunkowych, jest prawidłowo wykonany.

Gdy jednak poprawione kąty nie będą odpowiadać warunkom geometrycznym, błędu należy szukać w ułożeniu równań warunkowych. Z tego

względu dla uniknięcia kosztów przeróbek ułożenie równań warunkowych winno być dokonane dwukrotnie celem zestawienia wyników i usunięcia rozbieżności.

§ 387. Schemat Gaussa w zastosowaniu do równań normalnych korelat.

W § 341 str. 785 podaliśmy sposób użycia schematu Gaussa, załączonego na str. 787.

W wypadku równań normalnych korelat ulegają zmianie wyrazy kolumny 5-ej (przy 4 równaniach normalnych). Mianowicie:

symbole podane w schemacie	należy oznaczyć symbolami:
$[a\,l]$	l_1
$[b_1 l]$	l_2
$[bl\,.\,1]$	$[l_2\,.\,1]$
$[c\,l]$	l_3
$[c\,l\,.\,1]$	$[l_3\,.\,1]$
$[c_1 l\,.\,2]$	$[l_3\,.\,2]$
$[d\,l]$	l_4
$[d\,l\,.\,1]$	$[l_4\,.\,1]$
$[d_1 l\,.\,2]$	$[l_4\,.\,2]$
$[d\,l\,.\,3]$	$[l_4\,.\,3]$

Ażeby jednak nie przeciążać pamięci znaczeniem symbolów, odpowiadających wyrazom wolnym jak np. $[l_4\,.\,2]$ redukowanych równań normalnych, należy przyjąć dla stosowania schematu Gaussa (str. 787), że

$$l_1 = [a\,l] \qquad l_2 = [b\,l] \qquad l_3 = [c\,l] \qquad l_4 = [d\,l]$$

przytem równości te mają wyłącznie symboliczne znaczenie, i nie należy w wypadku równań warunkowych przypuszczać, że np. pierwsze równanie oznacza:

$$l_1 = a_1\,l_1 + a_2\,l_2 + \ldots$$

gdyż takiego równania wogóle utworzyć nie można z układu równań warunkowych dla tej prostej przyczyny, iż liczba wyrazów l jest mniejsza od liczby poprawek v.

Następnie: przy rozwiązywaniu równań warunkowych wiersze od 17 do 25 schematu należy wykreślić.

Wyrazy schematu, podane pod literami A, B, C i D ulegają tej tylko zmianie, że zamiast niewiadomych x, y, z i u wejdą korelaty k_1, k_2, k_3 i k_4.

§ 388. Konieczność doboru niezależnych równań warunkowych.

Przypuśćmy, że mamy układ dwu niezależnych równań warunkowych:

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 \qquad\qquad + l_1 &= 0 \\ b_4 v_4 + b_5 v_5 + b_5 v_5 + l_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

w których

$$a_4 = a_5 = a_6 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$$

Równaniami normalnemi korelat będą:

$$\begin{aligned} [aa]\, k_1 \qquad + l_1 &= 0 \\ [bb]\, k_2 + l_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Przypuśćmy dalej, że do układu równań warunkowych wprowadziliśmy takie równanie, które jest wynikiem np. sumą dwu poprzednich; otrzymaliśmy układ trzech równań warunkowych:

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 \qquad\qquad + l_1 &= 0 \\ b_4 v_4 + b_5 v_5 + b_6 v_6 + l_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + b_4 v_4 + b_5 v_5 + b_6 v_6 + (l_1 + l_2) = 0$$

Równaniami normalnemi byłyby równania:

$$\begin{aligned} [aa]\, k_1 \qquad + [aa]\, k_3 + l_1 &= 0 \\ [bb]\, k_2 + [bb]\, k_3 + l_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

$$[aa]\, k_1 + [bb]\, k_2 + ([aa] + [bb])\, k_3 + (l_1 + l_2) = 0$$

Jak stąd widzimy trzecie równanie normalne jest sumą dwu pierwszych równań normalnych, a więc jest w ten sam sposób zbudowane z dwu pierwszych równań, w jaki trzecie równanie warunkowe zostało zbudowane z dwu pierwszych.

Przy rozwiązaniu takiego układu dojdziemy do równania

$$0 = 0$$

Taki wypadek zajdzie nietylko wtedy, gdy z równań warunkowych I i II utworzymy III dodające pierwsze dwa, t. j. tworząc

$$\text{III} = \text{I} + \text{II}$$

lecz i wtedy, gdy przy stałych m i n III równanie utworzymy z pierwszych dwu w sposób następujący:

$$\text{III} = m\ \text{I} + n\ \text{II}$$

lub jakikolwiek inny, przy których III równanie będzie pewnem połączeniem równań I i II.

Stąd wniosek: należy tworzyć układ równań warunkowych w taki sposób, by żadne z równań nie wynikało tożsamościowo z innych, gdyż

inaczej dojdziemy albo do zupełnie nieokreślonego rozwiązania, albo też zamiast równania np.:

$$o\ k_n + o = 0$$

wskutek zaokrągleń otrzymamy np.:

$$0{,}003\ k_n + 0{,}001 = 0$$

co doprowadzi do zupełnie wadliwych wyników. Należy więc przed ułożeniem równań warunkowych obliczyć ich liczbę i wtedy dobierać niezależne wzajemnie równania.

§ 389. Średni błąd spostrzeżenia o jednostce wagi ze spostrzeżeń warunkowych.

Wyniki bezpośrednich spostrzeżeń, użyte do wyrównania, mogą mieć określone średnie błędy przed wyrównaniem albo 1) na podstawie błędów pozornych z każdej grupy spostrzeżeń oddzielnie, albo też 2) na podstawie założonego à priori średniego błędu pojedyńczego spostrzeżenia. Po wyrównaniu mamy cały szereg poprawek, które również charakteryzują dokładność wyników spostrzeżeń bezpośrednich, przytem poprawki uzyskane zostały dla całego zespołu tych wyników, a więc charakteryzują ten zespół.

Przypuśćmy, że mamy układ q równań warunkowych o n poprawkach. Jeżeli $n - q$ poprawek, odpowiednio obranych, obierzemy za niewiadome x, y, z ..., wówczas te $n - q$ poprawek v wyrazimy wprost przez pojedyńcze niewiadome, np.:

$$v_1 = x$$

$$v_4 = y \qquad \text{i t. d.}$$

pozostałe zaś q poprawek dadzą się wówczas przedstawić, jako funkcje linjowe tych niewiadomych, np.:

$$v_2 = -x - y - l_1$$

W taki sposób otrzymamy układ równań błędów, który poznaliśmy w dziale o spostrzeżeniach pośrednich (§ 345). W mianowniku wzoru 77-ego mieliśmy różnicę między liczbą spostrzeżeń, a liczbą niewiadomych. W naszym wypadku liczba spostrzeżeń wynosi n, liczba niewiadomych $n - q$, wskutek czego wzór 77-y na średni błąd spostrzeżenia o jednostce wagi przekształci się na:

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{n-(n-q)}} = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{q}}$$

dla spostrzeżeń o różnej dokładności, oraz

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[v\,v]}{q}}$$

dla spostrzeżeń o jednakowej dokładności.

§ 390. Wyrównanie trójkąta.

A. Pomierzono w Δ-cie jednakowo dokładnie kąty:

$$\begin{aligned} 1 &= 57^0\ 49'\ 20'' \\ 2 &= 77^0\ 34'\ 25'' \quad \text{Wyrównać pomiar.} \\ 3 &= 44^0\ 36'\ 27'' \\ \hline s_{pr} &= 180^0\ 0'\ 12'' \end{aligned}$$

Wyraz wolny równania warunkowego

$$l = s_{pr} - 180^0 = 12'' \quad \text{patrz § 377.}$$

Równanie warunkowe.

$$v_1 + v_2 + v_3 + 12 = 0.$$

Przy jednem równaniu warunkowem jest oczywiście jedno równanie normalne. Nasze równanie warunkowe w ogólnej postaci jest równaniem:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + l = 0 \text{ patrz § 384}$$

a stąd otrzymujemy równanie normalne:

$$[a\,a]\ k + l = 0$$

ponieważ zaś

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1$$

więc

$$[a\,a] = 3$$

a stąd

$$3\,k + 12 = 0 \qquad k = -4.$$

Poprawka:

$v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \ldots$ (patrz § 383) w naszym wypadku będzie równa

$$v_1 = a_1 k = -4''$$

gdyż $b_1 = c_1 = 0$ (drugiego równania warunkowego niema).

Podobnie

$$v_2 = a_2 k = -4''$$
$$v_3 = a_3 k = -4''.$$

Sprawdzenie:

$$[v\,v] = -[k\,l] \quad \text{patrz § 385 p. B.}$$
$$48 = -12 \times (-4) = +48.$$

Poprawione kąty:

$$\begin{aligned} 1 + v_1 &= 57^0\ 49'\ 16'' \\ 2 + v_2 &= 77^0\ 34'\ 21'' \\ 3 + v_3 &= 44^0\ 36'\ 23'' \\ \hline s &= 180^0\ 0'\ 0'' \end{aligned}$$

B. Te same pomierzone kąty otrzymano: 1-y z 3 repetycyj, 2-i z 4-ch repetycyj, 3-i z dwu.

Za wagi kątów przyjmujemy:

$$p_1 = 3, \quad p_2 = 4, \quad p_3 = 2.$$

Równanie warunkowe:

$$v_1 + v_2 + v_3 + 12 = 0.$$

Równanie normalne:

$$\left[\frac{a\,a}{p}\right] k + 12 = 0 \qquad \text{patrz § 384}$$

lecz

$$\left[\frac{a\,a}{p}\right] = \frac{a_1}{p_1} + \frac{a_2}{p_2} + \frac{a_3}{p_3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{13}{12};$$

$$k = -\,11{,}08$$

$$v_1 = \frac{a_1}{p_1}\,k = -\,\frac{1}{3}\,11{,}08 = -\,3'',69$$

$$v_2 = \frac{a_2}{p_2}\,k = -\,\frac{1}{4}\,11{,}08 = -\,2\,,77$$

$$v_3 = \frac{a_3}{p_3}\,k = -\,\frac{1}{2}\,11{,}08 = -\,5\,,54$$

$[v] = -\,12'',1$ (różnica $0'',1$ wywołana jest zaokrągleniem k i v).
Sprawdzenie

$$[p\,v\,v] = -\,[k\,l];$$

$$[p\,v\,v] = p_1\,v_1^2 + p_2\,v_2^2 + p_3\,v_3^2 = 133.$$

$$-\,[k\,l] = 133.$$

§ 391. Wyrównanie czworoboku geodezyjnego (skrócone).

W czworoboku geodezyjnym mamy trzy równania figur i jednoboku. Ilość równań określimy z równań:

$$W = k - 2\,p + 4$$

$$F = l_c - p + 1$$

$$B = l - 2\,p + 3$$

ponieważ:

ilość kątów $k = 8$

ilość punktów $p = 4$

ilość prostych dwustronnych $l_c = 6$

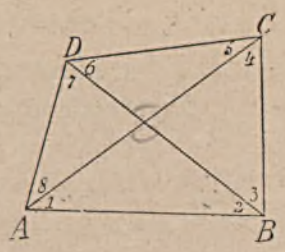
ilość wszystkich celowych $l = 6$

stąd:

liczba wszystkich równań $W = 4$

liczba równań figur $F = 3$

liczba równań boków $B = 1$



Rys. 801.

Zwykle obieramy trzy trójkąty dla utworzenia równań figur. Jeżeli jednak chodzi o oszczędzenie czasu przy ścisłem wyrównaniu, wówczas za trzy warunki figur obierzemy:

1) cały czworobok $A\,B\,C\,D$,

2) zósemkowany czworobok $A\,B\,D\,C$ i

3) zósemkowany czworobok $A\,D\,B\,C$.

Warunkami zósemkowanych czworoboków są: dla $A\,B\,D\,C$—równość sum kątów $(1 + 2)$ oraz $(5 + 6)$, dla czworoboku zaś $A\,D\,B\,C$ równość sum $(3 + 4)$ oraz $(7 + 8)$.

Tak więc równaniem figury $A\,B\,D\,C$, w którem literami v_1, v_2,.... oznaczymy określane poprawki kątów, będzie:

$$1 + v_1 + 2 + v_2 - 5 - v_5 - 6 - v_6 = 0$$

skąd:

$$v_1 + v_2 - v_5 - v_6 + l_2 = 0 \qquad (2)$$

gdzie

$$l_2 = 1 + 2 - 5 - 6$$

podobnie:

$$v_3 + v_4 - v_7 - v_8 + l_3 = 0 \qquad (3)$$

gdzie

$$l_3 = 3 + 4 - 7 - 8$$

Gdy do równań (2) i (3) dołączymy równanie sumy kątów czworoboku oraz warunek boku, ułożony dla bieguna, za który obierzemy punkt przecięcia się przekątnych czworoboku, wówczas otrzymamy cały układ równań warunkowych:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + l_1 &= 0 \\ v_1 + v_2 \qquad\quad - v_5 - v_6 \qquad\quad + l_2 &= 0 \qquad (4) \\ v_3 + v_4 \qquad\quad - v_7 - v_8 + l_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$r_1 v_1 - r_2 v_2 + r_3 v_3 - r_4 v_4 + r_5 v_5 - r_6 v_6 + r_7 v_7 - r_8 v_8 + l_4 = 0$$

Skąd równaniami normalnemi korelat będą równania:

$$\begin{aligned} 8\,k_1 \qquad\quad + R_1\,k_4 + l_1 &= 0 \\ 4\,k_2 \qquad\quad + R_2\,k_4 + l_2 &= 0 \\ 4\,k_3 \qquad\quad + R_3\,k_4 + l_3 &= 0 \qquad (5) \\ R_1\,k_1 + R_2\,k_2 + R_3\,k_3 + [r\,r]\,k_4\,l_4 &= 0 \end{aligned}$$

W układzie tym spółczynniki R oznaczają:

$$R_1 = [r] = r_1 - r_2 + r_3 - r_4 + r_5 - r_6 + r_7 - r_8$$

$$R_2 = r_1 - r_2 - r_5 + r_6$$
$$R_3 = r_3 - r_4 - r_7 + r_8$$

Z równań (5)-ych określamy:

$$k_1 = -\frac{R_1}{8} k_4 - \frac{l_1}{8}$$
$$k_2 = -\frac{R_2}{4} k_4 - \frac{l_2}{4} \qquad (6)$$
$$k_2 = -\frac{R_3}{4} k_4 - \frac{l_3}{4}$$

co wstawiając do ostatniego równania normalnego, otrzymamy:

$$\left\{[rr] - \frac{R^2_1}{8} - \frac{R^2_2}{4} - \frac{R^2_3}{4}\right\} k_4 + \left\{l_4 - \frac{R_1 l_1}{8} - \frac{R_2 l_2}{4} - \frac{R_3 l_3}{4}\right)$$

lub oznaczając wyrazy w nawiasach literami R_u i L_u, otrzymamy

$$k_4 = -\frac{L_u}{R_u}$$

z (4)-ego zaś — pozostałe korelaty.

Obliczmy poprawki:

$$v_1 = k_1 + k_2 + r_1 k_4 \qquad v_5 = k_1 - k_2 + r_5 k_4$$
$$v_2 = k_1 + k_2 - r_2 k_4 \qquad v_6 = k_1 - k_2 - r_6 k_4$$
$$v_3 = k_1 + k_3 + r_3 k_4 \qquad v_7 = k_1 - k_3 + r_7 k_4$$
$$v_4 = k_1 + k_3 - r_4 k_4 \qquad v_8 = k_1 - k_3 - r_8 k_4$$

Sprawdzeniem rachunku będzie:

$$[vv] = -[kl].$$

PRZYKŁAD.

	Kąty		
1 =	34°	35′	25″
2 =	41	17	34
3 =	55	58	2
4 =	48	9	2
5 =	29	51	26
6 =	46	1	27
7 =	66	40	24
8 =	37	26	41
s =	360°	0′	1″

Równania warunkowe.

$$(1)\qquad v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + v_8 + 1 = 0$$

$$v_1 + v_2 \qquad - v_5 - v_6 \qquad + 6 = 0$$

$$v_3 + v_4 \qquad - v_7 - v_8 - 1 = 0$$

$$3{,}6\,v_1 - 2{,}4\,v_2 + 1{,}4\,v_3 - 1{,}9\,v_4 + 3{,}7\,v_5 - 2{,}0\,v_6 + 0{,}9\,v_7 - 2{,}7\,v_8 - 7{,}2 = 0$$

Równania normalne:

$$8\,k_1 \qquad + 0{,}6\,k_4 + 1 = 0$$

$$4\,k_2 \qquad - 0{,}5\,k_4 + 6 = 0$$

$$4\,k_3 + 1{,}3\,k_4 - 1 = 0$$

$$0{,}6\,k_1 - 0{,}5\,k_2 + 1{,}3\,k_3 + 50{,}1\,k_4 - 7{,}2 = 0 \qquad (2)$$

Obliczenie L_4 i R_4

$$R_1 = 0{,}6 \qquad R_2 = -0{,}5 \qquad R_3 = +1{,}3$$

$$l_4 = -7.2 \qquad [rr] = 50{,}1$$

$$-\frac{R_1 l_1}{8} = -0{,}075 \qquad -\frac{R^2_1}{8} = -0{,}045$$

$$-\frac{R_2 l_2}{4} = -0{,}75 \qquad -\frac{R^2_2}{4} = -0{,}062$$

$$-\frac{R_3 l_3}{4} = +0{,}325 \qquad -\frac{R^2_3}{4} = -0{,}425$$

$$L_4 = -7{,}70 \qquad R_4 = 49{,}568 \qquad (3)$$

Korelaty:

$$k_4 = -\frac{L_4}{R_4} = +0{,}155$$

$$k_1 = -\frac{R_1}{8}k_4 - \frac{l_1}{8} = -0{,}137$$

$$k_2 = -\frac{R_2}{4}k_4 - \frac{l_2}{4} = -1{,}481$$

$$k_3 = -\frac{R_3}{4}k_4 - \frac{l_3}{4} = +0{,}200 \qquad (4)$$

Poprawki.

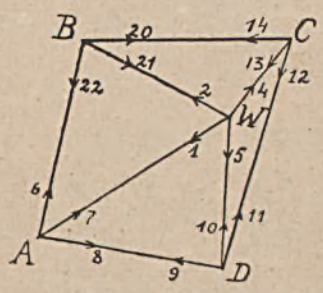
$$v_1 = -1{,}06 \qquad v_5 = +1{,}89$$

$$v_2 = -1{,}99 \qquad v_6 = +1{,}09$$

$$v_3 = +0{,}27 \qquad v_7 = -0{,}20$$

$$v_4 = -0{,}23 \qquad v_8 = -0{,}76 \qquad (5)$$

§ 392. Wyrównanie układu centralnego w wypadku spostrzeżeń kierunkowych.



Rys. 802.

PRZYKŁAD.

W rozpatrywanym układzie brak kierunków 3, 15, 16, 17, 18 i 19-ego.

Układamy tabelkę I kierunków spostrzeżonych, wypisując ich numery w kolumnie 1-ej, same kierunki — w kolumnie 2-ej. Kolumny 3 i 4-ą wypiszemy po wyrównaniu.

I tabela.

1	2			3	4		
№ № kierunku	Kierunki mierzone			v	Kierunki wyrównane		
	°	'	"	"	°	'	"
1	0	00	00,00	— 0,03	0	00	00,00
2	70	56	34,"82	+ 0,46	70	56	35,25
4	163	44	49,52	— 0,85	163	44	50,40
5	259	04	04,67	+ 0,43	259	04	05,07
6	284	21	15,98	+ 0,47	284	21	16,10
7	0	00	00,00	— 0,35	0	00	00,00
8	45	05	26,24	— 0,12	45	05	25,77
9	326	01	19,33	+ 0,88	326	01	18,87
10	0	00	00,00	— 1,14	0	00	00,00
11	50	15	28,80	+ 0,26	50	15	27,92
12	325	34	46,28	+ 0,44	325	34	46,81
13	0	00	00,00	+ 0,09	0	0	00,00
14	44	09	14,00	— 0,53	44	09	13,56
20	316	57	24,36	+ 1,18	316	57	24,29
21	0	00	00,00	— 1,25	0	00	00,00
22	33	24	40,16	+ 0,08	33	24	38,99

II. Liczba równań warunkowych (patrz § 382 B).

$$W = d - 3p + 4 = 16 - 15 + 4 = 5$$

$$F = l - p + 1 = 8 - 5 + 1 = 4$$

$$B = l_1 - 2p + 3 = 8 - 10 + 3 = 1$$

III. *Równania warunkowe.*

I. $v_8 - v_7 + v_1 - v_5 + v_{10} - v_9 + l_1 = 0$

II. $v_{11} - v_{10} + v_{13} - v_{12} + v_5 - v_4 + l_2 = 0$

III. $v_4 - v_2 + v_{21} - v_{20} + v_{14} - v_{13} + l_3 = 0$

IV. $v_2 - v_1 + v_7 - v_6 + v_{22}\ 380\ v_{21} + l_4 = 0$

V. Równanie boku

Utworzenie równania boku.

$$\frac{WA}{WB} \cdot \frac{WB}{WC} \cdot \frac{WC}{WD} \cdot \frac{WD}{WA} = 1;$$

Przechodzimy do równania boku zgodnie z § 380 zamieniając kąty różnicami odpowiednich kierunków.

$$r_{22-21}\ v_{22} - r_{22-21}\ v_{21} + r_{14-13}\ v_{14} - r_{14-14}\ v_{13} + r_{11-10}\ v_{11} -$$

$$- r_{11-10}\ v_{10} + r_{8-7}\ v_8 + r_{10-9}\ v_{10} + r_{10-9}\ v_9 +$$

$$+ \log \frac{\sin(22-21)\sin(14-13)\sin(11-10)\sin(8-7)}{\sin(7-6)\sin(21-20)\sin(13-12)\sin(10-9)} = 0;$$

№	Wartość kątów			log sin	r	№	Wartość kątów			log sin	r
	°	′	″				°	′	″		
22—21	33	24	40,16	9.740 8703	31,9	7—6	75	38	44,02	9.986 2255	5,4
14—13	44	09	14,00	9.842 9759	21,6	21—20	43	02	35,64	9.834 1344	22,5
11—10	50	15	28,80	9.885 8874	17,5	13—12	34	25	13,72	9.752 2497	30,7
8—7	45	05	26,24	9.850 1708	21,0	10—9	33	58	40,67	9.747 3139	31,2
				9.319 9044						9.319 9235	
										9.319 9044	
										191	

$$31{,}9\ v_{22} - 31{,}9\ v_{21} + 21{,}6\ v_{14} - 21{,}6\ v_{13} + 17{,}5\ v_{11} - 17{,}5\ v_{10} +$$

$$+ 21{,}0\ v_8 - 21{,}0\ v_7 - 5{,}4\ v_7 + 5{,}4\ v_6 - 22{,}5\ v_{21} + 22{,}5_{21} - 30{,}7\ v_{13} +$$

$$+ 30{,}7\ v_{12} - 31{,}2\ v_{10} + 31{,}2\ v_9 - 191 = 0;$$

$$5{,}4\ v_6 - 26{,}4\ v_7 + 21{,}0\ v_8 + 31{,}2\ v_9 - 48{,}7\ v_{10} + 17{,}5\ v_{11} +$$

$$+ 30{,}7\ v_{12} - 52{,}3\ v_{13} + 21{,}6\ v_{14} + 22{,}5\ v_{20} - 54{,}4\ v_{21} +$$

$$+ 31{,}9\ v_{22} - 191 = 0; \qquad \text{IV}$$

Obliczenie l_1, l_2, l_3 i l_4; V

$45^0\ 05'\ 26'', 24$	$50^0\ 15'\ 28'', 80$
$100^0\ 55'\ 55'', 33$	$34^0\ 25'\ 13'', 72$
$33^0\ 58'\ 40'', 67$	$95^0\ 19'\ 15'', 15$
$S_{p1}=180^0\ 00'\ 02'', 24$	$S_{p2}=179^0\ 59'\ 57'', 67$
$l_1 = S_{p1} - 180^0 = +\ 2'', 24;$	$l_2 = S_{p2} - 180^0 = -\ 2'', 33;$
$92^0\ 48'\ 14'', 70$	$70^0\ 56'\ 34'', 82$
$43^0\ 02'\ 35'', 64$	$75^0\ 38'\ 44'', 02$
$44^0\ 09'\ 14'', 00$	$33^0\ 24'\ 40'', 16$
$S_{p3}=180^0\ 00'\ 04'', 34$	$S_{p4}=179^0\ 59'\ 59'', 00$
$l_3 = S_{p3} - 180^0 = +\ 4'', 34;$	$l_4 = S_{p4} - 180^0 = -\ 1'', 00.$

Wypiszemy równania warunkowe w postaci tabeli VI, w której kolumna a odpowiada warunkowi figury $A\,W\,D$, kolumna b — $\triangle$-owi $D\,C\,W$, kolumna c — $\triangle$-owi $B\,C\,W$, kolumna d — $\triangle$-owi $A\,B\,W$ i kolumna e warunkowi boku. Liczby tych kolumn wzięte są z równań grupy III-ej, oraz w kolumnie e — z równania IV boku.

Wyrazy wolne wypisujemy w schemacie VIII Gaussa.

Tabelkę VI-ą można ułożyć albo w postaci

	v_1	v_2	v_4	. . . . .	v_{22}
a					
b					
:					
c					
s					

albo też w sposób, podany na str. 937.

Tabela VI: spółczynników równań warunkowych

v	a	b	c	d	e	s
1	+1			−1		0
2			−1	+1		0
4		−1	+1			0
5	−1	+1				0
6				−1	+ 5,4	+ 4,4
7	−1			+1	−26,4	−26,4
8	+1				+21,0	+22,0
9	−1				+31,2	+30,2
10	+1	−1			−48,7	−48,7
11		+1			+17,5	+18,5
12		−1			+30,7	+29,7
13		+1	−1		−52,3	−52,3
14			+1		+21,6	+22,6
20			−1		+22,5	+21,5
21			+1	−1	−54,4	−54,4
22				+1	+31,9	+32,9
[ ]	0	0	0	0	0	0

W równaniach warunkowych przy spostrzeżeniach kierunkowych suma spółczynników poprawek wynosi zero, podobnie:

$$[s] = 0$$

Tabela VII: układanie spółczynników równań normalnych.

	aa	ab	ac	ad	ae	bb	bc	bd	be	cc	cd	ce	dd	de	ee	as	bs	cs	ds	es
1	1			−1									1							
2										1	−1		1							
4						1	−1			1										
5	1	−1				1														
6													1	− 5,4	29,16				− 4,4	23,76
7	1			−1	26,4								1	−26,4	696,96	26,4			−26,4	696,96
8	1				21,0										441,00	22,0				462,00
9	1				−31,2										973,44	−30,2				942,24
10	1	−1			−48,7	1			48,7						2371,69	−48,7	48,7			2371,69
11						1			17,5						306,25		18,5			323,75
12						1			−30,7						942,49		−29,7			911,79
13						1	−1		−52,3	1		52,3			2735,29		−52,3	52,3		2735,29
14										1		21,6			466,56			22,6		488,16
20										1		−22,5			506,25			−21,5		483,75
21										1	−1	−54,4	1	54,4	2959,36			−54,4	54,4	2959,36
22													1	31,9	1017,61				32,9	1049,51
[ ]	6	−2	0	−2	−32,5	6	−2	0	−16,8	6	−2	− 3	6	54,5	13446,06	−30,5	−14,8	− 1,0	56,5	13448,26

Sprawdzenie prawidłowości obliczenia spółczynników równań normalnych.

$$[a\,a] + [a\,b] + [a\,c] + [a\,d] + [a\,e] = [a\,s] = -\ 30{,}5$$

$$[a\,b] + [b\,b] + [b\,c] + [b\,d] + [b\,e] = [b\,s] = -\ 14{,}8$$

$$[a\,c] + [b\,c] + [c\,c] +]c\,d] + [c\,e] = [c\,s] = -\ 1{,}0$$

$$[a\,d] + [b\,d] + [c\,d] + [d\,d] + [e\,d] = [d\,s] = \quad 56{,}5$$

$$[a\,e] + [b\,e] + [c\,e] + [d\,e] + [e\,e] = [e\,s] = 13\,448{,}26$$

VIII. Rozwiązanie równań normalnych. Schemat Gaussa.

	a	b	c	d	e	l	s
	6	— 2	0	— 2	— 32,5	+ 2,24	— 28,26
$-\frac{[al]}{[aa]} = -0{,}3733$	6	— 2	0	— 2	— 32,5	+ 2,24	— 28,26
$-\frac{[ab]}{[aa]}k_2 = +0{,}0018$	— 0,67	0	— 0,67	— 10,83	+ 0,75	— 9,42	
$-\frac{[ac]}{[aa]}k_3 = 0$	5,33	— 2	— 0,67	— 27,63	— 1,58	— 26,55	
$-\frac{[ad]}{[aa]}k_4 = -0{,}1292$		6	— 2	— 3	+ 4,34	+ 3,34	
$-\frac{[ae]}{[aa]}k_5 = +0{,}0791$		0	0	0	0	0	
$k_1 = -0{,}4216$		6	— 2	— 3	+ 4,34	+ 3,34	
		— 0,75	— 0,25	— 10,37	— 0,59	— 9,96	
		5,25	— 2,25	— 13,37	+ 3,75	— 6,62	
$-\frac{[bl.1]}{[bb.1]} = +0{,}2964$			6	54,5	— 1	55,50	
$-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}k_3 = -0{,}3179$			— 0,67	— 10,83	+ 0,75	— 9,42	
$-\frac{[bd.1]}{[bb.1]}k_4 = -0{,}0487$			5,33	43,67	— 0,25	46,08	
$-\frac{[be.1]}{[bb.1]}k_5 = +0{,}0757$			— 0,08	— 3,47	— 0,20	— 3,34	
$k_2 = +0{,}0055$			5,25	40,20	— 0,45	42,74	
			— 0,96	— 5,73	+ 1,61	— 2,82	
$-\frac{[cl.2]}{[cc.2]} = -0{,}7181$			4,29	34,47	1,16	39,92	
$-\frac{[cd.2]}{[cc.2]}k_4 = -0{,}1662$				13446,06	— 191	13257,26	
$-\frac{[ce.2]}{[cc.2]}k_5 = +0{,}0372$				— 176,04	+ 12,13	— 153,08	
$k_3 = -0{,}8471$				13270,02	— 178,87	13104,18	
$-\frac{[dl.3]}{[dd.3]} = -0{,}2704$				— 143,23	— 8,19	— 137,63	
$-\frac{[de.3]}{[dd.3]}k_5 = -0{,}1173$				13126,79	+ 187,06	12966,55	
$k_4 = -0{,}3877$				— 34,05	+ 9,55	— 16,86	
$k_5 = -\frac{[el.4]}{[ee.4]} = +0{,}0146$				13092,74	— 177,51	12949,69	
				— 276,97	— 9,32	— 320,76	
				12815,77	— 186,83	12628,93	

X. Obliczenie poprawek (patrz § 383 № 3 a).

		v	v^2
v_{22}	=	+ 0,08	0,0061
v_1	=	— 0,03	0,0011
v_2	=	+ 0,46	0,2110
v_4	=	— 0,85	0,7269
v_5	=	+ 0,43	0,1824
v_6	=	+ 0,47	0,2176
v_7	=	— 0,35	0,1236
v_8	=	— 0,12	0,0132
v_9	=	+ 0,88	0,7693
v_{10}	=	— 1,14	1,2953
v_{11}	=	+ 0,26	0,0681
v_{12}	=	+ 0,44	0,1960
v_{13}	=	+ 0,09	0,0079
v_{14}	=	— 0,53	0,2827
v_{20}	=	+ 1,18	1,3820
v_{21}	=	— 1,25	1,5715

XI. Kontrola:

$k_1\ l_1$	= — 0,4216 .	2,24	= — 0,9444
$k_2\ l_2$	= + 0,0055 .	(—2,33)	= — 0,0128
$k_3\ l_3$	= — 0,8471 .	4,34	= — 3,6764
$k_4\ l_4$	= — 0,3877 .	(—1,00)	= + 0,3877
$k_5\ l_5$	= + 0,0146 .	(— 191)	= — 2,7886
		$[kl]$ =	— 7,0345
		$-[kl]$ =	7,0345
		$[vv]$ =	7,0547

Wpisujemy obliczone poprawki do tabelki I-ej przy kierunkach pomierzonych i obliczamy kierunki wyrównane.

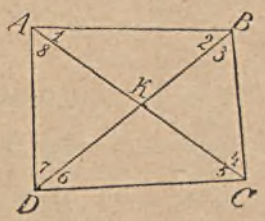
Ostatniem sprawdzeniem wyrównania jest ułożenie warunków, zachodzących w danej sieci, dla kierunków wyrównanych, względnie obliczonych z nich wyrównanych kątów. Jeżeli takie kąty czynią zadość warunkom sieci, t. j. sumy kątów w △-ach tworzą 180°, sumy kątów, tworzących poziom, równe są 360° i podstawienie wyrównanych kątów do równania boków daje w tem równaniu wolny wyraz zero, wówczas sieć jest wyrównana prawidłowo, oczywiście jeżeli niema błędu w ułożeniu równania boku. Najbardziej niebezpiecznym błędem jest błąd w ułożeniu równań warunkowych, ponieważ błąd ten zostanie wykryty tylko przy obliczaniu azymutów i długości boków po wyrównaniu sieci. Tak więc należy układać równania warunkowe dwukrotnie i przytem za drugim razem do porównania wyników przystępujemy tylko po zestawieniu całego układu.

Rozpatrzyliśmy wyrównanie siatki w wypadku spostrzeżeń kierunkowych. Uwzględnialiśmy przy wyrównaniu setne części sekundy. Dla celów lokalnych triangulacyj jest to zbyt wysoka dokładność; wystarczą co najwyżej dziesiąte części sekundy.

W wypadku spostrzeżeń kątowych wyrównanie ma na celu obliczenie najprawdopodobniejszych poprawek kątowych.

Zwróćmy się do przykładu.

Wyrównanie czworoboku w wypadkach spostrzeżeń kątowych.



Rys. 803.

Liczba wszystkich równań warunkowych:

$$W = k - 2p + 4 = 8 - 8 + 4 = 4$$

Liczba równań figur;

$$F = l_c - p + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$$

Liczba równań boków:

$$B = l - 2p + 3 = 6 - 8 + 3 = 1$$

№ № kątów	Kąty pomierzone			Poprawki v''	Kąty wyrównane		
	°	′	″		°	′	″
8	44	36	27	+0,1	44	36	27,1
1	39	27	46	−0,4	39	27	45,6
2	72	58	55	0	72	58	55,0
3	42	24	11	−1,2	42	24	09,8
4	25	09	10	−0,4	25	09	09,6
5	77	34	15	−0,9	77	34	14,1
6	34	52	27	−0,5	34	52	26,5
7	22	56	53	−0,4	22	56	52,3
[ ]	360	00	04	−0,4	360	00	00,0

Przejdźmy do ułożenia równań warunkowych. Równanie boku ułożymy dla bieguna B:

$$\frac{BA}{BD} \cdot \frac{BD}{BC} \cdot \frac{BC}{BA} = 1;$$

$$\frac{\sin(7 + v_7)}{\sin(8 + v_8 + 1 + v_1)} \cdot \frac{\sin(4 + v_4 + 5 + v_5)}{\sin(6 + v_6)} \cdot \frac{\sin(1 + v_1)}{\sin(4 + v_4)} = 1;$$

$$\log\sin 7 + \zeta_7 v_7 + \log\sin(4 + 5) + \zeta_{1+5} v_4 + \zeta_{4+5} v_5 +$$

$$+\log\sin 1 + \zeta_1 v_1 - \log\sin(8+1) + \zeta_{8+1} v_8 - \zeta_{8+1} v_1 - \log\sin 6 - \zeta_6 v_6 -$$

$$- \log\sin 4 - \zeta_4 v_4 = 0.$$

$$- \zeta_{8+1} v_8 - \zeta_{8+1} v_1 + \zeta_1 v_1 + \zeta_{4+5} v_4 - \zeta_4 v_4 + \zeta_{4+5} v_5 -$$

$$- \zeta_6 v_6 + \zeta_7 v_7 + \log \frac{\sin 1 \sin(4 + 5) \sin 7}{\sin(8 + 1) \sin 4 \sin 6} = 0;$$

№ kąta	Kąty pomierzone			log sin	ζ	№ kąta	Kąt pomierzony			log sin	ζ
	°	′	″				°	′	″		
1	39	27	46	9.803 1681	25,6	8+1	84	04	13	9.997 6700	2,1
4+5	10 2	43	25	9.989 2023	−4,8	4	25	09	10	9.628 4231	44,85
7	22	56	53	9.590 9492	49,8	6	34	52	27	9.757 2259	30,2
				9.383 3196						9.383 3190	
				9.383 3190							
				+ 6							

$$-2{,}1\ v_8 - 2{,}1\ v_1 + 25{,}6\ v_1 - 4{,}8\ v_4 - 44{,}85\ v_4 -$$

$$- 4{,}8\ v_5 - 30{,}2\ v_6 + 49{,}8\ v_7 + 6 = 0$$

$$-2{,}1\ v_8 + 23{,}5\ v_1 - 49{,}65\ v_4 - 4{,}8\ v_5 - 30{,}2\ v_6 + 49{,}8\ v_7 + 6 = 0.$$

Równania figur ABC, BCD i ACD:

1) $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + l_1 = 0;$

2) $v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + l_2 = 0;$

3) $v_8 + v_5 + v_6 + v_7 + l_3 = 0;$

Obliczenie l_1, l_2, l_3:

1. 39° 27′ 46″
2. 72° 58′ 55″
3. 42° 24′ 11″
4. 25° 09′ 10″

$S_{p1} = 180°\ 00'\ 02''$

$l_1 = S_{p1} - 180° = +\ 2;$

3. 42° 24′ 11″
4. 25° 09′ 10″
5. 77° 34′ 15″
6. 34° 52′ 27″

$S_{p2} = 180°\ 00'\ 03''$

$l_2 = S_{p2} - 180° = +\ 3;$

8. 44° 36′ 27″
5. 77° 34′ 15″
6. 34° 52′ 27″
7. 22° 56′ 53″

$S_{p3} = 180°\ 00'\ 02''$

$l_3 = S_{p3} - 180° = +\ 2;$

Układ równań warunkowych:

$$1)\quad v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + 2 = 0;$$

$$2)\quad v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + 3 = 0;$$

$$3)\quad v_8 + v_5 + v_6 + v_7 + 2 = 0;$$

$$4)\quad -2{,}1\, v_8 + 23{,}5\, v_1 - 49{,}65\, v_4 - 4{,}8\, v_5 - 30{,}2\, v_6 + 49{,}8\, v_7 + 6 = 0;$$

Spółczynniki równań warunkowych i normalnych.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
v	a	b	c	d	s	aa	ab	ac	ad	bb	bc	bd	cc	cd	dd	as	bs	cs	ds	Wiersz
8			1	−2,1	−1,1								1	−2,1	4,41			−1,1	2,31	1
1	1			+23,5	+24,5	1			+23,5						552,25	+24,5			575,75	2
2	1				1	1										1				3
3	1	1			2	1	1			1						2	2			4
4	1	1		−49,65	−47,65	1	1		−49,65	1		−49,65			2465,12	−47,65	−47,65		2365,82	5
5		1	1	−4,8	−2,8					1	1	−4,8	1	−4,8	23,04		−2,8	−2,8	13,44	6
6		1	1	−30,2	−28,2					1	1	−30,2	1	−30,2	912,04		−28,2	−28,2	851,64	7
7			1	+49,8	+50,8								1	+49,8	2480,04			+50,8	2529,84	8
[]	4	4	4	−13,45	−1,45	4	2	0	−26,15	4	2	−84,65	4	+12,70	6436,30	−20,15	−76,65	+18,70	6338,80	9

Spółczynniki 1-ego równania wypisane są w kolumnie 1-ej, drugiego w 2-ej, ... czwartego w czwartej.

5 kolumna jest sumą wyrazów z pierwszych 4-ch dla każdego wiersza.

Wyrazy dalszych kolumn wypisują się kolejno wdół: tak, np., w kolumnie 9 wyraz $a_2\, d_2 = 23{,}5$ utworzony został jako iloczyn a i d, położonych w tym samym wierszu i w kolumnach 1-ej i 4-ej.

Sprawdzenie spółczynników równań normalnych:

$$[aa] + [ab] + [ac] + [ad] = [as] = -\ 20{,}15$$

$$[ab] + [bb] + [bc] + [bd] = [bs] = -\ 76{,}65$$

$$[ac] + [bc] + [cc] + [cd] = [cs] = +\ 18{,}70$$

$$[ad] + [bd] + [cd] + [dd] = [ds] = +\ 6338{,}80$$

Obliczenie korelat. Schemat Gaussa (patrz str. 787).

1	2	3	4	5	6	7
a	*b*	*c*	*d*	*l*	*s*	Mnożnik
4	2	0	— 26,15	2	— 18,15	
— 0,500	4	2	— 84,65	3	— 73,65	
+ 0,565						
0	— 1	0	+ 13,08	— 1	+ 9,08	— 0,5
— 0,105						
$k_1 = -0{,}041$;	3	2	— 71,57	2	+ 64,57	
		4	+ 12,70	2	+ 20,70	
		0	0	0	0	0
—0,67 — 0,667						
—0,08 — 0,077		+ 4	+ 12,70	+ 2	+ 20,70	
—0,39 — 0,386						
— 1,130 = k_3		— 1,33	+ 47,71	— 1,33	+ 43,05	— 0,666
		+ 2,67	+ 60,41	+ 0,67	+ 63,75	
			6436,90	6	6344,80	
			— 170,96	+ 13,08	— 118,65	+ 6,5375
	— 0,251					
	+ 0,365		6265,94	+ 19,08	6226,15	
	+ 0,115 = k_3		—1707,42	+ 47,71	—1540,42	+ 23,856
			4558,52	+ 66,79	4685,73	
			—1366,80	— 15,16	—1442,47	— 22,625
$k_4 = -\frac{51{,}63}{3191{,}72} = -0{,}0162$			+3191,72	+ 51,63	+3243,26	

Obliczenie poprawek (v) z dokładnością do 0″,1.

$v_1 = -0{,}4$
$v_2 = -0{,}0$
$v_3 = -1{,}2$
$v_4 = -0{,}4$
$v_5 = -0{,}9$
$v_6 = -0{,}5$
$v_7 = -0{,}7$
$v_8 = +0{,}1$

Sprawdzenie:

$[v\,v] = 3{,}32$
$-[k\,l] = 3{,}33$

Obliczenie długości boków: Dane: $AB = 1000{,}00$ $(AB) = 277^{0}00'0''.0$.

log 1000.00	3.000 0000	log 1000.0	3.000 0000
clog sin 8	0.409 0542	clog sin 5	0.371 5787
log sin 3	$\bar{1}$.980 5544	log sin 2	$\bar{1}$.803 1670
log AD	3.389 6086	log CB	3.174 7457
AD	2452,498	CB	1495,360
log AD	3.389 6086	log CB	3.174 7457
clog sin 6	0.010 3002	clog sin 7	0 242 7756
log sin 1	$\bar{1}$.846 4896	log sin 4	$\bar{1}$.828 8773
log CD	3.246 3984	log CD	3.246 3986

log $CD = 3.2463985$ $CD = 1763{,}593$;

Obliczenie spółrzędnych. Spółrzędne punktu B obieramy dowolnie, np. (0,0).

№ № punktów	Kąty wyrównane i azymuty γ °	′	″	Długości boków ∂	log sin γ / log ∂ / log sin γ	log Δx / log Δy	±	x	±	y	№ № punktów
B								0,00		0,00	B
					9.085 8945						
	277	00	00,0	1000,00	3.000 0000	2.0858945	+	121,87	−	992,55	
A					9.996 7507$_n$	2.9967507$_n$					
	84	04	12,7				+	121,87	−	992,55	A
					9.988 8464						
	12	55	47,3	2452,498	3.389 6086	3.3784550	+	2390,31	+	548,76	
D					9.349 7769	2.7393855					
	57	49	18,8				+	2512,18	−	443,79	D
					9.850 3014$_n$						
	135	06	28,5	1763,593	3.246 3985	3.0966999$_n$	−	1249,39	+	1244,71	
C					9.848 6655	3.0950640$_n$					
	102	43	23,7				+	1262,79	+	800,92	C
					9.926 5849$_n$						
	212	23	04,8	1495,360	3.174 7457	3.1013306$_n$	−	1262,79	−	800,92	
B					9.728 8412$_n$	2.9035869$_n$					
	115	23	04,8					0,00		0,00	B
	277	00	00,0								
A											

§ 393. Wyrównanie przybliżone.

Dotychczas rozpatrywaliśmy takie równanie sieci trygonometrycznych, przy którem poprawki były określane z zachowaniem warunków:

1) kąty wyrównane powinny czynić zadość wszelkim warunkom geometrycznym, zachodzącym w danej sieci;

2) suma $[p\,v\,v]$ przy niejednakowo dokładnych spostrzeżeniach lub suma $[vv]$ przy jednakowo dokładnych spostrzeżeniach jest równa Minimum.

Gdy jednak ograniczymy się tylko na zachowaniu warunków geometrycznych siatki, zaniechawszy warunku $[p\,v\,v] = \text{Minim.}$, to wyniki takiego wyrównania, jakkolwiek nie będą w zupełności odpowiadać wymaganiom metody najmniejszych kwadratów, to jednak niewiele odbiegną od wyników właściwego wyrównania, a co najgłówniejsze, taki tryb postępowania w wielkim stopniu ułatwia rachunek i daje znaczną oszczędność na czasie.

Jeśli mamy skomplikowaną sieć, a ścisłe jej wyrównanie zajęłoby wiele czasu, wymagania zaś stawiane pomiarowi, nie obejmują warunku ścisłego wyrównania, wówczas możemy nietylko zaniechać warunku $[pvv] = \text{Minimum}$, ale nawet dalej posunąć uproszczenie w przebiegu wyrównania, odrzucając szereg warunków, a zachowując jedynie najbardziej istotne.

Można więc w tych wypadkach uprościć sieć, odrzucając cały szereg kierunków jednostronnych lub dwustronnych, komplikujących rachunek, i całą sieć przetworzyć w układ najprostszych typów, jak czworokąty o przecinających się przekątnych, układy centralne, łańcuchy △-ów.

Usuwając kierunki, z których każdy dwustronny dawał warunki figury i boku, jednostronny zaś — warunek boku, zmniejszymy w znacznym stopniu ilość równań warunkowych.

Jednakże uproszczenia obliczeń możemy i dalej posunąć, skoro odrzucimy warunek $[p\,v\,v] = \text{Minimum}$. Przy tem założeniu możemy stosować t. zw. przybliżone metody wyrównania, przy których zależeć nam będzie tylko na zachowaniu warunku, by poprawione kąty czyniły zadość warunkom geometrycznym siatki.

Warunek ten pozwoli przy założeniu pewnych dowolności na rozwiązywanie nie całego układu równań odrazu, a grup, z których ten układ się kompletuje — a więc oddzielnie równań figur, oddzielnie boków, to jest na wyrównanie „grupami“.

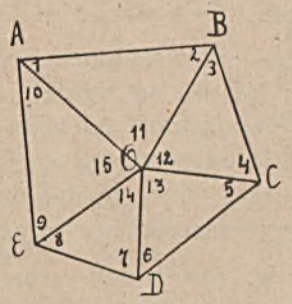
W większych siatkach stosuje się t. zw. metodę kolejnych przybliżeń przy wyrównaniu; metoda ta polega na podziale układu równań warunkowych na dwie grupy i na kolejnem wyrównywaniu każdej grupy. Tak więc wyrównane kąty 1-ej grupy posłużą do ułożenia równań warunkowych II grupy; z wyrównanych kątów II-ej grupy tworzymy na nowo warunki I-ej grupy i po jej wyrównaniu znów ułożymy warunki II-ej grupy i t. d.

Otrzymywane za każdym razem poprawki maleją i przy pewnem kolejnem przybliżeniu zmieniać się będą w granicach błędów zaokrąglenia.

§ 394. Przybliżone wyrównanie układu centralnego.

W układzie centralnym mamy równanie poziomu i tyle równań figur, ile jest trójkątów o wspólnym wierzchołku, oraz jedno równanie boków.

A. Odnalezienie najkrótszą drogą poprawek, któreby czyniły zadość powyższym warunkom, może być wykonane w poniżej podany sposób, jeżeli spostrzeżenia były dokonane metodą kierunkową tylko w punkcie 0, a przytem znacznie ściślej, niż pomiar kątów w innych punktach układu.



Rys. 804.

Tworzymy równania warunkowe; ponieważ przy metodzie kierunkowej spostrzeżeń warunek poziomu sam przez się jest zachowany, więc wykluczymy z warunków figur kąty przy centralnym punkcie; wówczas równania warunkowe figur utworzą się w następujący sposób:

$$1 + v_1 + 2 + v_2 - (180^0 - 11) = 0$$

i t. d., skąd

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && v_1 + v_2 + (1 + 2 + 11 - 180^0) = 0\\
&\text{analogicznie: II.} && v_3 + v_4 + (3 + 4 + 12 - 180^0) = 0\\
&\text{III.} && v_5 + v_6 + (5 + 6 + 13 - 180^0) = 0\\
&\text{IV.} && v_7 + v_8 + (7 + 8 + 14 - 180^0) = 0\\
&\text{V.} && v_9 + v_{10} + (9 + 10 + 15 - 180^0) = 0
\end{aligned}$$

Oznaczając wyrazy znane literami l, otrzymamy:

$$\begin{aligned}
&\text{I.} && v_1 + v_2 + l_1 = 0\\
&\text{II.} && v_3 + v_4 + l_2 = 0\\
&\text{III.} && v_5 + v_6 + l_3 = 0\\
&\text{IV.} && v_7 + v_8 + l_4 = 0\\
&\text{V.} && v_9 + v_{10} + l_5 = 0
\end{aligned}$$

Utworzymy równania korelat:

$$\begin{aligned}
&2k_1 + l_1 = 0\\
&2k_2 + l_2 = 0\\
&\text{— — — — —}\\
&\text{— — — — —}\\
&2k_5 + l_5 = 0
\end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned}
k_1 &= -\frac{l_1}{2}\\
k_2 &= -\frac{l_2}{2}\\
&\text{— — — —}\\
k_5 &= -\frac{l_5}{2}
\end{aligned}$$

Stąd obliczymy wielkości poprawek z warunków figur:

$$v_1 = v_2 = -\frac{l_1}{2};$$

$$v_3 = v_4 = -\frac{l_2}{2};$$

$$v_5 = v_6 = -\frac{l_3}{2};$$

$$v_7 = v_8 = -\frac{l_4}{2};$$

$$v_9 = v_{10} = -\frac{l_5}{2};$$

Zmienione zaś o tę poprawki kąty będą:

$$1' = 1 + v_1; \qquad 6' = 6 + v_6;$$
$$2' = 2 + v_2; \qquad 7' = 7 + v_7;$$
$$3' = 3 + v_3; \qquad 8' = 8 + v_8;$$
$$4' = 4 + v_4; \qquad 9' = 9 + v_9;$$
$$5' = 5 + v_5; \qquad 10' = 10 + v_{10};$$

Znajdźmy dla nowopowstałych kątów takie drugie poprawki, by warunek boków był zachowany:

Warunek boków $\frac{OA}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} \cdot \frac{OC}{OD} \cdot \frac{OD}{OE} \cdot \frac{OE}{OA} = 1,$

zamieniony przez iloczyn stosunków sinusów odpowiednich kątów, będzie:

$$\frac{\sin(2' + v'_2)}{\sin(1' + v'_1)} \cdot \frac{\sin(4' + v'_4)}{\sin(3' + v'_3)} \cdot \frac{\sin(6' + v'_6)}{\sin(5' + v'_5)} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sin(8' + v'_8)}{\sin(7' + v'_7)} \cdot \frac{\sin(10' + v'_{10})}{\sin(9' + v'_9)} = 1;$$

Po zlogarytmowaniu tego równania i rozwinięciu wyrazów typu $\log \sin(k + v_k) = \lg \sin k + r_k v_k$, gdzie przez r rozumiemy zmianę log. sinusa przy zmianię kąta 1″, i po połączeniu sumy log-ów sin-ów w jeden wyraz otrzymamy:

$$-r_1 v'_1 + r_2 v'_2 - r_3 v'_3 + r_4 v'_4 - r_5 v'_5 + r_6 v'_6 - r_7 v'_7 + r_8 v'_8 - r_9 v_9 + r_{10} v'_{10} +$$

$$+ \log \frac{\sin 2' \sin 4' \sin 6' \sin 8' \sin 10'}{\sin 1' \sin 3' \sin 5' \sin 7' \sin 9'} = 0$$

Aby obliczane poprawki nie naruszyły warunku figur, winny one czynić zadość założeniu, iż:

$$-v'_1 = v'_2 ;$$
$$-v'_3 = v'_4 ;$$
$$-v'_5 = v'_6 ;$$
$$-v'_7 = v'_8 ;$$
$$-v'_9 = v'_{10};$$

a wówczas równanie boków napiszemy, oznaczając literą L wyraz wolny:

$$(r_1 + r_2)\, v'_2 + (r_3 + r_4)\, v'_4 + (r_5 + r_6)\, v'_6 +$$
$$+ (r_7 + r_8)\, v'_8 + (r_9 + r_{10})\, v'_{10} + L = 0 ;$$

Poprawki zaś wyrażą się korelatą k:

$$v'_2 = (r_1 + r_2)\, k ; \qquad v'_6 = (r_5 + r_6)\, k ;$$
$$v'_4 = (r_3 + r_4)\, k ; \qquad v'_8 = (r_7 + r_8)\, k ; \qquad v'_{10} = (r_9 + r_{10})\, k;$$

Korelatę k określimy z równania:

$$[(r_i + r_{i+1})\ \ (r_i + r_{i+1})]\, k + L = 0 ;$$

Ostatecznie więc wyrównane kąty, czyniące zadość i warunkom figur i warunkom boków, będą:

$$\mathrm{I} = 1 + v_1 + v'_1 = 1' + v'_1$$
$$\mathrm{II} = 2 + v_2 + v'_2 = 2' + v'_2$$
$$\mathrm{III} = 3 + v_3 + v'_3 = 3' + v'_3$$
$$- - - - - - - - - - - -$$
$$- - - - - - - - - - - - \text{ i t. d.}$$

W ten sposób poprawione kąty czynią zadość warunkom geometrycznym, ponieważ założyliśmy, że kierunki przy punkcie centralnym zostały pomierzone zupełnie ściśle.

B. Przybliżone wyrównanie układu centralnego należy wykonać inaczej, jeżeli wszystkie spostrzeżenia były kątowe.

Różnica będzie polegać jedynie na tem, że 1-e poprawki v_1, $v_2 \ldots v_{10}$ oraz v_{11}, $v_{12} \ldots v_{15}$ otrzymamy z rozwiązania układu równań warunkowych figur i poziomu, a mianowicie:

$$1)\ \ v_1 + v_2 + v_{11} + 1_1 = 0$$
$$2)\ \ v_3 + v_4 + v_{12} + 1_2 = 0$$
$$3)\ \ v_5 + v_6 + v_{13} + 1_3 = 0$$
$$4)\ \ v_7 + v_8 + v_{14} + 1_4 = 0$$
$$5)\ \ v_9 + v_{10} + v_{15} + 1_5 = 0$$
$$6)\ \ v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{14} + v_{15} + 1_6 = 0$$

Wówczas pierwsze poprawki obliczymy za pośrednictwem 6 korelat, a mianowicie, gdy kąty zaobserwowano z jednakową dokładkością:

$$\begin{aligned} v_1 = v_2 &= k_1 \\ v_3 = v_4 &= k_2 \\ v_5 = v_6 &= k_3 \\ v_7 = v_8 &= k_4 \\ v_9 = v_{10} &= k_5 \end{aligned} \qquad \text{oraz} \qquad \begin{aligned} v_{11} &= k_1 + k_6 \\ v_{12} &= k_2 + k_6 \\ v_{13} &= k_3 + k_6 \\ v_{14} &= k_4 + k_6 \\ v_{15} &= k_5 + k_6 \end{aligned}$$

gdyż, np., w wyrazie $v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 \ldots\ldots$

mamy $b_1 = 0, c_1 = 0 \ldots\ldots$

oraz $a_1 = 1$

a stąd $v_1 = k_1$

Korelaty zaś określimy z równań korelat:

$$\begin{aligned} 3k_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + k_6 + l_1 &= 0 \\ 3k_2 \qquad\qquad\qquad\qquad + k_6 + l_2 &= 0 \\ 3k_3 \qquad\qquad\qquad + k_6 + l_3 &= 0 \\ 3k_4 \qquad\qquad + k_6 + l_4 &= 0 \\ 3k_5 + k_6 + l_5 &= 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + 5k_6 + l_6 &= 0 \end{aligned}$$

Ostatnie równanie, pomnożone przez 3, daje:

$$3k_1 + 3k_2 + 3k_3 + 3k_4 + 3k_5 + 15k_6 + 3l_6 = 0;$$

Odejmijmy od tego równania sumę pierwszych 5-ciu równań korelat, a otrzymamy:

$$10k_6 + 3l_6 - l_1 - l_2 - l_3 - l_4 - l_5 = 0$$

skąd:

$$k_6 = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 - 3l_6}{10};$$

Mając k_6, obliczymy z pierwszych 5-ciu równań korelat k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, a mając korelaty, obliczymy pierwsze poprawki; drugie poprawki V'_1 $V'_2 \ldots$ V'_{10} będą obliczone z równania boków dla wszystkich kątów prócz centralnych, — zakładamy mianowicie, że wszystkie poprawki mają tę samą wartość, różnią się co druga znakiem, t. j.:

$$V = -V'_1 = -V'_3 = -V'_5 = -V'_7 = V'_2 = V'_4 = V'_6 = V'_8$$

(lub też możemy powtórzyć z równaniem boku postępowanie, podane w części *A*); wówczas równanie boków przekształci sią na:

$$[r]\ V + L = 0$$

$$[r]\ V = -L$$

skąd

$$V = -\frac{L}{[r]};$$

Więc wyrównane kąty będą:

$$\text{I} = 1 + V_1 - V$$

$$\text{II} = 2 + V_2 + V$$

$$\text{III} = 3 + V_3 - V$$

$$\text{IV} = 4 + V_4 + V \qquad \text{i t. d.}$$

§ 395. Obliczenie i uzupełnianie sieci.

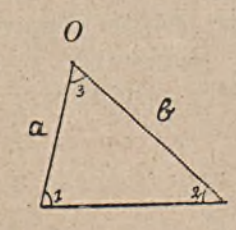
Po wyrównaniu kątów w sieci triangulacyjnej należy:

1) obliczyć długości boków,
2) „ azymuty boków,
3) „ przyrosty spółrzędnych,
4) „ spółrzędne punktów.

A. Długości boków obliczamy w poszczególnych trójkątach na zasadzie równości stosunków boków i sinusów kątów przeciwległych. Boki będziemy obliczać, idąc stopniowo od pierwszego boku, obliczonego z bazy, kolejno przez wszystkie trójkąty; a więc jeżeli 1-ym bokiem jest AO, to obliczymy kolejno z sześcio lub siedmioznacznych tablic logarytmy boków (same boki nie są koniecznie potrzebne, gdyż przyrosty obliczać będziemy zapomocą tablic logarytmicznych) AB, OB, BC, OC, CD, OD, DE, OE, EA, AO.

Obliczenie logarytmów boków ułożymy w schemat na zasadzie wzorów:

$$AB = \frac{AO \cdot \sin 3}{\sin 2}; \qquad BO = \frac{AO \cdot \sin 1}{\sin 2};$$

Nazwa i rysunek trójkąta	№ № kąta	Wielkość kąta		log
			log BO	2.634737
	1	41° 27′ 58″	log sin 1	9.820974
			log AO	2.813147
	2	88° 26′ 35″	clog sin 2	0.000616
	3	50° 5′ 27″	log sin 3	9.884831
		180° 0′ 0″	log AB	2.698594

Kontrolę rachunków otrzymamy, gdy obliczymy pierwszy bok na podstawie innych, np., w układzie centralnym ostatni bok jest zarazem pierwszym; lub też przy obliczeniu przyrostów zestawiać będziemy sumy przyrostów spółrzędnych trzech boków dla każdego trójkąta; sumy te winny być zerami.

B. Obliczenie azymutów boków na zasadzie znanego azymutu 1-go boku dokonywa się przy pomocy wzoru:

$$(B\,C) = (A\,B) \pm 180^0 \pm \begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix};$$

co czytać należy — azymut boku następnego równa się azymutowi boku poprzedniego więcej albo mniej 180°, więcej kąt lewy, lub mniej kąt prawy.

C. Obliczania przyrostów dokonamy na zasadzie wzorów.

$$\Delta\, X_{AB} = A\,B \,.\, \cos\,(A\,B)$$

lub:

$$\Delta\, Y_{AB} = \pm\, A\,B \,.\, \cos\, r_{AB}$$

$$\Delta\, Y_{AB} = A\,B\, \sin\,(A\,B)$$

lub:

$$\Delta\, Y_{AB} = \pm\, A\,B\, \sin\, r_{AB}$$

We wzorach tych przez $(A\,B)$ rozumiemy azymut $A\,B$, przez $A\,B$ — długość, przez r_{AB} zaś czwartak $A\,B$.

Jako kontrola obliczenia boków i przyrostów dla każdego trójkąta i każdego zamkniętego wieloboku służy wzór na sumy algebraiczne przyrostów.

$$\Delta\, X_{AB} + \Delta\, X_{BC} + \Delta\, X_{CA} = 0$$

$$\underline{\Delta\, Y_{AB} + \Delta\, Y_{BC} + \Delta\, Y_{CA} = 0}$$

lub

$$\Delta\, X_{AB} + \Delta\, X_{BC} = \Delta\, X_{AC};$$

$$\Delta\, Y_{AB} + \Delta\, Y_{BC} = \Delta\, Y_{AC};$$

D. Spółrzędne punktów obliczymy według wzorów:

$$X_B = X_A + \Delta\, X_{AB} = X_A + A\,B\, \cos\,(A\,B).$$

$$Y_B = Y_A + \Delta\, Y_{AB} = Y_A + A\,B\, \sin\,(A\,B).$$

X_A, X_B, Y_A, Y_B, — oznaczają spółrzędne punktów, wypisanych jako wskaźniki przy spółrzędnych;

$\Delta\, X_{AB}$, $\Delta\, Y_{AB}$ — oznaczają przyrosty spółrzędnych na prostych, wypisanych jako wskaźniki przy przyrostach. Każdy punkt obliczać należy dwukrotnie, a więc z dwu innych, poprzednio obliczanych.

Częstokroć przy pomiarach, wymagających jaknajwiększej liczby punktów oparcia, zdarza się, że punkty triangulacji są zbyt daleko wzajemnie położone, warunki zaś terenowe i pomiarowe wymagają powiększenia

liczby punktów o wiadomych spółrzędnych. Wówczas, ponieważ sieć trygonometryczna jest wyrównana i obliczona, możemy jedynie powiększać liczbę punktów w drodze nawiązania nowych, t. zw. uzupełniających sieć punktów, do punktów sieci głównej.

Nawiązanie takowe może być wykonywane:

1) przy pomocy zwykłego lub wielokrotnego wcięcia wprzód;
2) przy pomocy zwykłego lub wielokrotnego wcięcia wstecz;
3) przy pomocy wcięcia kombinowanego (wprzód i wstecz);
4) przy pomocy wplatania łańcucha Δ-ów pomiędzy boki lub punkty wyższego rzędu.

§ 396. Przykład.

Przybliżone wyrównanie układu centralnego.

Dane są pomierzone kąty

Patrz rys. 804 str. 946.

№№ kątów	°	′	″
1	41	22	44,6
2	37	45	25,8
3	54	56	26,7
4	43	17	44,6
5	47	0	27,9
6	92	22	24,0
7	43	2	32,8
8	74	42	13,5
9	67	26	44,0
10	38	3	16,4
11	100	51	51,6
12	81	45	46,5
13	40	37	7,3
14	62	15	20,5
15	74	29	54,6

Obliczymy ilość równań:

$$k = 15,\ p = 6;\ l_c = L = 10$$

$$W = k - 2p + 4 = 15 - 12 + 4 = 7$$

$$F = l_c - p + 1 = 10 - 6 + 1 = 5$$

$$B = L - 2p + 3 = 10 - 12 + 3 = 1$$

$$H = 1 \text{ (równanie poziomu).}$$

Sprawdzenie:

$$w = F + B + H = 5 + 1 + 1 = 7.$$

Obliczamy sumy praktyczne S_{pr} Δ-ów i poziomu oraz $l = S_{pr} - S_t$:

I: Δ AOB

1	41° 22′ 44,6
2	37 45 25,8
11	100 51 51,6
	180 0 2,0

$l = + 2,0$

II: Δ BOC

3	54° 56′ 26″,7
4	43 17 44 ,6
12	81 45 46 ,5
	179 59 57 ,8

$l_2 = - 2,2$

III: Δ COD

5	47° 0′ 27″,9
6	92 22 24 ,0
13	40 37 7 ,3
	179 59 59 ,2

$l_3 = - 0,8$

IV: Δ DOE

7	43° 2′ 32″,8
8	74 42 13 ,5
14	62 15 20 ,5
	180 0 6″,8

$l_4 = + 6,8$

V: Δ AOE

9	67° 26′ 44″,0
10	38 3 16 ,4
15	74 29 54 ,6
	179 59 55 ,0

$l_5 = - 5,0$

VI. poziom

11	100° 51′ 51″,6
12	81 45 46 ,5
13	40 37 7 ,3
14	62 15 20 ,5
15	74 29 54 ,6
	360 0 0 ,5

$l_6 = + 0,5$

Warunki Δ-ów i poziomu łączymy w pierwszą grupę równań warunkowych, którą rozwiążemy niezależnie od warunku boku.

Układamy równania warunkowe w formie tabelki.

Poprawki / Równanie	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	l
a I	1	1									1					+ 2,0
b II			1	1								1				— 2,2
c III					1	1							1			— 0,8
d IV							1	1						1		+ 6,8
e V									1	1					1	— 5,0
f IV											1	1	1	1	1	+ 0,5

Przechodzimy do równan normalnych korelat:

$$3\,k_1 + k_6 + 2{,}0 = 0$$
$$3\,k_2 + k_6 - 2{,}2 = 0$$
$$3\,k_3 + k_6 - 0{,}8 = 0$$
$$3\,k_4 + k_6 + 6{,}8 = 0$$
$$3\,k_5 + k_6 - 5{,}0 = 0$$
$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + 5k_6 + 0{,}5 = 0$$

Dodajemy pierwsze pięć równań i otrzymaną sumę odejmiemy od potrojonego ostatniego równania:

$$3\,k_1 + 3\,k_2 + 3\,k_3 + 3\,k_4 + 3\,k_5 + 15\,k_6 + 1{,}5 = 0$$
$$3\,k_1 + 3\,k_2 + 3\,k_3 + 3\,k_4 + 3\,k_5 + 5\,k_6 + 0{,}8 = 0$$

$$10\,k_6 + 0{,}7 = 0$$
$$k_6 = -0{,}07$$

Mając szóstą korelatę, z pierwszych pięciu równań korelat obliczymy kolejno wszystkie korelaty:

$$k_1 = -\frac{k_6 + 2{,}0}{3} = -\frac{1{,}93}{3} = -0{,}64$$

$$k_2 = +\frac{2{,}27}{3} = +0{,}76 \qquad k_4 = -\frac{6{,}73}{3} = -2{,}24$$

$$k_3 = +\frac{0{,}87}{3} = +0{,}29 \qquad k_5 = +\frac{5{,}07}{3} = +1{,}69$$

Stąd obliczymy poprawki:

	—
$k_1\ l_1$	1,38
$k_2\ l_2$	1,67
$k_3\ l_3$	0,23
$k_4\ l_4$	15,23
$k_5\ l_5$	8,45
$k_6\ l_6$	0,03
$[kl]$	26,99

	v^2
$v_1 = v_2 = k_1 = -0{,}64$	0,41
$v_3 = v_4 = k_2 = +0{,}76$	0,58
$v_5 = v_6 = k_3 = +0{,}29$	0,08
$v_7 = v_8 = k_4 = -2{,}24$	5,02
$v_9 = v_{10} = k_5 = +1{,}69$	2,86
	8,95
$v_{11} = k_1 + k_6 = -0{,}76$	0,58
$v_{12} = k_2 + k_6 = +0{,}69$	0,48
$v_{13} = k_3 + k_6 = +0{,}22$	0,05
$v_{14} = k_4 + k_6 = -2{,}31$	5,34
$v_{15} = k_5 + k_6 = +1{,}62$	2,62
	9,07
$[vv] = 2 \times 8{,}95 + 9{,}07 = 26{,}97$	

Sprawdzenie:

$$[vv] = -[kl]; \qquad 26{,}97 = 26{,}99 + \text{błąd zaokrągleń.}$$

Układamy równanie boku, t. j. równanie II-ej grupy.

$$r_1 v'_1 + r_3 v'_3 + r_5 v'_5 + r_7 v'_7 + r_9 v'_9 - r_2 v'_2 - r_4 v'_4 - r_6 v'_8 -$$

$$- r_{10} v'_{10} + \log \frac{\sin 1 \sin 3 \sin 5 \sin 7 \sin 9}{\sin 2 \sin 4 \sin 6 \sin 8 \sin 10} = 0$$

Przy obliczaniu wolnego wyrazu równania boku do rachunku wprowadzimy zaokrąglone do 0",1 kąty, poprawione o poprawki, obliczone z I-ej grupy (patrz tabl. str. 956),

A. Załóżmy, że wszystkie poprawki są jednakowe co do wielkości, różniąc się znakami, t. j.

$$v'_1 = -v'_2 = v'_3 = -v'_4 = v'_5 = -v'_6 = v'_7 = -v'_8 = v_9 = -v'_{10} = v$$

wówczas

$$[r]\, v + 405 = 0$$

$$170{,}9\, v = -405$$

$$v = -2''.4$$

№ № kątów	Kąty poprawione	log sin	r	№ № kątów	Kąty poprawione	log sin	r
1	41° 22' 44"0	9.820 2248	23,9	2	37° 45' 25"2	9.786 9741	27,2
3	54 56 27 5	9.913 0509	14,8	4	43 17 43 8	9.836 1729	22,4
5	47 0 28 2	9.864 1829	19,7	6	92 22 24 3	9.999 6273	— 0,9
7	43 2 30 6	9.834 1231	22,5	8	74 42 11 3	9.984 3346	5,7
9	67 26 45 7	9.965 4457	8,7	10	38 3 18 1	9.789 8780	26,9
		9.397 0274	89,6			9.396 9869	81,3
		9.396 9869	81,3				
		405	170,9				

Tę więc poprawkę (— 2,4) należy dodać do nieparzystych kątów już raz poprawionych, odjąć zaś od parzystych, gdyż

$$v'_1 = v'^4 = .. = - v$$

W ten sposób po raz drugi poprawione kąty nie zmienią zamknięcia figur i horyzontu, zamkną zaś warunek boku. Wyrównane ostatecznie w ten sposób kąty odpowiadać już będą wszelkim warunkom geometrycznym danej sieci.

Wypiszmy kilka wyrównanych kątów:

$$\alpha_1 = 1 + v_1 + v = 41^\circ 22' 41'', 6$$

$$\alpha_2 = 2 + v_2 - v = 37^\circ 45' 27'', 6 \qquad \text{i t. d.}$$

Cyframi 1, 2 oznaczyliśmy kąty pomiarowe, literami v_1, v_2.... oznaczyliśmy poprawki, obliczone z I grupy warunków, literą v — poprawki z równania boku.

B. Założenie A możemy zmienić o tyle, że kolejne dwie poprawki każdego $\triangle$-a są równe co do wielkości i różne co do znaku, wówczas

$$v_1 = - v_2$$

$$v_3 = - v_4$$

$$- - -$$

$$v_9 = - v_{10}$$

i równanie boku przekształci się na:

$$(r_1 + r_2) v_1 + (r_3 + r_4) v_3 + (r_5 + r_6) v_5 + (r_7 + r_8) v_7 + (r_9 + r_{10}) v_9 + 405 = 0$$

lub, oznaczając wyrazy w nawiasach, które łatwo obliczymy, literami

$$R_1,\ R_3,\ R_5,\ R_7 \text{ i } R_9$$

przepiszemy równanie boku:

$$R_1 v_1 + R_3 v_3 + R_5 v_5 + R_7 v_7 + R_9 v_9 + 405 = 0$$

i otrzymamy równanie normalne:

$$[RR]\, k + 405 = 0$$

skąd

$$k = -\frac{405}{[RR]}$$

poprawki zaś obliczymy z równań

$$v_1 = R_1 k_1 \qquad v_3 = R_3 k$$

$$v_2 = -v_1 \qquad v_4 = -v_3 \text{ i t. d.}$$

Obliczone poprawki dodamy do kątów, poprawianych po wyrównaniu 1-ej grupy, otrzymując ostatecznie wyrównane kąty.

Te kąty odpowiadać już będą wszystkim warunkom sieci.

Różnice między poprawkami, w ten sposób obliczonemi, a poprawkami, uzyskanemi ze ścisłego wyrównania, rzadko kiedy przekraczają 2″, bardzo zaś często wahają się poniżej 1″.

§ 397. Wyrównanie stanowiska.

A. Gdy na punkcie trygonometrycznym pomierzono szereg kierunków metodą kierunkową, a przytem wszystkie kierunki zaobserwowano we wszystkich serjach, wówczas średnie arytmetyczne są wyrównanemi kierunkami.

B. Na punkcie trygonometrycznym obserwowano jednocześnie kierunki do punktów wyższego i niższego rzędu, przytem kierunki do punktów niższego rzędu weszły tylko do kilku seryj, w pozostałych zaś obserwowano kierunki wyższego rzędu.

Oznaczmy literami $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ kierunki do punktów wyższego rzędu, literami $\beta_1 \ldots \beta_l$ kierunki do punktów niższego rzędu. Kierunki α pomierzono w n serjach, kierunki β — w s serjach, przytem $n > s$. Z kierunków α tworzymy średnie arytmetyczne α_n i α_s 1) z n seryj, 2) z tych s seryj, do których weszły tak α, jak β.

Punkt.		α_n $n = 4$	α_s $s = 3$	$\alpha_s - \alpha_n$	Średnie ostateczne
	15	0° 0′ 0″	0° 0′ 0″	0″	0° 0′ 0″
III rząd	8	13° 15′ 42	13 15 40	— 2″	13° 15′ 42″
	6	65 43 17,5	65 43 15	— 2″,5	65° 43′ 17″,5
	2	124 0 33,5	124 0 30	— 3″,5	124° 0′ 33″,5
				$O = -2″,0$	
			β		
	21		1° 14′ 10″		1° 14′ 8″
IV rząd	24		88° 1′ 15″		88° 1′ 13″
	26		101° 3′ 18″		101° 3′ 16″
			18′ 43″		18′ 37″

Tworzymy różnice $\alpha_s - \alpha_n$ oraz średnią różnicę $0 = \frac{[\alpha_s - \alpha_n]}{k}$.

Przy tworzeniu ostatecznych kierunków, średnie α_n pozostawiamy bez zmiany, średnie zaś β niższego rzędu powiększamy o wielkość o.

Sprawdzeniem rachunku ostatecznych wielkości β jest ich suma $18' 37' = 18' 43'' - 3 \times (- 2'')$

C. Następnym wypadkiem są spostrzeżenia seryj częściowych, t. j. takich, które składają się z grup kierunków o różnej ilości, jakkolwiek każdy kierunek wchodzi do jednakowej liczby seryj; we wszystkich jednak serjach zerowy kierunek jest ten sam.

CEL	SERJE 1			2		3		4		5		6		ŚREDNIA R		
	°	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	°	′	″
				średnie		kierunki r										
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	32	14	30	.	.	14	15	.	.	15	0	.	.	32	14	35
3	55	.	.	20	10	.	.	20	30	.	.	20	40	55	20	26,7
4	80	29	5	19	30	.	.	.	.	19	15	.	.	80	19	16,7
$[r]$		33	35	39	40	14	15	20	30	34	15	20	40			
	Różnice $v = R - r$															
1			0		0		0		0		0		0			
2		+	5			+	20			—	25					
3				+	16,7			—	3,3			—	13,3			
4		+	11,7	—	13,7					+	1,7					
$[v]$		+	16,7	+	3,4	+	20	—	3,3	—	23,3	—	13,3			
$0 = \frac{[v]}{n}$		+	5,6	+	1,1	+	10	—	1,6	—	7,8	—	6,6			
	Pierwsze zorjentowane kierunki $r_1 = r + 0$													średnia R_1		
1	0	0	5,6	0	1,1	0	10		—1,6		—7,8		—6,6	0	0	0,1
2	32	14	35,6	.	.	14	25			14	52,2	.	.	32	14	34,1
3	55			20	11,1			20	28,4	.	.	20	33,6	55	20	24,4
4	80	10	10,6	19	31,1					19	7,2			80	19	16,3
$[r_1]$		33	51,8	39	43,3	14	35	20	26,8	33	51,6	20	27,0			
$[r]+[v]$		33	51,7	39	43,4	14	35	20	26,7	33	51,7	20	26,7			

Wyrównanie stanowiska w tym wypadku (C) jest następujące:

Tworzymy średnią R ze wszystkich seryj dla każdego kierunku r, oraz następnie różnice $v = R - r$ dla każdego kierunku w każdej serji;

dla każdej serji obliczamy $[v]$ i średnią $O = \frac{[v]}{n}$, poczem obliczamy pierwsze zorjentowane kierunki $r_1 = r + O$ i średnie R_1 tych kierunków. Znów w dalszym ciągu obliczylibyśmy drugie różnice $v_1 = R_1 - r_1$, sumy $[v_1]$ i średnie $O_1 = \frac{[v_1]}{n}$, następnie drugie zorjentowanie kierunku $r_2 = r_1 + O_1$, średnie R_2 i t. d. aż do czasu, kiedy wielkości O sprowadzone zostaną do bardzo nieznacznych liczb (części sekundy).

Przypuśćmy, że to zaszło dla o_k po obliczeniu R_k, wówczas średnie R_k możemy uważać za ostateczne.

D. Przypuśćmy, że na danym punkcie zaobserwowaliśmy kierunki a, b, c, d, e, f w taki sposób, że kierunki te spostrzegane były w grupach (np. *abc. ace, afw*) o wspólnym początkowym kierunku a. Jeżeli ilość seryj w każdej grupie była jednakowa, wówczas średnie z seryj, sprowadzone na kierunek a, jako zerowy, przyjmujemy za ostateczne kierunki.

E. W wypadku spostrzeżeń kątowych przy nadliczbowych spostrzeżeniach, wyrównanie stanowiska sprowadza się do wyrównania spostrzeżeń pośrednich. Tak, np., mamy kierunki a, b, c, d. Kąty, między niemi zawarte, pomierzono w różnych połączeniach:

$$\alpha_1 = (ab), \quad \alpha_2 = (ac), \quad \alpha_3 = (ad), \quad \alpha_4 = (bc), \quad \alpha_5 = (bd), \quad \alpha_6 = (cd)$$

z jednakową lub niejednakową dokładnością.

Wyrazy, jak np. $(a\dot{b})$ oznaczają — jaki kąt jest zawarty między kierunkami a i b.

Dla określenia 4-ch kierunków wystarczą trzy kąty:

$$\alpha_1 = (ab), \quad \alpha_4 = (bc) \quad \text{i} \quad \alpha_6 = (cd).$$

Oznaczając błędy spostrzeżeń α_1, α_2 i t. d. literami v_1, v_2 . . . . , wypiszemy równania błędów:

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha_1 - x \\ v_2 &= \alpha_2 - x - y \\ v_3 &= \alpha_3 - x - y - z \\ v_4 &= \alpha_4 - y \\ v_5 &= \alpha_5 - y - z \\ v_6 &= \alpha_6 - z \end{aligned}$$

z których, po wprowadzeniu przybliżonych wielkości x_0, y_0 i z_0 (które mogą być nawet ściśle równe, np., α_1, α_4, α_6) i ich najprawdopodobniejszych poprawek Δx, Δy i Δz, równania błędów przekształcimy na:

$$\begin{aligned} v_1 &= (\alpha_1 - x_0) - \Delta x && = l_1 - \Delta x \\ v_2 &= (\alpha_2 - x_0 - y_0) - \Delta x - \Delta y && = l_2 - \Delta x - \Delta y \\ v_3 &= (\alpha_3 - x_0 - y_0 - z_0) - \Delta x - \Delta y - \Delta z && = l_3 - \Delta x - \Delta y - \Delta z \end{aligned}$$

$$v_4 = (\alpha_4 - y_0 - \Delta y) \qquad = l_4 \qquad - \Delta y$$

$$v_5 = (\alpha_5 - y_0 - z_0) - \Delta y - \Delta z \qquad = l_5 \qquad - \Delta y - \Delta z$$

$$v_6 = (\alpha_6 - z_0) - \Delta z \qquad = l_6 \qquad - \Delta z$$

Stąd przejdziemy do równań normalnych:

$$3\,\Delta x + 2\,\Delta y + \Delta z - (l_1 + l_2 + l_3) = 0$$

$$2\,\Delta x + 4\,\Delta y + 2\,\Delta z - (l_2 + l_3 + l_4 + l_5) = 0$$

$$\Delta x + 2\,\Delta y + 3\,\Delta z - (l_3 + l_5 + l_6) = 0$$

z których obliczymy Δx, Δy i Δz oraz najprawdopodobniejsze:

$$x = x_0 + \Delta x$$

$$y = y_0 + \Delta y$$

$$z = z_0 + \Delta z$$

Rozpatrzyliśmy poszczególne wypadki wyrównań stanowisk (stacyjnych), nie dodając szczegółowej ich teorji, którą można znaleźć w „Rachunku wyrównawczym“ prof. K. Weigla. Zauważyć należy, że w celu uniknięcia skomplikowanych rachunków, przy kierunkach jednego rzędu, należy tworzyć całkowite serje, w wypadku zaś kierunków różnego rzędu (liczba seryj n i s przy $n > s$) należy wszystkie kierunki pomierzyć w s serjach, w pozostałych zaś $n - s$ serjach obserwować tylko kierunki wyższego rzędu.

Jeżeli zachodzi potrzeba rozbicia kierunków na grupy, np. przy znacznej ilości kierunków, wówczas za wszelką cenę należy we wszystkich grupach mieć jeden wspólny, wyraźnie widoczny, kierunek.

Wyrównanie stacyjne należy mieć ukończone przed wyrównaniem punktów niższego rzędu, jeżeli zaś i kierunki wyższego rzędu wymagają wyrównania stacyjnego to również należy je wykonać przed przystąpieniem do wyrównywania siatki. Przy triangulacjach państwowych wyrównanie stacyjne stanowi poważną pozycję w pracach obliczeniowych.

§ 398. Uzupełnianie sieci trygonometrycznych.

Tak sieć lokalna, jak państwowa niższych rzędów może być rozwinięta przy pomocy określenia całego szeregu nowych punktów trygonometrycznych niższego rzędu. Punkty te w większości wypadków określają się wcięciami.

Projekt rozwinięcia sieci winien być wykreślony albo w postaci szkicu na oddzielnym arkuszu, albo też na mapie w małej skali, na którą naniesiemy dane i określane punkty.

Na szkicu tym wykreślane są grubszemi linjami proste, łączące dane punkty, cienkiemi — łączące określane punkty ze sobą oraz z danemi punktami. Celowe, zaobserwowane dwustronnie, wykreślają się ciągłemi linjami, jednostronne — w połowie ciągłą linją przy punkcie, skąd dany

kierunek był zaobserwowany, i przerywaną w drugiej połowie — przy wcinanym punkcie. Numeracja nowych punktów jest przedłużeniem numeracji punktów sieci wyższego rzędu.

Projekt uzupełniających punktów winien przewidywać przebieg przyszłych obserwacyj, a więc już przy wykreślaniu projektu należy odróżniać punkty, na których obserwacje będą dokonane (wcięcia wstecz i wcięcia skombinowane) od punktów, które określone zostaną tylko wcięciami wprzód (rys. 807).

Punkty niższego rzędu (IV-ego przy istniejącym III rzędzie triangulacji państwowej), na których obserwacje będą dokonane, oznaczane są znakiem umówionym $\overset{\triangle}{\odot}$, bez obserwacji—w kółku krzyżyk. Punkty wyższych rzędów oznaczamy dwoma koncentrycznemi kołami. Punkty główne niezależnej sieci lokalnej możemy oznaczać, jak punkty trzeciego rzędu.

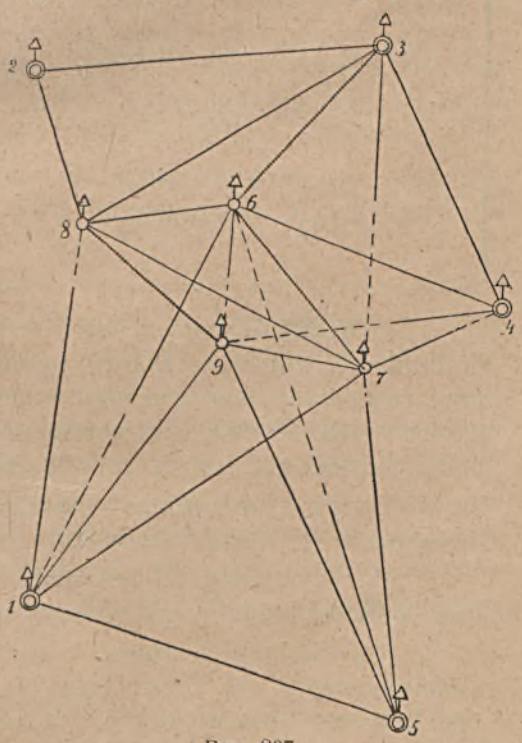
Jeżeli każdą dwustronną celową liczyć za dwie (wyznaczające punkt) dane, każdą zaś jednostronną za jedną, to punkt jest dostatecznie dokładnie wyznaczony, gdy jest określony co najmniej z 5 wyznaczających; zwykle jednak ilość danych winna być nieco większa. Pruska instrukcja katastralna wymaga dla punktów III i IV rzędu co najmniej 6, przeciętnie 8, wyznaczających, i tylko dla podrzędnych punktów, tygonometrycznie wyznaczonych, t. zw. beipunktów, wymaga co najmniej 4, przeciętnie 5 — 6 wyznaczających.

Przytem celowe, wyznaczające nowy punkt, winny być rozłożone równomiernie ze wszystkich stron określanego punktu; tak np., zbyt wiele celowych, biegnących w przybliżeniu wzdłuż jednej prostej nie daje dobrego rozwiązania wobec kątów przecięcia się, bliskich 0° lub 180° (rys. 806).



Rys. 806.

Do projektu uzupełniającej sieci załącza się t. zw. plan obliczenia, w którym dane punkty, t. j. punkty wyższego rzędu (np. III, gdy i III i IV rząd ma być wykonany) w grupie określanych punktów niższego rzędu są podkreślone; punkty, na zasadzie których określa się każdy nowy punkt, wypisane są łącznie z liczbami w nawiasach (2) lub (1) w zależności od tego, czy celowa, idąca od wypisanego do określanego punktu, jest dwustronna, czy jednostronna; rubryka ilość wyznaczających kierunków jest obliczona z sumy dwukrotnie wziętych dwustronnych kierunków i pojedyńczo wziętych jednostronnych.



Rys. 807.

Przy ustalaniu kolejności obliczenia nowych punktów, mniejsze numery bieżące otrzymują te nowe punkty, które są określone z największej ilości celowych, łączących je z danemi punktami; tak, np., punkt 6 jest zanumerowany wcześniej od 7-ego dlatego, że 6 punkt posiada 7 wyznaczających, siódmy zaś punkt będzie posiadać taką samą ilość wyznaczających po obliczeniu spółrzędnych 6-ego punktu, gdyż wtedy tylko celowa 6 — 7 nabierze znaczenia.

Z tych względów dla załączonego na rysunku przykładu plan obliczenia ułożylibyśmy (zgodnie z trygonometrycznym formularzem 5 *a* pruskiej instrukcji katastralnej), jak następuje.

Plan obliczenia.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
			Kierunki							
			z punktów danych lub na nie		z punktów określanych lub na nie					
№ № bieżące	№ № punktów	Punkty dane i rodzaj kierunku	dwustronne	jednostronne	dwustronne	jednostronne	Ilość wyznaczających kierunków	Ilość kierunków, przeznaczonych do orjentowania	Połowa wszystkich określanych kierunków	UWAGI
1	6	3 (2), 4 (2), 5 (1), 1 (1), 2 (2)	3	2			7	2	1,5	
2	7	3 (1), 4 (1), 5 (2), 1 (2), 6 (2)	2	2	1		9	3	2	
3	8	2 (2), 3 (2), 1 (1), 6 (2), 7 (2)	2	1	2		9	4	2	
4	9	1 (2), 4 (1), 5 (2), 6 (1), 7 (2), 8 (2)	2	1	2	1	10	4	2	

Według Gaussa liczba kierunków, przeznaczonych do orjentowania (kolumna 9), winna przekraczać połowę wszystkich kierunków wewnętrznych; przy zachowaniu tego warunku rozpatrywany punkt może być określony przy pomocy graficznego rozwiązania zagadnienia o wcięciach; w innych wypadkach stosować należy rozwiązanie analityczne.

Przez dwustronne (orjentujące) kierunki pojmować należy wszystkie dwustronne kierunki, odnotowane w kolumnie 3.

Liczby, podane w kolumnie 10-ej, wskazują na połowę ilości kierunków, pomierzonych w określanym punkcie.

W kolumnie „uwagi" notujemy rodzaj wcięcia (wprzód, wstecz, skombinowane). W formularzu 5-a pruskiej instrukcji katastralnej dodana jest kolumna 11-a, w której wypisujemy Nr. Nr. formularza, według którego dany punkt ma być obliczany.

§ 399. Rejestr kierunkowy.

Przy obliczaniu uzupełniających punktów siatki należy układać rejestr azymutów (względnie kątów kierunkowych, gdy określane punkty są nawiązywane nie do lokalnej, lecz do państwowej sieci triangulacyjnej) i kierunków.

Rejestr ten składa się z 10 kolumn. Punkty, w których dokonano spostrzeżeń kątowych lub kierunkowych, wpisują się według rzędów: a więc przedewszystkiem dane punkty II i III rzędu następnie określane punkty III rzędu; dalej punkty dane IV rzędu, i potem — określane i t. d. Dla triangulacyj lokalnych najczęściej zachodzić będzie następujący podział: punkty I rzędu i punkty II rzędu. Tylko przy większych i bardziej szczegółowych triangulacjach lokalnych wejdą do rejestru i punkty III rzędu; przytem jako dane występować będą tylko punkty I i II rzędu.

Punkty dane wypisują się dla każdego rzędu za literą *a*, określane za literą *b*. W triangulacjach lokalnych podział ten zastąpiony będzie: a) punktami I rzędu i b) punktami niższych rzędów.

Pod tytułem każdego punktu *A* wypisują się odrazu następujące dane:

W kolumnie 1-ej nazwy celów obserwowanych z danego punktu.

W kolumnie 2-ej: 1 lub 2 w zależności od tego, czy celowa jest jedno czy dwustronna.

W kolumnie 3-ej: odsyłacze, wskazujące №№ zeszytu i stronic, skąd pochodzą wypisane spółrzędne i azymuty.

W kolumnie 4-ej: obliczone poprzednio φ prostych, łączących opisywany punkt *A* z punktami wyższego lub tego samego rzędu, ostatecznie obliczonemi. Ponieważ w opisywanym punkcie obserwowano również i punkty, które mają być obliczone, przeto w kolumnie 4-ej możemy wypełnić tylko część wierszy; wypisujemy te dane tuszem czerwonym.

W kolumnie 5-ej i 6-ej: odsyłacz do zeszytu i stronicy, z których przepisano kierunki α do kolumny 6-ej, spostrzeżone na opisywanem stanowisku.

W kolumnie 7-ej: różnice między wypisanemi czerwonym tuszem czynnikami kolumny 4 i odpowiedniemi kierunkami kolumny 6. Różnice te również wypisujemy tuszem czerwonym, wypisując średnią arytmetyczną *o* u dołu.

W kolumnie 8-ej: wypisujemy spostrzeżone kierunki kolumny 6-ej, zwiększone o średnią *o*, jako ostatecznie zorjentowane kierunki φ_s.

Gdy uzupełniające punkty kolejno zostaną obliczone w formularzach dla wcięć, wówczas azymuty prostych, łączących te punkty z podanemi poprzednio w rejestrze, wnosimy do kolumny 4 tych ostatnich tuszem czarnym, tworząc wreszcie różnice *v* danych kolumn 4 i 8, opisywane w kolumnie 9.

Jako sprawdzenie rachunku służy wzór:

$$[\varphi_s] = [\alpha] + n\,o$$ (patrz tabelkę str. 964).

REJESTR KIERUNKOWY.

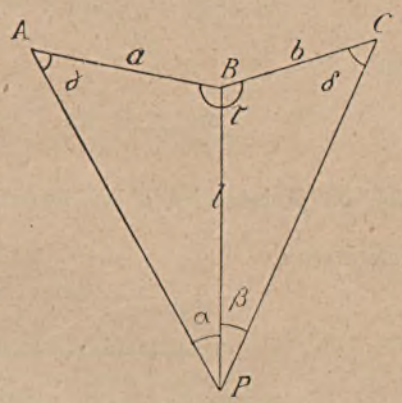
Cel do punktu	Jedno czy dwustronny	Odsyłacz do rejestru spółrzędnych	OSTATECZNE KĄTY KIERUNKOWE φ	Odsyłacz do rejestru kierunków	SPOSTRZEŻONE KIERUNKI α	RÓŻNICE $\varphi - \alpha$. KĄT $o = \frac{[\varphi - \alpha]}{m}$	Ostatecznie zorjentowane kierunki $\varphi_s = \alpha + o$	Poprawki $v = \varphi - \varphi_s$ +	Poprawki $v = \varphi - \varphi_s$ −	UWAGI
				P	u n k t	$\odot^{\triangle}$ 5				
6	2	8,3	60° 45' 15"5		0° 0' 0"	60° 45' 15"5	60° 45' 13"5	2,0		
14	1	10,4	76 1 25 2		15 16 11 3		76 1 24 8	0,4		
8	2	8,8	102 52 18 8		42 7 3 8	60 45 15 0	102 52 17 3	1,5		
15	2	10,7	111 4 34 0	1,5	50 19 20 0		111 4 33 5	0,5		
9	1	8,9	179 46 50 1		119 1 40 1	60 45 10	179 46 53 6		3,5	
					44 15 2	60 45 13 5	30 22 7	3,5	3,5	
				Sprawdzenie	46 7 5			4,4	3,5	
					30 22 7					
1	2	3	4	5	6	7	8	9		10

§ 400. Wcięcie wstecz.

(Zagadnienie Snelliusa lub Pothenota).

Jeżeli z dowolnego punktu pomierzymy kąty między kierunkami na trzy punkty o danych spółrzędnych, wówczas określenie spółrzędnych tego dowolnego punktu nosi nazwę zagadnienia o wcięciu wstecz. Do praktyki pomiarowej wprowadzili to zagadnienie Snellius i Pothenot. Rozpatrzmy je: dane są spółrzędne punktów A: x_a y_a, B: x_b y_b C: x_c y_c; określić spółrzędne punktu P, w którym pomierzono kąt $\alpha = APB$ i $\beta = BPC$.

Zagadnienie rozwiążemy, jeżeli obliczymy wielkość kątów γ i δ; gdyż długości i azymuty AB i BC obliczymy ze spółrzędnych, długości AP, BP i CP — z trójkątów ABP i BCP, a azymuty tych boków również obliczymy przy pomocy kątów γ i δ, w ten sposób otrzymamy wszelkie dane, niezbędne do określenia spółrzędnych punktu P. Mamy:



Rys. 808.

$$1)\quad \gamma + \delta = 360^0 - (\alpha + \beta + \tau),$$

gdzie

$$\tau = (BA) - (BC)$$

zaś

$$(BA) = arctg \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}$$

i

$$(BC) = arc\ tg \frac{y_c - y_b}{x_c - x_b}$$

oraz

$$a = \frac{y_b - y_a}{\sin (AB)} = \frac{x_b - x_a}{\cos (AB)}$$

$$b = \frac{y_c - y_b}{\sin (BC)} = \frac{x_c - x_b}{\cos (BC)}$$

2) różnicę kątów $\gamma - \delta$ otrzymamy w następujący sposób:

$$l = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{b \sin \delta}{\sin \beta}$$

stąd

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \delta} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}$$

Wyraz

$$\frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta},$$ można obliczyć; oznaczmy go $ctg\ \mu$.

Wówczas będzie:

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \delta} = \frac{1}{tg\ \mu};$$

stąd

$$\frac{\sin \gamma - \sin \delta}{\sin \gamma + \sin \delta} = \frac{1 - tg\ \mu}{1 + tg\ \mu} = ctg\ (\mu + 45^0)$$

lecz:

$$\sin \gamma - \sin \delta = 2 \sin \frac{\gamma - \delta}{2} \cos \frac{\gamma + \delta}{2}$$

oraz:

$$\sin \gamma + \sin \delta = 2 \cos \frac{\gamma - \delta}{2} \sin \frac{\gamma + \delta}{2}$$

więc po podstawieniu we wzorze na $ctg\ (\mu + 45^0)$

otrzymamy

$$tg \frac{\gamma - \delta}{2} = tg \frac{\gamma + \delta}{2}\ ctg\ (\mu + 45^0)$$

Z równania tego, ponieważ μ, $\gamma + \delta = 360^0 - (\alpha + \beta + \tau)$ są znane, określimy $\gamma - \delta$; a, mając $\gamma + \delta$, łatwo znajdziemy γ i δ.

Mając γ i δ, obliczymy

$$(A\ P) = (A\ B) + \gamma$$

$$(C\ P) = (C\ B) - \delta$$

oraz

$$AP = \frac{a \sin (\alpha + \gamma)}{\sin \alpha}$$

$$CP = \frac{b \sin (\delta + \beta)}{\sin \beta}$$

a wreszcie i spółrzędne

$$x_p = x_a + AP \cos (A\ P) = x_c + CP \cos (C\ P)$$

$$y_p = y_a + AP \sin (A\ P) = y_c + CP \sin (C\ P)$$

Przeanalizujmy to zagadnienie.

I. Rozwiązanie tego zagadnienia jest możliwe wtedy, gdy określany punkt P nie leży na kole, przechodzącem przez dane trzy punkty A, B i C.

Byłoby bowiem:

$$\gamma + \delta = 180^0$$

oraz

$$\sin \gamma = \sin \delta$$

więc

$$ctg\ \mu = \frac{\sin \gamma}{\sin \delta} = 1,$$

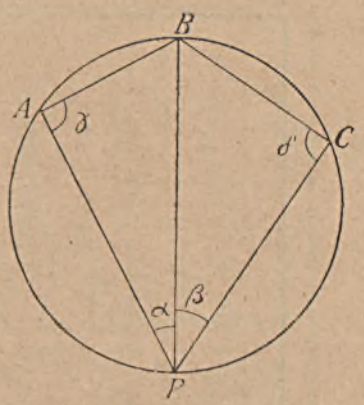
skąd

$$\mu = 45^0$$

zatem w równaniu

$$tg\ \frac{\gamma - \delta}{2} = tg\ \frac{\gamma + \delta}{2}\ cotg\ (\mu + 45^0)$$

wyraz $cotg\ (\mu + 45^0)$
przetworzyłby się w $ctg\ 90^0 = 0$



Rys. 809.

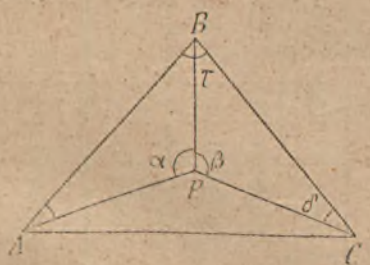
wyraz zaś

$$tg\ \frac{\gamma + \delta}{2} = tg\ 90^0 = \infty$$

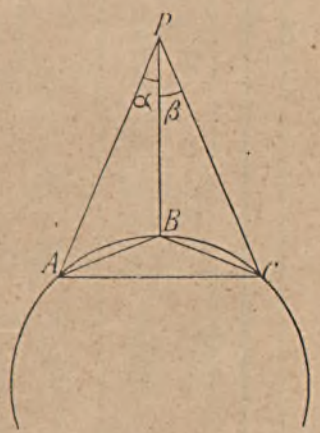
to, że w takiem położeniu punktu P nie otrzymamy rozwiązania, wynika i stąd jeszcze, że każdy punkt łuku APC, połączony z trzema punktami A, B i C, daje te same kąty α i β między poprowadzonemi prostemi, a więc rozwiązań może być nieograniczona ilość. Gdy ABC i P leżą na prostej, t. j. na kole o promieniu $R = \infty$, zadanie również jest nieokreślone.

II. Zagadnienie to nie da się dokładnie rozwiązać, jeżeli $tg\ \frac{\gamma + \delta}{2}$ jest bardzo wielki, t. j. gdy $\frac{\gamma + \delta}{2}$ jest bardzo bliskie 90^0, a $\gamma + \delta$ bardzo bliskie 180^0, co ma miejsce wówczas, gdy punkt P leży w bezpośredniej bliskości koła, przechodzącego przez dane trzy punkty.

III. Najdogodniejszem położeniem określanego punktu w stosunku do trzech danych jest takie, gdy określany punkt leży albo wewnątrz trójkąta, którego wierzchołkami są trzy dane punkty,

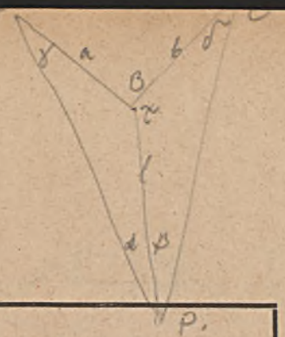


Rys. 810.



Rys. 811.

albo też takie, gdy określany punkt leży nazewnątrz koła, oprowadzonego przez trzy dane punkty, i przytem, gdy żadna z prostych, łączących określany punkt z danemi, nie przecina boków trójkąta, którego wierzchołkami są



PRZYKŁAD

na wcięcie punktu wstecz (Pothenot).

Patrz rys. 808 str. 965.

$(AB) = \varphi_{ab}$ .....

$$\operatorname{tg}\varphi_{ab} = \frac{Y_b - Y_a}{X_b - X_a}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_{cb} = \frac{Y_b - Y_c}{X_b - X_c}$$

$$\tau = \varphi_{ab} - \varphi_{cb}$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{a \sin\beta}{b \sin\alpha}$$

$$a = \frac{Y_b - Y_a}{\sin\varphi_{ab}} = \frac{X_b - X_a}{\cos\varphi_{ab}}$$

$$b = \frac{Y_b - Y_c}{\sin\varphi_{cb}} = \frac{X_b - X_c}{\cos\varphi_{cb}}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\gamma - \delta) = \operatorname{ctg}(\tfrac{1}{4}\pi + \mu)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\gamma + \delta)$$

$$\Delta Y_{ap} = \frac{a \sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha}\sin\varphi_{ap}$$

$$\Delta X_{ap} = \frac{a \sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha}\cos\varphi_{ap}$$

$$\Delta Y_{cp} = \frac{b \sin(\beta+\delta)}{\sin\beta}\sin\varphi_{cp}$$

$$\Delta X_{cp} = \frac{b \sin(\beta+\delta)}{\sin\beta}\cos\varphi_{cp}$$

Sprawdzenie

$$(Y_b - Y_a) - (Y_b - Y_c) = Y_c - Y_a$$
$$X_b - X_a - (X_b - X_c) = X_c - X_a$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\sin\delta}{\sin\gamma}$$

$$Y_p = Y_a + \Delta Y_{ap} = Y_c + \Delta Y_{cp}$$
$$X_p = X_a + \Delta X_{ap} = X_c + \Delta X_{cp}$$

A: Bazylika						*B*: Komin garbarni Grochów		*C*: Gocław	
Y_b	+	5118,80	X_b	+	778,15	$\log(Y_b - Y_a)$	3.269 3028	$\log(Y_b - Y_c)$	2.763 6675$_n$
Y_a	+	3259,70	X_a	+	2240,10	$\log(X_b - X_a)$	3.164 9326$_n$	$\log(X_b - X_c)$	3.136 2860
Y_c	+	5699,12	X_c	−	590,48				
$Y_b - Y_a$	+	1859,10	$X_b - X_a$	−	1461,95	log tg φ_{ab}	0.104 3702$_n$	log tg φ_{cb}	9.627 3815$_n$
$Y_b - Y_c$	−	580,32	$X_b - X_c$	+	1368,63	log sin φ_{ab}	9.895 4589	log sin φ_{cb}	9.591 4795$_n$
$Y_c - Y_a$	+	2439,42	$X_c - X_a$	−	2830,58	log cos φ_{ab}	9.791 0888$_n$	log cos φ_{cb}	9.964 0978
						log a	3.373 8438	log b	3.172 1881

φ_{ab} 51° 49′ 9″,7	128	10	50,3	log a	3.373 8438	log sin φ_{ap}		9.790 5935					
φ_{cb} 22° 58′ 39″,7	337	1	20,3	clg b	6.827 8119	log a	+	3.373 8438	+				
$\tau = \varphi_{ab} - \varphi_{cb}$	151	9	30,0	clg sin α	0.101 4682	clg sin α		0.101 4682					
α	52	20	23,0	log sin β	9.946 0402	log sin $(\alpha+\gamma)$		9.960 8306					
β	117	58	25,9	log tg μ	0.249 1641	log cos φ_{ap}		9.895 7646$_n$					
$2S = \alpha + \beta + \tau$	321	28	18,9	μ	60° 36′ 7″,3	log ΔY_{ap}		3.226 7362					
S	160	44	9,4	$\frac{1}{4}\pi + \mu$	105 36 7 ,3	log ΔX_{ap}		3.331 9072$_n$					
$\frac{1}{2}(\gamma+\delta) = \pi - S$	19	15	50,6	log ctg $(\frac{1}{4}\pi+\mu)$	9.445 9824$_n$	log sin φ_{cp}		9.869 8119$_n$					
				log tg $\frac{1}{2}(\gamma+\delta)$	9.543 4358	log b	+	3.172 1881	+				
$\frac{1}{2}(\gamma-\delta)$	−5	34	26,4	log tg $\frac{1}{2}(\gamma-\delta)$	8.989 4182$_n$	clg sin β		0.053 9598					
$\gamma = \frac{1}{2}(\gamma+\delta) + \frac{1}{2}(\gamma-\delta)$	13	41	24,2	$\alpha + \gamma$	66° 1′ 47″,2	log sin $(\beta+\delta)$		9.781 3485					
$\delta = \frac{1}{2}(\gamma+\delta) - \frac{1}{2}(\gamma-\delta)$	24	50	17,0	$\beta + \delta$	142 48 42 ,9	log cos φ_{cp}		9.827 0570					
$\varphi_{ap} = \varphi_{ab} + \gamma$	141	52	14,5	τ	151 9 30 ,0	log ΔY_{cp}		2.877 3083$_n$					
$\varphi_{cp} = \varphi_{cb} - \delta$	312	11	3,3	2π	360 0 0 ,1	log ΔX_{cp}		2.834 5534					

Y_a	+	3259,70	X_a	+	2240,10	Y_c	+	5699,12	X_c	−	590,48	Y_p	+ 4945,23
ΔY_{ap}	+	1685,53	ΔX_{ap}	−	2147,37	ΔY_{cp}	−	753,89	ΔX_{cp}	+	683,21	X_p	+ 92,73
Y_p	+	4945,23	X_p	+	92,73	Y_p	+	4945,23	X_p	+	92,73		wynik.

dane punkty. Te położenia określanego punktu nazywamy najdogodniejszemi, gdyż niema wątpliwości, że określany punkt nie leży na kole, przechodzącem przez trzy dane punkty, lub wpobliżu tego koła.

IV. Przy obliczeniu $ctg\ \mu = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}$ otrzymujemy dwa wyniki μ i $\mu \mp 180^0$; ponieważ zaś kąt μ potrzebny jest jedynie dla rozwiązania równania $tg \frac{\gamma - \delta}{2} = tg \frac{\gamma + \delta}{2} ctg\ (\mu + 45^0)$, z którego otrzymamy te same $\frac{\gamma - \delta}{2}$ bez względu na to, czy bierzemy μ czy $\mu \mp 180^0$, gdyż $ctg\ (\mu + 45^0) = ctg\ (\mu \mp 180^0 + 45^0)$, więc bierzemy jako wynik z μ i $\mu \mp 180^0$ ten, który jest ostrym kątem.

Z równania $tg \frac{\gamma - \delta}{2} = tg \frac{\gamma + \delta}{2} ctg\ (\mu + 45^0)$ otrzymamy dla wyrazu $\frac{\gamma - \delta}{2}$ dwa wyniki 1) $\frac{\gamma - \delta}{2}$ i 2) $\frac{\gamma - \delta}{2} \mp 180^0$, lecz każdy z kątów γ i δ jest mniejszy od 180^0, jako kąt trójkątu; stąd $\frac{\gamma}{2}$ i $\frac{\delta}{2}$ są mniejsze od 90^0, zatem ich różnica $\frac{\gamma - \delta}{2}$ może leżeć albo w pierwszej ćwiartce, t. j. zawierać się w granicach od 0^0 do 90^0, albo też w czwartej ćwiartce, t. j. zawierać się w granicach od 270^0 do 360^0.

Gdy więc $tg \frac{\gamma - \delta}{2}$ będzie dodatni, ostry kąt $\frac{\gamma - \delta}{2}$ leży w pierwszej ćwiartce; gdy zaś $tg \frac{\gamma - \delta}{2}$ będzie wielkością ujemną, wówczas rozwiązaniem będzie dopełnienie obliczonego ostrego kąta $\frac{\gamma - \delta}{2}$ do 360^0.

W wyniku tak kąt γ, jak również kąt δ, winny być mniejsze od 180^0; biorąc zatem $\frac{\gamma - \delta}{2}$ jako dopełnienie ostrego ujemnego kąta do 360^0, zwracać należy uwagę przy obliczaniu 2γ i 2δ z wyrazów $\gamma - \delta$ oraz $\gamma + \delta$ na powiększanie lub zmniejszanie ich wartości o 360^0.

§ 401. Rozwiązanie zagadnienia Snelliusa sposobem Collinsa.

Wyobraźmy sobie koło, poprowadzone przez dwa dane punkty A i C i określany punkt P.

Przecięcie prostej BP z kołem daje punkt K; jeżeli określimy spółrzędne tego punktu, to obliczymy azymut prostej BKP ze spółrzędnych punktów B i K. Mając zaś azymut prostej BP i pomierzone kąty α i β, określimy azymuty prostych AP i CP, a z nich i z azymutów prostych AB i BC określimy kąty γ i δ, co nam da możność obliczenia boków AP, BP i CP; mając zaś ich długości i azymuty, obliczymy spółrzędne punktu P. Ciężar więc tego sposobu polega na odnalezieniu spółrzędnych punktu K.

Połączmy punkt K z punktami A i C; otrzymamy: $KAC = \beta$ i $KCA = \alpha$ wskutek tego, że kąty te są oparte o wspólne łuki.

Stąd:

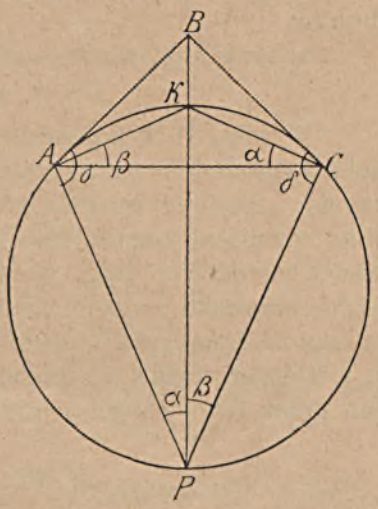
$$(AK) = (AC) - \beta;$$

$$AK = \frac{AC \cdot \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$$

$$(CK) = (CA) + \alpha;$$

$$CK = \frac{AC \cdot \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$$

$$x_k = x_A + AK \cos (AK) = x_c + CK \cos (CK)$$



Rys. 812.

$$y_k = y_A + AK \sin (AK) = y_c + CK \sin (CK)$$

Mając x_k, y_k, określamy azymut $(PB) = (KB)$;

$$\operatorname{tg} (PB) = \frac{y_b - y_k}{x_b - x_k}$$

Następnie liczymy azymuty, kąty δ i β i długości boków AP i BP:

$$(AP) = (PA) \pm 180^0 = (PB) - \alpha \pm 180^0$$

$$(CP) = (PC) \pm 180^0 = (PB) + \beta \pm 180^0$$

$$\gamma = (AP) - (AB) \qquad \delta = (CB) - (CP)$$

$$AP = \frac{AB \sin (\alpha + \gamma)}{\sin \alpha}; \qquad CP = \frac{BC \sin (\delta + \beta)}{\sin \beta}$$

Wreszcie obliczymy spółrzędne punktu P:

$$x_P = x_a + AP \cos (AP) = x_c + CP \cos (CP)$$

$$y_P = y_a + AP \sin (AP) = y_c + CP \sin (CP)$$

Metoda Collinsa rozwiązania zagadnienia Pothenota obecnie jest więcej stosowana, niż poprzednio rozpatrzona.

UWAGI:

Dla uniknięcia grubych błędów w rozwiązaniu zagadnienia Snelliusa najlepiej wykreślić w drobnej skali trzy dane punkty i następnie należy:

a) przy stosowaniu 1-szego sposobu określany punkt albo zbudować graficznie, gdy nie pamiętamy dokładnie położenia szukanego punktu odnośnie do trzech danych, lub też nanieść go na oko, jeżeli z pewnością wiemy,

czy leży wewnątrz, czy nazewnątrz trójkąta, którego wierzchołkami są dane punkty. Przed obliczeniem ustalamy z rysunku wielkości, wchodzące do rachunku;

b) przy stosowaniu sposobu Collinsa rysunek jest również konieczny.

Historja tematu.

W roku 1617 holandczyk Willebrord Snellius dał pierwsze konstrukcyjne i trygonometryczne rozwiązanie zagadnienia w swej pracy „Eratosthenes Batavus". Snellius wprowadził do geodezji triangulację. W roku 1671 John Collins rozwiązał zagadnienie zapomocą punktu pomocniczego. Bohnenberger i Bessel zastosowali jego rozwiązanie do stolika. Wśród wielu uczonych, których nazwisko związane jest z zagadnieniem Snelliusa wymienić należy Pothenota i Lamberta. Cassini dał rozwiązanie zagadnienia zapomocą dwu kół, z których każde przechodzi przez środkowy i określany punkt, oraz jedno przez lewy dany, drugie przez prawy.

§ 402. Zagadnienie Hanzena.

Przy nawiązaniu nowego punktu do punktów triangulacji, może zajść wypadek, że z nowego punktu widoczne będą zaledwie dwa punkty triangulacyjne.

Hanzen daje sposób obliczenia spółrzędnych określanego punktu przy pomocy takiego punktu pomocniczego, z którego widać dwa punkty dane i określany punkt.

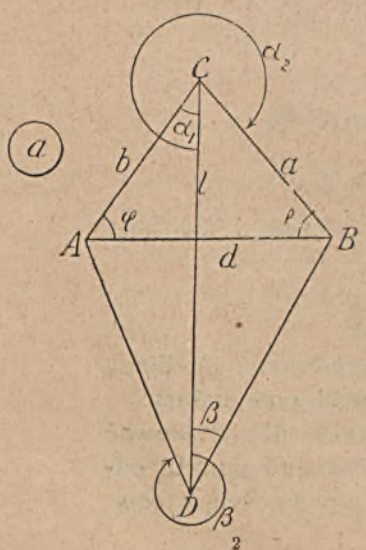
Często zagadnienie Hanzena nosi nazwę zagadnienia określenia dwu nowych punktów na podstawie dwu punktów o znanych spółrzędnych.

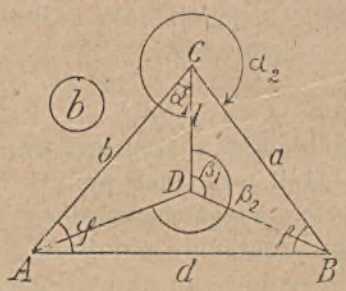
Oznaczmy zapomocą $A\ (x_a\ y_a)$, $B\ (x_b\ y_b)$ dwa dane punkty, zapomocą C i D określane punkty, na każdym z których spostrzegamy kierunki: na sprzężony określany punkt oraz w kierunku prawym na obydwa z danych punktów.

Wszystkie charakterystyczne położenia dwu określanych punktów w stosunku do danych wykazane są na rysunkach 813, 814 i 815. Wszelkie inne położenia otrzymamy, odwracając o 180° trzy zasadnicze rysunki. Wyprowadzone wzory będą mieć zastosowanie tak do wykreślonych, jak i do odwróconych o 180° rysunków pod warunkiem, że po odwróceniu tak punkty, jak kąty zachowają swe znakowanie.

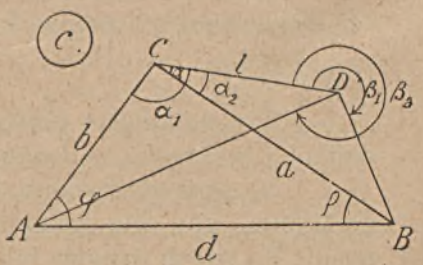
Zagadnienie sprowadza się do określenia kątów ρ i φ, gdyż wówczas w Δ-cie ABC będzie

Rys. 813.





Rys. 814.



Rys. 815.

dany bok $AB = d$ i dwa przyległe kąty; łatwo więc obliczymy spółrzędne punktu C, a następnie i punktu D.

Mianowicie ze spółrzędnych danych obliczymy $d = AB$ i azymut (BA):

$$\operatorname{tg}(AB) = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

$$d = \frac{y_b - y_a}{\sin(AB)} = \frac{x_b - x_a}{\cos(AB)}$$

W wypadkach, podanych na rys. 813 i 814,

$$\rho + \varphi + 360^0 - (\alpha_2 - \alpha_1) = 180^0$$

skąd

$$\rho + \varphi = \alpha_2 - \alpha_1 - 180^0$$

w wypadku, podanym na rys. 815, otrzymamy z Δ-a ABC podobny wzór, gdyż

$$\rho + \varphi = 180^0 - (\alpha_1 - \alpha_2) = \alpha_2 - \alpha_1 + 180^0$$

Tak więc sumę kątów $\rho + \varphi$ określimy w prosty sposób w każdym wypadku. Różnicę tych samych kątow odnajdziemy z proporcji

$$\frac{\sin\rho}{\sin\varphi} = \frac{b}{a}$$

mianowicie (na rys. 813 kąt CDB oznaczyć β_1)

$$\frac{b}{l} = \frac{\sin(360 - \beta_2)}{\sin(360 - \beta_2 + \alpha_1)} = \frac{\sin\beta_2}{\sin(\beta_2 - \alpha_1)};$$

$$\frac{a}{l} = \frac{\sin\beta_1}{\sin(\beta_1 + 360^0 - \alpha_2)} = \frac{\sin\beta_1}{\sin(\beta_1 - \alpha_2)}$$

stąd przez dzielenie ostatnich proporcyj otrzymamy:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta_2 \sin(\beta_1 - \alpha_2)}{\sin(\beta_2 - \alpha_1)\sin\beta_1}$$

prawą część możemy przyrównać do ctg Θ, który to wyraz możemy obliczyć z pomierzonych kątów α i β.

Stąd

$$\frac{\sin\rho}{\sin\varphi} = \frac{1}{\operatorname{tg}\Theta}$$

$$\frac{\sin\rho + \sin\varphi}{\sin\rho - \sin\varphi} = \frac{1 + \operatorname{tg}\Theta}{1 - \operatorname{tg}\Theta} = \operatorname{tg}(45^0 + \Theta)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\rho + \varphi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\rho - \varphi}{2} = \operatorname{tg}(45^0 + \Theta)$$

skąd:

$$\operatorname{tg}\frac{\rho - \varphi}{2} = \operatorname{tg}\frac{\rho + \varphi}{2}\operatorname{ctg}(45^0 + \Theta)$$

Ponieważ $\rho + \varphi$ jest znane, Θ obliczone, więc i $\rho - \varphi$ określimy z ostatniego równania; mając $\rho + \varphi$ oraz $\rho - \varphi$, obliczymy ρ oraz φ.

A wtedy z $\Delta\ A\,B\,C$ obliczymy:

$$A\,C = d\,\frac{\sin\,\rho}{\sin\,A\,C\,B}$$

$$B\,C = d\,\frac{\sin\,\varphi}{\sin\,A\,C\,B}$$

oraz azymuty:

$$(A\,C) = (A\,B) - \varphi$$

$$(B\,C) = (B\,A) + \rho$$

i spółrzędne:

$$x_c = x_a + A\,C\,\cos\,(A\,C) = x_b + B\,C\,\cos\,(B\,C)$$

$$y_c = y_a + A\,C\,\sin\,(A\,C) = y_b + B\,C\,\sin\,(B\,C)$$

Punkt D określimy z Δ-a $A\,D\,C$, określając kąt $D\,A\,C$ i postępując dalej, jak z Δ-em $A\,B\,C$.

A więc:

$$(C\,D) = (C\,A) - \alpha_1$$

$$l = C\,D = b\,\frac{\sin\,(\beta_2 - \alpha_1)}{\sin\,\beta_2}$$

Tak np., w wypadku, podanym na rys. 815,

$$l = b\,\frac{\sin\,(\alpha_1 + 360^0 - \beta_2)}{\sin\,(360^0 - \beta_2)} = b\,\frac{\sin\,[360^0 - (\beta_2 - \alpha_1)]}{\sin\,(360^0 - \beta_2)} =$$

$$= b\,\frac{\sin\,(\beta_2 - \alpha_1)}{\sin\,\beta_2}$$

Dla kontroli obliczymy

$$l = a\,\frac{\sin\,(\beta_1 - \alpha_2)}{\sin\,\beta_1}$$

Wreszcie:

$$x_d = x_c + l\,\cos\,(C\,D);$$

$$y_d = y_c + l\,\sin\,(C\,D);$$

Ze szczególniejszych wypadków dla zagadnienia Hanzena przytoczyć należy takie, kiedy:

1) wszystkie 4 punkty leżą na jednej prostej; zadanie staje się wówczas nieokreślone, gdyż kąty α i β są równe 0^0 i 180^0, stosunek zaś sinusów przybiera postać $\frac{0}{0}$;

2) jeden z danych punktów leży na prostej, łączącej określane punkty.

Ponieważ (rys. 816).

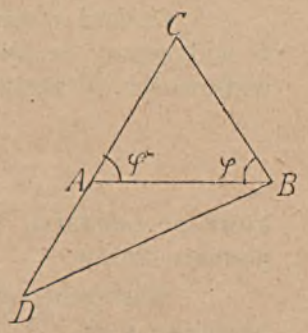
$$\sphericalangle CDA = \beta_2 = 0$$

i

$$\sphericalangle DCA = \alpha_1 = 0,$$

więc

$$\frac{\sin \rho}{\sin \varphi} = \frac{1}{tg\,\Theta} = \frac{\sin \beta_2 \sin (\beta_1 - \alpha_2)}{\sin (\beta_2 - \alpha_1) \sin \beta_1} = \frac{0}{0}$$



Rys. 816.

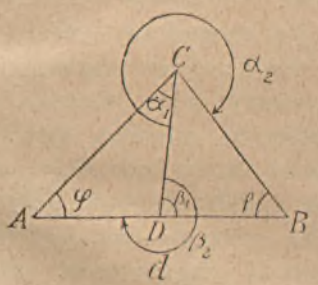
i nie możemy określić φ i ρ; zadanie jest nieokreślone;

3) gdy jeden z określanych punktów leży na prostej, łączącej dane punkty, zadanie może być rozwiązane bez stosowania powyższych wzorów, które przybierają postać nieokreśloną;

mianowicie, obliczymy (rys. 817):

$$\varphi = \beta_1 - \alpha_1$$

$$\rho = \alpha_2 - \beta_1 - 180^0$$



Rys. 817.

$$AC = d \frac{\sin \rho}{\sin (\varphi + \rho)}$$

$$BC = d \frac{\sin \varphi}{\sin (\varphi + \rho)}$$

$$AD = AC \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1}$$

$$BD = BC - \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_1}$$

$$DC = AC \frac{\sin \varphi}{\sin (\varphi + \alpha_1)} = BC \frac{\sin \varphi}{\sin \beta_1}$$

$$(AC) = (AB) - \varphi$$

$$(DC) = (AB) - \beta_1$$

$$(BC) = (BA) + \rho$$

i wreszcie

$$x_c = x_a + AC \cos (AC) = x_b + BC \cos (BC)$$

$$y_c = x_a + AC \sin (AC) = y_b + BC \sin (BC)$$

oraz

$$x_d = x_a + AD \cos (AD) = x_b + DB \cos (BD)$$

$$y_d = y_a + AD \sin (AD) = y_b + BD \sin (BD)$$

Ostatni wypadek może być stosowany w praktyce; mianowicie punkt D wytyczymy ze środka zapomocą teodolitu na prostej AB. Kontrolą prawidłowości wytyczenia będzie równanie

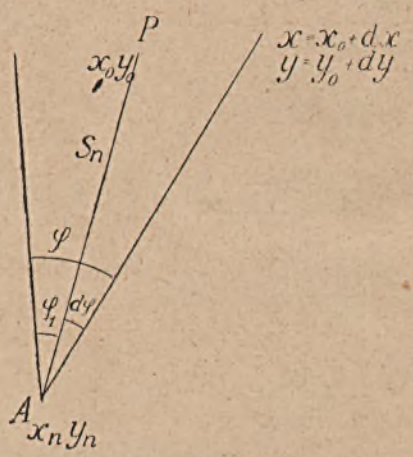
$$\beta_2 - \beta_1 = 180^0,$$

które po pomiarze kątów β_2 i β_1 winno pozostać w granicach dokładności pomiaru kątów.

Następnie punkt D, jak również punkty A i B, powinny być widoczne z C.

§ 403. Podstawy wyrównania wcięć, jako określenia punktu przy spostrzeżeniach pośrednich.

Rozpatrzymy wyrównanie, które stawia sobie za cel ostateczny określenie poprawek spółrzędnych przybliżonych wcinanego punktu za pośrednictwem pomierzonych nadliczbowo kątów, lub kierunków.



Rys. 818.

Spółrzędne przybliżone wcinanego punktu otrzymują się w dowolny sposób bądź to w drodze obliczenia tylko dwu przecinających się kierunków — bądź też przy pomocy rozwiązania zagadnienia Pothenota. Będziemy więc określać poprawki spółrzędnych, mierząc kąty lub kierunki — innemi słowy będziemy mieć do czynienia ze spostrzeżeniami pośredniemi. Podstawą naszego postępowania będzie rozwiązanie zagadnienia: jeżeli z dowolnego punktu $A\ (x_n\ y_n)$ bierzemy kierunek do innego, wcinanego punktu P, to jaki będzie stopień odchylenia kierunku do wcinanego punktu, skoro spółrzędne tego ostatniego zmienią się o dx i dy?

Rysunek przedstawia kierunek z punktu $A\ (x_n\ y_n)$ na $P\ (x_0\ y_0)$; długość prostej, łączącej te punkty, wynosi s_n. Jeżeli spółrzędne punktu P zmienią się bardzo nieznacznie z x_0 na $x = x_0 + dx$ i z y_0 na $y = y_0 + dy$, wówczas i azymut zamieni się z φ_1 na pewien $\varphi = \varphi_1 + d\varphi$.

A. Ze wzoru

$$tg\,\varphi = \frac{y - y_n}{x - x_n}$$

mamy:

$$\varphi = arc\,tg\,\frac{y - y_n}{x - x_n}$$

skąd

$$d\varphi = \frac{-dx}{1 + \left(\frac{y - y_n}{x - x_n}\right)^2} \cdot \frac{y - y_n}{(x - x_n)^2} + \frac{dy}{1 + \left(\frac{y - y_n}{x - x_n}\right)^2} \cdot \frac{1}{x - x_n}$$

$$d\varphi = -\frac{dx}{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} \cdot (y - y_n) +$$

$$+ \frac{dy}{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2} \cdot (x - x_n)$$

albo, wprowadzając s — długość prostej AP, otrzymamy:

$$d\varphi = -\frac{y - y_n}{s^2} dx + \frac{x - x_n}{s^2} dy \qquad (1)$$

lub w mierze kątowej:

$$d\varphi'' = -\rho'' \frac{y - y_n}{s^2} dx + \rho'' \frac{x - x_n}{s^2} dy \qquad (1\,a)$$

Ze wzoru

$$\log tg\,\varphi = \log (y - y_n) - \log (x - x_n)$$

$$\frac{d\varphi}{tg\,\varphi \cos^2 \varphi} = \frac{dy}{y - y_n} - \frac{dx}{x - x_n}$$

skąd

$$d\varphi = -\frac{\sin\varphi \cos\varphi}{x - x_n} dx + \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{y - y_n} dy \qquad (2)$$

lub w mierze kątowej:

$$d\varphi = -\rho'' \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{x - x_n} dx + \rho'' \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{y - y_n} dy \qquad (2\,a)$$

Uwzględniając w 1-ym wzorze równania:

$$\frac{y - y_n}{s} = \sin\varphi$$

$$\frac{x - x_n}{s} = \cos\varphi$$

otrzymamy:

$$d\varphi = -\frac{\sin\varphi}{s} dx + \frac{\cos\varphi}{s} dy \qquad (3)$$

lub w mierze kątowej:

$$d\varphi'' = -\rho'' \frac{\sin\varphi}{s} dx + \rho'' \frac{\cos\varphi}{s} dy$$

Wzór ten ma największe zastosowanie, przytem, ponieważ w praktyce $d\varphi$ wyrażać należy w mierze kątowej, przeto prawą część równania mnożymy przez $\rho'' = 206265$ i wówczas wzór przybiera postać:

$$d\varphi'' = -\rho'' \frac{\sin\varphi}{s} dx + \rho'' \frac{\cos\varphi}{s} dy \qquad (4)$$

o ile s, dy i dx wyrażamy w tych samych jednostkach.

Ponieważ wielkości φ i s charakteryzują dany kierunek, przeto wielkości

$$a = -\rho \frac{\sin\varphi}{s} = -\rho \frac{y - y_n}{s^2} = -\rho \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{x - x_n}$$
$$b = \rho \frac{\cos\varphi}{s} = \rho \frac{x - x_n}{s^2} = \rho \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{y - y_n} \qquad (5)$$

nazywamy spółczynnikami kierunkowemi.

Zmianę kierunku $d\varphi$ przy zmianie spółrzędnych końca odcinka o dx i dy wyrazić możemy zapomocą wzoru:

$$\underline{d\varphi = a\,dx + b\,dy} \qquad (5a)$$

Wielkości spółczynników kierunkowych możemy obliczyć zapomocą różnic logarytmicznych.

Przypuśćmy, że spółrzędne końca odcinka o azymucie φ uległy zmianie o wielkości dx i dy; oczywiście zmieni się również azymut o pewne $d\varphi$.

Ponieważ

$$tg\,\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_n}{x - x_n} \qquad (6)$$

przeto i

$$tg\,(\varphi + d\varphi) = \frac{\Delta y + dy}{\Delta x + dx}$$

oraz

$$\log tg\,(\varphi + d\varphi) = \log(\Delta y + dy) - \log(\Delta x + dx) \qquad (7)$$

lecz, korzystając ze zmian logarytmów przy zmianie φ o $1''$, oraz zmianie Δx i Δy o 1 *m.*, czy 1 *dm.* (gdy Δx i Δy brać będziemy odpowiednio w metrach lub decymetrach), i oznaczając te zmiany symbolami

$$r_{tg\varphi},\ r_{\Delta y},\ r_{\Delta x},$$

przepiszemy (7)-e równanie w rozwiniętej formie i pod niem podpiszemy zlogarytmowane (6)-e równanie:

$$\log tg\,\varphi + r_{tg\varphi}\ d\varphi'' = \log \Delta y + r_{\Delta y}\,dy - \log \Delta x - r_{\Delta x}\,dx$$
$$\log tg\,\varphi = \log \Delta y - \log \Delta x \qquad (-)$$

stąd $$r_{tg\varphi}\ d\varphi'' = r_{\Delta y}\,dy - r_{\Delta x}\,dx$$

a więc

$$d\varphi'' = -\frac{r_{\triangle x}}{r_{tg\,\varphi}}\,dx + \frac{r_{\triangle y}}{r_{tg\,\varphi}} \qquad (8)$$

stąd:

$$a = -\frac{r_{\triangle x}}{r_{tg\,\varphi}}\,; \qquad b = \frac{r_{\triangle y}}{r_{tg\,\varphi}} \qquad (9)$$

Wielkości $r_{tg\,\varphi}$, $r_{\triangle x}$, $r_{\triangle y}$ otrzymujemy z tablic.

Pruska instrukcja katastralna wprowadza oznaczenia następujące:

$$\triangle \log \triangle x = r_{\triangle x}$$

$$\triangle \log \triangle y = r_{\triangle y}$$

$$\Delta \log tg\,\varphi = r_{tg\,\varphi}$$

i według tych oznaczeń spółczynniki kierunkowe są równe:

$$a = -\frac{\triangle \log \triangle x}{\Delta \log tg\,\varphi}$$

$$b = \frac{\Delta \log \triangle y}{\Delta \log tg\,\varphi} \qquad (10)$$

PRZYKŁAD:

$\log \triangle y$	3.56020_n	
$\log \triangle x$	2.20661	$a = -\frac{271}{-4{,}8} = +56{,}5$
$\log tg\,\varphi$	1.35359_n	
$\triangle \log \triangle y$	-12	
$\triangle \log \triangle x$	$+271$	$b = \frac{-12}{-4{,}8} = +2{,}5$
$\triangle \log tg\,\varphi$	$-4{,}8$	

Znaki $\triangle \log \triangle y$ i $\triangle \log \triangle x$ odpowiadają znakom $\triangle y$ i $\triangle x$; co się tyczy znaku $\triangle \log tg\,\varphi$, to znak ten jest $+$, kiedy ze wzrostem kąta rośnie i jego tangens, oraz znak jest $-$, kiedy ze wzrostem kąta tangens maleje.

Równanie

$$d\varphi = a\,dx + b\,dy$$

może być stosowane, np., w wypadku, kiedy po wyrównaniu kątów poligonu obliczyliśmy przyrosty i rozrzuciliśmy odchyłki przyrostów, należy zaś

dowiedzieć się, jakiej zmianie uległ azymut wskutek zamiany obliczonych na wyrównane przyrosty: np., dane są

$$\triangle y = 169{,}10 \qquad d\,x = +\,0{,}06$$
$$\triangle x = 99{,}43 \qquad d\,y = -\,0{,}04$$
$$s = 196{,}16$$

obliczymy, zaokrąglając:

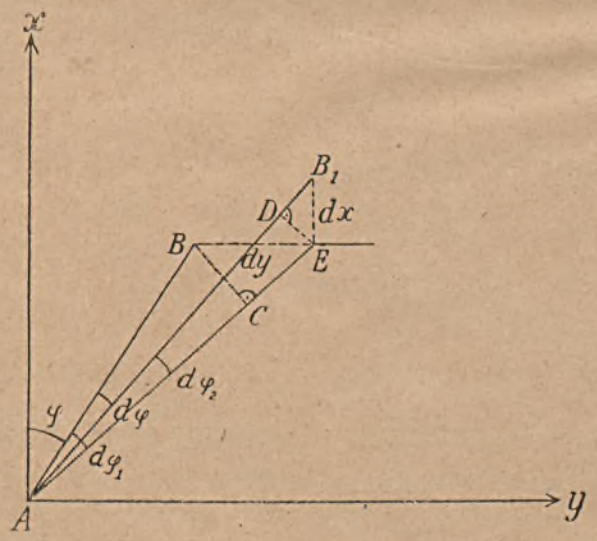
$$a_1 = -\frac{\triangle y}{s^2} = -\frac{170}{200^2} = -\,0{,}0042$$

$$b = \frac{\triangle x}{s^2} = \frac{100}{200^2} = 0{,}0025$$

$$d\,\varphi'' = \rho''\,(a_1\,d\,x + b_1\,d\,y) = 206\,265\,(-\,0{,}0042 \times 0{,}06 - 0{,}0025 \times 0{,}04) =$$

$$= 200{,}000\,(0{,}00035) = 70'' = 1'\,10''$$

B. Rozpatrzmy na rysunku 819 znaczenie spółczynników kierunkowych.



Rys. 819.

Przypuśćmy, że punkt B zmienia spółrzędne o $d\,x$ i $d\,y$ przy przesunięciu do punktu B_1.

Zmiana $d\,\varphi$ może być rozłożona na $d\,\varphi_1$, odpowiadającą przesunięciu $B\,E$, i $d\,\varphi_2$, odpowiadającą przesunięciu $E\,B_1$. Oznaczmy $A\,B = s$

$$d\,\varphi = d\,\varphi_1 - d\,\varphi_2$$

lecz

$$d\varphi_1 = \frac{BC}{s} \qquad d\varphi_2 = \frac{DE}{s}$$

gdyż sin małego łuku równy jest samemu łukowi, wyrażonemu w radjanach.

Lecz

$$BC = dy \cos CBE = dy \cos \varphi$$

$$DE = dx \sin DB_1E = dx \sin \varphi$$

więc

$$d\varphi = \frac{\cos \varphi}{s} dy - \frac{\sin \varphi}{s} dx$$

lub w sekundach:

$$d\varphi = -\rho'' \frac{\sin \varphi}{s} dx + \rho'' \frac{\cos \varphi}{s} dy$$

Wyprowadziliśmy więc wzór dla wypadku dodatnich dx i dy; w podobny sposób można ten wzór otrzymać i w innych wypadkach.

C. Spółczynniki kierunkowe obliczać możemy zapomocą tablic logarytmicznych, mając $\log \rho = 5.314425$ i określając φ w przybliżeniu jako równe φ_0, co w granicach wymaganej dokładności nie wpłynie na wielkości a i b; to samo dotyczy S:

$$tg\,\varphi = \frac{y_0 - y_n}{x_0 - x_n} \qquad S = \frac{y_0 - y_n}{\sin \varphi} = \frac{x_0 - x_n}{\cos \varphi}$$

przytem S z ostatnich wzorów określamy z sześcioznacznych tablic logarytmów, zaś

$$a = -\rho \frac{\sin \varphi}{S} \text{ i } b = \rho \frac{\cos \varphi}{S}$$

z czteroznacznych.

Lub też wybieramy spółczynniki kierunkowe ze specjalnie ułożonych tablic Jordana lub Seiferta, pamiętając przytem, że:

1) tablice Jordana ułożono w założeniu, iż dx i dy wyrażone są w decymetrach, S zaś w kilometrach, więc wzory, na zasadzie których Jordan stworzył tablice dla spółczynników kierunkowych, są:

$$a = -\frac{1}{10} \cdot \frac{\rho}{1000} \cdot \frac{\sin \varphi}{S} = -\frac{20{,}6265}{S} \sin \varphi = -\frac{r}{S}$$

$$b = \frac{1}{10} \cdot \frac{\rho}{1000} \cdot \frac{\cos \varphi}{S} = \frac{20{,}6265}{S} \cos \varphi = \frac{n}{S}$$

Wielkości r i n dla odpowiednich φ bierzemy z tablic i dzielimy przez S, wyrażone w kilometrach; S możemy określić z mapy w częściach kilometrowych lub obliczyć zapomocą 4-znacznych logarytmów.

2) Tablice Sejferta są oparte na przekształconych dla spółczynników kierunkowych wzorach, a mianowicie:

$$a = -\frac{\rho \sin \varphi}{S} = -\frac{\rho \sin \varphi \cos \varphi}{S \cos \varphi} = -\frac{\rho \sin \varphi \cos \varphi}{\Delta x}$$

$$b = \frac{\rho \cos \varphi}{S} = \frac{\rho \sin \varphi \cos \varphi}{S \sin \varphi} = \frac{\rho \sin \varphi \cos \varphi}{\Delta y}$$

W tablicach mamy dla odpowiednich wielkości:

$$A = \frac{\rho}{10} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$B = \frac{\rho^2}{100} \sin \varphi \cos \varphi$$

na zasadzie których możemy obliczyć spółczynniki kierunkowe:

$$a = -\frac{A}{\Delta x}\ ;\ b = \frac{A}{\Delta y},\ \text{oraz ich iloczyn}\ a\,b = -\frac{B}{S^2}$$

Wiedząc teraz, w jaki sposób otrzymujemy spółczynniki kierunkowe a i b, ustalimy wytyczne dla określenia sposobu wyznaczenia wielkości przyrostów dx i dy dla spółrzędnych przybliżonych wcinanego punktu.

Otóż jeżeli dla każdego wcinającego kierunku ustalimy związek, zachodzący pomiędzy błędami pomiarów, znanemi wynikami spostrzeżenia, a wielkością $d\varphi$ wyrażającą zmianę kąta kierunkowego, wówczas wyprowadzimy związek, wyznaczający zależność między wynikami spostrzeżeń a przyrostami dx i dy spółrzędnych przybliżonych. Wiedząc zaś, w jaki sposób tworzą się te związki i jaką one mają postać, nie będziemy już więcej mieć trudności w obliczeniu poprawek dx i dy. Przejdziemy do ustalenia związków między dx i dy a wynikami spostrzeżeń.

§ 404. Wielokrotne wcięcie wprzód zapomocą pomiaru kierunków.

Dla określenia spółrzędnych wcinanego wprzód punktu wystarczy pomierzyć na dwu punktach o danych spółrzędnych kierunki na punkt wcinany i którykolwiek z danych. Wcięcie wprzód z dwu danych punktów daje jedno tylko rozwiązanie bez możności określenia stopnia dokładności lub wiarogodnej kontroli takiego wyznaczenia. To też przy uzupełnianiu sieci wcięciami wprzód staramy się otrzymać dla powiększenia dokładności dane nadliczbowe, które tworzymy, wcinając określony punkt z trzech lub więcej punktów o danych spółrzędnych.

Przy n kierunkach, spostrzeżonych z n danych punktów na określany punkt, nadliczbowych spostrzeżeń otrzymujemy $n - 2$. Powstaje pytanie, w jaki sposób na podstawie wszystkich danych otrzymać najprawdopodobniejsze rozwiązanie.

Przypuśćmy, że na punktach P_1 (x_1, y_1), P_2 (x_2, y_2) ..... o danych spółrzędnych dokonaliśmy pomiaru kierunków. Na każdym z tych punktów pomierzono kierunki do wcinanego punktu P, oraz inne kierunki, takie jednakże, że wśród nich zawsze znajduje się co najmniej jeden kierunek do innego punktu o danych spółrzędnych. Tak więc (rys. 820) w punkcie P_1 zaobserwowano kierunek do punktu P_1' (x_1', y_1'), jako kierunek początkowy. Za początkowy kierunek na punkcie P_2 obrano cel do punktu P_2' (x_2', y_2') i t. d.

Ponieważ przy wyrównaniu stanowisk redukujemy wszystkie kierunki na kierunek początkowy, jako zerowy, więc średnie zredukowanych kierunków do punktu P_1, t. j. wielkości α_1, α_2, α_3 i t. d. są spostrzeżonemi kierunkami. Przez wszystkie punkty na rysunku poprowadzono kierunek, równoległy do osi x układu spółrzędnych.

Kąty O_1, O_2, O_3 oznaczają azymuty (względnie kąty kierunkowe) prostych $P_1 P_1'$, $P_2 P_2'$ i t. d. Kąty $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ oznaczają azymuty kierunków $P_1 P$, $P_2 P$ ... Wreszcie kąty $\psi_1, \psi_2 \ldots$ oznaczają odwrotne azymuty tych prostych, a więc azymuty prostych, łączących określany punkt P z danemi punktami.

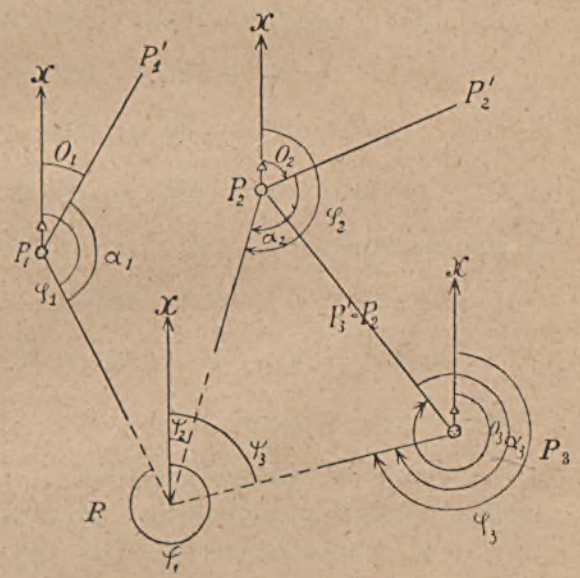
Oczywiście każde:

$$\psi = \varphi \pm 180_0$$

Wielkości O_1, O_2 i t. d. obliczamy ze wzorów:

$$tg\ O_1 = \frac{y_1' - y_1}{x_1' - x_1};$$

$$tg\ O_2 = \frac{y_2' - y_2}{x_2' - x_2} \ldots \quad (1)$$



Rys. 820.

Z rozwiązania △-a $P_1 P_2 P$ obliczymy spółrzędne punktu P.

Spółrzędne te (x_0, y_0) nazwiemy spółrzędnemi przybliżonemi. Spółrzędnym tym odpowiadają przybliżone azymuty prostych, łączących otrzymany punkt przybliżony P_0 z punktami danemi. Oznaczmy te azymuty literami

$$\psi_1', \psi_2, \ldots \psi_n'$$

Wielkości te oznaczmy ze wzorów:

$$tg\ \psi_1' = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \qquad tg\ \psi_2' = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} \ldots \quad (2)$$

Przybliżone azymuty ψ_1', ψ_2' ... różnić się będą od ich najprawdopodobniejszych wielkości ψ_1, ψ_2 ... o wielkości $d\psi_1$, $d\psi_2$ ..., t. j.

$$\psi_1 = \psi_1' + d\psi_1$$

$$\psi_2 = \psi_2' + d\psi_2 \ldots \qquad (3)$$

skąd

$$d\psi_1 = \psi_1 - \psi_1'$$

$$d\psi_2 = \psi_2 - \psi_2' \ldots \qquad (4)$$

Oznaczmy najprawdopodobniejsze błędy poszczególnych kierunków α_1, α_2 . . . literami v_1, v_2 . . ., wówczas najprawdopodobniejsze azymuty φ_1, φ_2 . . . będą odpowiednio równe:

$$\varphi_1 = O_1 + \alpha_1 + v_1$$

$$\varphi_2 = O_2 + \alpha_2 + v_2$$

$$\varphi_3 = O_3 + \alpha_3 + v_3 \ldots$$

Stąd otrzymamy najprawdopodobniejsze azymuty ψ_1, ψ_2 . . .:

$$\psi_1 = \varphi_1 + 180^0 = 180^0 + O_1 + \alpha_1 + v_1$$

$$\psi_2 = \varphi_2 + 180^0 = 180^0 + O_2 + \alpha_2 + v_2$$

$$\psi_3 = \varphi_3 + 180^0 = 180^0 + O_3 + \alpha_3 + v_3 \ldots$$

A stąd wielkości $d\psi_1$, $d\psi_2$ . . . (będą odpowiednio równe (patrz wzory (4)

$$d\psi_1 = \psi_1 - \psi'_1 = 180^0 + O_1 + \alpha_1 + v_1 - \psi'_1 \qquad (5)$$

$$d\psi_2 = \psi_2 - \psi'_2 = 180^0 + O_2 + \alpha_2 + v_2 - \psi'_2$$

— — — — — — — — — —

Ponieważ zmiany azymutów przy zmianie spółrzędnych przybliżonych o najprawdopodobniejsze poprawki dx i dy dają się wyrazić zapomocą spółczynników kierunkowych (patrz § 403 wzory 5,5 a), mianowicie:

$$d\psi_1 = a_1\,dx + b_1\,dy$$

$$d\psi_2 = a_2\,dx + b_2\,dy$$

— — — — — —

przeto z równań (5) określimy błędy spostrzeżeń v_1, v_2, . . .:

$$v_1 = a_1\,dx + b_1\,dy - (180^0 + O_1 + \alpha_1 - \psi'_1)$$

$$v_2 = a_2\,dx + b_2\,dy - (180^0 + O_2 + \alpha_2 - \psi'_2) \qquad (6)$$

— — — — — — — — — —

Oznaczając wyrazy w nawiasach, jako możliwe do obliczenia, literami l_1, l_2, . . ., t. j.:

$$l_1 = 180^0 + O_1 + \alpha_1 - \psi'_1 \qquad (6a)$$

$$l_2 = 180^0 + O_2 + \alpha_2 - \psi'_2$$

w których wielkości, jak np. $180^0 + 0_1 + \alpha_1$, są zmienionemi o 180^0 spostrzeżonemi azymutami prostych $P_1 P \ldots$, przepiszemy równania (6), jako układ równań błędów:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1\, dx + b_1\, dy - l_1 \\ v_2 &= a_2\, dx + b_2\, dy - l_2 \\ v_3 &= a_3\, dx + b_2\, dy - l_3 \qquad (7) \\ &- - - - - - - \\ &- - - - - - - \end{aligned}$$

Stąd przejdziemy do równań normalnych:

$$\begin{aligned} [aa]\, dx + [ab]\, dy - [al] &= 0 \\ [ab]\, dx + [bb]\, dy - [bl] &= 0 \qquad (8) \end{aligned}$$

dla wypadku jednakowo dokładnych spostrzeżeń.

Po obliczeniu z tych równań wielkości dx i dy, określimy najprawdopodobniejsze spółrzędne punktu P:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + dx \\ y &= y_0 + dy \qquad (9) \end{aligned}$$

Kiedy na podstawie dx i dy obliczymy wielkości błędów z równań (7), wówczas otrzymamy średni błąd spostrzeżenia o jednostce wagi:

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}} \qquad (10)$$

oraz średnie błędy spółrzędnych wyrównanych:

$$m_x = \pm \frac{m_0}{\sqrt{p_x}} = \pm m_0 \sqrt{Q_{11}}$$

(11) patrz § 342 wzory (58) i (69)

$$m_y = \pm \frac{m_0}{\sqrt{p_y}} = \pm m_0 \sqrt{Q_{22}}$$

przytem Q_{11} i Q_{22} otrzymamy z równań wag:

$$\begin{aligned} [aa]\, Q_{11} + [ab]\, Q_{12} &= 1 \\ [ab]\, Q_{21} + [bb]\, Q_{22} &= 0 \end{aligned}$$

(12) patrz § 342 wzory (48)

oraz $$[aa]\, Q_{21} + [ab]\, Q_{22} = 0$$

patrz § 342 wzory (60)

(13) $$[ab]\, Q_{21} + [bb]\, Q_{22} = 1$$

całkowity zaś błąd punktu P będzie równy

(14) $$M = \pm \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$$

Przebieg obliczenia jest następujący:

1) obliczamy przybliżone spółrzędne określanego punktu;

2) ze spółrzędnych danych punktów i przybliżonych określanego punktu obliczamy: przybliżone kąty kierunkowe oraz długości prostych, łączących określany punkt z danemi, oraz spółczynniki kierunkowe a i b tych prostych;

3) obliczamy wyrazy $l_1\ l_2 \ldots l_n$ ze wzorów (6 a);

4) układamy równania (7) błędów $v_1\ v_2 \ldots v_n$ i równania normalne (8);

5) obliczamy dx i dy, oraz x i y;

6) obliczamy średnie błędy m_0, m_x i m_y. Te ostatnie możemy obliczyć, pomijając równania (12) i (13).

Mianowicie: $p_y = [bb.1]$, jako waga ostatniej niewiadomej, zaś

$$p_x = p_y \cdot \frac{[aa]}{[bb]}$$

Te dwa wzory (patrz § 343 i 344) równie dobrze możemy otrzymać z układów (12) i (13)-ego.

§ 405. Wielokrotne wcięcie wstecz przy pomiarze kierunków.

Dane są spółrzędne punktów P_1, P_2 ... P_n. Określić spółrzędne punktu P, w którym pomierzono kierunki do punktów $P_1\ P_2$ ... P_n.



Rys. 821.

W punkcie P pomierzono kierunki $\alpha_1\ \alpha_2$ ... α_n, licząc od kierunku P_1 do punktów $P_1\ P_2$ ... P_n. Oznaczmy literą μ azymut, względnie kąt kierunkowy kierunku $P\,P_1$. Wówczas kąty kierunkowe celowych do P_1, P_2 ... P_n będą równe ($\alpha_1 = 0$).

$$\psi_1 = \mu + \alpha_1$$
$$\psi_2 = \mu + \alpha_2$$
$$- - - - -$$
$$\psi_n = \mu + \alpha_n$$

Jeżeli przybliżoną wielkość μ, które nie jest znane, oznaczymy μ_0 i poprawkę μ_0 oznaczymy $d\mu$, oraz poprawki spostrzeżonych kierunków α_1, α_2 .... α_n oznaczymy literami v_1, v_2 ... v_n, wówczas

$$\mu = \mu_0 + d\mu$$

oraz, oznaczając przybliżone wielkości kątów kierunkowych literami ψ'_1, ψ'_2, ... ψ'_n najprawdopodobniejsze zaś ich poprawki: $d\psi'_1$, $d\psi'_2$ .... $d\psi'_n$, otrzymamy

$$\psi_1 = \psi'_1 + d\psi'_1 = \mu_0 + d\mu + \alpha_1 + v_1$$

$$\psi_2 = \psi'_2 + d\psi'_2 = \mu_0 + d\mu + \alpha_2 + v_2$$

— — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — —

$$\psi_n = \psi'_n + d\psi'_n = \mu_0 + d\mu + \alpha_n + v_n$$

skąd równaniami błędów będą:

$$v_1 = d\psi'_1 - d\mu - (\alpha_1 + \mu_0 - \psi'_1)$$

$$v_2 = d\psi'_2 - d\mu - (\alpha_2 + \mu_0 - \psi'_2)$$

— — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — —

$$v_n = d\psi'_n - d\mu - (\alpha_n + \mu_0 - \psi'_n)$$

Gdy określimy na mocy rozwiązania zagadnienia Pothenota z trzech kierunków spółrzędne przybliżone x_0, y_0 punktu P, należy w celu określenia najprawdopodobniejszych spółrzędnych x, y punktu P określić poprawki dx i dy przybliżonych spółrzędnych. Po ich określeniu (patrz dalej) obliczymy

$$x = x_0 + dx$$

$$y = y_0 + dy$$

Przybliżone kąty kierunkowe i długości prostych, łączących określany punkt z danemi, określamy na mocy wzorów:

$$tg\ \psi'_k = \frac{y_k - y_0}{x_k - x_0}$$

$$d_k = \frac{y_k - y_0}{\sin \psi'_k} = \frac{x_k - x_0}{\cos \psi'_k}$$

Gdy następnie zmiany kątów kierunków $d\psi_1'$, $d\psi_2'$ ..... wyrazimy zapomocą spółczynników kierunkowych i poprawek dx i dy przybliżonych spółrzędnych, nianowicie:

$$d\psi_k' = a_k\, dx + b_k\, dy,$$

wówczas równania błędów przyjmą postać:

$$v = a_1\,dx + b_1\,dy - d\mu - (\alpha_1 + \mu_0 - \psi_1')$$

$$v_2 = a_2\,dx + b_2\,dy - d\mu - (\alpha_2 + \mu_0 - \psi'_1)$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

$$v_n = a_n\,dx + b_n\,dy - d\mu - (\alpha_n + \mu_0 - \psi_n')$$

i, obliczając z danych $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ i określonych μ_0 oraz ψ_1' ψ_2' .... ψ_n wyrazy

$$l_1 = \alpha_1 + \mu_0 - \psi_1'$$

$$l_2 = \alpha_2 + \mu_0 - \psi_2'$$

— — — — — —

— — — — — —

$$l_n = \alpha_2 + \mu_0 - \psi_1'$$

przedstawimy równania błędów w postaci:

$$v_1 = a_1\,dx + b_1\,dy - d\mu - l_1$$

$$v_2 = a_2\,dx + b_2\,dy - d\mu - l_2$$

— — — — — — — —

— — — — — — — —

$$v_n = a_n\,dx + b_n\,dy - d\mu - l_n$$

od których dla określenia niewiadomych dx, dy i $d\mu$ przejdziemy do równań normalnych:

$$[aa]\,dx + [ab]\,dy - [a]\,d\mu - [al] = 0$$

$$[ab]\,dx + [bb]\,dy - [b]\,d\mu - [bl] = 0$$

$$-[a]\,dx - [b]\,dy + n\,.\,d\mu + [l] = 0$$

Ponieważ niema potrzeby określać $d\mu$, przeto usuńmy je z rachunku. Z ostatniego równania wynika

$$d\mu = \frac{[a]}{n}\,dx + \frac{[b]}{n}\,dy - \frac{[l]}{n}$$

podstawiając $d\mu$ do równań błędów, otrzymujemy równania błędów o zredukowanych spółczynnikach:

$$v_1 = \left((a_1 - \frac{[a]}{n}\right)dx + \left(b_1 - \frac{[b]}{n}\right)dy - \left(l_1 - \frac{[l]}{n}\right) \text{ i t. d.}$$

oznaczając spółczynnik przy dx literą A_1, przy dy literą B_1 i ostatni nawias literą L_1, przedstawimy pierwsze i, przez analogję, pozostałe równania błędów w postaci:

$$v_1 = A_1\, d\, x + B_1\, d\, y - L_1$$

$$v_2 = A_2\, d\, x + B_2\, d\, y - L_2$$

— — — — — — —

$$v_n = A_n\, d\, x + B_n\, d\, y - L_n$$

Przy tworzeniu równań błędów sprawdzamy rachunek, tworząc sumy:

$$[A] = [a] - n\,\frac{[a]}{n} = 0$$

$$[B] = [b] - n\,\frac{[b]}{n} = 0$$

$$[L] = [l] - n\,\frac{[l]}{n} = 0$$

Po obliczeniu i sprawdzeniu spółczynników równań błędów określamy z równań normalnych

$$[A\,A]\; d\, x + [A\,B]\; d\, y - [A\,L] = 0$$

$$[A\,B]\; d\, x + [B\,B]\; d\, y - [B\,L] = 0$$

poprawki $d\,x$ i $d\,y$ i wreszcie najprawdopodobniejsze spółrzędne punktu P:

$$x = x_0 + d\,x$$

$$y = y_0 + d\,y$$

Średni błąd spostrzeżenia o jednostce wagi obliczymy ze wzoru:

$$m_0 = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-3}}$$

Średnie błędy wyrównanych spółrzędnych będą równe:

$$m_x = \pm\,\frac{m_0}{\sqrt{p_x}} = \pm\, m\,\sqrt{Q_{11}}$$

$$m_y = \pm\,\frac{m_0}{\sqrt{p_y}} = \pm\, m\,\sqrt{Q_{22}}$$

i średni błąd punktu P będzie równym

$$M = \pm\,\sqrt{m^2_x + m^2_y}$$

Q_{11} i Q_{22} obliczymy z następujących równań:

$$[A\,A]\; Q_{11} + [A\,B]\; Q_{12} = 1$$

$$[A\,B]\; Q_{11} + [B\,B]\; Q_{12} = 0$$

oraz

$$[A\,A]\;Q_{21} + [A\,B]\;Q_{22} = 0$$

$$[A\,B]\;Q_{21} + [B\,B]\;Q_{22} = 1$$

Plan obliczenia:

1) określamy przybliżone spółrzędne $x_0\ y_0$, wybierając najdogodniejsze trzy kierunki dla rozwiązania zagadnienia Pothenota;

2) obliczamy azymuty, długości i spółczynniki kierunkowe prostych, łączących punkt przybliżony z danemi punktami;

3) obliczamy wyrazy wolne l równań błędów;

4) budujemy układ równań błędów;

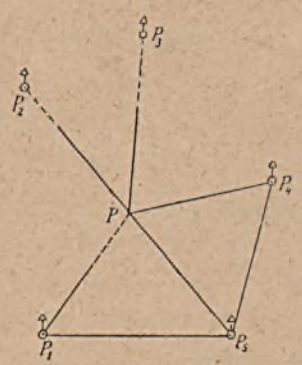
5) obliczamy zredukowane spółczynniki A, B i α równań błędów, sprawdzając, czy ich sumy równają się zeru;

6) ze spółczynników A, B i α obliczamy spółczynniki i wyrazy wolne równań normalnych;

7) obliczamy dx, dy, m_x, m_y i M_P.

§ 406. Wcięcie skombinowane.

Gdy określamy pewien punkt zapomocą wielokrotnego wcięcia wprzód i wielokrotnego wcięcia wstecz, wówczas mamy do czynienia z wcięciem skombinowanem.



Rys. 822.

Przypuśćmy, że dokonano k zewnętrznych i n wewnętrznych spostrzeżeń kierunków.

a) Określamy zapomocą wcięcia wprzód z odpowiedniego trójkąta (np. $P_5\ P_4\ P$) przybliżone spółrzędne $x_0\ y_0$ punktu P.

b) Obliczamy przybliżone azymuty (względnie kąty kierunkowe), długości i spółczynniki kierunkowe prostych, łączących punkt $P\ (x_0\ y_0)$ z danemi punktami.

c) Budujemy równania błędów oddzielnie dla zewnętrznych i wewnętrznych kierunków:

k zewnętrznych:

$$v_1 = a_1\,dx + b_1\,dy - l_1$$

$$v_2 = a_2\,dx + b_2\,dy - l_2$$

— — — — — — — — — —

— — — — — — — — — —

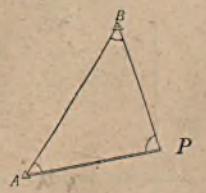
$$v_k = a_k\,dx + b_k\,dy - l_k$$

n wewnętrznych:

$$v'_1 = A_1\,dx + B_1\,dy - L_1$$

$$v'_2 = A_2\,dx + B_2\,dy - L_2$$

Dział 1. Obliczenie przybliżonych spółrzędnych z wcięcia wprzód punktu P z punktów A i B.



$$m = \frac{Yb - Ya}{\sin P \sin \varphi_{ab}} = \frac{Xb - Xa}{\sin P \cos \varphi_{ab}}$$

Sprawdzenie

$$\Delta Y_{ap} - \Delta Y_{bp} = Yb - Ya$$
$$\Delta X_{ap} - \Delta X_{bp} = Xb - Xa$$

$$\Delta Y_{ap} = m \sin B \sin \varphi_{ap}$$
$$\Delta X_{ap} = m \sin B \cos \varphi_{ap}$$
$$\Delta Y_{bp} = m \sin A \sin \varphi_{bp}$$
$$\Delta X_{bp} = m \sin A \cos \varphi_{bp}$$

$$Y_0 = Y_a + \Delta Y_{ap} = Y_b + \Delta Y_{bp}$$
$$X_0 = X_a + \Delta X_{ap} = X_b + \Delta X_{bp}$$

	A: P_1						B: P_1			
φ_{ap}	43	46	15,9	$\log \sin \varphi_{ap}$	9.839 9673	Ya	+	447,907	Xa	—	2143,510
φ_{bp}	89	19	19,0	$\log m$	3.460 5384	Yb	—	370,286	Xb	—	251,457
φ_{ab}	336	36	52,5	$\log \sin B$	9.964 9609	$Y_b - Y_a$	—	818,193	$X_b - X_a$	+	1892,053
$A = \varphi_{ap} - \varphi_{ab}$	67	9	23,4	$\log \cos \varphi_{ap}$	9.858 6030	ΔY_{ap}	+	1842,751	ΔX_{ap}	+	1923,545
$B = \varphi_{ba} - \varphi_{bp}$	67	17	33,5	$\log \Delta Ya$	3.265 4666	ΔY_{bp}	+	2660,944	ΔX_{bp}	+	31,492
$P = \varphi_{bp} - \varphi_{ap}$	45	33	3,1	$\log \Delta Xa$	3.284 1023	Y_0	+	2290,658	λ_0	—	219,965
$A + B + P$	180	0	0,0				+	2290,658		—	219,965

$\log (Yb - Ya)$	$2.912\ 8558_n$	$\log \sin \varphi_{bp}$	9.999 9696
$\log \sin \varphi_{ab}$	$9.598\ 6767_n$	$\log m$	3.460 5384
$\log \sin P$	9.853 6206	$\log \sin A$	9.964 5277
$\log \cos \varphi_{ab}$	9.962 7744	$\log \cos \varphi_{bp}$	8.073 1325
$\log (Xb - Xa)$	3.276 9333	$\log \Delta Y_{bp}$	3.425 0357
$\log m$	3.460 5385	$\log \Delta X_{bp}$	1.498 1986

$Y_0 =$

$X_0 =$

Przybliżone spółrzędne punktu P
z wcięcia wprzód

Dział 2. Obliczenie przybliżonych

Dane punkty P_n		Y_n / Y_o / $\Delta y = Y_n - Y_o$ / $\Delta x + \Delta y$		X_n / X_o / $\Delta x = X_n - X_o$ / $\Delta x - \Delta y$	$\log(\Delta x + \Delta y)$ / $\log(\Delta x - \Delta y)$ / $\log \mathrm{tg}(1/4\,\pi + \psi')$ / $1/4\,(\pi + \psi')$
P_1	—	370,286	—	251,457	3.430 1454$_n$
	+	2290,658	—	219,965	3.419 8651$_n$
	—	2660,944	—	31,492	0 010 2803
	—	2692,436	—	2629,452	45° 40′ 41″,0
					314° 19′ 19″,0
P_2	—	679,903	+	2654,091	1.984 5198$_n$
	+	2290,658	—	219,965	3.766 7560$_n$
	—	2970,561	+	2874,056	8.217 7938
	—	96,505	—	5844,617	0° 56′ 45″,5
					359° 3′ 14″,5
P_3	+	3259,702	+	2240,102	3.535 1816
	+	2290,658	—	219,965	3.173 4843$_n$
	+	969,044	+	2460,067	0.361 6973
	+	3429,111	—	1491,023	66° 29′ 59″,9
P_4	+	8306,289	+	1474,542	3.887 0621
	+	2290,658	—	219,965	3.635 5967
	+	6015,631	+	1694,507	0.251 4654
	+	7710,138	+	4321,124	60° 43′ 54″,0
					119° 16′ 6″,0
P_5	+	5699,118	—	590,475	3.482 5806
	+	2290,658	—	219,965	3.577 3724
	+	3408,460	—	370,510	9.905 2082
	+	3037,950	+	3778,970	38° 47′ 46″,3
					141° 12′ 13″,7
P_6	+	4052,465	—	4203,232	3.346 6385$_n$
	+	2290,658	—	219,965	3.759 2956
	+	1761,807	—	3983,267	9.587 3429
	—	2221,460	+	5745,074	21° 8′ 24″,4
					201° 8′ 24″,4
P_7	+	447,907	—	2143,510	3.575 9144$_n$
	+	2290,658	—	219,965	1.907 3791
	—	1842,751	—	1923,545	1.668 5353$_n$
	—	3766,296	+	80,794	88° 46′ 15″,9
					268° 46′ 15″,9

azymutów i spółczynników kierunkowych.

$\log \Delta y$ / $\log \Delta x$ / $\log \mathrm{tg}\,\psi'$ / ψ'		$\Delta_1 \log \Delta y$ / $\Delta_2 \log \Delta x$ / $\Delta_3 \log \mathrm{tg}\,\psi'$ / $a = \Delta_2 : \Delta_3$ / $b = -\Delta_1 : \Delta_3$	$\log \sin \psi'$ / $\log \cos \psi'$ / $\mathrm{clg}\,d$ / $\log \rho''$		$\log \frac{\rho'' \sin \psi'}{d}$ / $\log \frac{-\rho'' \cos \psi'}{d}$ / a / b
3.425 0357$_n$	—	16.3	9.99997$_n$		1.88935$_n$
1.498 2002$_n$	—	1379.0	8.07315$_n$		9.96253$_n$
1.926 8355	+	17.764			
89° 19′ 18″.9	—	77,4	6.57495	—	77,5
269° 19′ 18″.9	+	0,9	5.31443	+	0,9
3.472 8385$_n$	—	14.6	9.85654$_n$		1.55467$_n$
3.458 4953	+	15.1	9.84219		1.54032
0.014 3432$_n$	—	0.421			
45° 56′ 45″.5	—	35,8	6.38370	—	35,9
314° 3′ 14″.5	—	34,7	5.31443	—	34,7
2.986 3435	+	44.8	9.56407		1.45623
3.390 9469	+	17.6	9.96868		1.86084
9.595 3966	+	0.618			
21° 29′ 59″.9	+	28,5	6.57773	+	28,6
	—	72,5	5.31443	—	72,6
3.779 2812	+	7.2	9.98343		1.50192
3.229 0434	+	25.6	9.43310		0.95159
0.550 2378	+	0.807			
74° 16′ 5″.9	+	31,7	6.20406	+	31,8
	—	9,0	5.31443	—	9,0
3.532 5582	+	12.7	9.99745		1.77677
2.568 7999$_n$	—	11.5	9.03369$_n$		0.81301
0.963 7583$_n$	—	1.96			
83° 47′ 46″.1	+	60,0	6.46489	+	59,8
96° 12′ 13″.9	+	6,5	5.31443	+	6,5
3.245 9583	+	24.6	9.60692		1.28231
3.600 2394$_n$	—	10.9	9.96120$_n$		1.63659
9.645 7189$_n$	—	0.569			
23° 51′ 35″.7	+	19,1	6.36096	+	19,1
156° 8′ 24″.3	+	43,3	5.31443	+	43,3
3.265 4666$_n$	—	23.6	9.83996$_n$		1.72889$_n$
3.284 1023$_n$	—	22.6	9.85860$_n$		1.74753
9.981 3643	+	0.421			
43° 46′ 16″.0	—	53,7	6.57450	—	53,6
223° 46′ 16″.0	+	56,0	5.31443	+	55,9

Dział 3. Zestawienie równań błędów.

Zewnętrzne kierunki

P_n	a	b	$O+\alpha+\pi$	ψ'	$-l=\psi'-(O+\alpha+\pi)$
P_1	— 77,5	+ 0,9	269 19 19,0	269 19 18,9	— 0,1
P_2	— 35,9	— 34,7	314 3 16,4	314 3 14,5	— 1,9
P_3	+ 28,6	— 72,6	21 30 0,3	21 29 59,9	— 0,4
P_4	+ 31,8	— 9,0	74 16 4,8	74 16 5,9	+ 1,1
P_5	+ 59,8	+ 6,5	96 12 11,0	96 12 13,9	+ 2,9
P_6	+ 19,1	+ 43,3	156 8 23,6	156 8 24,3	+ 0,7
P_7	— 53,6	+ 55,9	223 46 15,9	223 46 16,0	+ 0,1

Wewnętrzne kierunki

P_n	a	A	b	B	α	$\psi'-\psi'_0$	$-l$	$-L$
P_1	— 77,5	— 73,5	+ 0,9	+ 2,3	0 0 0	0 0 0	0	— 1,4
P_2	— 35,9	— 31,9	— 34,7	— 33,3	44 43 55,0	44 43 55,6	+ 0,6	— 0,8
P_3	+ 28,6	+ 32,6	— 72,6	— 71,2	112 10 37,3	112 10 41,0	+ 3,7	+ 2,3
P_4	+ 31,8	+ 35,8	— 9,0	— 7,6	164 56 42,8	164 56 47,0	+ 4,2	+ 2,8
P_5	+ 59,8	+ 63,8	+ 6,5	+ 7,9	186 52 51,1	186 52 55,0	+ 3,9	+ 2,5
P_6	+ 19,1	+ 23,1	+ 43,3	+ 44,7	246 49 5,7	246 49 5,4	— 0,3	— 1,7
P_7	— 53,6	— 49,6	+ 55,9	+ 57,3	314 26 59,4	314 26 57,1	— 2,3	— 3,7
	+ 139,3	+ 155,3	+ 106,6	+ 112,2			+ 12,4	+ 7,6
	— 167,0	— 155,0	— 116,3	— 112,1			— 2,6	— 7,6
	— 27,7	+ 0,3 + 4,0	— 9,7	+ 0,1 + 1,4			— 9,8 — 1,4	0,0

Dział 4. Tworzenie równań normalnych, obliczenie ostatecznych spółrzędnych i ich średnich błędów $p = 1$.

P_n	p	$a\sqrt{p}$		$b\sqrt{p}$		$l\sqrt{p}$		paa		pab		pal	pbb		pbl
P_1		−	77,5	+	0,9	−	0,1	6006,25	−	69,75	+	7,75	0,81	−	0,09
P_2		−	35,9	−	34,7	−	1,9	1288,81	+	1245,73	+	68,21	1204,09	+	65,93
P_3		+	28,6	−	72,6	−	0,4	817,96	−	2076,36	−	11,44	5270,76	+	29,04
P_4		+	31,8	−	9,0	+	1,1	1011,24	−	286,20	+	34,98	81,00	−	9,90
P_5		+	59,8	+	6,5	+	2,9	3576,04	+	388,70	+	173,42	42,25	+	18,85
P_6		+	19,1	+	43,3	+	1,3	364,81	+	827,03	+	24,83	1874,89	+	56,29
P_7		−	53,6	+	55,9	+	0,1	2872,96	−	2996,24	−	5,36	3124,81	+	5,59
P_1		−	73,5	+	2,3	−	1,4	5402,25	−	169,05	+	102,90	5,29	−	3,22
P_2		−	31,9	−	33,3	−	0,8	1017,61	+	1062,27	+	25,52	1108,89	+	26,64
P_3		+	32,6	−	71,2	+	2,3	1062,76	−	2321,12	+	74,98	5069,44	−	163,76
P_4		+	35,8	−	7,6	+	2,8	1281,64	−	272,08	+	100,24	57,76	−	21,28
P_5		+	63,8	+	7,9	+	2,5	4070,44	+	504,02	+	159,50	62,41	+	19,75
P_6		+	23,1	+	44,7	−	1,7	533,61	+	1032,57	−	39,27	1998,09	−	75,99
P_7		−	49,6	+	57,3	−	3,7	2460,16	−	2842,08	+	183,52	3283,29	−	212,01
											+	955,85		−	486,25
											−	56,07		+	222,09
								31766,55	−	5972,56	+	899,78	+ 23183,78	−	264,16
								$[p\,a\,a]$		$[p\,a\,b]$		$[p\,a\,l]$	$[p\,b\,b]$		$[p\,b\,l]$

$[a\,b]$	−	5972,56	$[a\,l]$	+	899,78				$[b\,l]$	−	264,16			Pierwsze sprawdzenie			
$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}$	+	0,18801	$-\frac{[a\,l]}{[a\,a]}$	−	0,02832	$[b\,b]$	+	23183,78	$-\frac{[a\,b]\,[a\,l]}{[a\,a]}$	+	169,17	$\frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,[a\,l]$	−	25,48	$[a\,l]\,dx$	−	24,75
$\frac{[b\,b]}{[a\,a]}$			$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,dy$	−	0,00081	$-\frac{[b\,b]^2}{[a\,a]}$	−	1122,92	$[b\,l\,.\,1]$	−	94,99	$-\frac{[bl.1]^2}{[bb.1]}$	−	0,41	$[b\,l]\,dy$	−	1,14
			$d\,x$	−	0,02751	$[b\,b\,.1]$	−	22060,86	$-\frac{[b\,l.1]}{[bb.1]}\,dy$	+	0,0043	Σ	−	25,89	Σ	−	25,89

$Y = Y_0 + dy = +$	2290,658 + 0,004 =	+	2290,662	$\pm My = \pm \frac{\sqrt{m^2}}{\sqrt{[bb.1]}}$ = $\pm \sqrt{\frac{2,672}{22060,86}} = \pm 0,011$
$X = X_0 + dx = -$	219,965 − 0,028 =	−	219,993	$\pm Mx = My\sqrt{\frac{[bb]}{[aa]}}$ = $0.011\ \sqrt{\frac{2,3}{3,1}} = \pm 0,010$

Dział 5. Średni błąd m i sprawdzenie.

P_n	$adx + bdy = d\psi'$				$v = l + d\psi'$		pvv	pll	φ			$u = \varphi - (0 \pm \alpha \pm \pi)$			
Zewnętrzne kierunki															
P_1	+	2,13	+	0,00	+	2,13	+	2,03	4,08	0,01	269	19	21,1			+	2,1
P_2	+	0,99	—	0,15	+	0,84	—	1,06	1,12	3,61	314	3	15,4			—	1,0
P_3	—	0,79	—	0,31	—	1,10	—	1,50	2,25	0,16	21	29	58,8			—	1,5
P_4	—	0,87	—	0,04	—	0,91	+	0,19	0,04	1,21	74	16	5,0			+	0,2
P_5	—	1,65	+	0,03	—	1,62	+	1,28	1,64	8,41	96	12	12,3			+	1,3
P_6	—	0,52	+	0,19	—	0,33	+	0,37	0,14	0,49	156	8	24,0			+	0,4
P_7	+	1,47	+	0,24	+	1,71	+	1,80	3,24	0,01	223	46	17,6			+	1,7
									12,51	13,90					
Wewnętrzne kierunki											$\lambda = \varphi - \varphi_0$			$\lambda - \alpha = u$			
P_1	+	2,02	+	0,01	+	2,03	+	0,63	0,38	1,96	0	0	0,0	—	0,0	+	0,7
P_2	+	0,88	—	0,14	+	0,74	—	0,06	0,00	0,64	44	43	54,3	—	0,7	—	0,0
P_3	—	0,90	—	0,31	—	1,21	+	1,09	1,19	5,29	112	10	37,7	+	0,4	+	1,1
P_4	—	1,01	—	0,03	—	1,04	+	1,75	3,06	7,84	164	56	43,9	+	1,1	+	1,8
P_5	—	1,76	+	0,03	—	1,73	+	0,77	0,59	6,25	186	52	51,2	+	0,1	+	0,8
P_6	—	0,64	+	0,19	—	0,45	—	2,15	4,62	2,89	246	49	2,9	—	2,8	—	2,1
P_7	+	1,36	+	0,25	+	1,61	—	2,09	4,37	13,69	314	26	56,5	—	2,0	—	2,2
									14,21	38,56				+	1,6		
														—	6,4		
													$[\lambda - \alpha]$	—	4,8 | 0,7	—	
Drugie sprawdzenie $\Sigma_3 = [pvv] - [pll] = -25.74$					$m^2_0 = \frac{[pvv]}{[n-2}$ $m_0 =$		26,92 " $\pm$ 1,63	52,46				Ostatnie sprawdzenie $u = v$ z błędem zaokrąglenia			

P_n		Y_n Y $Y_n - Y$		X_n X $X_n - X$	log $(Y_n - Y)$ log $(X_n - X)$ log tg φ	log sin φ log cos φ log d	φ
P_1	−	370,286	−	251,457	3.425 0364$_n$	9.999 9696$_n$	
	+	2290,662	−	219,993	1.497 8139$_n$	8.072 7471$_n$	89° 19′ 21″, 1
	−	2660,948	−	31,464	1.927 2225	3.425 0668	269° 19′ 21″, 1
P_2	−	679,903	+	2654,091	3.472 8391$_n$	9.856 5364$_n$	45° 56′ 44″, 6
	+	2290,662	−	219,993	3.458 4995	9.842 1968	
	−	2970,565	+	2874,084	0.014 3396$_n$	3.616 3027	314° 3′ 15″, 4
P_3	+	3259,702	+	2240,102	2.986 3417	9.564 0691	
	+	2290,662	−	219,993	3.390 9520	9.968 6789	21° 29′ 58″, 8
	+	969,040	+	2460,095	9.595 3897	3.422 2728	
P_4	+	8306,289	+	1474,542	3.779 2810	9.983 4191	
	+	2290,662	−	219,993	3.229 0506	9.433 1891	74° 16′ 5″, 0
	+	6015,627	+	1694,535	0.550 2304	3.795 8617	
P_5	+	5699,118	−	590,475	3.532 5576	9.997 4496	83° 47′ 47″, 7
	+	2290,662	−	219,993	2.568 7672$_n$	9.033 6595$_n$	96° 12′ 12″, 3
	+	3408,456	−	370,482	0.963 7904$_n$	3.535 1079	
P_6	+	4052,465	−	4203,232	3.245 9571	9.606 9219	
	+	2290,662	−	219,993	3.600 2364$_n$	9.961 2011$_n$	23° 51′ 36″, 0
	+	1761,803	−	3983,239	9.645 7207$_n$	3.639 0352	156° 8′ 24″, 00
P_7	+	447,907	−	2143,510	3.265 4676$_n$	9.839 9710$_n$	
	+	2290,662	−	219,993	3.284 0960$_n$	9.838 5996$_n$	43° 46′ 17″, 6
	−	1842,755	−	1923,517	9.981 3716	3.425 4965	223° 46′ 17″, 6

— — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — —

$$v'_n = A_n\, dx + B_n\, dy - L_n$$

gdzie A, B i L są zredukowane wartości spółczynników a, b, l, obliczone przy rugowaniu wyrazu $d\,p$.

d) Układamy równania normalne:

$$\{[a\,a] + [A\,A]\}\, dx + \{a\,b] + [A\,B]\}\, dy - \{[a\,l] + [A\,L]\} = 0$$

$$\{[a\,b] + [A\,B]\}\, dx + \{[b\,b] + [B\,B]\}\, dy - \{[b\,l] + [B\,L]\} = 0$$

skąd obliczymy dx i dy oraz najprawdopodobniejsze spółrzędne wcinanego punktu:

$$x = x_0 + dx$$

$$y = y_0 + dy$$

e) Średnie błędy m, m_x m_y i M możemy obliczyć po wstawieniu dx i dy do równań błędów tak zewnętrznych, jak wewnętrznych kierunków.

Uwagi praktyczne. Obliczenia należy ujmować w schemat. Poniżej podany przykład jest w taki właśnie sposób rozwiązany. Należy baczną uwagę zwracać na:

1) prawidłowość przepisania do schematu spółrzędnych danych punktów oraz właściwe określenie różnic pomiędzy danemi a przybliżonemi spółrzędnemi; błąd, popełniony w tem obliczeniu, odkryty zostanie zaledwie przy porównaniu u, t. j. różnicy między wyrównanemi a spostrzeżonemi kątami kierunkowemi, z wielkością v błędu danego kierunku. Ponieważ zaś tak u, jak v obliczamy na samym końcu (dział 5), więc błąd, popełniony na samym początku, spowodowałby konieczność powtórzenia całego rachunku.

2) Ta sama uwaga dotyczy spółczynników kierunkowych a i b; z tego względu należy je obliczać dwukrotnie, raz ze wzoru ogólnego, drugi raz najlepiej z różnic logarytmicznych.

Obliczenia należy wykonać w następującej kolejności:

Dział I-gy.

W $\triangle$-cie $A\,B\,P$ dane są spółrzędne punktów A i B, kąty i azymuty φ_{ap} i φ_{bp}. Obliczamy: (za punkty A i B obieramy takie punkty, aby punkt P w stosunku do $A\,B$ położony był w prawo)



Rys. 823.

$$\triangle\, y_{ap} = A\,P \sin \varphi_{ap}$$

$$\triangle\, x_{ap} = A\,P \cos \varphi_{ap}$$

lecz

$$A\,P = \frac{A\,B \sin B}{\sin P} = \frac{(y_b - y_a)}{\sin \varphi_{ab}} \frac{\sin B}{\sin P} =$$

$$= \frac{x_b - x_a}{\cos \varphi_{ab}} \frac{\sin B}{\sin P}$$

Oznaczmy:

$$m = \frac{y_b - y_a}{\sin \varphi_{ab} \sin P} = \frac{x_b - x_a}{\cos \varphi_{ab} \sin P}$$

wówczas:

$$\triangle y_{ap} = m \sin B \sin \varphi_{ap}$$

$$\triangle x_{ap} = m \sin B \cos \varphi_{ap},$$

Podobnie:

$$B P = \frac{A B \sin A}{\sin P} = \frac{y_b - y_a}{\sin \varphi_{ab}} \frac{\sin A}{\sin P} =$$

$$= \frac{x_b - x_a}{\sin \varphi_{ab}} \frac{\sin A}{\sin P} = m \sin A$$

więc:

$$\triangle y_{bp} = m \sin A \sin \varphi_{bp}$$

$$\triangle x_{bp} = m \sin A \cos \varphi_{bp}$$

Stąd:

$$x_p = x_a + \triangle x_{ap} = x_b + \triangle x_{bp} = x_0$$

$$y_p = y_a + \triangle y_{ap} = y_b + \triangle y_{bp} = y_0$$

Wystarczy obliczenie x_0 i y_0 z dokładnością do kilku centymetrów, a więc nawet zapomocą pięcioznacznych logarytmów.

Działy II, III i IV.

Działy te nie wymagają omówień.

Sprawdzeniem rozwiązania równań normalnych jest kontrola sumowa $\Sigma_1 = \Sigma_2$; wielkości te powinny się równać w granicach zaokrągleń rachunku.

Dział V i VI.

Obliczamy kolumny pierwsze, włącznie do $[pll]$ oraz Σ_3, która powinna się równać Σ_1 i Σ_2, poczem obliczamy dział VI i wracamy do ostatnich kolumn działu V-ego.

Jeżeli wielkości u nie będą równe wielkościom v, poprzednio obliczonym w dziale V-ym, wówczas różnice, wykryte w poszczególnych kierunkach, należy przypisać błędom rachunku tych kierunków w dziale II-im, a więc wadliwemu obliczeniu $\triangle y$ lub $\triangle x$, znakom lub wielkościom spółczynników kierunkowych i t. p.

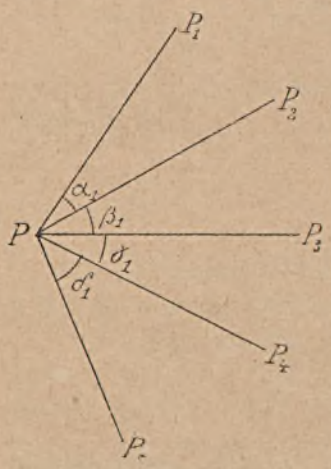
Należy dodać, że błąd, wykryty przy obliczeniu u, pociąga za sobą przerobienie działów IV-ego, V-ego i VI-ego, a częstokroć i III-ego. Stąd dział II-gi należy uważać za źródło najdotkliwszych błędów.

Za wagi wszystkich kierunków przyjmujemy jedność, gdyż wszystkie kierunki są jednakowo dokładnie pomierzone.

Dla uniknięcia wielkich wyrazów wolnych obliczamy przybliżone spółrzędne możliwie na podstawie najbliżej położonych punktów. Gdy zaś jakikolwiek dany punkt leży bardzo blisko od określanego, wówczas bezwzględnie należy na podstawie tak bliskiego punktu liczyć przybliżone spółrzędne.

§ 407. Wielokrotne wcięcia wstecz przy pomiarze kątów.

Wyobraźmy sobie, że w punkcie P, który chcemy określić jaknajdokładniej zapomocą wcięcia wstecz, pomierzyliśmy kierunki do n punktów o danych spółrzędnych $P_1(x_1\ y_1)$ $P_2(x_2\ y_2)\ldots.$ $P_5(x_5\ y_5)$, lub kąty $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ldots.\ \delta_1$.



Rys. 824.

Dla określenia spółrzędnych punktu P wystarczyłoby wcięcie wstecz do 3 punktów; jeżeli zaś wcinamy wstecz, np., do 5 punktów, możemy albo

1) utworzyć grupy spostrzeżeń po 3, których będzie $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, co w naszym wypadku da $\frac{5.4.3}{2.3} = 10$ grup spostrzeżeń i każda wymagać będzie samodzielnego rozwiązania zagadnienia Podhenota, a zatem zbyt wielkiego nakładu pracy, albo też

2) dokonać wyrównania wielokrotnego wcięcia wstecz metodą, stosowaną przy spostrzeżeniach pośrednich, co ma miejsce w rozpatrywanym wypadku, wobec tego, że mierzymy bezpośrednio kąty, a określamy spółrzędne punktu P.

Drugi sposób, jako bardziej racjonalny, jest w powszechnem użyciu. Rozpatrzmy go. Oczywiście znów dążyć będziemy do odnalezienia wyrównanych poprawek dla spółrzędnych przybliżonych punktu P.

W tym celu z trzech danych, np. P_2 P_3 i P_5 obliczymy spółrzędne przybliżone punktu $P(x_0\ y_0)$, stosując zwykłe rozwiązanie problematu Pothenota. Następnie ustalimy najprawdopodobniejsze błędy spostrzeżeń: ponieważ za wyniki spostrzeżeń przyjmujemy w tym wypadku kąty, więc najprawdopodobniejszym błędem spostrzeżenia nazwiemy różnicę pomiędzy kątem wyrównanym a kątem pomierzonym. Jeżeli zatem oznaczymy literą α_1 kąt pomierzony, literą zaś α_w kąt wyrównany, wówczas

$$v_1 = \alpha_w - \alpha_1 .$$

Zastanówmy się teraz nad zmianami, którym podlega pomierzony kąt α: jeżeli ze spółrzędnych przybliżonych punktu $P(x_0\ y_0)$ obliczymy azymuty prostych PP_1 i PP_2 ze wzorów

$$\varphi_1' = (P_0P_1) = \text{arc tg}\ \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$\varphi_2' = (P_0P_2) = \text{arc tg}\ \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}\ \text{i t. d.}$$

wówczas $\alpha_0 = \varphi_2' - \varphi_1'$, różnica tych azymutów, da nam tak zwany kąt przybliżony α_0, który w tym tylko razie będzie równy kątowi pomierzonemu, jeżeli ten ostatni posłużył za podstawę rozwiązania zadania Podhenota, dla otrzymania spółrzędnych przybliżonych punktu $P(x_0\ y_0)$.

Przypuśćmy następnie, że mamy już obliczone spółrzędne wyrównane punktu $P(x_w\ y_w)$; gdy wówczas z tych spółrzędnych obliczymy azymuty prostych PP_1 i PP_2 azymuty te będą azymutami wyrównanemi

$$\varphi_1 = (P_w P_1) = \text{arc tg}\ \frac{y_1 - y_w}{x_1 - x_w}$$

$$\varphi_2 = (P_w P_2) = \text{arc tg}\ \frac{y_2 - y_w}{x_2 - x_w}$$

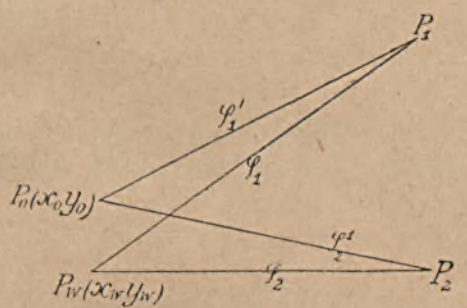
z różnicy zaś wyrównanych azymutów otrzymamy wyrównany kąt $\alpha_w = \varphi_2 - \varphi_1$.

Przejdźmy teraz do wyznaczenia najprawdopodobniejszych poprawek przybliżonych spółrzędnych. Równanie błędu dla pierwszego kąta będzie

$$v_1 = \alpha_w - \alpha_1$$

przekształci się na

$$v_1 = \varphi_2 - \varphi_1 - \alpha_1 .$$



Rys. 825

Lecz kąt spostrzeżony może być wyrażony zapomocą znanego kąta przybliżonego i ich znanej różnicy:

$$\alpha_1 = \alpha_0 - l_1 = \varphi_2' - \varphi_1' - l_1 ,$$

a wobec tego $v_1 = \varphi_2 - \varphi_1 - \varphi_2' + \varphi_1' + l_1$

lub, grupując odpowiednio azymuty, napiszemy:

$$v_1 = (\varphi_2 - \varphi_2') - (\varphi_1 - \varphi_1') + l_1$$

a oznaczając różnicę między przybliżonemi a wyrównanemi azymutami zapomocą przyrostów odpowiednich azymutów przybliżonych, napiszemy:

$$v_1 = d\varphi_2 - d\varphi_1 + 1_1$$

lecz

$$d\varphi_2 = a_2\ dx + b_2\ dy$$

$$d\varphi_1 = a_1\ dx + b_1\ dy ,$$

w których to wyrazach a i b oznaczają spółczynniki kierunkowe.

Spółczynniki a i b wprowadzone zostały w założeniu, że przesunięciu ulegał koniec prostej, na początku której obserwowaliśmy kierunki, w danym zaś wypadku rzecz się ma odwrotnie.

Przy kierunkach do punktów $P_1\ P_2 \ldots P_5$ o wyrównanych spółrzędnych należy zmienić azymuty o 180°, wskutek czego nasze spółczynniki kierunkowe przybiorą postać:

$$a_2 = \rho \frac{\sin \varphi'_2}{S_2} \qquad b_2 = -\rho \frac{\cos \varphi'_2}{S_2}$$

$$a_1 = \rho \frac{\sin \varphi'_1}{S_1} \qquad b_1 = -\rho \frac{\cos \varphi'_1}{S_1}$$

gdyż

$$\sin (\varphi'_2 + 180^0) = -\sin \varphi_2$$

$$\cos (\varphi'_2 + 180^0) = -\cos \varphi_2$$

Stąd wynika, że przy wcięciu wstecz spółczynniki kierunkowe otrzymują odwrotne znaki, o ile do obliczenia spółczynników wprowadzamy azymuty prostych, łączących określany przybliżony punkt z punktami danemi. Jednem słowem, równanie błędu dla pierwszego kąta przybiera postać:

$$v_1 = a_2\, dx + b_2\, dy - a_1\, dx - b_1\, dy + l_1 =$$

$$= (a_2 - a_1)\, dx + (b_2 - b_1)\, dy + l_1$$

Analogicznie ułożymy równania błędów i dla innych kątów; w ten sposób ułożymy cały układ równań błędów:

$$v_1 = (a_2 - a_1)\, dx + (b_2 - b_1)\, dy + l_1$$

$$v_2 = (a_3 - a_2)\, dx + (b_3 - b_2)\, dy + l_2$$

— — — — — — — — — — — —

$$v_{n-1} = (a_n - a_{n-1})\, dx + (b_n - b_{n-1})\, dy + l_{n-1}$$

przy n spostrzeganych kątach. Pamiętać należy, że wszystkie spółczynniki kierunkowe zostają obliczone (przy przytoczonej tu postaci równań błędów) po zmianie azymutów o 180°.

Oznaczając spółczynniki przy dx i dy kolejnemi literami A i B, przepiszemy dla skrócenia równania błędów:

$$v_1 = A_1\, dx + B_1\, dy + l_1$$

$$v_2 = A_2\, dx + B_2\, dy + l_2$$

— — — — — — — — —

$$v_{n-1} = A_{n-1}\, dx + B_{n-1}\, dy + l_{n-1}$$

skąd otrzymamy równania normalne przyrostów spółrzędnych przybliżonego punktu:

$$[A\,A]\, dx + [A\,B]\, dy + [A\,l] = 0$$

$$[A\,B]\, dx + [B\,B]\, dy + [B\,l] = 0$$

w wypadku jednakowo dokładnych spostrzeżeń.

stąd

$$dy = -\frac{[Bl.1]}{[BB.1]}$$

$$dx = -\frac{[A\,B]}{[A\,A]}dy - \frac{[Al]}{[A\,A]}$$

po obliczeniu dx i dy otrzymamy spółrzędne wyrównane wcinanego wstecz punktu

$$X_p = x_0 + dx$$

$$Y_p = y_0 + dy$$

Przebieg postępowania.

1) Obliczamy przybliżone spółrzędne x_0 y_0 punktu P z trzech danych punktów, odpowiednio celowo obranych.

2) Na zasadzie spółrzędnych przybliżonych x y i spółrzędnych danych punktów obliczamy azymuty przybliżone φ'_1 $\varphi'_2 \ldots \varphi'_{n-1}$ prostych, łączących punkt przybliżony x_0 y_0 ze wszystkiemi danemi punktami, oraz długości tych prostych S_1 $S_2 \ldots$

3) Z azymutów przybliżonych obliczamy kąty przybliżone $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0 \ldots$

4) Tworzymy wyrazy wolne równań błędów, jako różnice między kątami przybliżonemi a spostrzeżonemi,
a więc:

$$l_1 = \alpha_0 - \alpha_1$$

$$l_2 = \beta_0 - \beta_1$$

— — — —

5) Dla wszystkich prostych, łączących punkt przybliżony x_0 y_0 z danemi, obliczamy spółczynniki kierunkowe a i b; w tym celu obliczamy:

$$a_1 = \rho\,\frac{\sin \varphi'_1}{S_1} \qquad b_1 = -\rho\,\frac{\cos \varphi'_1}{S_1}$$

$$a_2 = \rho\,\frac{\sin \varphi'_2}{S_2} \qquad b_2 = -\rho\,\frac{\cos \varphi'_2}{S_2}$$

— — — — — — — — — —

pamiętając o tem, że wzory te uwzględniają już zmiany azymutów na odwrotne.

6) Obliczamy spółczynniki przy poprawkach spółrzędnych dx i dy, tworząc wyrazy

$$A_1 = a_2 - a_1 \qquad B_1 = b_2 - b_1$$

$$A_2 = a_3 - a_2 \qquad B_2 = b_3 - b_2$$

— — — — — — — —

$$A_{n-1} = a_n - a_{n-1} \qquad B_{n-1} = b_n - b_{n-1}$$

i wypisując równania błędów:

$$v_1 = A_1\, dx + B_1\, dy + l_1$$

$$v_2 = A_2\, dx + B_2\, dy + l_2$$

$$— \quad — \quad — \quad — \quad — \quad — \quad —$$

$$v_{n-1} = A_{n-1}\, dx + B_{n-1}\, dy + l_{n-1}$$

7) od równań błędów dochodzimy do równań normalnych poprawek spółrzędnych:

$$[A\,A]\, dx + [A\,B]\, dy + [A\,l] = 0$$

$$[A\,B]\, dx + [B\,B]\, dy + [B\,l] = 0$$

8) po rozwiązaniu dx i dy z równań normalnych obliczamy spółrzędne wyrównane:

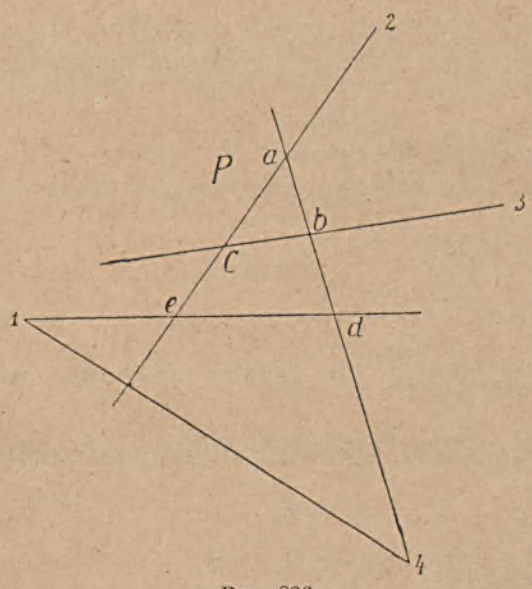
$$X_p = x_0 + dx$$

$$Y_p = y_0 + dy$$

§ 408. Wyrównywanie graficzne wcinanych punktów.

W praktyce pomiarowej często spotykamy się z wypadkami graficznego wyrównania wcinanych punktów; metoda ta jest mniej dokładna od analitycznej, wymaga również obliczeń, a daje dosyć wielką oszczędność na czasie.

Podstawa metody graficznego wyrównania jest następująca (rys. 826).



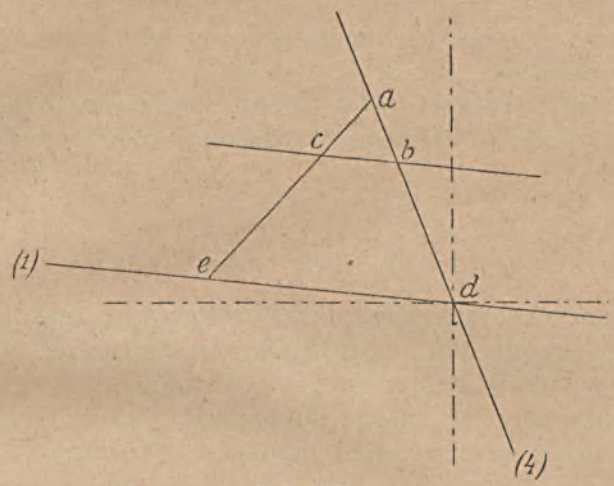
Rys. 826.

A. Wcinamy z punktów 1, 2, 3, 4 o danych spółrzędnych wprzód punkt P; wyobraźmy sobie, że po obliczeniu azymutów wcinających prostych poprowadzono wszystkie celowe do punktu P; wówczas celowe te przetną się, zamiast jednego — w kilku punktach, a, b, c, d, e. Punktów przecięcia się przy n wcinających kierunkach będzie $\frac{n(n-1)}{2}$.

Pomijając narazie wyznaczenie najprawdopodobniejszego ze wszystkich $\frac{n(n-1)}{2}$ rozwiązań, co nie będzie trudne, zastanówmy się nad sposobami wykreślenia naszego rysunku w dużej skali, np. 1 : 20.

Aby wykreślić taki rysunek, obliczamy z trójkąta $1 — 4 — P$. spółrzędne punktu d oraz długości boków $1 — d$ i $4 — d$. Z trójkąta

2 — 3 — P obliczymy długości boków 2 — c i 3 — c, z pozostałych trójkątów znajdziemy boki $2a$, $4a$, $4b$, $3b$, $1e$, $2e$ oraz obliczymy spostrzeżone azymuty $1 - P$, $2 - P$, $3 - P$ i $4 - P$; wykreślamy układ osi spółrzędnych, za początek układu obieramy punkt d. Przez początek układu d (rys. 827) wykreślamy proste pod azymutami $4 - d$ i $1 - d$; następnie tworzymy różnice $4a - 4d = da$, $4b - 4d = db$, $1e - 1d = de$ i dodatnie różnice wnosimy w skali w kierunku wykreślonych prostych azy-



Rys. 827.

mutów, ujemne — w kierunku odwrotnych azymutów. Tak więc w naszym wypadku punkty a i b naniesiemy na prostej $d - a$ o azymucie $4 - d$, punkt zaś e, ponieważ $le - ld = de$ jest ujemne, na prostej de o azymucie $(de) = (1d) + 180^0$ (rys. 826 i 827).

Łączymy a i e i na otrzymanym boku odkładamy $ec = 2e - 2c$. W ten sposób otrzymaliśmy wszystkie punkty przecięć.

Powstaje kwestja określenia najprawdopodobniejszego położenia punktu P; w tym celu wyznaczamy w wykreślonym układzie spółrzędne wszystkich przecięć $x_a\ y_a$, $x_b\ y_b$, $x_c\ y_c$, $x_e\ y_e$, $x_d = 0$, $y_d = 0$ w odniesieniu do układu o osiach, przechodzących przez d; aby obliczyć najprawdopodobniejsze spółrzędne $x_p\ y_p$, przypiszemy spółrzędnym punktów przecięcia pewne wagi. Waga każdego przecięcia jest proporcjonalna do $\frac{\sin^2 \tau}{d_1^2\ d_2^2}$, co znaczy, że waga każdego przecięcia jest wprost proporcjonalna do kwadratu sin kąta, pod którym przecinają się obydwa kierunki, oraz jest odwrotnie proporcjonalna do iloczynu kwadratów długości obydwu celowych. Ponieważ chodzi o wynik przybliżony, możemy dokonać pewnego odstępstwa od wymagań teorji i za wagę każdego przecięcia przyjąć sinus kąta pomiędzy przecinającemi się w danym punkcie kierunkami. Kąty te bierzemy z przenośnika z dokładnością do 1^0, ich sinusy z tablic naturalnych funkcyj goniometrycznych z dokładnością do 0,1. Ten sposób określenia wag nie uwzględnia wpływu odległości, daje zwiększone wagi kątom bliskim 90^0, lecz w każdym razie przecięcia mało pewne, pod ostremi kątami, uzyskują małe wagi; jeżeli teraz oznaczymy w ten sposób określone wagi punktów a, b, c, d, e literami $p_a\ p_b\ p_c\ p_d$ i p_e, wówczas wielkości

$$x_p = \frac{x_a p_a + x_b p_b + x_c p_c + x_e p_e}{p_a + p_b + p_c + p_d + p_e}$$

$$y_p = \frac{y_a p_a + y_b p_b + y_c p_c + y_e p_e}{p_a + p_b + p_c + p_d + p_e}$$

wyrażą spółrzędne najprawdopodobniejszego położenia punktu w naszym układzie na rysunku.

Należy teraz odnieść te spółrzędne do układu, w którym są wyrażone spółrzędne punktów 1, 2, 3, 4.

Ponieważ z trójkąta 1 — 4 — P określiliśmy spółrzędne przybliżone punktu P, mianowicie x_d i y_d, więc wyrównane spółrzędne punktu P będą:

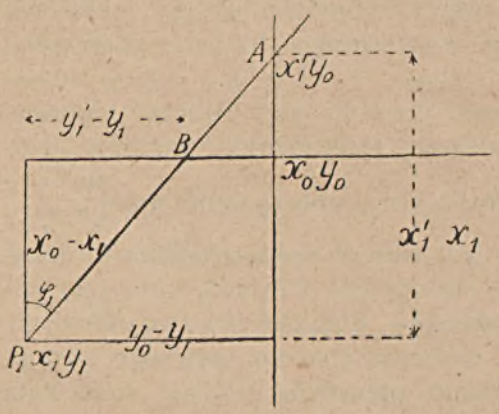
$$X_p = x_d + x_p$$

$$Y_p = y_d + y_p$$

Podany sposób graficznego określenia punktu, aczkolwiek jest przybliżony, niemniej przeto daje najzupełniej wystarczające wyniki, niewiele różniące się od wyników analitycznego wyrównania.

Nanoszenia przecięć można dokonywać jeszcze innemi sposobami, niż rozpatrzona przez nas bawarska metoda. Rozpatrzmy metodę Gaussa:

B. Mając obliczone spostrzeżone azymuty prostych, łączących dane punkty 1, 2, 3 ... z szukanym punktem P, obliczamy z dowolnego trójkąta, zbliżonego do równobocznego (rys. 826), np. 4 P 2, spółrzędne przybliżone x_0 y_0 punktu P, i początek układu spółrzędnych obieramy w punkcie x_0 y_0; wówczas dla naniesienia na papier każdego wcinającego kierunku wystarczy obliczyć odcinki na osiach spółrzędnych, utworzone przez dany wcinający kierunek.



Rys. 828.

Np., kierunek 1 P o azymucie φ_1 przecina (rys. 828) osie spółrzędnych w punktach A $(x'_1\ y_0)$ i B $(y'_1\ x_0)$.

Wielkości odcinków x'_1 i y'_1 na osiach spsółrzędnych obliczymy z równań:

$$y'_1 - y_1 = (x_0 - x_1)\ tg\ \varphi_1$$

$$x'_1 - x_1 = (y_0 - y_1)\ ctg\ \varphi_1$$

obliczone $x'_1 - x_0$ i $y'_1 - y$ nanosimy na osie i otrzymane punkty łączymy prostą, która na rysunku przedstawia wcinający kierunek 1 P.

Analogicznie naniesiemy i inne kierunki; tak więc otrzymamy ich przecięcia. Ten sposób wykreślenia kierunku nie zawsze jest możliwy (np., gdy jeden z kierunków jest prawie równoległy do którejkolwiek z osi — wówczas jedno z przecięć z osiami nie ułoży się w granicach rysunku)

i nie zawsze dość ścisły (gdy obydwa przecięcia wcinającej prostej z osiami są bardzo bliskie początku spółrzędnych x_0 y_0, wówczas przedłużenie otrzymanego kierunku nie będzie ścisłe).

W obydwu wypadkach kierunek budujemy z jednego przecięcia z osią oraz z azymutu zapomocą tablic tangensów, jeżeli mamy siatkę kwadratów, lub wprost przy pomocy przenośnika.

C. *Metoda Frankego.*

Obliczamy z dowolnego trójkąta (rys. 826) $4\,P\,2$ przybliżone spółrzędne punktu P_0 $(x_0\ y_0)$; mając x_0, y_0 i spółrzędne punktów danych, obliczymy azymuty i długości prostych, łączących dane punkty z przybliżonym P_0 x_0 y_0, ze wzorów:

$$tg\ \varphi'_1 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}\ ;\ d'_{1P} = \frac{y_0 - y_1}{\sin \varphi_1} = \frac{x_0 - x_1}{\cos \varphi_1}$$

Lecz azymut prostej $(1\,P) = \varphi_1$, obliczany ze spostrzeżeń np. $(1_1\,P) = (1_1\,4) - \alpha)$ różni się od przybliżonego azymutu φ'_1; oznaczmy tę różnicę:

$$\delta_1 = \varphi_1 - \varphi'_1$$

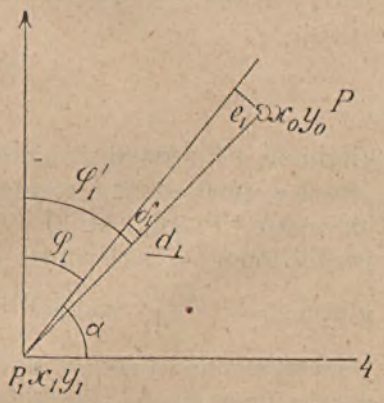
Jeżeli wyraz δ jest ujemny, znaczy to, że prosta, odpowiadająca spostrzeżonemu azymutowi, odchyla się w lewo od położenia prostej, odpowiadającej azymutowi przybliżonemu i odwrotnie. Obliczamy różnice

$$\delta_2 = \varphi_2 - \varphi'_2$$

$$\delta_3 = \varphi_3 - \varphi'_3$$

— — — —

— — — —



Rys. 829.

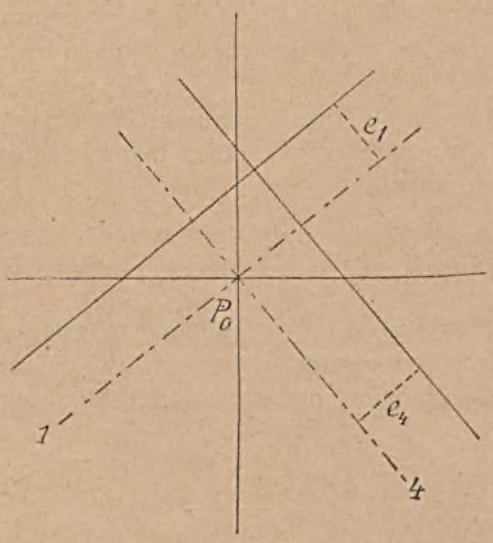
dla wszystkich kierunków. Spuśćmy prostopadłą e_1 z punktu P_0 $(x_0\ y_0)$ na prostą o azymucie φ_1 i, oznaczając odległość $1\,P_0$ literą d_1, otrzymamy

$$e_1 = d_1 \sin \delta_1 = d_1\ \delta''_1 \sin 1''$$

skąd

$$e_1 = \frac{d_1\,\delta''_1}{\rho''}$$

Obliczając różnicę δ pomiędzy azymutami spostrzeganemi a przybliżonemi dla wszystkich kierunków, oraz obliczając odległości od danych punktów do określanego w przybliżeniu, lub wprost z mapy, o ile na takowej uwidocznione jest położenie naszych punktów, wypiszemy długości prostopadłych, spuszczonych z punktu przybliżonego na wszystkie kierunki spostrzeżone:



Rys. 830.

$$e_1 = \frac{d_1\ \delta''_1}{\rho''}$$

$$e_2 = \frac{d_2\ \delta''_2}{\rho''}$$

$$e_3 = \frac{d_3\ \delta''_3}{\rho''}$$

— — — —

Ponieważ wobec nieznacznego δ możemy traktować e jako długość prostopadłej, wystawionej z punktu przybliżonego P_0 $(x_0\ y_0)$ do przecięcia się ze spostrzeżonym kierunkiem, skorzystamy więc z tej właściwości dla zbudowania rysunku.

Początek układu spółrzędnyuh przyjmujemy za P_0 $(x_0\ y_0)$. Wykreślamy na zasadzie przybliżonego azymutu:

$$\varphi' = arc\ \ tg\ \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$$

kierunek $1P_0$; jeżeli δ_1 ujemne, wówczas w lewo od kierunku $1P_0$ w odległości e_1 prowadzimy równoległą, która wyznacza położenie spostrzeżonego kierunku $1P$; gdy, np., δ_4 jest dodatnie, wówczas po wykreśleniu z azymutu przybliżonego γ'_2 kierunku $4P_0$, w prawo równolegle do niego na odległości $e_4 = \frac{d_4\ \delta_4}{\rho''}$ wykreślimy azymut spostrzeżonej prostej $4P$; oczywiście wszystkie dane linjowe wykreślamy w tej samej dużej skali. Dopuszczone przy rozumowaniu założenie, jakoby obydwa kierunki, spostrzegany i przybliżony, były równoległe, na tak drobnym odcinku kierunku, jaki przedstawiony jest na rysunku, nie odbije się praktycznie na wynikach.

Po zbudowaniu wszystkich spostrzeżonych kierunków, otrzymamy przecięcia, z których odnajdziemy najprawdopodobniejsze położenie punktu P z wyrazów na spółrzędne:

$$x_p = \frac{[px]}{[p]} + x_0$$

$$y_p = \frac{[py]}{[p]} + y_0$$

w których x_0, y_0 oznaczają spółrzędne przecięć, wzięte z rysunku, wagi zaś przecięć są ich sinusami.

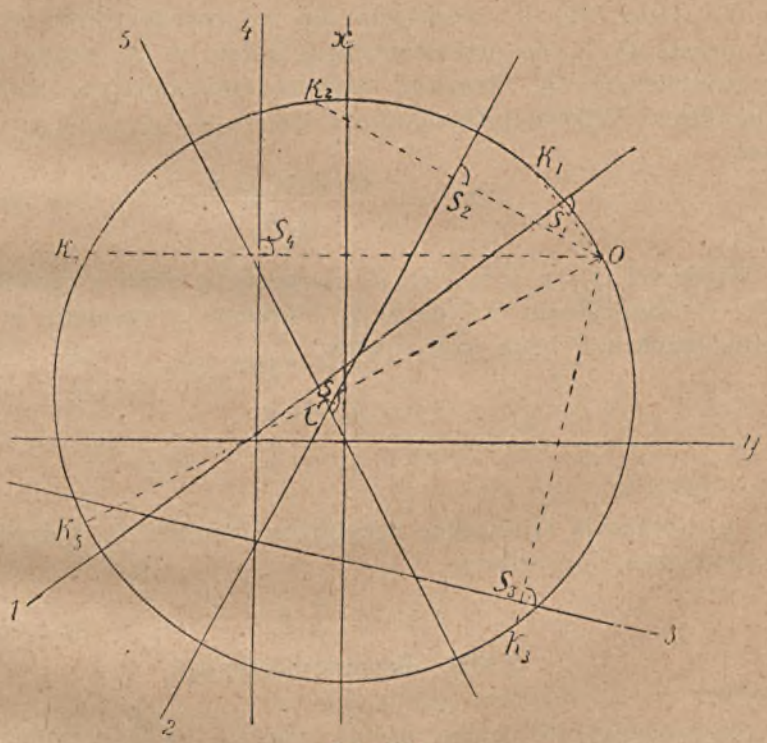
Częstokroć, nie obliczając spółrzędnych najprawdopodobniejszego punktu, wprost na oko obieramy na rysunku najprawdopobniejsze położenie punktu. Będzie to czysto graficzne rozwiązanie zagadnienia o wcięciu;

rozwiązanie takie do zbyt ścisłych nie należy, jakkolwiek jest o wiele dokładniejsze, niż punkt przybliżony.

Rozpatrzmy ściślejszy sposób określania położenia wcinanego punktu.

D. *Metoda Bertots'a.*

Wykreślamy koło o promieniu około 40 *cm.*, mniej więcej obejmujące przecięcia wcinających prostych, jednym z powyższych sposobów wykreślone na milimetrowym papierze w skali 1 : 10. Z dowolnego punktu O obwodu koła spuszczamy prostopadłe do wszystkich celowych i przedłużamy



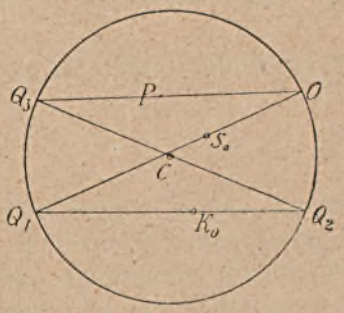
Rys. 831.

je do przecięcia się z kołem. Spodki prostopadłych oznaczmy literami S, przecięcia prostopadłych z kołem literami K. Z podziałki milimetrowego papieru odczytamy spółrzędne wszystkich punktów S i K, odniesione do osi, przechodzących przez punkt przybliżony.

Z otrzymanych spółrzędnych punktów S odnajdujemy środek ciężkości figury, utworzonej połączeniem punktów S prostemi. Spółrzędne środka ciężkości układu punktów S będą

$$x_{s0} = \frac{[px_s]}{[p]} \qquad y_{s0} = \frac{[py_s]}{[p]}$$

Analogicznie odnajdziemy środek ciężkości figury, utworzonej przez punkty K, mianowicie:



Rys. 832.

$$x_{ko} = \frac{[p\,x_k]}{[p]} \qquad y_{ko} = \frac{[p\,y_k]}{[p]}$$

Za wagi przyjmujemy odwrotności kwadratów odległości od punktu określanego do danych punktów $p = \frac{1}{d^2}$, przyczem wagi dwustronnych kierunków będą dwa razy większe od wag jednostronnych.

Nanosimy otrzymane punkty $x_{so}\,y_{so}$ i $x_{ko}\,y_{ko}$ na rysunek, otrzymujemy punkty S_0 i K_0. Przedłużmy OS_0 (rys. 832) do przecięcia się z obwodem koła w Q_1, przeprowadźmy prostą $Q_1\,K_0$ do przecięcia się z kołem w Q_2, przez który poprowadźmy średnicę $Q_2\,Q_3$. Szukane najprawdopodobniejsze położenie odpowiada punktowi P prostej $Q_2\,O$,
przyczem

$$OP = \frac{Q_2\,Q_3 \times OS_0}{Q_2\,K_0}$$

Wielkości $Q_2\,Q_3$, OS_0 i $Q_2\,K_0$ bierzemy w skali z rysunku i odliczamy OP. Po naniesieniu OP na $O\,Q_3$ bierzemy z rysunku w skali $x_p\,y_p$. spółrzędne punktu P będą więc równe:

$$Y = y_0 + y_p$$
$$X = x_0 + x_p$$

gdzie $x_0\,y_0$ oznaczają spółrzędne przybliżone punktu P, których obliczenie zostało omówione poprzednio.

§ 409. Diagram Horsky'ego.

Przypuśćmy, że pewna prosta zmienia swój kierunek o niewielki kąt $d\alpha$; wówczas punkt, położony na tej prostej, w odległości S od początku prostej, odchyli się w kierunku poprzecznym od tej prostej o wielkość

$$P = S \operatorname{tg} d\alpha$$

jeżeli kąt $d\alpha$ jest o tyle mały, że łuk, odpowiadający temu kątowi, można uważać za odcinek prostej.

Wówczas możemy dla małego $d\alpha$ napisać:

$$P = S\,\frac{d\alpha}{\rho}$$

dla innego zaś punktu, położonego w odległości S_1 od początku prostej, otrzymalibyśmy pewne

$$P_1 = S_1\,\frac{d\alpha}{\rho}$$

stąd

$$\frac{d\alpha}{\rho} = \frac{P}{S} = \frac{P_1}{S_1} \dots$$

Dla graficznego określania P Horsky podał diagram, z którego dla danych S i $d\alpha$ otrzymujemy P w pewnej skali. Mianowicie, ze względu na stosowanie tego diagramu przy triangulacjach, t. j. przy znacznych S i niewielkich P, dla wielkości S Horski przyjął skalę $\frac{1}{N}$, dla p — skalę $\frac{1}{M}$, przytem

$$\frac{1}{M} > \frac{1}{N}$$

tak, np., w austrjackiej instrukcji katastralnej przyjęto $M = 12{,}5$ oraz $N = 25\,000$.

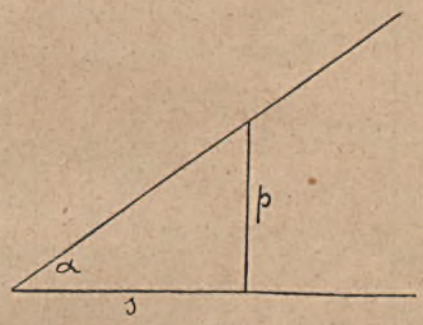
Skoro więc wykreślimy:

$$s = \frac{S}{N} \quad \text{oraz} \quad p = \frac{P}{M}$$

wówczas $\frac{d\alpha}{\rho} = \frac{Mp}{Ns}$, a stąd, oznaczając

$$\frac{d\alpha}{\rho} = k,$$

otrzymamy $\frac{p}{s} = k\frac{N}{M}$.



Rys. 833

Oznaczmy $k\frac{N}{M} = \operatorname{tg} \alpha$

wówczas rys. 833 daje zależność między zbudowanem p i s, mianowicie

$$\frac{p}{s} = \operatorname{tg} \alpha.$$

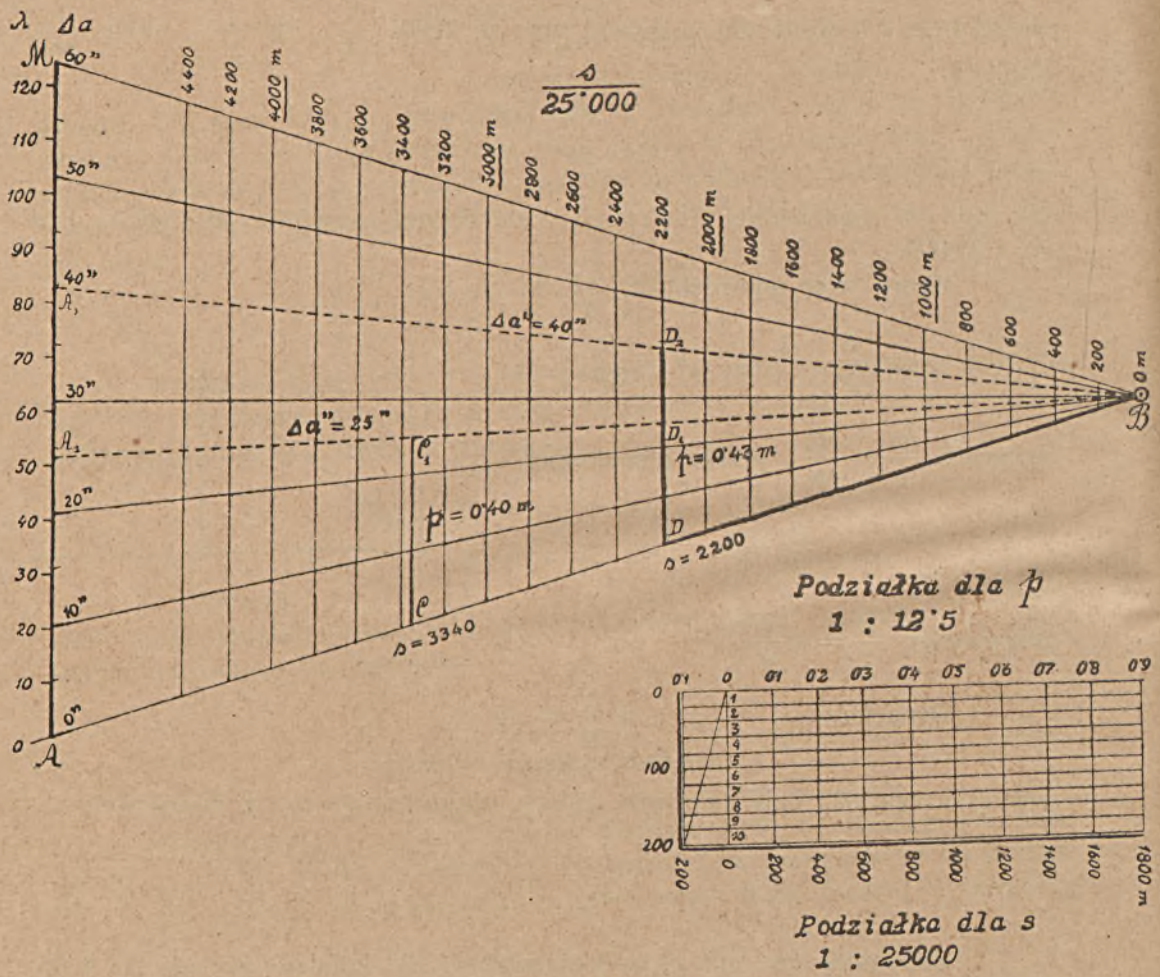
Zmieniając $d\alpha$, np., co 10″, otrzymamy dla każdego $d\alpha$ nowe k i odpowiednie α.

Skoro teraz dla prostej AB (rys. 834) 1) obliczymy co 10″ dla różnych $d\alpha$ (od 0″ do 60″) odpowiednie p i naniesiemy je na prostą AM, oznaczając liczbami 10″, 20″ i t. d. końce naniesionych odcinków, i 2) od punktu B na prostej BA naniesiemy w skali $\frac{1}{N}$ odcinki dwustometrowe, przez końce których poprowadzimy równoległe do AM, wówczas dla dowolnego S i $d\alpha$ łatwo otrzymamy z diagramu p.

Tak, np., na rys. 834 prosta BA_1 odpowiada $d\alpha = 25''$; dla $S = 3340\ m$ i $d\alpha = 25''$ mamy $p = CC_1$, a korzystając z podziałki 1 : 12,5, dla p odczytamy $P = 0{,}40\ m$; wielkościom $d\alpha = 25''$ i $S = 2\,200$ odpowiada $p = DD_1$.

Podobnie dla $S = 2\,200\ m$ oraz $d\alpha = 40''$ otrzymalibyśmy $P = 0{,}43\ m$ oraz $p = DD_2$.

Przy użyciu diagramu Horsky'ego korzystamy z igiełki, wbitej w punkcie B, oraz nitki wyciąganej w kierunku odpowiedniego $d\alpha$; np. $d\alpha = 40''$, nić napinamy w kierunku BA_2 i odmierzamy cyrklem DD_2 dla $S = 2\,200$.



Rys. 834.

Zastosowanie diagramu Horsky'ego do wcięć jest bardzo proste: mając obliczone odległości S od danych punktów trygonometrycznych do punktu wcinanego, określonego tymczasem zapomocą jego spółrzędnych przybliżonych, oraz mając różnice $d\alpha$ między obliczonemi azymutami przybliżonemi a spostrzeżonemi, wyjmujemy z diagramu wielkości p, zapomocą których możemy na rysunku w skali 1 : 12,5 wykreślić wszystkie spostrzeżone kierunki, odpowiednio naniesione w stosunku do położenia przybliżonego punktu (patrz § 407).

§ 410. Zmiany azymutów i długości prostych, określane z diagramu Horsky'ego po wyrównaniu punktu.

Przypuśćmy, że wyrównaliśmy graficznie określany punkt, t. j. określiliśmy na rysunku, sporządzonym w skali 1 : 12,5 lub innej, ale takiej, którą jako 1 : M przyjęto za podstawę sporządzenia danego diagramu.

Nazwijmy punkt przybliżony W_0, wyrównany — W.

Jeżeli z punktu W spuścimy prostopadłe h_1, h_2, ... h_n na wszystkie wykreślone spostrzeżone kierunki i odetniemy je kolejno cyrklem końcu odpowiednich S_1, S_2 ... S_n (liczonych od punktu B na AB) równolegle do AM, a przez ich końce wyciągniemy kolejno nitkę punktu B do przecięcia się z podziałem sekundowym AM, wówczas każdy uzyskany odczyt daje stopień zmiany azymutu spostrzeżonego na wyrównany.

Rozpatrzmy metodę określania różnicy odległości od danego do przybliżonego, a wyrównanego punktu. Różnice te są odcinkami ds, łączącemi spodki prostopadłych h_1, h_2 ... h_n z punktem przybliżonym.

Dla otrzymania logarytmu odległości S_n od jakiegokolwiek danego do wyrównanego punktu, mając logarytm odległości S_0 do punktu przybliżonego oraz odcinek ds, napiszemy:

$$\log S_n = \log (S_0 + ds) = \log S_0 + \log \left(1 + \frac{ds}{S_0}\right)$$

lecz naturalny *log:* $Lg \left(1 + \frac{ds}{S_0}\right) = \frac{ds}{S_0}$ przy małem $\frac{ds}{S_0}$,

mnożąc ostatnie równanie przez moduł

$$\mu = 0{,}4342945,$$

otrzymujemy Briggowski logarytm

$$\log \left(1 + \frac{ds}{S_0}\right) = \mu \frac{ds}{S_0} = \lambda$$

lub w jednostce 7-ego miejsca:

$$\lambda = 4342945 \frac{ds}{S_0}.$$

Wielkość λ ma postać, odpowiadającą postaci równania:

$$d\alpha'' = \rho'' \frac{P}{S}.$$

W podobny więc sposób budujemy podziałkę λ na prostej AM diagramu z lewej strony.

Korzystamy z podziałki tej w następujący sposób: przypuśćmy, że $S = 3340$, $ds = 0{,}40$. Odkładamy $CC_1 = 0{,}40$ od punktu C równolegle do AM i w punkcie przecięcia przedłużenia BC_1 z AM odczytamy $\lambda = 0.0000520$, t. j. 520 w jednostkach 7-ego, lub 52 w jednostkach 6-go miejsca logarytmów.

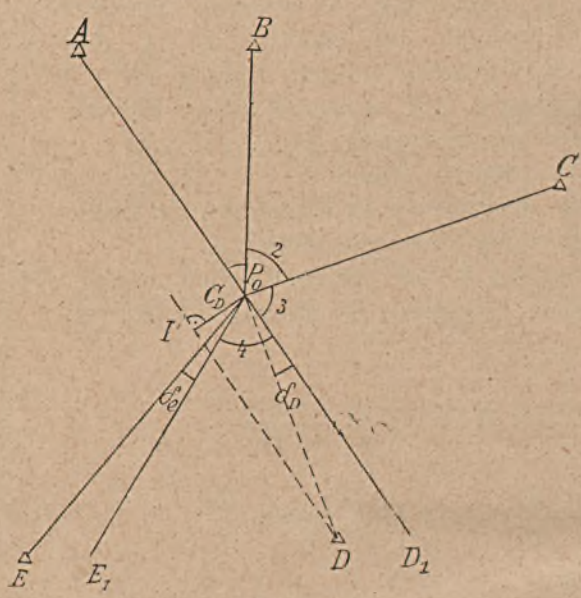
W ten sposób

$$\log S_n = \log S_0 + \lambda.$$

§ 411. Wyrównanie graficzne wcięcia wstecz.

Obliczamy na zasadzie trzech punktów A, B, C spółrzędne przybliżone określanego punktu P_0 — x_0 y_0; gdy obliczymy azymut $P_0 D' = P_0 C + 3$ oraz gdy obliczymy azymut $P_0 D$ ze spółrzędnych punktów P_0 i D, wówczas obydwa te azymuty będą się nieco różnić.

Oznaczmy tę różnicę literą δ_D; analogicznie obliczymy różnicę δ_e dla kierunku na punkt E. Różnice δ tworzymy, odejmując od spostrzeżonego azymutu azymut przybliżony, np., $\delta_D = (P_0 C) + 3 - (P_0 D)$. Odwróćmy zadanie o wyrównaniu wcięcia wstecz, mianowicie powiedzmy, że z punktów A, B, C, D i E wcinamy punkt P; przytem azymuty AP_0, BP_0, CP_0 otrzymaliśmy przy obliczeniu spółrzędnych przybliżonych x_0 y_0 wcinanego punktu P, azymuty zaś DP i EP obliczymy z relacji:



Rys. 835.

$$(DP) = (P_0 C) + 3 \mp 180^0$$

$$(EP) = (P_0 C) + (3 + 4) \mp 180$$

Ze spółrzędnych punktu P_0 $(x_0\ y_0)$ i punktów A, B, C, D, E odnajdziemy odległości AP_0, BP_0, CP_0 oraz EP_0 i DP_0.

Jeżeli teraz wyobrazimy sobie, że z punktu D poprowadzona została prosta DI pod azymutem $(DI) = (P_0 C) + 3 \mp 180^0$, wówczas prosta ta odchyli się od punktu P_0 o długość $c_D = \frac{d_D \delta''_D}{\rho''}$ w kierunku $\perp$-ym do $P_0 D$ Analogicznie odchyli się prosta EP w kierunku $\perp$-ym do $P_0 E$ o długość $e_e = \frac{d_e \delta''_e}{\rho''}$.

Wykreślenia przecięć dokonamy tak samo, jak w wypadku C przy wcięciach wprzód, pamiętając, że przy ujemnych δ wykreślany kierunek przechodzi w lewo od punktu P_0, przy dodatniem δ — w prawo od P_0, i pamiętając, że trzy celowe przechodzą przez punkt przybliżony.

Wyznaczenie najprawdopodobniejszego położenia punktu P nie różni się od postępowania, rozpatrzonego przy wcięciach wprzód.

§ 412. Graficzne wyrównanie wcięcia skombinowanego.

Dane są spółrzędne punktów E, D, C, B, i A, określić spółrzędne punktu P, jeżeli punkt P wyznacza się zapomocą jednoczesnego wcięcia wstecz do punktów $E, D \ldots$ z wcięciem wprzód od punktów D, C, B i A.

Przebieg wyrównania graficznego będzie następujący: po wyrównaniu sum kątów w trójkącie ABP do 180°,

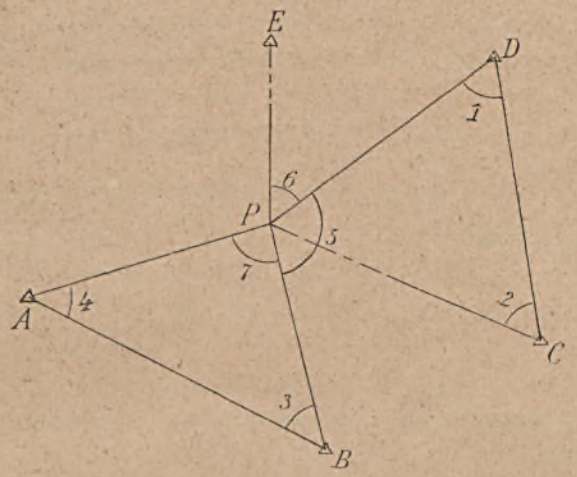
1) obliczymy azymuty spostrzeżone wcinających wprzód prostych DP, CP, BP, AP i t. d. mianowicie:

$$(DP) = (DC) + 1$$

$$(CP) = (CD) - 2$$

$$(BP) = (BA) + 3$$

$$(AP) = (AB) - 4$$



Rys. 836.

2) z trójkąta ABP obliczymy spółrzędne przybliżone x_0 y_0 punktu P.

$$x_0 = x_a + AP \cos (AP) = x_b + BP \cos (BP)$$

$$y_0 = y_a + AP \sin (AP) = y_b + BP \sin (BP)$$

3) przyjmując za azymut główny (AP), lub (BP), obliczymy z kątów przy punkcie P azymuty prostych , PD i PE; azymutu PB nie obliczamy, gdyż w trójkącie ABP wyrównaliśmy kąty do 180°, więc azymut (PB), obliczony z (PA) przez kąt 7-y, nie różni się od azymutu (PB), obliczonego z (BA) przez kąt trzeci;

4) obliczamy średnie spostrzeżone azymuty wszystkich celowych;

5) dalsze postępowanie patrz § 408 — 410.

§ 413. Przybliżone wyrównanie wcięcia wprzód z trzech punktów.

Przypuśćmy, że mamy trzy punkty trygonometryczne A, B i C o danych spółrzędnych (x_a, y_a), (x_b, y_b) i (x_c, y_c) (rys. 837).

Wcinamy punkt D, mierząc kąty 1, 2 i 3.

Ponieważ kąt β może być obliczony,

wobec tego że

$$\beta = (BC) - (BA)$$

zaś

$$(BC) = arc\ tg \frac{y_c - y_b}{x_c - x_b}$$

oraz

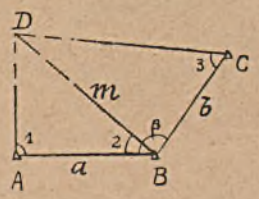
$$(BA) = arc\ tg \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b}$$

więc

$$\text{kąt } CBD = \beta - 2.$$

Długości $a = AB$ i $b = BC$ również mogą być obliczone z danych spółrzędnych punktów A, B i C, są więc znane.

Dla przybliżonego wyrównania wystarczy ułożyć równanie boku. Oznaczmy poprawki pomierzonych kątów literami v_1, v_2 i v_3, bok zaś BD literą m. Wyrównane m powinno być równe:



Rys. 837.

$$m = \frac{a \sin (1 + v_1)}{\sin (1 + 2 + v_1 + v_2)} =$$

$$= \frac{b \sin (3 + v_3)}{\sin (\beta - 2 + 3 - v_2 + v_3)}$$

skąd, logarytmując, otrzymamy po oznaczeniu zmian logarytmów sinusów literami r:

$$r_1 v_1 + r_{\beta - 2 + 3} (v_3 - v_2) - r_{1+2} (v_1 + v_2) - r_3 v_3 +$$

$$+ \log \frac{a \sin 1 \sin (\beta - 2 + 3)}{b \sin 3 \sin (1 + 2)} = 0$$

i następnie, oznaczając ostatni wyraz literą l, mamy:

$$(r_1 - r_{1+2}) v_1 - (r_{\beta - 2 + 3} + r_{1+2}) v_2 + (r_{\beta - 2 + 3} - r_3) v_3 + l = 0$$

Oznaczając:

$$R_1 = r_1 - r_{1+2}$$

$$R_2 = r_{\beta - 2 + 3} + r_{1+2}$$

$$R_3 = r_{\beta - 2 + 3} - r_3$$

mamy:

$$R_1 v_1 - R_2 v_2 + R_3 v_3 + l = 0$$

Ułożymy równanie normalne:

$$[RR] k + l = 0$$

skąd:

$$k = - \frac{l}{[RR]}$$

Obliczymy poprawki kątów:

$$v_1 = R_1 k = - \frac{R_1}{[RR]} l$$

$$v_2 = - R_2 k = \frac{R_2}{[RR]} l$$

$$v_3 = R_3 k = - \frac{R_3}{[RR]} l$$

Dodając odpowiednio poprawki do pomierzonych kątów, otrzymamy wyrównane kąty 1′, 2′, 3′. Na podstawie tych kątów z Δ-ów ABD i BCD obliczymy azymuty i długości prostych AD, BD i CD oraz spółrzędne punktu D.

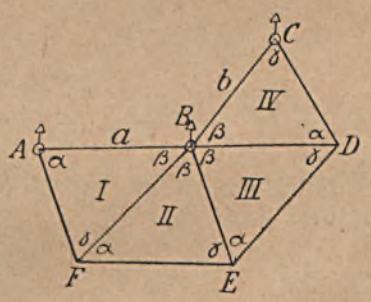
§ 414. Wplatanie łańcucha Δ-ów do dwu boków o wspolnym wierzchołku.

Gdy uzupełnienie siatki trygonometrycznej nie daje się wykonać zapomocą wielokrotnych wcięć, wówczas można stosować metodę, podaną w niniejszym §-e, lub w § 415.

Pomiędzy punkty A, B i C wpleciono łańcuch Δ-ów I, II, III, IV o wspólnym wierzchołku B.

W każdym Δ-cie pomierzono kąty α, β i γ, którym dla odróżnienia przypisywać będziemy znaczki, odpowiadające numerowi Δ-a.

Każdy z kątów Δ-a uzyska poprawkę v, po wprowadzeniu której suma poprawionych kątów wyniesie 180°. Ponieważ jednak suma poprawionych kątów β winna być równa różnicy azymutów $(BC) - (BA)$, przeto kąty β dla zadośćuczynienia temu warunkowi winny otrzymać po pewnej poprawce w. W ten sposób kąty β uzyskują poprawki v z warunku Δ-a i w z warunku sumy kątów.



Rys. 838.

Układ równań warunkowych, gdy założymy równość poprawek v w każdym Δ-cie oddzielnie, oraz równość poprawek w, otrzymamy, tworząc poszczególne równania analogicznie do I-ego:

powinno być dla I Δ-a:

$$\alpha_1 + v_1 + \beta_1 + v_1 + w + \gamma_1 + v_1 \qquad - 180^0 = 0$$

lecz

$$\alpha_1 \qquad + \beta_1 \qquad + \gamma_1 \qquad = S_{pr}$$

więc

$$v_1 \qquad + v_1 + w \qquad + v_1 + (S_{pr} - 180^0) = 0$$

lub, oznaczając $S_{pr} - 180^0$ w I-ym Δ-cie literą l_1, mamy:

$$3\,v_1 + w + l_1 = 0$$

Podobnie wypiszemy równania dla pozostałych Δ-ów.

Co się tyczy równania sumy kątów β, to ponieważ kąty β otrzymują poprawki v i w, ułożymy je podobnie:

powinno być:

$$\beta_1 + v_1 + w + \beta_2 + v_2 + w + \beta_3 + v_3 + w + \beta_4 + v_4 + w - (BC) + (BA) = 0$$

jest zaś

$$\beta_1 \quad + \beta_2 \quad + \beta_3 \quad + \beta_4 \quad = S_{pr}$$

więc

$$v_1 \quad + v_2 \quad + v_3 \quad + v_4 + 4\,w + l_5 \quad = 0$$

gdzie

$$l_5 = S_{pr} - (BC) + (BA) = [\beta] - (BC) + (BA)$$

W ten sposób dla n wplecionych Δ-ów układ równań warunkowych napiszemy:

$$3\,v_1 + w + l_1 = 0$$

$$3\,v_2 + w + l_2 = 0$$

$$- - - - - - - -$$

$$- - - - - - - -$$

$$3\,v_n + w + l_n = 0$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + n\,w + l_{n+1} = 0$$

Wypiszemy sumę wszystkich równań prócz ostatniego oraz potrojone ostatnie:

$$3\,v_1 + 3\,v_2 + \ldots + 3\,v_n + n\,w + \Sigma_1^n l = 0$$

$$3\,v_1 + 3\,v_2 + \ldots + 3\,v_n + 3\,n\,w + 3\,l_{n+1} = 0$$

odejmując, otrzymamy: $2\,n\,w + 3\,l_{n+1} - \Sigma_1^n l = 0$

skąd

$$w = \frac{\Sigma_1^n l - 3\,l_{n+1}}{2\,n}$$

oraz z I-ch równań:

$$v_1 = -\frac{w + l_1}{3}$$

$$v_2 = -\frac{w + l_2}{3}$$

$$- - - - - -$$

$$v_n = -\frac{w + l_n}{3}$$

Po dodaniu do kątów α i γ odpowiednich poprawek v, oraz do kątów β odpowiednich v więcej w, otrzymamy kąty, wyrównane do warunków figur i sumy.

Pozostaje znaleźć poprawki dla warunku boku (warunek ten formujemy, jak równanie baz, gdyż boki a i b są dane).

Oznaczając poprawki kątów α_k i β_k literami v'_k i $-v'_k$, w celu zachowania sum poprawianych kątów, równych 180°, napiszemy:

$$v_1' (r_{\alpha 1} - r_{\gamma 1}) + v'_2 (r_{\alpha 2} - r_{\gamma 2}) + ... + v'_n (r_{\alpha n} - r_{\gamma n}) +$$

$$+ \log \frac{a}{b} \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \ldots \sin \alpha_n}{\sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \ldots \sin \gamma_n} = 0$$

przytem, np., $r_{\alpha 1}$ i $r_{\gamma 1}$ w I-ym nawiasie są zmianami logarytmów sinusów kątów α_1 i γ_1 przy zmianie kątów o 1".

Stąd znajdziemy równanie korelaty:

$$[(r_\alpha - r_\gamma) (r_\alpha - r_\gamma)] k + l = 0$$

gdzie l jest wyrazem wolnym równania boku. Następnie, mając k, obliczymy:

$$v'_1 = (r_{\alpha 1} - r_{\gamma 1}) k$$

— — — — — —

— — — — — —

$$v'_n = (r_{\alpha n} - r_{\gamma n}) k$$

i wyrównanemi kątami będą

$$\overset{\omega}{\alpha_1} = \alpha_1 + v_1 + v_1'$$

$$\gamma_1' = \gamma_1 + v_1 - v_1'$$

$$\overset{\omega}{\alpha_2} = \alpha_2 + v_2 + v_2'$$

$$\overset{\omega}{\gamma_2} = \gamma_2 + v_2 - v_2'$$

— — — — — — —

— — — — — — —

W praktyce wystarczy wyraz

$$l = \log \frac{a}{b} \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \ldots . \sin \alpha_n}{\sin \gamma_1 \sin \gamma_2 \ldots . \sin \gamma_n}$$

rozrzucić na poszczególne log sin α_1 ..... clg sin γ_1 ..... w ten sposób, że

log sin α_1 uzyska poprawkę $- \frac{l}{[v_\alpha + v_\gamma]} v_{\alpha 1}$

log sin γ_1 „ „ $+ \frac{l}{[v_\alpha + v_\gamma]} v_{\gamma 1}$

$$\log \sin \alpha_2 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad -\frac{l}{[v_\alpha + v_\gamma]} v_{\alpha 2}$$

$$\log \sin \gamma_2 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad +\frac{l}{[v_\alpha + v_\gamma]} v_{\gamma 2}$$

poprawki zaś kątowe wystarczy przyrównać do

$$\frac{l}{[v_\alpha + v_\gamma]}$$

zmniejszając o tę wielkość wszystkie kąty α i zwiększając o nią kąty γ.

W wypadku, gdy kąty β nie są pomierzone (punkt B nie nadaje się na stanowisko, gdyż wymaga specjalnych w tym celu urządzeń, np., nad krzyżem attyki kościelnej lub t. p.), sumę kątów α i γ wyrównamy, przypisując tym kątom jednakowe poprawki v, tak że

$$2nv = n \cdot 180^0 - \{(BC) - (BA)\} - [\alpha] - [\gamma] = l_0$$

skąd

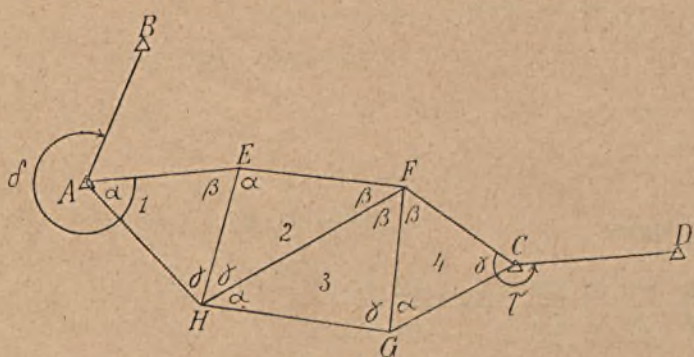
$$v = \frac{l_0}{2n}$$

Gdy dodamy v do wszystkich α i γ, odnajdziemy, jak wyżej, drugie poprawki tych kątów z równania boku.

§ 415. Wplatanie łańcucha trójkątów między punkty wyższego rzędu.

I. Przypuśćmy, że punkty A, B, C i D są punktami triangulacji państwowej, których spółrzędne prostokątne są dane.

Punkty $EHGF$ są wierzchołkami wplatanych Δ-ów. Pomierzono w każdym Δ-cie kąty α, β, γ oraz nawiązano łańcuch do boków wyższego rzędu przy pomocy pomiaru kątów δ i τ.



Rys. 840.

W danym wypadku mamy następujące warunki: 1) sumy kątów w Δ-ch winny być równe 180^0, 2) azymut boku CD, obliczany z (AB) zapomocą ciągu $AETC$, winien równać się danej z triangulacji wielkości (CD). Do określenia długości boków i spółrzędnych przejdziemy po wyrównaniu kątów.

Wszystkie kąty otrzymają poprawki v, odpowiadające warunkowi sumy kątów w trójkącie; następnie kąty α_1 β_1 α_2 β_2 β_3 β_4 i τ otrzymają poprawki ω, odpowiadające warunkowi azymutów.

Przyjmując, że v, jako poprawki jednakowo dokładnie pomierzonych kątów, są równe w poszczególnych trójkątach, otrzymamy grupę równań:

$$(\alpha_1 + v_1) + (\beta_1 + v_1 + \omega) + \gamma_1 + v_1 - 180^0 = 0$$
$$(\alpha_2 + v_2 + w) + (\beta_2 + v_2 + \omega) + (\gamma_2 + v_2) - 180^0 = 0$$
$$(\alpha_3 + v) + (\beta_3 + v_3 + \omega) + (\gamma_3 + v_3) - 180^0 = 0$$
$$(\alpha_4 + v_4) + (\beta_4 + v_4 + \omega) + (\gamma_4 + v_4) - 180^0 = 0$$

$$(D\,C) + \tau + \omega + (\beta_4 + v_4 + \omega) + (\beta_3 + v_3 + \omega) + (\alpha_2 + v_2 + \omega) +$$
$$+ (\beta_2 + v_2 + \omega) + - (\beta_1 + v_1 + \omega) + \delta + w + 4\pi - (A\,B) = 0$$

Wstawiając do pierwszego równania

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - S_{pr} = l_1$$

i podobnie postępując z innemi, otrzymamy:

$$3\,v_1 + \omega + l_1 = 0$$
$$3\,v_2 + 2\,\omega + l_2 = 0$$
$$3\,v_3 + \omega + l_3 = 0$$
$$3\,v_4 + \omega + l_4 = 0 \qquad (1)$$

$$7\,\omega + v_1 + 2\,v_2 + v_3 + v_4 + l_5 = 0 \qquad (2)$$

Oznaczmy literą z liczbę kątów, użytych jako wyniki bezpośredniego pomiaru do obliczenia azymutu; oznaczmy dalej literami $z_1\ z_2\ \ldots\ z_n$ spółczynniki przy w w grupie równań (1)-ych. Wówczas w ogólnej postaci poprzednie równania napiszemy, jako:

$$z\,\omega + z_1\,v_1 + z_2\,v_2 + \ldots + z_n\,v_n + l_a = 0 \qquad (3)$$

oraz

$$3\,v_1 + z_1\,\omega + l_1 = 0$$
$$3\,v_2 + z_2\,\omega + l_2 = 0 \qquad (4)$$
$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$
$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$
$$3\,v_n + z_n\,\omega + l_n = 0$$

Mnożąc każde z ostatniej grupy równań kolejno: pierwsze przez z_1, drugie przez z_2 i t. d., wypiszemy grupę:

$$z_1\,v_1 = -\frac{z_1\,z_1}{3}\,\omega - \frac{z_1\,l_1}{3}$$

$$z_2\,v_2 = -\frac{z_2\,z_2}{3}\,\omega - \frac{z_2\,l_2}{3}$$

$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$

$$z_n v_n = -\frac{z_n z_n}{3}\omega - \frac{z_n l_n}{3}$$ i, dodając, otrzymamy:

$$z_1 v_1 + z_2 v_2 + \ldots + z_n v_n = -\frac{[z z]}{3}\omega - \frac{[z l]}{3}$$

co da nam po podstawieniu do równania (3):

$$z\,\omega - \frac{[z z]}{3}\omega - \frac{[z l]}{3} + l_a = 0$$

$$\omega\left(\frac{3z - [z z]}{3}\right) = \frac{[z l]}{3} - l_a$$

$$\omega = \frac{[z l] - 3 l_a}{3 z - [z z]}$$

Mając ω, z równań (4)-ych obliczymy $v_1\ v_2 \ldots v_n$.
Gdy poprawimy pomierzone kąty, t. j. obliczymy

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + v_1$$

$$\beta'_1 = \beta_1 + v_1 + \omega \qquad \text{i t. d.}$$

wówczas przystępujemy do obliczenia boków Δ-ów. Ponieważ ze spółrzędnych punktów A i C określimy długość D i azymut φ prostej AC, z obliczenia:

$$tq\varphi = \frac{y_c - y_a}{x_c - x_a}$$

$$D = \frac{y_c - y_a}{\sin (AC)} = \frac{x_c - x_a}{\cos (AC)}$$

nie jest jednak dana długość żadnego boku wpisanego łańcucha, przeto założymy:

$$CF = d = 1000\ m.$$

i obliczymy kolejno:

$$GF = d\,\frac{\sin \gamma'_4}{\sin \alpha'_4} \qquad EH = FH\,\frac{\sin \beta'_2}{\sin \alpha'_2}$$

$$FH = GF\,\frac{\sin \gamma'_3}{\sin \alpha'_3} \qquad EA = EH\,\frac{\sin \gamma'_1}{\sin \alpha'_1}$$

$$EF = FH\,\frac{\sin \gamma'_2}{\sin \alpha'_2}$$

Następnie obliczamy z wyrównanych kątów azymuty:

$$(AE) = (AB) - \delta$$

$$(EF) = (AE) + 180^0 - \beta_1' - \alpha_2'$$

$$(FC) = (EF) + 180^0 - \beta_2' - \beta_3' - \beta_4'$$

$$(CD) = (FC) + 180^0 - \tau'$$

Załóżmy $x_a = 0$, $y_a = 0$ (lub dane ich wielkości) i obliczmy prowizoryczne przyrosty boków poligonu $AEFC$ na podstawie obliczonych dla $d = 1000$ ich długości i azymutów.

Otrzymamy

$$x_c' = x_a + AE \cos (AE) + EF \cos (EF) + FC \cos (FC)$$

$$y_c' = y_a + AE \sin (AE) + EF \sin (EF) + FC \sin (FC)$$

Obliczymy:

$$tg\ \varphi' = \frac{y'_c - y_a}{x'_c - x_a}$$

$$D_1 = \frac{y'_c - y_a}{\sin \varphi'} = \frac{x'_c - x_a}{\cos \varphi'}$$

Należy wszystkie obliczone poprzednio boki Δ-ów powiększyć $\frac{D}{D_1}$ razy, wówczas będą one długościami bokow naszego łańcucha.

Pozostanie obliczyć prawdziwe przyrosty, mnożąc prowizoryczne przez $\frac{D}{D_1}$, oraz obliczyć ostateczne spółrzędne.

II. Gdy kątów łącznikowych δ i τ nie pomierzono, wówczas odchyłkę w sumie kątów każdego Δ-a rozrzucamy na wszystkie kąty na równe części, zakładamy dowolną długość (np. 1000 *m.*) boku FC i dowolny azymut (FC) i, przyjmując $x_c = 0$ $y_c = 0$, obliczymy z FC wszystkie boki łańcucha, z (FC) zaś wszystkie azymuty; następnie na podstawie obliczonych azymutów i długości obliczymy przyrosty spółrzędnych boków CF, FE i EA oraz:

$$x'_a = CF \cos (CF) + FE \cos (FE) + EF \cos (EA)$$

$$y'_a = CF \sin (CF) + FE \sin (FE) + EA \sin (EA)$$

poczem liczymy:

$$tg\ \psi' = \frac{y'_a}{x'_a}$$

oraz

$$tg\ \varphi = \frac{y_a - y_c}{x_a - x_c}$$

$$d = \frac{y'_a}{\sin \psi'} = \frac{x'_a}{\cos \psi'}$$

oraz

$$D = \frac{y_a - y_c}{\sin \varphi} = \frac{x_a - x_c}{\cos \varphi}$$

Mnożąc przez $\frac{D}{d}$ wszystkie obliczone poprzednio boki, otrzymamy ich wartości.

Ponieważ zaś prawdziwym azymutem prostej CA jest φ, z obliczanego zaś w założonym poprzednio dowolnym układzie wypada wielkość ψ dla wartości azymutu CA, przeto cały łańcuch należy obrócić o kąt $\varphi - \psi'$, t. j. poprzednio obliczone azymuty boków łańcucha należy zwiększyć o $\varphi - \psi'$.

Mając te azymuty i boki, obliczymy właściwe przyrosty i spółrzędne, wychodząc z danych x_c i y_c i sprawdzając obliczenie zapomocą danych x_a i y_a .

III. Kąty łącznikowe oraz wszystkie inne są pomierzone metodą kierunkową.

Wówczas poprawkę ω uzyskują całe kąty poligonowe, jak np. EFC, kąty zaś, jak np. $\beta_2\ \beta_3\ \beta_4$, otrzymują odpowiednią część poprawki ω, a więc $\frac{1}{3}\ \omega$.

Wówczas dla $\triangle$-ów i poligonu ułożymy równania:

$$(\alpha_1 + v_1) + \left(\beta_1 + v_1 + \frac{1}{2}\ \omega\right) + (\gamma_1 + v_1) - 180^0 = 0$$

$$\left(\alpha_2 + v_2 + \frac{1}{2}\ \omega\right) + \left(\beta_2 + v_2 + \frac{1}{3}\ \omega\right) + (\gamma_2 + v_2) - 180^0 = 0$$

$$(\alpha_3 + v_3) + \left(\beta_3 + v_3 + \frac{1}{3}\ \omega\right) + (\gamma_3 + v_3) - 180^0 = 0$$

$$(\alpha_4 + v_4) + \left(\beta_4 + v_4 + \frac{1}{3}\ \omega\right) + (\gamma_4 + v_4) - 180^0 = 0$$

$$(DC) + (\tau + \omega) + \left(\beta_4 + v_4 + \frac{1}{3}\ \omega\right) + \left(\beta_3 + v_3 + \frac{1}{3}\ \omega\right) +$$

$$+ \left(\beta_2 + v_2 + \frac{1}{3}\ \omega\right) + \left(\alpha_2 + v_2 + \frac{1}{2}\ \omega\right) + \left(\beta_1 + v_1 + \frac{1}{2}\ \omega\right) +$$

$$+ (\delta + \omega) \pm 4\ \pi - (AB) = 0$$

Skąd otrzymamy równania warunkowe:

$$3\ v_1 + \frac{1}{2}\ \omega + l_1 = 0$$

$$3\ v_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\omega + l_2 = 0$$

$$3\ v_3 + \frac{1}{3}\omega + l_3 = 0$$

$$3\ v_4 + \frac{1}{3}\omega + l_4 = 0$$

$$4\ \omega + v_1 + 2\ v_2 + v_3 + v_4 + l_5 = 0$$

Jeżeli literą n oznaczymy liczbę Δ-ów, literą z liczbę wierzchołków poligonu $AEFC$, włączając A i C, literami $z_1\ z_2 \ldots z_n$ liczbę kątów każdego Δ-a, wchodzących w skład kątów poligonu, t. j. otrzymujących część poprawki ω; jeżeli następnie ułamki typu $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ przy ω oznaczymy zapomocą $\frac{1}{g}$ i $\frac{1}{h}$, tak że w wypadku, gdy jeden tylko z kątów pewnego Δ-a wchodzić będzie w skład kąta poligonu, jeden z ułamków $\frac{1}{g}$ lub $\frac{1}{h}$ przyjmować należy za zero, wówczas napiszemy równania warunkowe w postaci:

$$3\ v_1 + \left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{h_1}\right)\omega + l_1 = 0$$

$$3\ v_2 + \left(\frac{1}{g_2} + \frac{1}{h_2}\right)\omega + l_2 = 0 \qquad (a)$$

— — — — — — — — — —

— — — — — — — — — —

$$3\ v_n + \left(\frac{1}{g_n} + \frac{1}{h_n}\right)\omega + l_n = 0$$

$$z\ \omega + z_1\ v_1 + z_2\ v_2 + \ldots + z_n\ v_n + l_{n+1} = 0 \qquad (b)$$

Tworząc z pierwszych równań wyrazy:

$$z_1\ v_1 = -\frac{z_1}{3}\left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{h_1}\right)\omega - \frac{z_1\ l_1}{3}$$

$$z_2\ v_2 = -\frac{z_2}{3}\left(\frac{1}{g_2} + \frac{1}{h_2}\right)\omega - \frac{z_2\ l_2}{3}$$

— — — — — — — — — —

— — — — — — — — — —

$$z_n v_n = -\frac{z_n}{3}\left(\frac{1}{g_n} + \frac{1}{h_n}\right)\omega - \frac{z_n l_n}{3}$$

i dodając je, otrzymamy:

$$z_1 v_1 + z_2 v_2 + \ldots + z_n v_n = -\frac{\omega}{3}\left[z\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right)\right] - \frac{[z\,l]}{3}$$

Wstawiając tę sumę do równania (b), otrzymamy:

$$z\,\omega - \frac{\omega}{3}\left[z\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right)\right] - \frac{[z\,l]}{3} + l_{n+1} = 0$$

skąd

$$\omega\left(3\,z - \left[z\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right)\right]\right) - [z\,l] + 3\,l_{n+1} = 0$$

oraz

$$\omega = \frac{[z\,l] - 3\,l_{n+1}}{3\,z - \left[z\left(\frac{1}{g} + \frac{1}{h}\right)\right]}$$

Mając ω z grupy *a*, obliczymy $v_1\ v_2\ \ldots\ v_n$.

Obliczenie boków i spółrzędnych patrz wypadek I-y.

§ 416. Równania baz w triangulacji lokalnej.

Prócz ogólnie znanych warunków siatek trygonometrycznych, w siatkach lokalnych może zachodzić specyficzny wypadek wyrównania bazowego.

Dotychczasowa praktyka uznawała wprowadzenie nadliczbowych danych w pomiarach kątowych na triangulacjach; inaczej sprawy stały z pomiarami podstaw, które albo nie dawały nadliczbowych danych, albo, skoro dawały, to nie jako materjał do wyrównania. Bijącą w oczy jest niesłuszność tego rodzaju postępowania, jeżeli zważymy, że sieć triangulacyjna po wyrównaniu winna dać nietylko układ punktów, tworzących figury, podobne do figur, utworzonych z prostych, łączących na miejscowości punkty triangulacyjne, lecz zarówno układ punktów o takich bokach, by suma kwadratów różnic pomiędzy obliczonemi a najprawdopodobniejszemi długościami była minimum, inaczej mówiąc, by w wypadku kilku pomierzonych boków — boki te otrzymały takie poprawki, aby suma ich kwadratów była równa minimum.

Ilość czynności, związana z pomiarem kątów, jest znacznie mniejsza od ilości czynności przy pomiarze boków; tem jedynie tłumaczyć należy unikanie pomiaru kilku baz; ale skoro dane nadliczbowe w ilości kątów są traktowane jako materjał do wyrównania, którego potrzeba jest należycie oceniona, to w niemniejszym stopniu zachodzi potrzeba nadliczbowych danych w ilości boków sieci, otrzymanych z bezpośredniego pomiaru, tem bardziej, że w przeciwieństwie do pomiaru kątów—na pomiar boków znacz-

ny wpływ wywierają właściwości terenu. Załóżmy na długość boku siatki lokalnej 2000 *m.*, za dokładność zaś stosunkową tego przyjmijmy $\frac{1}{20000}$, t. j. wielkość osiąganą w przeciętnych siatkach lokalnych.

Dla dokonania pomiaru kątów z równą dokładnością winniśmy osiągnąć średni błąd pomiaru kąta, równy

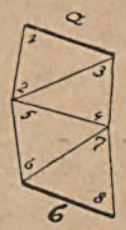
$$m_\alpha = \frac{206265}{20000} = 10''$$

co się da uzyskać zapomocą n—krotnego pomiaru teodolitem, tak, więc np., dla 20″-ego teodolitu

$$n = \frac{20^2}{10^2} = 4,$$

jeżeli za średni błąd jednorazowego pomiaru kąta przyjmiemy 20″. Gdybyśmy zastosowali pomiar kątów 30″-ym teodolitem w 4 serjach, to, zakładając średni błąd wyniku za 15″, otrzymalibyśmy mniejszą dokładność w pomiarach kątów, niż boków, wskutek czego dla należytego wyrównania, założywszy wagę kątów za 1, zmuszeni bylibyśmy przyjąć wagę bazy na

$$p_b = 2{,}25.$$



Rys. 841

W załączonym rysunku mamy dwa boki o otrzymanych z pomiaru długościach a i b; równanie baz wyniknie z założenia:

$$(b + v_b) = (a + v_a)\,\frac{\sin(1 + v_1)\,\sin(3 + v_3)\,\sin(5 + v_5)\,\sin(7 + v_7)}{\sin(2 + v_2)\,\sin(4 + v_4)\,\sin(6 + v_6)\,\sin(8 + v_8)}$$

skąd

$$\log(b + v_b) - \log(a + v_a) = r_1 v_1 + r_3 v_3 + r_5 v_5 + r_7 v_7 - r_2 v_2 - r_4 v_4 - r_6 v_6 - r_8 v_8 + l,$$

przytem

$$l = \log \frac{\sin 1\,\sin 3\,\sin 5\,\sin 7}{\sin 2\,\sin 4\,\sin 6\,\sin 8}.$$

Wielkości $r_1\ r_2 \ldots . r_8$ są zmianami log sinusów kątów przy zmianach kątów o 1″; w podobny sposób rozwiniemy wyrazy $\log \frac{b + v_b}{a + v_a}$, pamiętając, że zmianie kąta o 1″ odpowiada zmiana boku b o $\frac{b}{206265}$; dla boku $b = 2000$ *m.*, zmiana r_b jest zmianą logarytmu boku 2000 przy zmianie boku o 0,01, co wynosi $3010322 - 3010300 = 22$, więc w danym razie $r_b = 22$ — dla innej długości bazy zmiana r będzie oczywiście inna.

Będzie więc

$$\log(b + v_b) = \log b + r_b v_b$$

$$\log(a + v_a) = \log a + r_a v_a$$

skąd, oznaczając literami r_a i r_b wyrazy

$$\log\left(a + \frac{a}{206265}\right) - \log a$$

oraz

$$\log\left(b + \frac{b}{206265}\right) - \log b,$$

otrzymamy równanie warunkowe baz:

$$r_a v_a - r_b v_b + r_1 v_1 + r_3 v_3 + r_5 v_5 + r_7 v_7 - r_2 v_2 - r_4 v_4 - r_6 v_6 - r_8 v_8 + L = 0,$$

gdzie L oznacza

$$L = \log \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin 1 \sin 3 \sin 5 \sin 7}{\sin 2 \sin 4 \sin 6 \sin 8}.$$

Otrzymaną z rozwiązania układu równań warunkowych wielkość v_a oraz v_b należy pomnożyć przez $\frac{a}{206265}$ oraz $\frac{b}{206265}$.

Przykład na wyrównanie boków w Δ-cie.
Pomierzono:

$BC = a = 2002{,}65$ $\quad$ $B = 1 = 64^0\,20'\,45''$

$AC = b = 2161{,}15$ $\quad$ $A = 2 = 56\ 38\ 25$

$C = 3 = 59\ \ 0\ 25$

I metoda.

Równanie warunkowe:

$$v_1 + v_2 + v_3 - 15 = 0$$

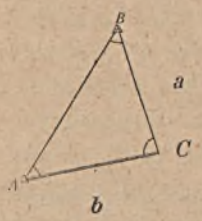
$$21\,v_a - 21\,v_b + 10{,}1\,v_1 - 13{,}8\,v_2 + 404 = 0$$

$$3\,k_1 - 3{,}7\,k_2 - 15 = 0$$

$$-3{,}7\,k_1 + 1174\,k_2 + 404 = 0$$

$$k_1 = +4_1\,6$$

$$k_2 = -0_1\,33$$



Rys. 842

$v_a = -7$ $\quad$ $v_1 = +1'',2$

$v_b = +7$ $\quad$ $v_2 = +9'',2$

$v_3 = +4'',6$

$$v_a = -7\,\frac{2002}{206265} = -0{,}07$$

$$v_b = 7\,\frac{2161}{206265} = 0{,}07.$$

W 2-em równaniu warunkowem spółczynniki przy v_a i v_b odpowiadają zmianie log a i b przy zmianie

$$a \text{ i } b \text{ o } \frac{a}{206263} \text{ i } \frac{b}{\rho}$$

Druga metoda postępowania przy wypośrodkowaniu boku w siatkach trygonometrycznych lokalnych.

Wiele bardzo pomiarów gospodarczych wykonywa się z zastrzeżeniem, że dokładność pomiaru winna iść w parze z najdalej posuniętą oszczędnością. To też bardzo kosztowne pomiary podstaw dla potrzeb pomiarów miejskich, gdzie mamy do czynienia z wysoką wartością ziemi, są w zupełności usprawiedliwione; natomiast niema celu wykonywać ścisłych pomiarów podstaw, np., przy pracach, związanych z przebudową ustroju rolnego na gruntach o niewielkiej wartości. Sieć lokalna winna mieć na celu dostarczenie spółrzędnych układu punktów: 1) tworzących figury, podobne do figur w terenie, powstałych wskutek połączenia punktów bokami triangulacyjnemi, 2) o odległościach pomiędzy obliczonemi punktami, wyznaczonych z większą dokładnością, niż spotykana przy pomiarach boków poligonów.

Zachowanie tych dwu warunków da możność wyrównania całej sieci poligonów, nawiązanych do punktu siatki lokalnej, z zupełnie dostateczną dokładnością.

Przestrzeganie 1-go warunku wymaga stosowania kilku seryj pomiaru kątów teodolitem o dokładności, równej co najmniej 20"; 2-i zaś warunek wymagać będzie bardzo opracowanego pomiaru taśmowego na kilku podstawach, kilkakrotnie mierzonyyh. Dwie lub trzy podstawy, obrane w terenie 1-ej klasy, dadzą możność wypośrodkować długość dowolnego boku siatki z wyższą dokładnością, niż dokładność boków poligonowych, co w zupełności będzie wystarczające dla potrzeb pomiarów gospodarczych. Oczywiście podstawy winny być ściśle przetyczone w terenie równym i każda z nich będzie pomierzona conajmniej trzy razy.

A. Wyrównania boków, otrzymanych z przeniesienia bazowego, dokonamy po wyrównaniu kątów (lub jak *B*).

Ponieważ

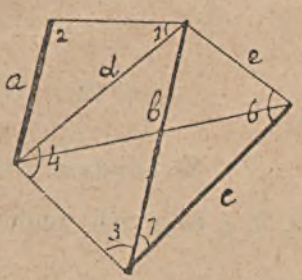
$$d = (a + v_a)\frac{\sin 2}{\sin 1} = (b + v_b)\frac{\sin 3}{\sin 4}$$

więc, oznaczając $\frac{\sin 2}{\sin 1}$ przez m_1, następnie $\frac{\sin 3}{\sin 4}$ przez m_2,

otrzymamy $m_1 a + m_1 v_a - m_2 b - m_2 v_b = 0$

skąd kładąc $l_1 = m_1 a - m_2 b$, napiszemy I-e równanie warunkowe $m_1 v_a - m_2 v_b + l = 0$.

II równanie warunkowe otrzymamy z określenia boku e, przyjmując $5 = 180^0 - 6 - 7$.



Rys. 843.

$$\varepsilon = [b + v_b] \frac{\sin 7}{\sin 6} = [c + v_c] \frac{\sin 7}{\sin 5}$$

oznaczając

$$\frac{\sin 7}{\sin 6} = m_3 \quad \frac{\sin 7}{\sin 5} = m_4$$

oraz

$$b\, m_3 - c\, m_4 = l_2$$

napiszemy 2-e równanie warunkowe:

$$m_3 v_b - m_4 v_c + l_2 = 0 \qquad (2)$$

Poprawki boków będą:

$$v_a = m_1 k_1$$

$$v_b = - m_2 k_1 + m_3 k_2$$

$$v_c = - m_4 k_2$$

zaś wyrazy k_1 i k_2 otrzymamy z równań

$$(m_1^2 + m_2^2)\, k_1 - m_2 m_3 k_2 + l_1 = 0$$

$$- m_2 m_3 k_1 + (m_3^2 + m_4^2)\, k_2 + l_2 = 0$$

Skad wypośrodkowane boki będą:

$$a_w = a + v_a$$

$$b_w = b + v_b$$

$$c_w = c + v_c$$

B. Do układu równań warunkowych figur dołączymy w wypadku kilku pomierzonych podstaw łańcucha trójkątów ich równania, a mianowicie:

$$r_b v_b - r_a v_a + r_3 v_3 + r_1 v_1 - r_4 v_4 - r_2 v_2 + \log \frac{b \sin 3 \sin 1}{a \sin 4 \sin 2} = 0$$

$$r_c v_c - r_b v_b + r_6 v_6 - r_5 v_5 + \log \frac{c \sin 6}{b \sin 5} = 0$$

W obydwu równaniach wielkości r_a, r_b, r_c są zmianami logarytmów a, b, c przy ich zmianie o wielkości $\frac{a}{206265}$, $\frac{b}{206265}$ i $\frac{c}{206265}$, t. j.

$$r_a = \log \left(a + \frac{a}{206266}\right) - \log a$$

$$r_b = \log \left(b + \frac{b}{206265}\right) - \log b$$

$$r_c = \log \left(c + \frac{c}{206265}\right) - \log c$$

Wprowadzenie do układu równań warunkowych figur o spółczynnikach poprawek, równych jedności, jeszcze jednego, nieco więcej skomplikowanego, równania bazowego, nieznacznie bardzo powiększy pracę obliczeniową, natomiast materjał, otrzymany z wyrównania, mieć będzie pierwszorzędne znaczenie dla poligonów.



Rys 844.

Łączne bowiem rozwiązanie układu równań

$$v_1 + v_2 + v_3 + l_1 = 0$$

$$v_4 + v_5 + v_6 + l_2 = 0$$

— — — — — — — — — —

— — — — — — — — — —

$$v_{16} + v_{17} + v_{18} + l_7 = 0$$

$$r_a v_a + r_b v_b + [r v_k]_1^{18} + l = 0$$

daje odrazu poprawki dla boków i kątów sieci, wskutek czego poligony nawiązywane będą do punktów, których spółrzędne bardziej ściśle będą wyznaczone, niż w wypadku uchylenia się od wyrównania boków.

Można również zastosować przy tego rodzaju wyrównaniu uproszczone postępowanie. Mianowicie:

1) wyrównamy oddzielnie w każdym Δ-cie kąty, w którym to celu obliczymy uprzednio:

$$v_1 = v_2 = v_3 = -\frac{l_1}{3}$$

$$v_4 = v_5 = v_6 = -\frac{l_2}{3}$$

— — — — — — — — — —

— — — — — — — — — —

$$v_{16} = v_{17} = v_{18} = -\frac{l_7}{3}$$

skąd otrzymamy wyrównane kąty

$$1' = 1 + v_1$$

$$2' = 2 + v_2$$

— — — —

— — — —

2) kładąc następnie

$$v_1' = -v_3' = v_4' = -v_5' = \ldots = v$$

zbudujemy równanie baz w postaci:

$$r_a\ v_a - r_b\ v_b + v\ [r] + l = 0$$

skąd obliczymy poprawki boków

$$v_a, v_b$$

oraz drugie poprawki kątów łącznikowych v, które, dodane z odpowiednim znakiem do swych kątów, dadzą wyrównane kąty.

Właściwemi poprawkami kątów będą więc różnice pomiędzy pomierzonemi a wyrównanemi wielkościami kątów.

Gdy kąty zostały pomierzone ze ścisłością, przekraczającą względną dokładność pomiaru baz, wówczas równanie warunkowe zawierać będzie tylko poprawki baz:

$$r_a\ v_a - r_b\ v_b + l = 0$$

Tworzymy równanie normalne $[r\,r]\ k + l = 0$,

określamy

$$k = -\frac{l}{[r\ r]}$$

oraz:

$$v_a = r_a\ k$$

$$v_b = -r_b\ k$$

ROZDZIAŁ XV.

POLIGONIZACJA.

§ 417. Ścisłe i przybliżone metody wyrównywania poligonów.

Gdy w poligonach zachodzą warunki, jak, np., zamknięcia poligonu (a więc sum kątów i przyrostów), lub nawiązania do punktów o znanych spółrzędnych, wówczas powstaje sprawa wyrównania.

Wyrównania poligonów dzielimy na przybliżone i ścisłe.

Przybliżone metody wyrównania wychodzą z założenia, że kąty wyrównywają się tylko w zależności od odchyłek kątowych, boki, ewentualnie przyrosty — od odchyłek linjowych.

Tak więc zamykamy zwykle sumy kątów, obliczamy t. zw. azymuty wyrównane, na ich podstawie obliczamy przyrosty, które również wyrównywamy niezależnie od poprawek kątowych.

Jest to tak zwane wyrównanie „grupami", przy którem, pomimo wyrównania kątów, pozostające prawdziwe błędy kątów wywierają poważny wpływ na tworzenie odchyłki linjowej.

Ścisłe wyrównanie polega na jednoczesnem określeniu poprawek kątowych i linjowych, uwzględnia zależność funkcyjną, zachodzącą pomiędzy odchyłką linjową a błędami tak kątów, jak boków, i ma na celu na podstawie wszelkich zachodzących warunków, tak kątowych, jak linjowych, określić z nich najprawdopodobniejsze poprawki, czyniące zadość warunkom geometrycznym poligonów.

Do ścisłych wyrównań zaliczamy również i te wyrównania „grupami", w których poprawki kątów, względnie azymutów, obliczają się niezależnie od poprawek linjowych, lecz w zależności od warunków kątowych i linjowych; na podstawie zaś poprawionych kątów przechodzimy do obliczania poprawek linjowych.

Stosowanie tego lub innego wyrównania uzależnia się od oczekiwanej dokładności wyników, od warunków, w których dany pomiar został dokonany, a więc od tego, czy dany pomiar opiera się na punktach trygono-

metrycznych (co uzasadnia potrzebę ściślejszego opracowania), od celu pracy (pomiary miejskie wymagają staranniejszego opracowania) — a wreszcie i od warunków materjalnych.

Rozpatrzymy kilka typów stosowanych wyrównań, udzielając najwięcej uwagi poligonom głównym, łączącym punkty trygonometryczne.

Przy zakładaniu siatki poligonów, opartych o punkty triangulacyjne, dążymy do utworzenia takiego zespołu ciągów poligonowych, któryby w najbardziej celowy sposób odpowiadał zadaniom pomiaru szczegółów.

Ponieważ szczegóły sytuacyjne układają się przeważnie w taki sposób, że dla ich wymierzenia należy zakładać poligony o krótkich bokach, często na gruncie falistym, więc staramy się ograniczyć długość takowych poligonów, co daje się uskutecznić wtedy, gdy niedogodne poligony biorą swój początek i kończą się w punktach załamania innych poligonów, założonych na wygodniejszym do pomiaru terenie, a przez to i ściślej wyznaczonych.

Przychodzimy więc do podziału poligonów na różne kategorje: bardziej i mniej ścisłych.

W praktyce pomiarowej na terenach, pokrytych punktami triangulacyjnemi, ustalił się podział poligonów na 2 główne typy:

1) poligony I rzędu, łączące punkty triangulacyjne; oparte o nie:
2) poligony II rzędu, łączące punkty załamania poligonów I rzędu, oraz
3) linje pomiarowe, nawiązywane do punktów i boków poligonowych.

Ciężar pomiaru szczegółów spoczywa na poligonach II rzędu i linjach pomiarowych; poligony zaś wyższego rzędu służą do możliwie ścisłego wyznaczenia spółrzędnych punktów, będących oparciem dla poligonów niższych rzędów i linij pomiarowych.

Wobec powyższego zrozumiałe jest, dlaczego ścisłość pomiaru jest największa w poligonach I rzędu, zmniejsza się zaś na II-im.

A więc, np., przy pomiarach miejskich, jeżeli kąty w ciągach I-ego rzędu mierzą się z dokładnością do 10″ — 20″, to w II-im rzędzie mierzymy kąty z dokładnością 20″ — 30″.

Przy pomiarach gospodarczych kąty w ciągach I rzędu mierzymy 30″ teodolitem, w ciągach II rzędu: do 1 minuty. W związku z różną dokładnością pomiaru kątów stoi i różna dokładność pomiaru długości boków poligonów. To też poligony I rzędu zakładają się w terenie możliwie równym i boki tych poligonów o długości około 300 *m.* wymierzają się dokładniej, niż w poligonach niższego rzędu, których boki bardzo się różnią co do długości i częstokroć są mniejsze od 100 *m.*

Gradacja poligonów na kilka rzędów wymierzonych z różną dokładnością, pociąga za sobą konieczność i kilkostopniowości w obliczeniu i wyrównaniu; z tego względu, pomijając ogólnie znane sposoby obliczenia spółrzędnych, stosowane przy zwykłych pomiarach, nieopartych o punkty triangulacyjne, rozpatrzymy wyrównanie i obliczenie ciągów I-ego i II-ego rzędu, nadmieniając, że mniej ważne poligony obliczają się zwykłym sposobem przez rozrzucenie odchyłki we spółrzędnych lub nanoszą się na plan graficznie, jak np. w pomiarach gospodarczych. Jakkolwiek poligony I-ego

rzędu należy wyrównywać możliwie najściślej, to jednak, biorąc pod uwagę wielki nakład pracy obliczeniowej przy ścisłem wyrównaniu, redukujemy je do możliwego minimum, stosując przeważnie metody wyrównania przybliżonego.

§ 418. Wpływ błędów pomiaru kątów i azymutów na poligon jednokierunkowy.

Poligonem jednokierunkowym nazywać będziemy poligon, nieznacznie odbiegający od kierunku pewnej prostej. Kąty w takim poligonie nieznacznie odchylają się od 180° — w praktyce za granice odchyleń przyjmują 150° — 210°.

O ile chodzi o przybliżone ustalenie wpływu błędów pomiaru boków, wówczas pod rozwagę bierzemy tylko błędy przypadkowe i za średni przypadkowy błąd przyjmujemy wielkość:

$$\Delta l = \mu \sqrt{l}$$

gdzie l jest długością prostej, μ — średni błąd przypadkowy na jednostkę długości.

Za wagi boków przyjmujemy wówczas:

$$p = \frac{1}{(\Delta l)^2} = \frac{1}{\mu^2 l}$$

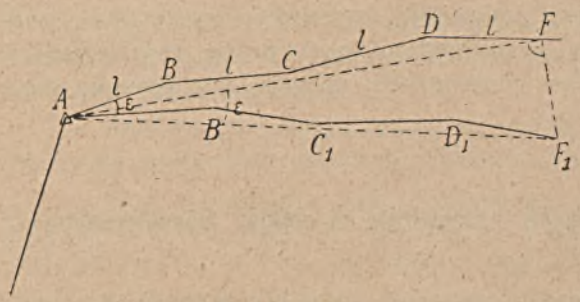
skąd stosunek wag dwu boków l_1 i l_2 będzie równy:

$$p_1 : p_2 = \frac{1}{\mu^2 l_1} : \frac{1}{\mu^2 l_2} = \frac{1}{l_1} : \frac{1}{l_2}$$

co oznacza, że w przybliżeniu wagi boków są proporcjonalne do odwrotności długości boków. Zasada ta ma zastosowanie przy wyrównywaniu odchyłek w przyrostach przy najbardziej przybliżonem wyrównywaniu poligonów; mianowicie przyjmuje się wówczas, że po wyrównaniu kątów należy wyrównać nie boki, a ich funkcje — przyrosty. Przyswaja się tedy poprawkom przyrostów tę właściwość, że są one odwrotnie proporcjonalne do wag boków, a więc tem samem wprost proporcjonalne do długości boków.

O ile błąd dowolnego boku jednakowo przesuwa wszystkie dalsze punkty poligonu, o tyle inaczej stoją rzeczy z wpływem błędów kątowych.

Przypuśćmy, że w pierwszym kącie jednokierunkowego poligonu popełniono pewien dopuszczalny błąd ε. Oczywiście, wszystkie azymuty następnych boków zostaną zmienione o tę samą wielkość ε, gdyż obarczony tym błędem kąt wszedł do rachunku wszystkich dalszych azymutów, wskutek czego obliczany poligon (rys. 845) obróci się dokoła swego prawdziwego położenia $A\,B\,C\,D\,F$ o kąt ε do położenia $A\,B_1\,C_1\,D_1\,F_1$. Załóżmy dla uproszczenia, że wszystkie boki są równe l; przyjmijmy następnie, że przybliżoną odległością końca n — tego boku od punktu A jest $n\,l$.



Rys. 845.

Wówczas poprzeczne wychylenie $F F_1$ wyrazi się wzorem:

$$p = FF_1 = nl \sin \varepsilon = nl\, \varepsilon \sin 1''$$

lub dla ε w radjanach

$$p = n l \varepsilon$$

Przypuśćmy dalej, że ε jest najwyższą dopuszczalną wielkością błędu w kącie; pragniemy zbadać, jakie będzie poprzeczne wychylenie końca poligonu, jeżeli w każdym kącie popełnimy błąd $\pm \varepsilon$.

Błąd w kącie A wychyli koniec poligonu o $q_1 = \pm n l \varepsilon$

„ „ „ B „ „ „ $q_2 = \pm (n-1) l \varepsilon$

„ „ „ C „ „ „ $q_3 = \pm (n-2) l \varepsilon$ i t. d.

błąd w ostatnim kącie przed F wychyli F o $q_n \quad \pm l \varepsilon$

Gdyby wielkość i znak popełnionego w każdym kącie błędu ε były znane, wówczas rzeczywiste poprzeczne wychylenie równałoby się sumie cząstkowych wychyleń; że jednak błąd $\pm \varepsilon$ jest błędem przypadkowym, przeto należy obliczyć średnie poprzeczne wychylenie w taki sam sposób, jak obliczamy średnie błędy sumy i różnicy. Mianowicie, średnie poprzeczne wychylenie

$$Q = \pm \sqrt{[qq]} = \pm l \varepsilon \sqrt{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2}$$

Dla obliczenia szeregu sum kwadratów szeregu pod pierwiastkiem piszemy:

$$1^3 = = 1$$

$$2^3 = (1+1)^3 = 1 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 + 1$$

$$3^3 = (1+2)^3 = 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 2^3$$

$$4^3 = (1+3)^3 = 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 3^3$$

$$- - - - - - - - - - - - - - -$$

$$(n+1)^3 = (1+n)^3 = 1 + 3 \cdot n + 3\, n^2 + n^3$$

co dodamy:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (n+1)^3 = (n+1) + 3\,(1+2+\ldots+n) + 3\,(1^2+2^2+\ldots+n^2) + (1^3+2^3+\ldots+n^3)$$

skąd:

$$(n+1)^3 = (n+1) + 3\,\frac{(n+1)\,n}{2} + 3\,(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)$$

i

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{2\,(n+1)^3 - 2\,(n+1) - 3(n+1)\,n}{6} =$$

$$= \frac{2\,n^3 + 3\,n^2 + n}{6}$$

więc

$$Q = \pm\, l\,\varepsilon \sqrt{\frac{2\,n^3 + 3\,n^2 + n}{6}}$$

Przy dłuższych poligonach $3n^2 + n$ wobec $2n^3$ jest nieznaczne, tak, np., przy $n = 8$

mamy:

$$3\,n^2 + n = 200$$

$$2\,n^3 = 1024$$

Odrzucając przeto $3n^2 + n$ otrzymamy w przybliżeniu:

$$Q = \pm\, \varepsilon\, l \sqrt{\frac{n^3}{3}}$$

że zaś

$$n = \frac{L}{l}$$

gdzie L oznacza długość poligonu, przeto

$$Q = \pm\, \varepsilon\, l \sqrt{\frac{L^3}{3l^3}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{L^3}{l}} = \pm\, 0{,}58\, \varepsilon \sqrt{\frac{L^3}{l}}$$

t. j. im boki l są dłuższe, tem przy stałem L średnie wychylenie poprzeczne jest mniejsze. Należy więc unikać przy poligonizacji krótkich boków.

Przy poligonach busolowych błąd każdego azymutu nie wpływa na następne, jako bezpośrednio określane, nie zaś obliczane. Stąd wychylenie poprzeczne każdego boku l przy średnim błędzie azymutu, odczytanego z busoli, równym $\pm\, \varepsilon$, wyniesie

$$\pm\, \varepsilon\, l$$

Skąd analogicznie utworzone średnie poprzeczne wychylenie będzie równe:

$$Q^2 = \varepsilon^2_1\, l^2_1 + \varepsilon^2\, l^2_2 + \ldots + \varepsilon^2_n\, l^2$$

przy równych zaś ε i l:

$$Q = \pm\, \varepsilon\, l \sqrt{n} = \pm\, \varepsilon\, l \sqrt{\frac{L}{l}} = \pm\, \varepsilon \sqrt{L}\ \sqrt{l}$$

a więc dla kilku poligonów busolowych o stałej długości L wychylenie poprzeczne jest proporcjonalne do drugiego pierwiastku z długości boku, skąd wynika, że w poligonach busolowych należy unikać długich boków, a stosować krótkie.

Stąd płyną zalecenia dla przeciętnej długości boków poligonu busolowego, równej 30 — 50 *m.* i mniej. Tem też się tłumaczy stosowanie zdjęć busolowych w lasach, miernictwie górniczem i wszędzie tam, gdzie wypada stosować krótkie boki.

Jeżeli ze względu na stosunek do długości poligonu przeciętny bok poligonowy jest niewielki, to i wówczas stosowanie busoli ma swe uzasadnienie. Tak np. załóżmy błąd pomiaru azymutu z busoli $\varepsilon_1 = \pm 15'$ i błąd pomiaru kąta $\varepsilon_k = \pm 1'$.

Gdyby pewien poligon pomierzyć busolą i teodolitem, wówczas przy tych samych bokach dla poligonu busolowego

$$Q = \pm 15\ l\ \sqrt{n}\ \sin 1'$$

dla teodolitu zaś

$$Q = \pm l \sqrt{\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}}\ \sin 1'$$

Określmy, przy jakiej liczbie boków obydwa poprzeczne wychylenia będą równe:

$$\pm \sqrt{\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}} = \pm 15\sqrt{n}$$

$$2n^3 + 3n^2 + n = 1350\ n$$

$$2n^2 + 3n - 1349 = 0$$

$$n = 26$$

A więc już przy 26 bokach obydwa wychylenia byłyby równe; można więc powiedzieć, że przy poligonach o wyższej od 20 boków liczbie minutowy teodolit zaczyna zawodzić, wobec czego możemy twierdzić, iż w wypadku dłuższych poligonów dla uzyskania dokładniejszych niż przy busoli wyników należy stosować teodolity 30″-owe.

W przeciwnym razie pierwsze punkty będą dokładniej wyznaczone teodolitem, lecz ostatnie byłyby dokładniej określone przy użyciu busoli, o ile chodzi o położenie końca poligonu w stosunku do jego początku.

Podkreślić należy, że liczbę 26 wyprowadziliśmy w założeniu, że średni błąd azymutu magnetycznego wynosi 15′. Nie będzie zbytniej przesady, gdy wielkość tę obniżymy dwukrotnie, gdyż 1) ścisłość odczytywania z igły można doprowadzić nawet do 4′, a 2) wahania dzienne igły nie przekraczają 15′. Zmniejszenie zaś średniego błędu azymutu do 10′ pozwala twierdzić, że przy 18 bokach busola daje równoważne z minutowym teodolitem wychylenie poprzeczne, a przy $7\frac{1}{2}$, — to samo zajdzie już przy 13 bokach.

Zaniechanie busoli przy pomiarach jest spowodowane tem, że już minutowy teodolit znacznie ściślej od busoli wyznacza wzajemne położenie dwu sąsiednich punktów; natomiast wydłużony poligon w mniej ścisły sposób utrzymywany jest przez teodolit we właściwem położeniu, o ile chodzi o wzajemne położenie początku i końca poligonu.

§ 419. Ścisłe wyrównywanie poligonu.

W każdym zamkniętym, względnie odpowiednio do stałych punktów nawiązanym poligonie, zachodzą trzy warunki: sumy kątów, sumy przyrostów $[\Delta x]$ i $[\Delta y]$, a więc:

$$v_A + v_1 + \ldots + v_n + v_B + l_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_A^B w \cos\gamma + A_A v_A + A_1 v_1 + \ldots A_n v_n + l_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_A^B w \sin\gamma + B_A v_A + B_1 v_1 + \ldots + B_n v_n + l_3 = 0 \qquad (3)$$

W równaniach tych v_A, $v_1 \ldots v_n$ oznaczają poprawki kątów; l_1 — odchyłkę kątową, w — poprawki boków, γ — azymuty (względnie kąty północne), l_2 odchyłkę sumy $[\Delta x]$, l_3 — odchyłkę sumy $[\Delta y]$. Liczba kątów jest równa $n + 2$ przy kątach A, 1,2 ... n, B. W zamkniętym poligonie punkt B jest punktem A, kątów więc jest $n + 1$. Ponieważ pierwsze równanie nie wymaga omówienia, rozpatrzmy powstanie drugiego równania. Oznaczając zapomocą $\Delta x'$ poprawki przyrostów, możemy napisać:

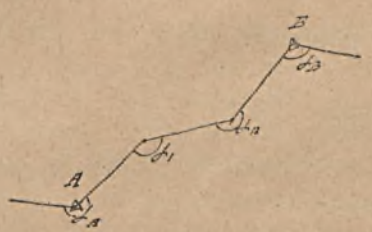
$$x_A + \Delta x_{A\cdot 1} + \Delta x'_{A\cdot 1} + \Delta x_{1\cdot 2} + \Delta x'_{1\cdot 2} + \ldots$$
$$+ \Delta x_{n\cdot B} + \Delta x'_{n\cdot B} - x_B = 0$$

skąd (4)

$$\Delta x'_{A\cdot 1} + \Delta x'_{1\cdot 2} + \ldots + \Delta x'_{n\cdot B} + l_2 = 0$$

gdzie

$$l_2 = x_A + [\Delta x] - x_B$$



Rys. 846.

Z równania przyrostu $\Delta x_{k\cdot k+1} = s_{k\cdot k+1} \cos\gamma_{k\cdot k+1}$,

różniczkując według zmiennych s (boków) i γ (kątów północnych) i oznaczając różniczkę Δx przez poprawkę $\Delta x'$, różniczki zaś ds przez w, otrzymamy:

$$\Delta x'_{k,k+1} = \cos\gamma_{k,k+1}\, w_{k,k+1} - s_{k,k+1} \sin\gamma_{k,k+1}\, d\gamma_{k,k+1}$$

że zaś poprawka $d\gamma_{k\cdot k+1}$ azymutu równa się dla prawych kątów sumie poprawek kątowych o zmienionych na odwrotne znakach, przeto

$$d\gamma_{k\cdot k+1} = -v_A - v_1 - \ldots - v_k$$

oraz:

$$\Delta x'_{k\cdot k+1} = \cos\gamma_{k\cdot k+1}\, w_{k\cdot k+1} + \Delta y_{k\cdot k+1}\,(v_A + v_1 + \ldots + v_k)$$

Równanie 4-e przekształci się wobec powyższego na:

$$\cos \gamma_{A \cdot 1}\, w_{A \cdot 1} + \cos \gamma_{1 \cdot 2}\, w_{1 \cdot 2} + \ldots + \cos \gamma_{n \cdot B}\, w_{n \cdot B} +$$
$$+ \Delta y_{A \cdot 1}\, v_A + \Delta y_{1 \cdot 2}\,(v_A + v_1) + \Delta y_{2 \cdot 3}\,(v_A + v_1 + v_2) + \ldots +$$
$$+ \Delta y_{nB}\,(v_A + v_1 + v_B + \ldots + v_n) + l_2 = 0 \qquad (5)$$

Lub też, grupując Δy przy każdem v, otrzymamy:

$$\cos \gamma_{A \cdot 1}\, w_{A \cdot 1} + \cos \gamma_{1 \cdot 2}\, w_{1 \cdot 2} + \ldots + \cos \gamma_{n \cdot B}\, w_{n \cdot B} +$$
$$+ (\Delta y_{A \cdot 1} + \Delta y_{1 \cdot 2} + \ldots + \Delta v_{n \cdot B})\, v_A + \qquad (6)$$
$$+ (\Delta y_{1 \cdot 2} + \Delta y_{2 \cdot 3} + \ldots + \Delta y_{n \cdot B})\, v_1 +$$
$$+ (\Delta y_{2 \cdot 3} + \ldots + \Delta y_{n \cdot B})\, v_2 +$$
$$- - - - - - - - -$$
$$+ \Delta y_{n \cdot B}\, v_n + l_2 = 0$$

Oznaczając podzielone przez ρ spółczynniki przy v_A literą A_A, przy v_1 literą A_1 i t. d. i łącząc wyrazy pierwszego wiersza ostatniego równania pod symbolem sumy, otrzymujemy równanie (2).

Równanie (3) wynika z sumy poprawek $\Delta y'$ przyrostów Δy:

$$\Delta y'_{A \cdot 1} + \Delta y'_{1 \cdot 2} + \ldots + \Delta y'_{n \cdot B} + l_3 = 0 \qquad (7)$$

w którem

$$l_3 = y_A + [\Delta y] - y_B,$$

a ponieważ:

$$\Delta y = s \sin \gamma$$

więc

$$\Delta y'_{k \cdot k+1} = \sin \gamma_{k \cdot k+1}\, w_{k \cdot k+1} + s_{k \cdot k+1} \cos \gamma_{k \cdot k+1}\, d\gamma_{k \cdot k+1}$$

lub:

$$\Delta y'_{k \cdot k+1} = \sin \gamma_{k \cdot k+1}\, w_{k \cdot k+1} - \Delta x_{k \cdot k+1}\,(v_A + v_1 + \ldots + v_k);$$

postępując analogicznie, jak w (5) i (6), i oznaczając spółczynniki z ich znakami w otrzymanem analogicznie do 6-go równaniu przy v_A, v_1 i t. d. literami B_A, B_1 i t. d., otrzymamy równanie (3)-e.

Przeanalizujmy równania 1), 2) i 3)-e.

Równania te mają na celu określenie najprawdopodobniejszych poprawek kątów i boków przy zachowaniu warunku $[v\,v]$ = minimum. Skoro pewne poprawki nazywamy najprawdopodobniejszemi dla danego poligonu, tem samem stwierdzamy, że są one jedyne, jakie można obliczyć zapomocą metody najmniejszych kwadratów dla danego poligonu. Jeżeli bowiem moglibyśmy dla tego samego poligonu otrzymać inne poprawki, także najprawdopodobniejsze, wówczas celowość takiego wyrównania nasunęłaby poważne zastrzeżenia, trudne do obalenia.

Równania 1, 2 i 3-e wyprowadziliśmy, obliczając poligon od A do B. Gdy jednak zmienimy kierunek obliczenia, t. j. utworzymy te same trzy równania, idąc od B ku A, wówczas zajdzie:

$$v_B + v_n + v_{n-1} + \ldots + v_1 + v_A + l_1 = 0$$

$$\sum_B^A w \cos \gamma + A'_B v_B + A'_n v_n + \ldots + A'_1 v_1 + l'_2 = 0 \qquad \text{II}$$

$$\sum_B^A w \sin \gamma + B'_B v_B + B'_n v_n + \ldots + B'_1 v_1 + l'_3 = 0$$

Układ ten jest równie dobry, jak układ I równań.

Pierwsze równania obydwu układów są identyczne, natomiast w drugich i trzecich równaniach obydwu układów widzimy następujące różnice:

1) odchyłki w przyrostach l_2 i l'_2 oraz l_3 i l'_3 będą różne, gdyż azymuty liczymy w obydwu układach z niewyrównanych jeszcze kątów,

2) do pierwszego układu (w ostatnich dwu równaniach) nie wchodzi poprawka v_B, podczas gdy znajduje się w układzie II-im; natomiast poprawki v_A, którą widzimy w układzie I-ym, niema w układzie II-im.

Tak więc mamy, pomijając wagi, dla układów I-ego i II-ego:

$$v_A = k_1 + A_A k_2 + B_A k_3 \qquad v_A = k'_1$$

$$v_1 = k_1 + A_1 k_2 + B_1 k_3 \qquad v_1 = k'_1 + A'_1 k'_2 + B'_1 k'_3$$

— — — — — — — — — — — — — — —

$$v_n = k_1 + A_n k_2 + B_n k_3 \qquad v_n = k'_1 + A'_n k'_2 + B'_n k'_3$$

$$v_B = k_1 \qquad v_B = k'_1 + A'_B k'_2 + B'_B k'_3$$

Wyobraźmy sobie, że zaszedł napotykany od czasu do czasu w praktyce przypadek odchyłki kątowej równej zeru. Nie znaczy to, że kąty zostały pomierzone idealnie ściśle; błędy kątowe poszczególnych znaków mogą być bliskie dopuszczalnego błędu pomiaru kąta, lecz w sumie wprost przypadkowo dały zero, lub znikomo małą wielkość. W takim wypadku azymuty, liczone od A do B, czy odwrotnie, będą jednakowe. Natomiast odchyłki we spółrzędnych w każdym układzie będą wzajemnie różne, tak więc:

$$l_2 \neq l_3$$

$$l'_2 \neq l'_3$$

zaś w obydwu układach będą odpowiednio równe, różniąc się znakami, mianowicie:

$$l_2 = -\, l'_2$$

$$l_3 = -\, l'_3 .$$

Spółczynniki przy w w obydwu układach różnić się będą tylko znakami w odpowiednich (drugich czy tylko trzecich) równaniach obydwu (I i II) układów.

Natomiast spółczynniki przy tych samych poprawkach kątowych będą mieć teoretycznie wspólne znaki i różne wielkości w obydwu układach. Są to tedy układy samodzielne całkowicie i nie mamy więc jeszcze najmniejszej podstawy do sądzenia nawet w tym najdogodniejszym przypadku, gdy odchyłka kątowa jest zerem, że obydwa układy są równoważne. Skoro zaś te układy dają odmienne poprawki dla tych samych kątów, to żaden układ, poszczególnie wzięty, nie daje poprawek, zadość czyniących warunkom tego poligonu. Jak w sieci trygonometrycznej przy ścisłem jej wyrównaniu nie możemy odrzucać niezależnych warunków, tak samo, dla uniknięcia dowolności, winniśmy postępować w poligonach, a więc: należy w poligonach układać pięć równań warunkowych, z których jedno jest równaniem odchyłki kątów, zaś 4 inne są równaniami odchyłek w tumach przyrostów.

Układem więc równań warunkowych poligonu będzie —

$$v_A + v_1 + \ldots + v_n + v_B + l_1 = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\sum_A^B w \cos \gamma + A_A v_A + A_1 v_1 + \ldots + A_n v_n + l_2 = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\sum_A^B w \sin \gamma + B_A v_A + B_1 v_1 + \ldots + B_n v_n + l_3 = 0 \qquad \text{(c)} \quad \text{III}$$

$$\sum_B^A w \cos \gamma + A'_1 v_1 + \ldots + A'_n v'_n + A_B v_B + l'_2 = 0 \qquad \text{(d)}$$

$$\sum_B^A w \sin \gamma + B'_1 v_1 + \ldots + B'_n v_n + B'_B v_B + l'_3 = 0 \qquad \text{(e)}$$

Poniżej ustalimy, czy ten układ nie da się ograniczyć do mniejszej liczby równań.

B. Rozwiązanie powyższego układu jest pracą żmudną. Zastosujmy t. zw. wyrównanie przez części dla wypadku, gdy spółczynniki przy poprawkach w 1-em równaniu są równe jedności. Wypiszmy np. takie trzy równania warunkowe w ogólnym kształcie, przyjmując

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$$

Będzie to układ:

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + l_1 = 0$$

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n + l_2 = 0$$

$$c_1 v_1 + c_n v_n + \ldots + c_n v_n + l_3 = 0 \qquad \text{IV}$$

Pomnóżmy pierwsze równanie przez

$$\frac{[a\,b]}{[a\,a]} = \frac{[b]}{n}$$

i odejmijmy od 2-ego, oraz pomnóżmy 1-e równanie tego układu przez

$$\frac{[a\,c]}{[a\,a]} = \frac{[c]}{n}$$

i odejmijmy od 3-go. Wówczas otrzymamy pierwsze równanie bez zmiany i dwa zredukowane równania, tworzące nowy, równoważny do IV, układ:

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + l_1 = 0$$

$$\left(b_1 - \frac{[b]}{n}\right) v_1 + \left(b_2 - \frac{[b]}{n}\right) v_2 + \ldots \left(b_n - \frac{[b]}{n}\right) v_n + \left(l_2 - \frac{[b]}{n} l_1\right) = 0$$

$$\left(c_1 - \frac{[c]}{n}\right) v_1 + \left(c_2 - \frac{[c]}{n}\right) v_2 + \ldots + \left(c_n - \frac{[c]}{n}\right) v_n + \left(l_3 - \frac{[c]}{n} l_1\right) = 0$$

a oznaczając:

$$b' = b_1 - \frac{[b]}{n};\ c' = c_1 - \frac{[c]}{n};\ l_2 - \frac{[b]}{n} l_1 = l_2 \,.\, 1$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$b'_n = b_n - \frac{[b]}{n};\ c_n = c_n - \frac{[c]}{n};\ l_3 - \frac{[b]}{n} l_1 = l_3 \,.\, 1$$

przytem:

$$[b'] = [b] - [b] = 0$$

$$[c'] = [c] - [c] = 0$$

przepiszemy powyższe równania w postaci:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + \ldots + v_n \quad + l_1 &= 0 \\ b'_1 v_1 - b'_2 v_2 + \ldots + b'_n v_n + l_2 \,.\, 1 &= 0 \\ c'_1 v_1 + b'_2 v_2 + \ldots + c'_n v_n + l_3 \,.\, 1 &= 0 \end{aligned} \qquad V.$$

Układ ten jest równoważny z układem IV.
Przejdźmy do równań normalnych; spółczynnikami będą:

$$[a\ a] = n$$

$$[a\,b'] = [b'] = 0$$

$$[a\,c'] = [c'] = 0$$

stąd równaniami normalnemi będą równania:

$$\begin{aligned} n\,k_1 \quad . \quad . \quad + l_1 &= 0 \\ [b'b']\,k_2 + [b'c']\,k_3 + l_2 \,.\, 1 &= 0 \\ [b'c']\,k_2 + [c'c']\,k_3 + l_3 \,.\, 1 &= 0 \end{aligned} \qquad Va.$$

lecz

$$[b'b'] = b_1^2 - 2b_1\frac{[b]}{n} + \frac{[b]\,[b]}{n^2} + b_2^2 - 2b_2\frac{[b]}{n} + \frac{[b]\,[b]}{n^2}$$

$$+ b_n^2 - 2b_n\frac{[b]}{n} + \frac{[b]\,[b]}{n^2} =$$

$$= [bb] - 2\frac{[b]\,[b]}{n} + \frac{[b]\,[b]}{n} = [bb] - \frac{[b]\,[b]}{n}$$

lecz

$$[b\,b\,.\,1] = [b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b];$$

zaś w IV układzie:

$$[a\,b] = [b] \quad \text{oraz} \quad [a\,a] = n$$

więc

$$[b\,b\,.1] = [b\,b] - \frac{[b]}{n}[b] = [b'b']$$

analogicznie

$$[b\,c\,.1] = [b'\,c']$$

i

$$[c\,c\,.1] = [c'\,c']$$

więc układ Va przeobraża się na

$$\begin{aligned} n\,k_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + l_1 &= 0 \\ [bb.1]\,k_2 + [bc.1]\,k_2 + l_2.1 &= 0 \\ [bc.1]\,k_2 + [cc.1]\,k_3 + l_3.1 &= 0\,, \end{aligned}$$

o ile chodzi o obliczenie tych równań bezpośrednio z grupy IV-ej.

Ponieważ k_1 nie jest tutaj związane z k_2 i k_3, zaś k_1 możemy otrzymać tylko z pierwszego równania grupy V, więc z V-ego:

$$\begin{aligned} v_1 &= k_1 + b'_1\,k_2 + c'_1\,k_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= k_1 + b'_n\,k_2 + c'_2\,k_3 \end{aligned}$$

wynika, że każda poprawka składa się z dwu części:

$$\begin{aligned} v_s &= v + v'_s \\ v_1 &= v + v'_1 \\ &\cdots\cdots \\ v_n &= v + v'_n \end{aligned}$$

gdzie

$$v = k_1;\ v'_1 = b'_1\ k_2 + c'_1\ k_3$$

— — — — — —

$$v'_n = b'_n\ k_2 + c'_n\ k_3$$

Że zaś $v = k_1$ otrzymujemy z rozwiązania jednego tylko równania pierwszego układu IV lub V-ego, zaś v'_1 ..... v'_n z rozwiązania tylko dwu ostatnich równań układu V-ego, więc, ażeby otrzymać każdą poprawkę, należy:

1) rozwiązać równanie pierwsze układu IV-ego i obliczyć

$$v = k_1 = -\frac{l_1}{[a\,a]} = -\frac{l_1}{n}$$

2) ułożyć drugie i trzecie równanie układu V-ego i, po obliczeniu z nich k_2 i k_3, obliczyć v'_1, v'_2, v'_3.....

3) obliczone v'_1, v'_2..... powiększyć o v, otrzymujac v_1 v_2 v_2.....

Otrzymane w ten sposób poprawki będą identyczne z poprawkami, obliczonemi z całego układu IV.

Postępowanie takie można stosować w wypadku większej liczby równań; o ile pierwsze ma spółczynniki, równe jedności. Taka metoda rozwiązania w poligonizacji ma zastosowanie, gdyż w pierwszem równaniu warunkowem spółczynniki przy poprawkach są równe jedności.

Zastosujmy powyższą metodę do układu III, obierając narazie pierwsze, drugie i czwarte równanie tego układu.

$$v_A + v_1 + \ldots + v_n\ v_B + l_1 + 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\sum_A^B w \cos\gamma + A_A\ v_A + A_1\ v_1 + \ldots + A_n\ v_n + l_2 = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$\sum_B^A w \cos\gamma + A'_1\ v'_1 + \ldots\ A'_n\ v_n + A'_B\ v_B + l'_2 = 0 \qquad \text{(d)}$$

Mnożymy równanie (a) przez $\frac{[aA]}{[aa]} = \frac{[A]}{n+2}$ i odejmiemy od równania (b); następnie mnożymy równanie (a) przez $\frac{[aA']}{[aa]} = \frac{[A']}{n+2}$ i odejmujemy od równań (d), a otrzymamy:

$$\sum_A^B w \cos\gamma + \left(A_A - \frac{[A]}{n+2}\right) v'_a + \left(A_1 - \frac{[A]}{n+2}\right) v'_1 + \ldots +$$

$$+ \left(A_n - \frac{[A]}{n+2}\right) v'_n + \frac{[A]}{n+2}\ v'_B + \left(l_2 - \frac{[A]}{n+2}\right) l_2 = 0$$

$$\sum_A^B w \cos\gamma - \frac{[A']}{n+2}\ v'_a + \left(A'_1 - \frac{[A']}{n+2}\right) v'_1 + \ldots + \qquad \text{IV}$$

$$+ \left(A'_n - \frac{[A']}{n+2}\right) v'_n + \left(A'_n - \frac{[A']}{n+2}\ v'_B + \left(l'_2 - \frac{[A']}{n+2}\ l_2\right)\right) = 0$$

Rozpatrzmy ostatnie wyrazy obydwu równań.

Ponieważ przy $n + 2$ kątach poligonu (A początek, B koniec poligonu, nawiązanego do punktów A i B), poprawką V z równania (a) jest

$$v = -\frac{l_1}{n+2}$$

więc

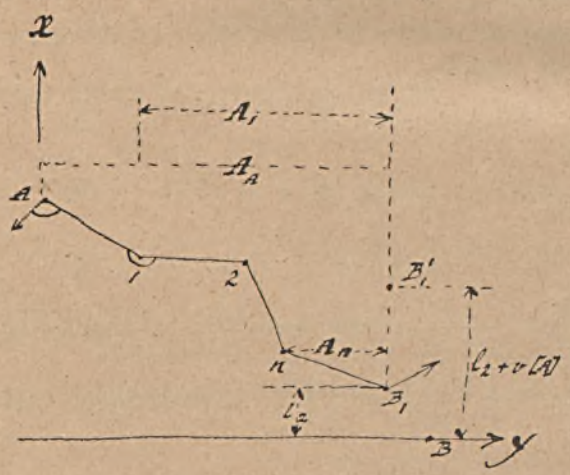
$$l_2 - \frac{[A]}{n+2} l_1 = l_2 + v\,[A] = l_2 + v\,A_A + v\,A_1 + \ldots + v\,A_n = L_2$$

$$l'_2 - \frac{[A']}{n-2} l_1 = l'_2 + v\,[A'.] = l'_2 + v\,A'_1 + v\,A_2 + \ldots + v\,A_n + v A'_B = L_3$$

lecz (patrz równanie 6) przy v w mierze analitycznej:

$$A_A = \Delta y_A + \Delta y_{1\cdot 2} + \ldots + \Delta y_{n,B}$$
$$A_1 = \Delta y_{1\cdot 2} + \ldots + \Delta y_{n,B}$$
$$\text{— — — — — — — — — — — —}$$
$$A_n = \Delta y_{n,B}$$

Jak wnioskujemy z rysunku, $v\,A_A$ odpowiada przesunięciu końca poligonu (punktu B_1) po $\parallel$-ej do osi X przy zmianie kąta A o V; podobnie $v\,A_1$ odpowiada przesunięciu końca poligonu po $\parallel$-ej do osi X przy zmianie kąta 1 o v itd. Stąd wynika, że $v\,[A]$ odpowiada przesunięciu po $\parallel$-ej do osi X punktu B wskutek zmiany wszystkich kątów o V.



Rys. 847.

Wskutek tego wyraz

$$l_2 - \frac{[A]}{n+2} l_1 = l_2 + v\,[A]$$

jest odchyłką sumy $[x]$ po wyrównaniu kątów o V_1, t. j. po rozrzuceniu na równe części odchyłki kątowej, a to dlatego że jeżeli przez X_{B_1} oznaczymy odciętą końca poligonu B_1, obliczonego z niewyrównanych kątów i boków,

wówczas

$$l_2 = x_{B_1} - x_B$$

zaś

$$l_2 + v\,[A] = (x_{B_1} + v\,[A]) - x_B$$

zaś

$$x_{B_1} + [A] = x_{B'_1}$$

oznacza odciętą końca poligonu po wyrównaniu kątów o v,

a więc

$$x_{B_1} + v\,[A] - x_B$$

jest odchyłką w $[\triangle x]$ po rozrzuceniu odchyłki kątowej. To samo możemy powiedzieć i o wyrazie

$$l'_2 - \frac{[A']}{n+2}$$

w grupie VI-ej.

A więc: wielkość wolnych wyrazów w równaniach (VI) jest jednakową; będą to wielkości odchyłek w $[\triangle x]$ poligonów AB i BA po rozrzuceaiu kątowej odchyłki. Oczywiście znaki tych wolnych wyrazów są różne (gdyż azymuty i boki są jednakowe co do wielkości). Podobnie spółczynniki wyrazów $w \cos \gamma$ w sumach:

$$\sum_{A}^{B} w \cos \gamma \quad \text{i} \quad \sum_{B}^{A} w \cos \gamma$$

różnić się będą tylko znakami.

Dowiedźmy teraz, że w układzie VI przy jednakowych v w obydwu równaniach spółczynniki różnią się tylko znakami. Wypiszmy w tym celu spółczynniki A i A' w rozwiniętej formie.

$$\begin{aligned}
A_a &= \triangle y_{A,1} + \triangle y_{1,2} + \quad \ldots + \triangle y_{n,B} \\
A_1 &= \quad \triangle y_{1,2} + \triangle y_{2,3} + \ldots + \triangle y_{n,B} \\
&- - - - - - - - - - - - - - - - \\
A_{n-1} &= \quad \triangle y_{n-1,n} + \triangle y_{n,B} \\
A_n &= \quad \triangle y_{n,B}
\end{aligned} \qquad \text{VII}$$

Wyrazy $A'_k \ldots$ wynikają z rozwinięcia (patrz 4 do 6 równania)

$$\triangle x'_{k+1,k} = \cos \gamma_{k+1,k}\, w_{k+1,k} - S_{k+1,k} \sin \gamma_{k+1,k}\, d\gamma_{k+1,k}$$

że zaś w poligonie BA kąty prawe poligonu AB są lewemi, więc

$$d\,\gamma_{k+1,k} = v_B + v_n + v_{n-1} + \ldots + v_{k+1}$$

i równanie 5-e dla poligonu BA przyjmie postać:

$$\sum_{B}^{A} \cos \gamma_{k+1,k} - w_{k+1,k} - \triangle y_{B,n}\, v_B - \triangle y_{n,n-1}\,(v_B + v_n) - \triangle y_{n-1,n-2}\,(v_B + v_n + v_{n-1}) - \ldots - \triangle y_{1,A}\,(v_B + v_n + \ldots + v_1) + l'_2 = 0$$

lub:

$$\sum_{B}^{A} \cos \gamma\, w + \triangle y_{n,B}\, v_B + \triangle y_{n-1,n}\,(v_B + v_n) + \ldots + \triangle y_{A,1}\,(v_B + v_n + \ldots + v_1) + l'_2 = 0$$

lub:

$$\sum_{B}^{A} \cos \gamma\, w + (\triangle y_{n,B} + \triangle y_{n-1,n} + \ldots + \triangle y_{A,1})\, v_B + (\triangle y_{n-1,n} + \ldots +$$

$$+ \Delta y_{A,1})\, v_n + (\Delta y_{n-2,n-1} + \ldots + \Delta y_{A,1})\, v_{n-1}$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$+ \Delta y_{A,1}\, v_1 + l_2 = 0$$

a stąd spółczynniki przy $V_B \ldots V_1$ w ostatniem równaniu oznaczymy przez $A'_B \ldots A'_1$ (patrz XVII):

$$\begin{aligned} A'_B &= A_a \\ A'_n &= A_a - A_n \\ A'_{n-1} &= A_a - A_{n-1} \qquad \text{VIIa} \\ &\text{— — — — — —} \\ A'_1 &= A_a - A_1 \end{aligned}$$

więc

$$[A'] = (n+1)\, A_a - (A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = (n+1)\, A_a - ([A] - A_a) = (n+2)\, A_a - [A]$$

stąd

$$\frac{[A']}{n+2} = A_a - \frac{[A]}{n+2} \qquad \text{VII b}$$

Porównajmy teraz spółczynniki przy dowolnej poprawce V_k w obydwu równaniach grupy VI-ej. Są niemi

$$A_k - \frac{[A]}{n+2}$$

oraz (patrz VII a i VII b)

$$A'_k - \frac{[A']}{n+2} = (A_a - A_k) - \left(A_a - \frac{[A]}{n+2}\right) = -\left(A_k - \frac{[A]}{n+2}\right)$$

Jak więc widzimy, wszystkie spółczynniki przy tych samych poprawkach $v_1\ v_2 \ldots v_B$ w równaniach VI-ych są równe co do wielkości i różne co do znaku.

A ponieważ tak wyrazy wolne tych równań, jak i wyrazy, zawierające poprawki w boków, mają tę samą własność, więc obydwa te równania są identyczne, a więc jedno z nich możemy odrzucić.

Ten sam wniosek dotyczy zredukowanych równań (*a*), (*c*), (*e*) układu III-ego.

A stąd wynika, że układ III daje to samo rozwiązanie, które dają trzy tylko równania (*a*), (*b*) i (*c*), lub (*a*), (*d*) i (*e*) tego samego układu, więc tak układ I, jak II jest równoważny z układem III.

C. Ze względu zaś na oszczędność na czasie, którą uzyskamy, gdy zamiast obliczać poligony $A\,B$ i $B\,A$ z niewyrównanych kątów, obliczymy tylko poligon $A\,B$ po rozrzuceniu odchyłki kątowej, należy stosować omówione powyżej wyrównanie grupami. Mianowicie:

1) rozrzucimy odchyłkę w równych częściach v na wszystkie kąty,

2) obliczymy azymuty, przyrosty i odchyłki sum przyrostów L_2 L_3 które będą wyrazami wolnemi zredukowanych równań,

3) obliczymy spółczynniki

$$A_k = \frac{[A]}{n+2} \text{ i } B_k = \frac{[B]}{n+2}$$

wszystkich poprawek v w dwu zredukowanych równaniach,

4) rozwiążemy obydwa zredukowane równania, tworząc dwa równania korelat i obliczając z nich drugie poprawki v'_A v'_1 ... v'^B oraz poprawki boków w,

5) ostatecznemi poprawkami pomierzonych kątów będą więc·

$$v_A = v + v'_A$$
$$v_1 = v + v'_1$$
$$- - - - -$$
$$v_B = v + v'_B$$

6) poprawkami przyrostów, obliczonych po rozrzuceniu odchyłki kątowej będą wielkości:

$$\triangle x'_{A,1} = - d_{A,1} v_{A,1} \sin \gamma_{A,1} + w_{A,1} \cos \gamma_{A,1}$$
$$- - - - - - - - - - - - - - -$$
$$\triangle x'_{m,n} = - d_{m,n} v_{m,n} \sin \gamma_{m,n} + w_{m,n} \cos \gamma_{m,n}$$
$$- - - - - - - - - - - - - - -$$
$$\triangle y'_{A,1} = d_{A,1} v_{A,1} \cos \gamma_{A,1} + w_{A,1} \sin \gamma_{A,1}$$
$$- - - - - - - - - - - - - - -$$
$$\triangle y'_{m,n} = d_{m,n} v_{m,n} \cos \gamma_{m,n} + w_{m,n} \sin \gamma_{m,n}$$
$$- - - - - - - - - - - - - - -$$

w których:

$$v_{A,1} = v'_A; \; v_{1,2} = v'_A + v'_1; \; v_{m,n} = v'_A + v'_1 + ... + v'_m \text{ etc.}$$

Jeżeli poprawki v'_A v'_1 ... obliczone zostały w mierze kątowej, to wielkości $v_{A,1}$, $v_{1,2}$ ... $v_{m,n}$ i t. d., wyrażone w minutach, należy przed obliczeniem poprawek przyrostów przeliczyć na miarę łukową, mnożąc je z dostatecznym stopniem przybliżenia przez 0,0003.

Zaznaczyć należy, że metoda wyrównania poligonu, rozpatrzona powyżej, ma dwa braki:

1) jest zbyt kosztowna dla zwykłych prac poligonizacyjnych,

2) określenie wag boków i kątów może być w przybliżeniu dokładne tylko w wypadku boków, nieznacznie różniących się co do długości.

Ze wzoru na wagę

$$p = \frac{{m_0}^2}{m^2}$$

w którym m_0 jest średnim błędem spostrzeżenia o jednostce wagi, m zaś jest błędem tego spostrzeżenia, którego wagę p określamy, wynika, że ponieważ waga p nie jest mianowana, więc tak m_0, jak m, winny być wyrażone w tych samych jednostkach.

Jeżeli więc za m_0 przyjmiemy $1''$, to wagę kąta określimy ze wzoru

$$p_k = \frac{(1'')^2}{(m'')^2}$$

Co się tyczy boku, to wobec tego, że za spostrzeżenie o jednostce wagi przyjęliśmy kątowe o średnim błędzie $\pm 1''$, więc tym wyborem jesteśmy o tyle skrępowani, iż wolno nam dokonać co najwyżej zamiany $m_0 = \pm 1''$ na miarę łukową, lub też zamienić kąt m_0 na łuk h, zatoczony promieniem b, równym długości boku poligonu. Jeżeli literą m_b oznaczymy średni błąd boku, literą p_b wagę boku, to ponieważ

$$h : 2\pi b = m_b : 360^0$$

więc

$$h = \frac{m_b}{\rho} b,$$

gdzie $p = 206265$ przy m_b w sekundach.

Stąd wzór na wagę boku, przy wspólnem dla kątów i boków spostrzeżeniu o jednostce wagi, przyjmie postać:

$$p_b = \frac{h^2}{{m_b}^2} = \frac{\left(\frac{m_0}{\rho}\right)^2}{\left(\frac{m_b}{b}\right)^2}.$$

Dla każdego typu kątomierza oraz przyrządu do pomiaru długości wielkości m_0 i m_b są określone na zasadzie danych doświadczalnych. Te wielkości są więc w przybliżeniu znane, tedy p_k i p_b są możliwe do obliczenia bez uciekania się do dowolności w wyborze średniego błędu spostrzeżenia o jednostce wagi, lecz tylko w wypadkach równych boków.

§ 420. Ścisłe wyrównanie jednokierunkowego poligonu między stałemi punktami.

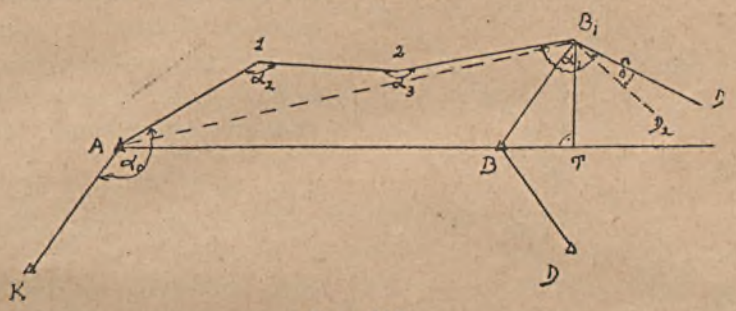
Poligon $A\,1,2 \ldots B$ łączy punkty A i B o danych spółrzędnych $x_a\ y_a$, $x_b\ y_b$ w ten sposób, że kierunki poszczególnych boków poligonu nie odchylają się znacznie od AB. W poligonie pomierzono kąty łącznikowe α_0 i α_1, równe kątom $KA1$ i $2\,B_1 D_1$, oraz kąty prawe $\alpha_2\ \alpha_3 \ldots$

Pamiętając, że poligon biegnie wzdłuż AB, nieznacznie się tylko odchylając od tego kierunku, wyznaczymy wpływ błędów kątowych jako:

1) wielkość δ, powstałą wskutek tego, że obliczony azymut $(B_1 D_1) = (K A) + n\,180^0 - [\alpha]$ nie jest równy azymutowi prostej $B D$, względnie równoległej $B_1 D_2$, poprowadzonej przez obliczony z niewyrównanych kątów i boków punkt B_1,

2) wielkość τ, powstałą wskutek wychylenia punktu B_1 z kierunku $A B$. Wychylenie poprzeczne $B_1 T$ mamy prawo traktować, jako skutek działania błędów pomiaru kątów, gdyż błędy pomiaru boków powodują wychylenie podłużne $B T$ (Prosta $B_1 T \perp A B T$).

Tak więc, po obliczeniu z pomierzonych kątów azymutów, przechodzimy do obliczenia przyrostów oraz ich sum.



Rys. 848.

Spółrzędnemi punktu B_1 będą więc

$$x_{B1} = x_a + [\Delta X]$$
$$y_{B1} = y_a + [\Delta Y]$$

Długość i azymut prostej $B B_1$ (linjowa odchyłka) obliczymy ze wzorów:

$$B_1 B = \frac{y_B - y_{B1}}{\sin (B_1 B)} = \frac{x_B - x_{B1}}{\cos (B_1 B)}$$

$$tg\,(B B_1) = \frac{y_{B1} - y_B}{x_{B1} - x_B}$$

Poprzeczne zaś wychylenie $p = B_1 T$ będzie równe

$$p = B_1 B \sin B_1 B T = B_1 B \sin \{(A B) - (B B_1)\}$$

Znak p zależy od położenia punktu B_1 w stosunku do $A B T$, mianowicie, gdy punkt B_1 leży w lewo od $A B T$, p jest dodatnie, gdy w prawo — ujemne (dla prawych kątów).

Można również określić p graficznie, mianowicie: kreślimy oś X i pod kątem północnym $(A B)$ kreślimy odcinek, na odcinku tym odpowiednio obieramy punkt B i w skali 1 : 20 z różnic $x_{B1} - x_B$ i $y_{B1} - y_B$ nanosimy punkt B_1, spuszczamy $B_1 T \perp B T$ i określamy długość $B_1 T$ i $B T$ w skali rysunku. Oznaczając poprawki kątów literami $v_1\ v_2 \ldots$, boki literami $d_1\ d_2 \ldots d_{n-1}$, długość całego poligonu literą L, ułożymy dwa równania warunkowe. Pierwsze równanie wynika z warunku, że suma poprawek kątów równa się odchyłce; mianowicie dla prawych kątów:

winno być:

$$(KA) + n\ 180^0 - [\alpha] - [v] - - (BD) = 0$$

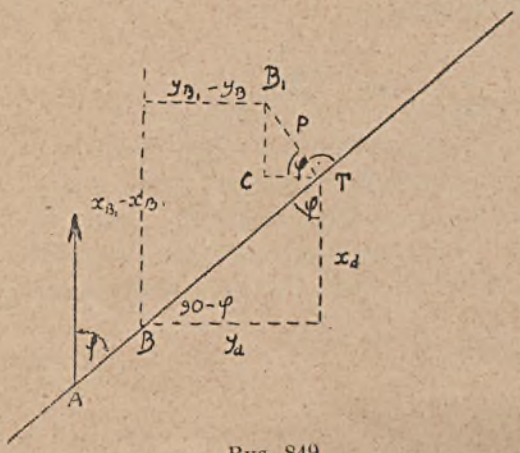
więc:

$$[v] + l'_1 = 0 \qquad (1)$$

gdzie

$$l'_1 = (BD) + [\alpha] - n\ 180^0 - (KA)$$

Drugie równanie otrzymamy, stawiając warunek, by obliczane poprawki kątowe obróciły tak cały poligon, aby punkt B_1 przesunął się o p na AB lub jej przedłużenie. Ponieważ poprawka pierwszego kąta obraca cały poligon dokoła A, poprawka drugiego—cały poligon bez pierwszego boku i t. d., przeto równanie warunkowe utworzymy, jako:



Rys. 849.

$$L\ v_1 \sin 1'' + (L - d_1)\ v_2 \sin 1'' + \\ + \ldots + d_{n-1}\ v_{n-1} \sin 1'' + p = 0$$

Gdy obliczymy z niewyrównanych kątów i boków poligon w kierunku odwrotnym: od B ku A, to otrzymamy już inne przyrosty, inną odchyłkę linjową, inny punkt A_1 i inne poprzeczne wychylenie p_2. Trzecie więc równanie warunkowe utworzymy, stawiając warunek, aby obliczone poprawki kątów w ten sposób obróciły cały poligon, żeby obliczany koniec poligonu A_1 znalazł się ściśle na prostej BA, względnie jej przedłużeniu. Równanie takie wypiszemy, jak następuje:

$$L\ v_n \sin 1'' + (L - d_{n-1})\ v_{n-1} \sin 1'' + \ldots + d_1\ v_2 \sin 1'' + p_2 = 0 \qquad (2)$$

Oznaczając literami $S_1\ S_2\ \ldots\ S_{n-1}$ spółczynniki przy $v_1 \sin 1''$, $v_2 \sin 1'' \ldots$ w drugiem równaniu warunkowem, literami l_2 i l_3 wyrazy $\frac{p}{\sin 1''}$ i $\frac{p_2}{\sin 1''}$, oraz literami $S''_1\ S''_{n-1} \ldots S''_3$ i S'_2 spółczynniki przy odpowiednich v w III równaniu ($S = S''$), wypiszemy układ trzech równań warunkowych, grupując w III-em poprawki v:

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 \ldots + v_{n-1} + v_n + l_1 &= 0 \\ Sv_1 + S_2 v_2 + S_3 v_3 + \ldots + S_{n-1}\ v_{n-1} + l_2 &= 0 \qquad (3) \\ S'_2 v_2 + S''_3 v_3 \qquad + S''_{n-1} v_{n-1} + S'' v_n + l_3 &= 0 \end{aligned}$$

Przy bokach, nieznacznie się różniących, spółczynniki S w ostatnich dwu równaniach są szeregami jednakowych liczb o odwróconej ich kolejności. Poprawki kątów łącznikowych wchodzą do drugiego i trzeciego równania po jednej. Wyrazy S należy wypisać do dziesiątych setek, zmniejszając również 100 razy l_2 i l_3.

Równaniami normalnemi będą

$$\begin{aligned} n\ k_1 + [s]\ k_2 + [s']\ k_3 + l_1 &= 0 \\ [s]\ k_1 + [ss]\ k_2 + [ss']\ k_3 + l_2 &= 0 \\ [s']\ k_1 + [ss']\ k_2 + [s's']\ k_3 + l_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

Po rozwiązaniu tego układu obliczamy poprawki kątowe:

$$\begin{aligned} v_1 &= k_1 + S\ k_2 \\ v_2 &= k_1 + S_2\ k_2 + S''_2\ k_3 \\ v_3 &= k_1 + S_3\ k_2 + S''_3\ k_3 \qquad (5) \\ &- - - - - - - - - - \\ v_{n-1} &= k_1 + S_{n-1}\ k_2 + S''_{n-1}\ k_3 \\ v_n &= k_1 + S''\ k_3 \end{aligned}$$

Z wyrównanych kątów można mieć wyrównane azymuty.

Postępowanie powyższe, nie prowadzi do celu, wymaga wiele pracy, bo aż dwukrotnego obliczania przyrostów z niewyrównanych azymutów, mianowicie: po raz pierwszy, idąc od początku ku końcowi poligonu, i po raz drugi — w odwrotnym kierunku.

Zastosujmy do równań (3) wyrównanie grupami, mianowicie przyjmijmy, że każda poprawka $v_1\ v_2 \ldots v_n$ składa się z poprawki pierwszej:

$$v = -\frac{l_1}{n}$$

oraz z drugiej $w_1\ w_2 \ldots w_n$, tak że

$$\begin{aligned} v_1 &= v + w_1 \\ v_2 &= v + w_2 \\ &- - - - - \\ v_n &= v + w_n \end{aligned}$$

Aby określić w, mnożymy pierwsze równanie grupy trzeciej przez

$$\frac{[a\,b]}{[a\,a]} = \frac{[s]}{n}$$

i odejmujemy od II-ego równania tej grupy; następnie pierwsze równanie tej grupy mnożymy przez

$$\frac{[a\,c]}{[a\,a]} = \frac{[s']}{n}$$

i odejmujemy od trzeciego równania tej grupy. Otrzymamy dwa zredukowane równania warunkowe:

$$\left(S - \frac{[s]}{n}\right) w_1 + \left(S_2 - \frac{[s]}{n}\right) w_2 + \ldots +$$

$$+ \left(S_{n-1} - \frac{[s]}{n}\right) w_{n-1} - \frac{[s]}{n} w_n + \left(l_2 - \frac{l}{n}[s]\right) = 0$$

$$- \frac{[s']}{n} w_1 + \left(S'_2 - \frac{[s']}{n}\right) w_2 + \ldots + \qquad (6)$$

$$+ \left(S'_{n-1} - \frac{[s']}{n}\right) w_{n-1} + \left(S - \frac{[s']}{n}\right) w_n + \left(l_3 - \frac{l_1}{n}[s']\right) = 0$$

Spółczynniki przy $w_1\ w_2 \ldots w_n$ są łatwe do obliczenia, tem bardziej w wypadku $n - 1$ prawie różnych boków d.

Zwróćmy uwagę na wyrazy wolne ostatnich dwu równań. W wyrazie

$$l_2 - \frac{l_1}{n}[s] = l_2 + v\,[s]$$

mamy:

$$v\,[s] = v\,(S + S_2 + S_3 + \ldots S_{n-1}) = v\,S + v\,S_2 + v\,S_3 + \ldots + v\,S_{n-1}$$

jak stąd wynika, wyraz ten jest poprzecznem przesunięciem końca poligonu (obliczonego z niewyrównanych kątów i boków od A do B), powstałem wskutek dodania do każdego z pomierzonych kątów poprawki V.

W wolnym wyrazie drugiego zredukowanego równania:

$$l_3 - \frac{l_1}{n}[s'] = l_3 + v\,[s'] = l_3 + v\,S' + v\,S_{n-1} + \ldots + v\,S'_2$$

wyraz

$$v\,[s']$$

jest również poprzecznem przesunięciem końca poligonu $B\,A$, wywołanem zmianą wszystkich kątów o v.

Ponieważ tak w poligonie $A\,B$, jak w $B\,A$, suma przyrostów, a więc i poprzeczne wychylenie, są jednakowe po rozrzuceniu odchyłki kątowej, więc wyrazy wolne

$$l_2 - \frac{l_1}{n}[s] = l_2 + v\,[s]$$

oraz

$$l_3 - \frac{l_1}{n}[s'] = l_3 + v\,[s],$$

jako równe poprzecznemu wychyleniu po rozrzuceniu odchyłki kątowej, są równe co do wielkości, różnią się zaś znakiem. Że zaś i spółczynniki przy tych samych w są równe, różniąc się tylko znakiem w obydwu równaniach, przeto każde z równań grupy (6) daje rozwiązanie.

Stąd układ (6), oznaczając kolejno spółczynniki w jego pierwszem równaniu przez $b_1\ b_2 \ldots b_n$, w drugiem przez $c_1\ c_2 \ldots c_n$ (przytem

$b_1 = -c_1, b_2 = -c_2 \ldots b_n = -c_n$), przechodzi na jedno tylko równanie warunkowe, np. pierwsze:

$$b_1 w_1 + b_2 w_2 + \ldots + b_n w_n + l'_2 = 0 \qquad (6\,a)$$

w którem

$$b_1 = S_1 - \frac{[s]}{n}$$

$$b_2 = S_2 - \frac{[s]}{n} \text{ oraz } l'_2 = l_2 + v\,[s]$$

— — — — —

$$b_n = -\frac{[s]}{n}$$

wyraz l'_2 jest równy poprzecznemu wychyleniu poligouu $A\,B$ (po poprawieniu kątów o v), mnożonemu przez 3438, o ile wyrazy l_1 i $w_1, w_2 \ldots w_n$ mają być wyrażone w minutach.

Spółczynniki b winny w sumie dawać zero, gdyż

$$[b] = [s] - n\frac{[s]}{n} = 0$$

pamiętać należy, że w wyrazie $\frac{[s]}{n}$ wyraz n równa się liczbie kątów.

Tak np. przy poligonie o bokach 200, 160, 240, 220 i 180 *mtr.* obliczenie wyrazów b ułożymy w tabelkę:

d	s	b
200	1000	+ 497
160	800	+ 297
240	640	+ 137
220	400	— 103
180	180	— 323
$[d] = 1000$	0	— 503
	$[s] = 3020$	+ 931
	$\frac{[s]}{n} = 503$	— 929
		+ 2

W danym razie $[b] = 2$, zamiast być równe zeru, dzięki błędowi zaokrąglenia wyrazu $\frac{[s]}{n}$.

Można dla jeszcze jednej kontroli obliczyć $c_1\ c_2 \ldots c_n$ i porównać z wyrazami $b_1\ b_2 \ldots b_n$.

Od równania warunkowego (6 a) przechodzimy do normalnego:

$$[b\,b]\;k + l'_2 = 0$$

skąd

$$k = -\frac{l'_2}{[b\,b]} \qquad (6\,b)$$

i obliczymy drugie poprawki:

$$\begin{aligned} w_1 &= b_1\,k \\ w_2 &= b_2\,k \\ &- - - \qquad (6\,c) \\ w_{n-1} &= b_{n-1}\,k \\ w_n &= b_n\,k \end{aligned}$$

Sprawdzeniem obliczenia będzie równanie

$$[w] = o$$

gdyż

$$[w] = [b]\;k$$

zaś

$$[b] = o$$

Ostatecznemi więc poprawkami kątowemi są

$$\begin{aligned} v_1 &= v + w_1 \\ v_2 &= v + w_2 \qquad (6\,d) \\ &- - - - \\ v_n &= v + w_n \end{aligned}$$

Suma ich winna być równa odchyłce kątów.

Całe postępowanie polega zatem na: 1) rozrzuceniu odchyłki kątowej na wszystkie kąty w równych częściach, 2) obliczeniu z otrzymanych poprawionych kątów i pomierzonych boków przyrostów i poprzecznego wychylenia, 3) utworzeniu i rozwiązaniu (6 a) równania dla otrzymania drugich poprawek (6 c); po zmianie pomierzonych kątów o poprawki (6 d) otrzymamy wyrównane kąty, a więc możemy obliczyć wyrównane azymuty.

Dla obliczenia boków odrzutujmy nasz poligon na prostą $A\,B$, korzystając z różnic γ między obliczonemi azymutami boków poligonu a azymutem $(A\,B)$. Odcinek $B\,T = l_n$ bierzemy ze znakiem +, gdy T leży na przedłużeniu $A\,B$, i ze znakiem —, gdy punkt T leży na prostej $A\,B$.

Równaniem warunkowem boków będzie

$$w'_1 \cos \gamma_1 + w'_2 \cos \gamma_2 + \ldots w'_{n-1} \cos \gamma_{n-1} + l_n = 0$$

w którem $w'_1\;w'_2 \ldots w'_{n-1}$ oznaczają poprawki boków. Obliczymy je:

$$w'_1 = -\frac{l_n}{[\cos \gamma \cos \gamma]} \cos \gamma_1$$

$$w'_2 = - \frac{l_n}{[\cos \gamma \cos \gamma]} \cos \gamma_2$$

— — — — — — — —

Rozwiązanie uprości się, gdy kąty $\gamma_1 \gamma_2 \ldots$, jak to powinno mieć miejsce w poligonie jednokierunkowym, nieznacznie się różnią wzajemnie; wówczas

$$w'_1 + w'_2 + \ldots + w'_{n-1} + \frac{l_n}{\cos \gamma} = 0$$

i (8)

$$w'_1 = w'_2 = \ldots = w'_{n-1} = \frac{- l_n}{(n - 1) \cos \gamma}$$

co odpowiada rozrzuceniu podłużnego wychylenia $B\,T$ w równych częściach (można proporcjonalnie) na poszczególne boki.

Mając ściśle wyrównane azymuty i boki, możemy obliczyć wyrównane spółrzędne.

Ażeby uniknąć ponownego obliczenia przyrostów i zaniechać obliczania poprawek boków, możemy zastosować postępowanie, oparte na następującem rozważaniu:

Po obliczeniu poprawek kątowych, przyjmiemy, że poprawki te wpływają na położenie poszczególnych punktów tak, że te przesuną się równolegle do poprzecznego wychylenia $p = B_1\,T$, obliczonego po rozrzuceniu odchyłki kątowej.

Przesunięcia pierwszego, drugiego i t. d., aż do ostatniego punktów, będą odpowiednio równe:

$$p_1 = d_1\, w_1$$

$$p_2 = (d_1 + d_2)\, w_1 + d_2\, w_2 = d_1\, w_1 + d_2\, (w_1 + w_2)$$

$$p_3 = = d_1\, w_1 + d_2\, (w_1 + w_2) + d_3\, (w_1 + w_2 + w_3)$$

$$p_4 = = d_1\, w_1 + d_2\, (w_1 + w_2) + d_3\, (w_1 + w_3 + w_3) + d_4\, (w_1 + w_2 + w_3 + w_4)$$

i t. d.

Prawe części tych równań wyrażone są w mierze łukowej.

Oznaczmy

$$w''_2 = w_1 + w_2$$

$$w''_3 = w_1 + w_2 + w_3 \qquad \text{i t. d.}$$

Obliczając wyrazy

$$p'_1 = d_1\, w_1 \qquad p'_2 = d_2\, w''_2 \qquad p'_3 = d_3\, w''_3 \ldots$$

otrzymamy poszczególne przyrosty poprzecznych przesunięć, których suma winna równać się całkowitemu poprzecznemu wychyleniu:

$$p = p'_1 + p'_2 + p'_3 + \ldots = [p']$$

Drobną rozbieżność, jako wynik zaokrągleń, rozrzucimy na poszczególne $p_1\ p_2 \ldots p_{x-1}$. Wielkości $p'_1 \ldots p'_{n-1}$ dają nam możność obliczenia poprawek przyrostów. Ponieważ poprzeczne wychylenie p powoduje przesunięcie ostatniego punktu po osi X o odcinek

$$P_x = B_1\ C = p \sin \varphi_{ab}$$

po osi zaś y o odcinek

$$P_y = C\ T = p \cos \gamma_{ab},$$

które to odcinki możemy obliczyć lub określić graficznie, więc, przyjmując proporcjonalność przesunięć w kierunku osi do przesunięć poprzecznych obliczymy poprawki w przyrostach z równań:

$$v_1^x : p_x = p'_1 : p \qquad v_1^y : p_y = p'_1 : p$$

skąd

$$\begin{aligned} v_1^x &= \frac{p_x}{p} p'_1 & v_1^y &= \frac{p_y}{p} p'_1 \\ v_2^x &= \frac{p_x}{p} p'_2 & v_2^y &= \frac{p_y}{p} p'_2 \\ v^x{}_{n-1} &= \frac{p^x}{p} p'_{n-1} & v^y{}_{n-1} &= \frac{p_y}{p} p'_{n-1} \end{aligned} \tag{9}$$

Drugie poprawki przyrostów, na przesunięcie podłużne, możemy przyjąć za proporcjonalne do długości boków.

Mając podłużne wychylenie

$$B\ T = w = BB_1 \cos [(BB_1) - (AB)]$$

obliczone, lub wzięte z rysunku w skali 1 : 20, oraz pamiętając o znaku, który jest ujemny przy: $(BB_1) - AB < \pm 90^0$ i dodatni przy $(BB_1) - (AB) > \pm 90^0$, obliczymy rzuty x_d i y_d odcinka w na osie, lub też określimy je graficznie z rysunku.

Poprawki poszczególnych przyrostów będą w tym wypadku proporcjonalne do długości boków. A więc:

$$\begin{aligned} w_1^x &= \frac{d_1}{L} x_d & w_1^y &= \frac{d_1}{L} y_d \\ w_2^x &= \frac{d_2}{L} x_d & w_2^y &= \frac{d_2}{L} y_d \\ &- - - - - & &- - - - - \end{aligned}$$

względnie przy bokach, wzajemnie prawie równych, będą równe. W ten sposób poprawione przyrosty będą równe:

$$\Delta x_1^w = \Delta x_1 + v_1^x + w_1^x \qquad \Delta y_1^w = \Delta y_1 + v_1^y + w_1^y$$

$$\Delta x_2^w = \Delta x_2 + v_2^x + w_2^x \qquad \Delta y_2^w = \Delta y_2 + v_2^y + w_2^y$$

Stąd otrzymamy wyrównane spółrzędne.

UWAGI:

Przy obliczaniu cząstkowych poprzecznych przesunięć typu d_1 v_1 .... d_3 $(v_1 + v_2 + v_3)$ poprawki kątowe wyrażamy w mierze łukowej przez pomnożenie d_1, d_2 .... przez $\frac{1}{3438} = 0{,}000291$.

W celu skrócenia rachunku wystarczy dzielić przez 10000 i mnożyć przez 3.

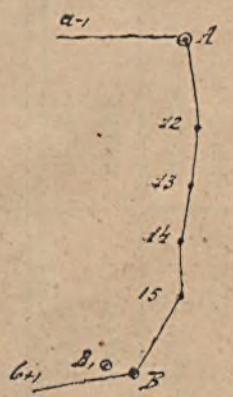
Określanie wychyleń poprzecznych i podłużnych, ich znaków, jak również znaków i wielkości rzutów tych wychyleń na osie spółrzędnych, należy wykonywać, korzystając z odręcznego rysunku z wyraźnie i prawidłowo wyznaczonem położeniem punktu B_1 w stosunku do punktu B i prostej AB (przy kierunku AB obliczenia).

Metoda powyższa może być stosowana tylko w tych wypadkach, gdzie względy na dokładność wyników pozwalają na udzielenie obliczeniom większej ilości czasu, jak to ma miejsce, np., przy pomiarach większych miast.

Oczywiście metody tej nie można stosować przy poligonach wygiętych.

Ilość pracy przy wyrównywaniu nie jest tak znaczna, jak się wydaje na pierwszy rzut oka, o ile obliczenia schematyzować. Obliczenie 10 punktów w poligonie zajmuje przy użyciu tablic liczb naturalnych funkcyj trygonometrycznych i arytmometru około trzech godzin, co przy pewnej rutynie można jeszcze skrócić.

Ponieważ różnice 1 — 2 *cm* we spółrzędnych nie grają roli, natomiast dla nawiązywanych poligonów II-rzędnych ma wielkie znaczenie stopień dokładności azymutu danego boku, przeto postępowanie całe można o tyle uprościć, że zamiast obliczać poprawki boków z równania 7 lub 8-go, odrazu, po wprowadzeniu poprawek ze wzorów 9 do przyrostów, pozostałą odchyłkę rozrzucimy proporcjonalnie do długości boków.



Rys. 850.

PRZYKŁAD.

Dane:

$Y_a = 4052{,}96$	$x_a = -25791{,}28$
$Y_b = 4206{,}54$	$x_b = -26369{,}07$
$[\Delta Y] = 153{,}58$	$[\Delta x] = -577{,}79$

Punkt B_1 oznacza obliczony punkt B po rozrzuceniu odchyłki kątowej na poszczególne kąty.

№ № $a-1$	KĄT	KĄT PÓŁNOCNY	BOKI	ΔY +	$Y \Delta$ −	SPÓŁRZĘDNE WYRÓWNANE	
		81° 31′,2				y	x
A	266° 20′,9	— 1,2		5 — 2 = 3	1 + 7 = + 8	4052,96	— 25791,28
	+ 0,1	167° 52′,2	151,35	31,80	147,97	31,83	— 147,89
12	177° 14′,1	— 1,8		10 — 2 = 8	2 + 9 = + 11	4084,79	— 25939,17
	+ 1	165° 6′,4	204,62	52,59	197,75	52,67	— 197,64
13	171° 49′,3	— 1,8		3 — 1 = 2	1 + 2 = + 3	4137,46	— 26136,81
	+ 1	156° 55′,8	55,04	21,57	50,64	21,59	— 50,61
14	184° 22′,2	— 1,6		6 — 1 = 5	1 + 6 = + 7	4159,05	— 26187,42
	+ 1	161° 18′,2	128,95	41,33	122,12	41,38	— 122,05
15	192° 51′,0	— 0,9		1 — 1 = 0	1 + 3 = + 4	4200,43	— 26309,47
	+ 1	174° 9′,3	59,95	6,11	59,64	6,11	— 69,60
B	259° 11′,5					4206,54	— 26369,07
		253° 20′,9					
$b+1$							
	1333° 20′,2		599,1	153,40	578,12		
	1333° 20′,9			153,58	577,79		
	$f\beta = +0,7$			$fy = +0,18$	+ 0,33 = fx		
				$fs = 0,38$	II 0,79		

$$tg\,(BB_1) = \frac{Y_{B1} - Y_B}{X_{B1} - X_B} = \frac{-\,0{,}18}{-\,0{,}33} = 0{,}54545$$

$$(BB_1) = 208^0\,37'\quad f_s = BB_1 = 0{,}38$$

$$tg\,(AB) = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} = \frac{+\,153{,}58}{-\,577{,}79} = 0{,}26581$$

$$(AB) = 165^0\,7'$$

poprzeczne wychylenie

$$p = BB_1 \sin [(BB_1) - (AB)] = BB_1 \sin 316^0{,}4 = +\,0{,}26;$$

$$l = 0{,}26 \times 3438 = 894.$$

Obliczenie spółczynników równania warunkowego

Boki	S	b	s'	c'
	600	+ 343	0	— 343
151				
	449	+ 192	151	— 192
205				
	244	— 13	356	+ 13
55				
	189	— 68	411	+ 68
129				
	60	— 197	540	+ 197
60				
	0	— 257	600	+ 257
$[s] = 1542$		— 535	$[s'] = 2056$	— 535
		+ 535		+ 535
$\frac{[s]}{n} = 257$		0	$\frac{[s']}{n} = 343$	0

s' zredukowane $= -$ S zredukowane.

Równanie warunkowe (6a):

$$343\,w_1 + 192\,w_2 - 13\,w_3 - 68\,w_4 - 197\,w_5 - 257\,w_6 + 894 = 0$$

Równanie korelaty:

$$264160\,k + 894 = 0$$

$$k = -\,0{,}0034$$

Poprawki:

Kątów	Azymutów	
$w_1 = -$ 1',15	— 1,2	Sprawdzenie:
$w_2 = -$ 0',65	— 1,8	$[w] = 0$
$w_3 = +$ 0',04	— 1,8	$[ww] = -kl = 3{,}0$
$w_4 = +$ 0',23	— 1,6	
$w_5 = +$ 0',67	— 0,9	
$w_6 = +$ 0',87		

III DZIAŁ

Przesunięcia we spółrzędnych:

1) z poprzecznego wychylenia:

$$p_y = 0{,}26 \times \sin (AB - 90^0) = 0{,}26 \times 0{,}97 = 0{,}25$$

$$p_x = 0{,}26 \times \cos (AB - 90^0) = 0.26 \times 0{,}26 = 0{,}06$$

2) z podłużnego wychylenia:

$$f_x = \sqrt{0{,}38^2 - 0{,}26^2} = + 0{,}28$$

$$w_y = 0{,}28 \sin (BA) = - 0{,}07$$

$$w_x = 0{,}28 \cos (BA) = + 0{,}27$$

sprawdzenie:

$$w_y + p_y = 0{,}18 = f_y$$

$$w_x + p_x = 0{,}33 = f_x$$

Przyrosty przesunięć poprzecznych

$$p'_1 = - 1{,}15 \times 151 \times 0{,}0003 = - 0{,}05 \qquad p_n$$

$$p'_2 = - 1{,}80 \times 205 \times 0{,}0003 = - 0{,}11$$

$$p'_3 = - 1{,}76 \times 55 \times 0{,}0003 = - 0{,}03$$

$$p'_4 = - 1{,}53 \times 129 \times 0{,}0003 = - 0{,}06$$

$$p'_5 = - 0{,}87 \times 60 \times 0{,}0003 = - 0{,}01$$

$$[p'] = - 0{,}26$$

Poprawki przyrostów spółrzędnych, odpowiadające przyrostom poprzecznych przesunięć:

$$v^y{}_n = \frac{p_y}{[p']}\, p_n = \frac{0{,}25}{0{,}26}\, p_n = 0{,}99\ p_n$$

$$v^x{}_n = \frac{p_x}{[p']}\, p_n = \frac{0{,}06}{0{,}26}\, p_n = 0{,}23\ p_n$$

$v_1{}^y = 0.90 \times 0{,}05 = 0{,}05$		$v_1{}^x = 0.23 \times 0{,}05 = 0{,}01$	
$v_2{}^y =$ „ $\times 0{,}11 = 0{,}10$		$v_2{}^x =$ „ $\times 0{,}11 = 0{,}02$	
$v_3{}^y =$ „ $\times 0{,}03 = 0{,}03$		$v_3{}^x =$ „ $\times 0{,}03 = 0{,}01$	
$v_4{}^y =$ „ $\times 0{,}06 = 0{,}06$		$v_4{}^x =$ „ $\times 0{,}06 = 0{,}01$	
$v_5{}^y =$ „ $\times 0{,}01 = 0{,}01$		$v_5{}^x =$ „ $\times 0{,}01 = 0{,}01$	
	0,25		0,06

Tę część III działu można skrócić, korzystając z tablic liczb naturalnych funkcyj trygonometrycznych, mianowicie: notujemy zmiany funkcyj r sinus'a i cosinus'a przy zmianie azymutów o 1′; obliczamy zmiany azymutów, wynikające z obliczenia w II dziale poprawek $w_1\ w_2 \ldots w_n$; iloczyny odpowiednich $r\ w$ mnożymy przez odpowiednie boki, uzyskując w ten sposob bezpośrednio wielkości $v_1{}^y\ v_2{}^y \ldots v_n{}^y\ v_1{}^x\ v_2{}^x \ldots v_n{}^x$.

Poprawki w na poszczególne przyrosty z podłużnego wychylenia rozrzucamy proporcjonalnie do długości boków:

$$\text{na 100 } m\text{:}\quad \frac{w^y}{6} = -0.012;\quad \frac{w^x}{6} = 0{,}045$$

$w_1{}^y =$	— 0,02	$w_1{}^x =$	0,07
$w_2 =$	— 0,02	$w_2 =$	0,09
$w_3 =$	— 0,01	$w_3 =$	0,02
$w_4 =$	— 0,01	$w_4 =$	0,06
$w_5 =$	— 0,01	$w^5 =$	0,03
	— 0,07		0,27

Poprawki $p_k{}^y, w_k{}^y$ oraz $p_k{}^x, w_k{}^x$ wypisujemy nad odpowiedniemi przyrostami, które następnie jako poprawione wypisujemy pod kreskami w kolumnie spółrzędnych wyrównanych.

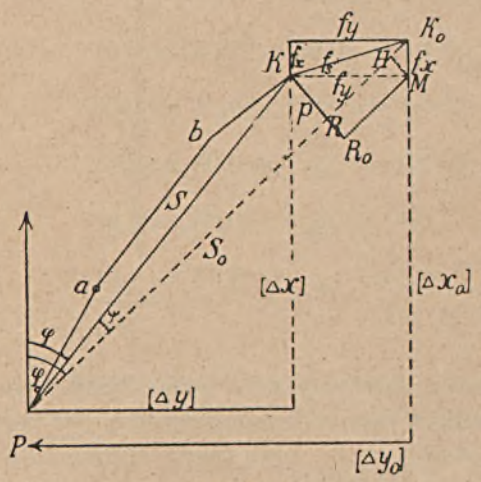
§ 421. Wyrównanie jednokierunkowego poligonu między punktami o znanych spółrzędnych metodą pruską.

Przypuśćmy, że między danemi punktami początkowym $P\,(x_p\ y_p)$ i końcowym $K\ (x_k\ y_k)$ biegnie poligon, nieznacznie odchylający się od kierunku PK. Taki poligon nazwiemy jednokierunkowym.

Oznaczmy symbolami $[\triangle y]$ i $[\triangle x]$

$$[\triangle y] = y_K - y_P$$
$$[\triangle x] = x_K - x_P$$

będą to sumy wyrównanych przyrostów, gdy sumy niewyrównanych przyrostów oznaczymy zapomocą:



Rys. 851.

$$[\triangle y_0] = y_{K_0} - y_P$$
$$[\triangle x_0] = x_{K_0} - x_P$$

Dzięki błędom spostrzeżeń obliczony punkt końcowy poligonu nie wypadnie w K, a zajmie miejsce K_0, punkty zaś $a\,b$ poligonu, zajmą położenie $a_1\,b_1\,\ldots$ Odległość KP oznaczmy przez S, zaś PK_0 przez S_0.

Kąt kierunkowy (względnie azymut) PK, oznaczmy literą φ, kąt zaś kierunkowy PK_0 literą φ_0. Odchyłki w sumach przyrostów oznaczmy literami f_x i f_y, odchyłkę linjową literą f_s.

Zachodzą równania:

$$tq\,\varphi = \frac{[\triangle y]}{[\triangle x]}$$

$$tq\,\varphi_0 = \frac{[\triangle y_0]}{[\triangle x_0]}$$

$$s = \frac{[\triangle y]}{\sin\varphi} = \frac{[\triangle x]}{\cos\varphi} = \sqrt{[\triangle y]^2 + [\triangle x]^2}$$

$$s_0 = \frac{[\triangle y_0]}{\sin\varphi_0} = \frac{[\triangle x_0]}{\cos\varphi_0} = \sqrt{[\triangle y_0]^2 + [\triangle x_0]^2}$$

Gdy poligon nieznacznie odchyla się od kierunku PK, wówczas błąd podłużny wyrazimy zapomocą:

$$d_s = s - s_0$$

wychylenie zaś poprzeczne zapomocą kąta

$$\psi = \varphi - \varphi_0$$

lub linjowo:

$$\frac{\psi}{\rho}\,s = p$$

gdzie $\rho = 3438$ i $\frac{1}{\rho} = 0{,}000291$ dla ψ wyrażonego w minutach, p zaś oznacza poprzeczne wychylenie $K\,R$ $\perp$-e do $P\,K_0$.

Oznaczmy:

$$d s = s - s_0$$

$$\frac{d s}{s_0} = \frac{s}{s_0} - 1 = q - 1$$

gdzie

$$q = \frac{s}{s_0}$$

skąd

$$d s = s_0 (q - 1)$$

wówczas wielkość q oznacza miarę wydłużenia pomierzonego poligonu.

Ustalmy zależność między

$$p,\ q - 1 \text{ a } f_x,\ f_y,\ \Delta x \text{ i } \Delta y.$$

Poprowadźmy w tym celu:

$$M H \perp P K_0,$$

wówczas

$$K M = f_y \qquad M K_0 = f_x$$

$$d s = R H + H K_0 = R_0 M + H K_0$$

gdyż

$$R_0 M \parallel R H$$

i R_0 leży na przedłużeniu $K R$,

że zaś

$$R_0 M = f_y \sin \varphi_0$$

i

$$H K_0 = f_x \cos \varphi_0$$

więc

$$d s = f_y \sin \varphi_0 + f_x \cos \varphi_0$$

skąd:

$$q - 1 = \frac{d s}{s_0} = \frac{\sin \varphi_0}{s_0} f_y + \frac{\cos \varphi_0}{s_0} f_x$$

Mnożąc liczniki i mianowniki przez s_0 i oznaczając

$$s_0 \sin \varphi_0 = [\Delta y_0]$$

$$s_0 \cos \varphi_0 = [\Delta x_0]$$

mamy:

$$q - 1 = \frac{[\Delta y_0]}{s_0\ s_0} f_y + \frac{[\Delta x_0]}{s_0\ s_0} f_x$$

Lecz:

$$s_0\ s_0 = s_0^2 = [\Delta y_0]^2 + [\Delta x_0]^2$$

skąd:

$$q - 1 = \frac{f_y\,[\Delta y_0] + f_x\,[\Delta x_0]}{[\Delta y]^2 + [\Delta x]^2}$$

Podobnie:

$$p = KR_0 - RR_0 = KR_0 - HM = f_y \cos \varphi_0 - f_x \sin \varphi_0$$

więc

$$\frac{\psi}{\rho} = \frac{p}{s} = \frac{f_y \cos \varphi_0}{s} - \frac{f_x \sin \varphi_0}{s};$$

Mnożąc znów liczniki i mianowniki przez s_0 i zakładając

$$s\,s_0 = s_0^2 = [\Delta x]^2 + [\Delta y]^2$$

otrzymamy

$$\frac{\psi}{\rho} = \frac{p}{s} = \frac{f_y\,[\Delta x_0] - f_x\,[\Delta y_0]}{[\Delta x_0]^2 + [\Delta y_0]^2}$$

$q - 1$ jest zwykle większe od ψ około 1.5 razy.

Jeżeli (według pruskiej instrukcji katastralnej) $\frac{p}{s} < 0{,}0003$, wówczas odchyłki przyrostów (same przyrosty obliczono z długości boków i azymutów po rozrzuceniu odchyłki kątowej na wszystkie kąty poligonu) należy rozrzucić na poszczególne przyrosty proporcjonalnie do boków, mianowicie poprawkami przyrostów będą

$$v_x = \frac{f_x}{[s]} s_n \qquad v_y = \frac{f_y}{[s]} s_n$$

Gdy zaś $\frac{p}{s} > 0.0003$, wówczas należy stosować bardziej skomplikowane rozważanie, mianowicie, na podstawie następującej: Oznaczmy literami $v_1\, v_2 \ldots v_n$ poprawki Δ x-ów, przez $w_1\, w_2 \ldots w_n$ poprawki Δ y-ów.

$$[v] = f_x$$

$$[w] = f_y$$

Oznaczmy poprawkę, przypadającą na każdy kąt poligonu, w celu wyrównania sumy kątów, literą ε; przy n kątach całkowitą poprawkę sumy kątów $n\varepsilon$ rozłożymy na $n - 1$ azymutów boków poligonowych, a więc na każdy azymut przypadłby przyrost poprawki $\frac{n\varepsilon}{n-1}$. (Liczba $n - 1$ azymutów przy n kątach zachodzi tylko w poligonach niezamkniętych).

Zmiana każdego kolejnego azymutu o $\frac{n\varepsilon}{n-1} . k$ byłaby wtedy tylko właściwą (literą k oznaczamy numer boku, licząc od początku), gdy dany poligon nawiązany był tylko na początku do boku o znanym azymucie, koniec zaś poligonu zwisałby bez nawiązania azymutowego W danym wypadku obydwa końce poligonu mają nawiązanie azymutowe.

Azymut dowolnego boku k, w zależności od początkowego danego azymutu A, oblicza się ze wzoru:

$$\gamma_k = A \pm k.180^0 - \alpha_1 - \alpha_2 \ldots - \alpha_k$$

stąd jego średni błąd określa się z równania:

$$m_k^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_k^2 = km$$

(wobec równości średnich błędów poszczególnych kątów);
więc waga:

$$p_k = \frac{1}{m_k^2} = \frac{1}{k\,m^2}$$

stąd wynika:

$$p_1 : p_2 : \ldots p_k \ldots : p_n = \frac{1}{1} : \frac{1}{2} : \ldots : \frac{1}{k} : \ldots : \frac{1}{n}$$

co znaczy, ze za wagę azymutu każdego boku przyjąć można odwrotność numeru tego boku.

Następnie: przy azymutowem nawiązaniu obydwu końców poligonu każdy azymut może być obliczony dwukrotnie: pierwszy raz jako γ_1 o wadze p_1' z azymutu danego przy początku poligonu boku i drugi raz jako γ_2 o wadze p_2' na zasadzie azymutu danego boku na drugim końcu poligonu.

Ostateczną wagą z obydwu końców poligonu obliczonego azymutu γ_k będzie waga średniej z wag:

$$p_\gamma = p_1' + p_2' = \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} = \frac{k+n-k}{k\,(n-k)} = \frac{n}{k\,(n-k)}$$

ponieważ zaś błędy azymutów możemy przyjąć w przybliżeniu za odwrotnie proporcjonalne do wag tych azymutów, przeto każdemu azymutowi przypisujemy poprawkę:

$$\frac{n\,\varepsilon}{n-1} \cdot \frac{k\,(n-k)}{n} = \frac{k\,(n-k)}{n-1}\,\varepsilon$$

Oznaczmy dla skrócenia spółczynnik przy ε literą z; wówczas poprawkę każdego azymutu oznaczymy zapomocą

$$d\alpha_k = z_k\,\varepsilon.$$

Wielkości $z = \dfrac{k\,(n-k)}{n-1}$ podane są w tabeli XII uzupełnień.

Dla określania błędów przyrostów zróżniczkujmy równania:

$$\triangle x = s \cos \alpha$$

$$\triangle y = s \sin \alpha$$

i przyrównamy $d\triangle x$ i $d\triangle y$ do v i w, będzie więc

$$v_k = ds_k \cos \alpha_k - s_k \sin \alpha_k\, d\alpha_k$$

$$w_k = ds_k \sin \alpha_k + s_k \cos \alpha_k \, d\alpha_k$$

lecz

$$s_k \sin \alpha_k = \triangle y_k$$

$$s_k \cos \alpha_k = \triangle x_k$$

zakładając przytem, że w poligonach, których boki nie są zbyt wielkie, zachodzi proporcjonalność poprawek boków do ich długości, t. j.

$$d s_k = e s_k$$

gdzie e jest spółczynnikiem proporcjonalności, napiszemy, pamiętając o

$$d \alpha_k = z_k \varepsilon$$

$$v_k = e \triangle x_k - z_k \triangle y_k \varepsilon$$

$$w_k = e \triangle y_k + z_k \triangle x_k \varepsilon$$

Gdy wypiszemy dla v i w oddzielnie dwie grupy wyrazów dla k od 1 do n i dodamy wyrazy obydwu grup — otrzymamy:

$$[v] = f_x = e\,[x] - [z \triangle y]\,\varepsilon$$

$$[w] = f_y = e\,[\triangle y] + [z \triangle x]\,\varepsilon$$

i, oznaczając:

$$[z \triangle y] = Y \qquad [z \triangle x] = X$$

piszemy

$$f_x = e\,[\Delta x] - Y\varepsilon$$

$$f_y = e\,[\triangle y] + X\varepsilon$$

Rugując ε, otrzymujemy:

$$X f_x + Y f_y = X\,[\Delta x]\,e + Y\,[\Delta y]\,e$$

więc

$$e = \frac{X f_x + Y f_y}{X[\Delta x] + Y[\Delta y]}$$

rugując zaś z równań f_x i f_y wyraz e, otrzymujemy:

$$\varepsilon = \frac{f_y\,[\Delta\, x] - f_x\,[\Delta\, y]}{X\,[\Delta\, x] + Y\,[\Delta\, y]}$$

Mając e i ε możemy już obliczyć poprawki każdego przyrostu, t. j.

$$v_k = e\,\Delta\, x_k - \varepsilon\, z_k\, \Delta\, y_k$$

$$w_k = e\,\Delta\, y_k + \varepsilon\, z_k\, \Delta\, x_k\,.$$

Sprawdzeniem rachunku będzie

$$[v] = f_x$$

$$[w] = f_y$$

gdzie

$$f_x = (X_k - X_p) - [\Delta x_0]$$

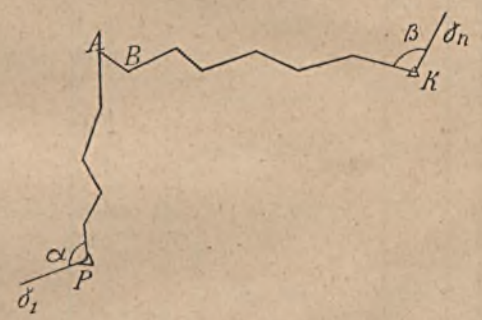
$$f_y = (Y_k - Y_p) - [\Delta y_0]$$ (patrz przykład str. 1070/1).

§ 422. Wyrównanie wygiętego poligonu, nawiązanego do punktów trygonometrycznych, według pruskiej instrukcji.

Przypuśćmy, że od punktu $P\,(x_p\ y_p)$ ku $K\,(x_p\ y_p)$ biegnie poligon, zmieniający początkowy kierunek w punkcie przegięcia A.

Odcinki PA i AK poligonu nie odbiegają znacznie od kierunków PA i AK.

Moglibyśmy, idąc od punktu P i od K ku AB, dwukrotnie obliczyć azymut tej prostej, za wagi wyników obrać odwrotności liczby kątów, wziętych w obydwu ciągach do rachunku, i obliczyć średnią wag; po wyrównaniu kątów i azymutów z obydwu poligonów PA i KA obliczylibyśmy spółrzędne punktu A dwukrotnie i, obierając za wagi odwrotności długości PA i KA, uzyskalibyśmy ostateczne X_A i Y_A jako średnie wag. Gdyby następnie okazało się, że poprzeczne wychylenia na odcinkach PA i KA nie przekraczają w stosunku do długości tych odcinków wielkości 0,0003, wówczas odchyłki w przyrostach możnaby rozrzucić proporcjonalnie do długości boków.



Rys. 852.

Ze względu jednak na okoliczność, że możemy otrzymać omówiony stosunek większy od 0,0003, lepiej odrazu przystępować do właściwego wyrównania.

Przypuśćmy, że po wyrównaniu kątów obliczyliśmy dla PA sumy przyrostów $[\Delta x]_1$, $[\Delta y]_1$ i od A do K — $[\Delta x]_2$, $[\Delta y]_2$.

Odchyłkami sum przyrostów są

$$f_y = y_k - y_p - [\Delta y]_1 - [\Delta y]_2$$

$$f_x = x_k - x_p - [\Delta x]_1 - [\Delta x]_2.$$

W założeniu, że spółrzędne $x_A\ y_A$ są obliczone, określić można sumy poprawek przyrostów dla poligonu PA ze wzorów:

$$[v]_1 = e\,[\Delta x]_1 - \varepsilon\, Y_1$$

$$[w]_1 = e\,[\Delta y]_1 + \varepsilon\, X_1$$

gdzie

$$Y_1 = [z\ \Delta y]_1$$

$$X_1 = [z\ \Delta x]_1.$$

PRZY KŁAD:

№ poligonu	№ punktu P_n	Odsyłacz	Kąty poligonu β_n ° ′ ″	Azymuty $\varphi_n = \varphi_{n-1} + \beta_n \pm \pi$ ° ′ ″	Długości boków Metrów	log sin φ_n log s_n log cos φ_n	log s_n sin φ_n log s_n cos φ_n	Obliczone $e \triangle y$ $\varepsilon z \triangle x$ $\Delta y_n = s_n \sin \varphi_n$ + | −	Obliczone $e \triangle x$ $e z \triangle y$ $\Delta x_n = s_n \cos \varphi_n$ + | −
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	⊙ △ 17	10.34	101 37 55	101 37 55					
				+3					
38	▽ ⊙ 176	1.28	186 29 41			9.97 79	2.16 83	+ 1	+ 4
				108 07 39	155,05	2.19 04	1.68 34$_n$	+ 13	− 4
				+3		9.49 30$_n$		147,33	48,24
	⊙ 175	„	143 56 51			9.97 84	2.00 37½	− 1	+ 5
				72 04 33	106,00	2.02 53	1.51 35	+ 9	+ 3
				+3		9.48 82		100,86	32,62
	⊙ 174	„	172 00 14			9.95 40	2.02 82	− 3	+ 5
				64 04 50	118,63	2.07 42	1.71 47	+ 10	+ 5
				+3		9.64 05		106,71	51,84
	⊙ 173	„	145 06 25			9.68 81	1.91 28	− 4	+ 2
				29 11 18	167,75	2.22 47	2.16 57	+ 8	+ 13
				+3		2.94 10		81,80	146,45
	⊙ 172	1.27	243 09 19					436,70	230,91 48.24
		21. 2		92 20 40					182,67
		Spr	992 20 25		547,43		Spr	437,03	183,00
	⊙ 194						f_y	+0,33	f_x +0,33
		S_t	992 20 40						
		$f\beta$	+ 15	(3,4′)				$f_s = 0{,}02$ (I. 0,39)	

Poprawione $\triangle y_n$ $y_n = y_{n-1} + \triangle y_{n-1}$ ± Metrów	Poprawione $\triangle x_n$ $x_n = x_{n-1} + \triangle x_{n-1}$ ± Metrów	№ Punktów P_n	$q-1 = \frac{+f_y[\Delta y] + f_x[\Delta x]}{[\Delta y]^2 + [\Delta x]^2}$ $\psi = \frac{+f_y[\Delta x] - f_x[\Delta y]}{[\Delta y]^2 + [\Delta x]^2}$ z	+ y −	+ x −	Poprawki spółrzędnych ω i δ	Wielkości z patrz tabela XII uzupełnień
11	12	13	14	15	16	17	
× 43 978,74	21 167,19	▽ ⊙ 176				$\psi < 0{,}0003$ $v_n = \frac{f_n}{[s]} s$ $v_x = \frac{f_x}{[s]} s$	$\psi > 0{,}0003$ $e = \frac{+f_y Y + f_x X}{Y[\Delta_v] + x[\Delta_r]}$ $\varepsilon = \frac{+f_y[\Delta_x] - f_x[\Delta y]}{Y[\Delta_y] + X[\Delta_r]}$ $w_y = e\Delta y + \varepsilon z \Delta x$ $v_x = e\Delta_x - \varepsilon z \Delta y$
147,47	× 51,76		1	147	48		
× 44 126,21	21 118,95	⊙ 175					
100,94	32,70		2	202	65		
× 44 227,15	21 151,65	⊙ 174					
106,78	51,94		2	213	104		
× 44 333,93	21 203,59	⊙ 173					
81,84	146,60		1	82	146		
× 44 415,77	21 350,19	⊙ 172					
437,03	183,00			644	315 48		
					267		

$q-1 = \frac{+144{,}2 + 60{,}4}{190\,969 + 33\,489} = \frac{+204{,}6}{224\,458}$

$= +0{,}00091$

$\psi = \frac{+60{,}4 - 144{,}2}{224{,}458} = \frac{-83{,}8}{224\,458}$

$= -0{,}000\,37$

$e = \frac{+212{,}5 + 88{,}1}{281\,428 + 48\,861} = \frac{+300{,}6}{330\,289}$

$= +0{,}000\,911$

$\varepsilon = \frac{-83{,}8}{330\,289} = -0{,}000\,254$

Te same sumy poprawek dla poligonu KA (pamiętając, że zmiana kierunku obliczenia AK na KA zmienia znaki sum przyrostów) będą równe:

$$[v]_2 = -e[\Delta x]_2 + \varepsilon Y_2$$

$$[w]_2 = -e[\Delta y]_2 - \varepsilon X_2$$

stąd

$$[v] = [v]_1 + [v]_2 = e([\Delta x]_1 - [\Delta x]_2) - \varepsilon(Y_1 - Y_2) = f_y$$

$$[w] = [w]_1 + [w]_2 = e([\Delta y]_1 - [\Delta y]_2) + \varepsilon(X_1 - X_2) = f_x$$

Rugując ε z ostatnich dwu równań, otrzymamy:

$$e = \frac{f_x(X_1 - X_2) + f_y(Y_1 - Y_2)}{(X_1 - X_2)\{[\Delta x]_1 - [\Delta x]_2\} + (Y_1 - Y_2)\{[\Delta y]_1 - [\Delta y]_2\}}$$

regulując zaś e, otrzymamy:

$$\varepsilon = \frac{f_y\{[\Delta x]_1 - [\Delta x]_2\} - f_x\{[\Delta y]_1 - [\Delta y]_2\}}{(X_1 - X_2)\{[\Delta x]_1 - [\Delta x]_2\} + (Y_1 - Y_2)\{[\Delta y]_1 - [\Delta y]_2\}}$$

Mając e i ε, obliczymy poprawki poszczególnych przyrostów dla części PA ze wzorów

$$v'_k = e\ \Delta\ x_k - \varepsilon\ z_k\ \Delta\ y_k$$

$$w'_k = e\ \Delta\ y_k + \varepsilon\ z_k\ \Delta\ x_k$$

oraz dla części $K\ A$ z wzorów:

$$v''_k = -\ e\ \Delta\ x_k + \varepsilon\ z_k\ \Delta\ y_k$$

$$v''_k = -\ e\ \Delta\ y_k - \varepsilon\ z_k\ \Delta\ x_k\ .\ .$$

Spółczynniki z obliczamy oddzielnie dla części $P\ A$ i $K\ A$.

§ 423. Poligony busolowe.

A. *Ścisłe wyrównanie poligonu busolowego.*

W poligonie busolowym mamy tylko dwa warunki, mianowicie: zamknięcia sum $[\Delta x]$ i $[\Delta y]$. W poligonie zamkniętym te sumy winny być równe zeru, w poligonie, nawiązanym do punktów stałych, sumy te winny się równać różnicy odpowiednich spółrzędnych ostatniego i początkowego punktu poligonu. Ze względu na niezależność spostrzeżeń poszczególnych azymutów, wzory się nieco uproszczą.

Korzystając z poprzednich §-ów, wypiszemy wzory na poprawki przyrostów Δx-ów i Δy-ów:

$$\tau_k = w_k \cos \gamma_k - d_k \sin \gamma_k\ \Delta\ \gamma_k$$

$$\varepsilon_k = w_k \sin \gamma_k + d_k \cos \gamma_k\ \Delta\ \gamma_k$$

oznaczając:

$$\Delta\ \gamma_k = v_k,$$

$$d_k \sin \gamma_k = \Delta\ y_k\ ,$$

$$d_k \cos \gamma_k = \Delta\ x_k\ ,$$

otrzymamy:

a)
$$\tau_k = w_k \cos \gamma_k - \Delta\ y_k\ v_k$$
$$\varepsilon_k = w_k \sin \gamma_k + \Delta\ x_k\ v_k$$

Ponieważ

$$[\Delta x] + [\tau] - (x_n - x_1) = 0$$

więc

$$(1) \qquad [\tau] + f_x = 0$$

gdzie

$$f_x = [\Delta x] + x_1 - x_n$$

i analogicznie,

$$(2) \qquad [\varepsilon] + f_y = 0$$

gdzie

$$f_y = [\Delta y] + y_1 - y_n$$

We wzorach na odchyłki f_x i f_y zamkniętego poligonu będzie

$$f_x = [\Delta x]$$
$$f_y = [\Delta y]$$

Równania warunkowe możemy przedstawić w rozwiniętej formie:

$$w_1 \cos \gamma_1 + w_2 \cos \gamma_2 + \ldots + w_n \cos \gamma_n - v_1 \Delta y_1 - v_2 \Delta y_2 - \ldots$$
$$- v_n \Delta y_n + f_x = 0 \qquad (3)$$
$$w_1 \sin \gamma_1 + w_2 \sin \gamma_2 + \ldots + w_n \sin \gamma_n + v_1 \Delta x_1 + v_2 \Delta x_2 + \ldots$$
$$+ v_n \Delta x_n + f_y = 0$$

Stąd przejdziemy do dwu równań normalnych, oznaczając wagi boków literami p_1 p_2 ...., wagi azymutów literami P_1 P_2 ....

$$\left\{\left[\frac{\cos\gamma \cos\gamma}{p}\right] + \left[\frac{\Delta y \Delta y}{P}\right]\right\} k_1 + \left\{\left[\frac{\sin\gamma \cos\gamma}{p}\right] - \left[\frac{\Delta y \Delta x}{P}\right]\right\} k_2 + f_x = 0$$

$$\left\{\left[\frac{\sin\gamma \cos\gamma}{p}\right] - \left[\frac{\Delta y \Delta x}{P}\right]\right\} k_1 + \left\{\left[\frac{\sin\gamma \sin\gamma}{p}\right] + \left[\frac{\Delta x \Delta x}{P}\right]\right\} k_2 + f_y = 0$$

W wypadku jednakowo krótkich boków poligonu busolowego wyrazy p i P mogą być usunięte w postaci ułamków $\frac{1}{p}$ i $\frac{1}{P}$ przed symbole sum. Przyjmując za średni błąd azymutu 10', za czynnik proporcjonalności krótkich boków $\frac{1}{500}$ dla niedogodnych warunków, przyjdziemy, do liczb:

$$P = 1 \qquad p = 2$$

Przy obliczeniach korelat spółczynniki ich równań można tworzyć z dużym stopniem zaokrąglenia.

B. *Uproszczony sposób wyrównania poligonu busolowego.* Przyjmijmy, że: 1) poprawki boków są proporcjonalne do ich długości, spółczynnik zaś proporcjonalności równa się e, oraz że 2) poprawki wszystkich azymutów są jednakowo równe v.

Wówczas równania (3) rozwinięte przepiszemy, oznaczając literami d_1 d_2 ... długości boków, jako:

$$e d_1 \cos \gamma_1 + e d_2 \cos \gamma_2 + \ldots + e d_n \cos \gamma_n + v [\Delta y] + f_x = 0$$
$$e d_1 \sin \gamma_1 + e d_2 \sin \gamma_2 + \ldots e d_n \sin \gamma_n + v [\Delta x] + f_n = 0$$

lub też:

$$e [\Delta x] - v [\Delta y] + f_x = 0$$
$$e [\Delta y] + v [\Delta x] + f_y = 0$$

stąd

$$e = - \frac{f_x [\Delta x] + f_y [\Delta y]}{[\Delta x]^2 + [\Delta y]^2}$$

$$v = \frac{f_x [\Delta y] - f_y [\Delta x]}{[\Delta x]^2 + [\Delta y]^2}$$

Jak widzimy, wielkość e różni się tylko znakiem od q — 1 z § 421, v zaś — odpowiada $\frac{p}{s}$ tego §-u.

Mając e i v, obliczymy poprawki τ: Δx-ów i ε — Δy-ów dla każdego boku ze wzorów a):

$$\tau_k = w_k \cos \gamma_k - \Delta y_k v_k = e \Delta x_k - v \Delta y_k$$

$$\varepsilon_k = w_k \sin \gamma_k + \Delta x_k v_k = e \Delta y_k - v \Delta x_k$$

i obliczenia sprawdzimy, zestawiając sumy obliczonych poprawek z odchyłkami.

$$[\tau]_1^n = - f_x$$

$$[\varepsilon]_1^n = - f_y$$

§ 424. Graniczna odchyłka linjowa poligonu.

Ścisły wzór na wielkość odchyłki buduje się z określonych średnich błędów spółrzędnych ostatniego punktu poligonu.

Przypuśćmy, że pomierzone boki są równe l_1, l_2 .... l_{n-1}, kąty zaś pomierzone α_1, α_2 .... α_{n-1}; pamiętając, że obliczone azymuty są funkcjami pomierzonych kątów, obciążonych błędami pomiarów, a mianowicie:

$$\gamma_1 = \gamma_0 + 180^0 - \alpha_1$$
$$\gamma_2 = \gamma_0 + 2.180^0 - \alpha_1 - \alpha_2$$
— — — — — — —
— — — — — — —

odnajdziemy średnie błędy spółrzędnych ostatniego punktu X_n Y_n. Jeżeli spółrzędne 1-ego punktu są równe x_0 y_0, wówczas:

$$x_n = x_0 + l_1 \cos \gamma_1 + l_2 \cos \gamma_2 + \ldots$$

$$y_n = y_0 + l_1 \sin \gamma_1 + l_2 \sin \gamma_2 + \ldots$$

Będzie więc (patrz wzór str. 291):

$$m^2_{x_n} = \left(\frac{\partial x_n}{\partial l_1}\right)^2 m^2_{l_1} + \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\right)^2 m^2_{\alpha_1} +$$

$$+ \left(\frac{\partial x_n}{\partial l_2}\right)^2 m^2_{l_2} + \left(\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2}\right)^2 m^2_{\alpha_2} + \ldots$$

$$m^2_{y_n} = \left(\frac{\partial y_n}{\partial l_1}\right)^2 m^2_{l_1} + \left(\frac{\partial y_n}{\partial \alpha_1}\right)^2 m^2_{\alpha_1} + \left(\frac{\partial y_n}{\partial l_2}\right)^2 m^2_{l_2} + \left(\frac{\partial y_n}{\partial \alpha_2}\right)^2 m^2_{\alpha_2} + \ldots$$

lecz ponieważ:

$$\frac{\partial x_n}{\partial l_1} = \cos \gamma_1 \qquad \frac{\partial y_n}{\partial l_1} = \sin \gamma_1$$

$$\frac{\partial x_n}{\partial l_2} = \cos \gamma_2 \qquad \frac{\partial y_n}{\partial l_2} = \sin \gamma_2$$

— — — — — — — — — —

— — — — — — — — — —

$$\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial x_n}{\partial \gamma_1} \cdot \frac{\partial \gamma_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial x_n}{\partial \gamma_2} \cdot \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_1} + \ldots$$

$$+ \frac{\partial x_n}{\partial \gamma_{n-1}} \cdot \frac{\partial \gamma_{n-1}}{\partial \alpha_1} = l_1 \sin \gamma_1 - l_2 \sin \gamma_2 - \ldots - l_{n-1} \sin \gamma_{n-1}$$

$$\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial x_n}{\partial \gamma_2} \cdot \frac{\partial \gamma_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial x_n}{\partial \gamma_3} \cdot \frac{\partial \gamma_3}{\partial \alpha_2} + \ldots$$

$$+ \frac{\partial x_n}{\partial \gamma_{n-1}} \cdot \frac{\partial \gamma_{n-1}}{\partial \alpha_2} = - l_2 \sin \gamma_2 - l_3 \sin \gamma_3 - \ldots - l_{n-1} \sin \gamma_{n-1} - \ldots$$

— — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — —

$$\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_{n-1}} = \frac{\partial x_n}{\partial \gamma_{n-1}} \cdot \frac{\partial \gamma_{n-1}}{\partial \alpha_{n-1}} = - l_{n-1} \sin \gamma_{n-1}$$

i analogicznie

$$\frac{\partial y_n}{\partial \alpha_1} = l_1 \cos \gamma_1 + l_2 \cos \gamma_2 + \ldots + l_{n-1} \cos \gamma_{n-1}$$

$$\frac{\partial y_n}{\partial \alpha_2} = l_2 \cos \gamma_2 + \ldots + l_{n-1} \cos \gamma_{n-1}$$

— — — — — — — — —

— — — — — — — — —

$$\frac{\partial y_n}{\partial \alpha_{n-1}} = l_{n-1} \cos \gamma_{n-1}$$

Stąd będzie

$$m^2_{x_n} = m^2_{l_1} \cos^2 \gamma_1 + m^2_{l_2} \cos^2 \gamma_2 + \ldots + m^2_{l_{n-1}} \cos^2 \gamma_{n-1} +$$

$$+ (l_1 \sin \gamma_1 + l_2 \sin \gamma_2 + \ldots + l_{n-1} \sin \gamma_{n-1})^2 m^2_{\alpha_1} +$$

— — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — —

$$+ (l_{n-1} \sin \gamma_{n-1})^2 \, m^2{}_{\alpha_{n-1}}$$

$$m^2 y_n = m^2 l_1 \sin^2 \gamma_1 + m^2 l_2 \sin^2 \gamma_2 + \ldots + m^2 l_{n-1} \sin^2 \gamma_{n-1} +$$

$$+ (l_1 \cos \gamma_1 + l_2 \cos \gamma_2 + \ldots + l_{n-1} \cos \gamma_{n-1})^2 \, m^2{}_{\alpha_1} +$$

$$+ (l_2 \cos \gamma_2 + \ldots + l_{n-1} \cos \gamma_{n-1})^2 \, m^2{}_{\alpha_2} +$$

— — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — —

$$+ (l_{n-1} \cos \gamma_{n-1})^2 \, m^2{}_{\alpha_{n-1}}$$

Stąd wreszcie średnia odchyłka linjowa będzie równa:

$$M^2 = m^2 x_n + m^2 y_n = m^2 l_1 + m^2 l_2 + \ldots + m^2 l_{n-1} +$$

$$+ m^2{}_{\alpha_1} \left([\Delta_1{}^n x]^2 + [\Delta_1{}^n y]^2 \right) +$$

$$+ m^2{}_{\alpha_2} \left([\Delta_2{}^n x]^2 + [\Delta_2{}^n y]^2 \right) +$$

— — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — —

$$+ m^2{}_{\alpha_{n-1}} \left(\Delta x^2{}_{n-1,n} + \Delta y^2{}_{n-1,n} \right)$$

albo ponieważ

$$\left[\Delta_k^n x \right]^2 + \left[\Delta_k^n y \right]^2 = l^2{}_{k,n}$$

więc, przyrównywając średnie błędy wszystkich kątów do m, otrzymamy:

$$M^2 = m^2 l_1 + m^2 l_2 + \ldots + m^2 l_{n-1} + m^2 \, (l^2{}_{1,n} + l^2{}_{2,n} + \ldots + l^2{}_{n-1,n})$$

Wzór ten daje ścisły obraz zespołu czynników, wpływających na tworzenie się i wielkość odchyłki linjowej.

Jeżeli wzór ten stosować do poligonów zamkniętych, to, ponieważ w tych poligonach na wielkość odchyłki błędy systematyczne prawie zupełnie nie wpływają, możemy założyć:

$$m_{l_1} = \pm \mu \sqrt{l_1}$$

$$m_{l_2} = \pm \mu \sqrt{l_2}$$

W taki sposób przyjdziemy do wzoru:

$$M^2 = \mu^2 [l] + m^2 \left(l^2_{1,n} + l^2_{2,n} + \ldots + l^2_{n-1,n} \right)$$

Wyraz $\mu^2 [l]$ daje wpływ błędów pomiaru długości boków, wyraz zaś $m^2 (l^2_{1,n} + l^2_{2,n} + \ldots + l^2_{n-1,n})$ daje wpływ błędów pomiaru kątów.

Przyjmując $\mu = 0{,}00453$ oraz $m^2 = 0{,}000291^2$, widzimy, że na niewielkich poligonach na wielkość odchyłki przeważający wpływ wywierają błędy pomiaru długości. Natomiast w poligonach większych wpływ błędów pomiaru prostych niknie w porównaniu z wpływem błędów pomiaru i kątów i to w tym większym stopniu, im większe obszary kryje dany poligon.

Dla poligonu, wyciągniętego w pewnym określonym kierunku, wzór

$$M^2 = [m^2 {}_l] + m^2 \left(l^2_{1,n} + l^2_{2,n} + \ldots + l^2_{n-1,n} \right)$$

w wypadku równych boków przyjmie postać:

$$M^2 = [m^2 {}_l] + l^2 m^2 \left\{ (n\text{-}1)^2 + (n\text{-}2)^2 + \ldots + 2^2 + 1 \right\}$$

co wskazuje w jak znacznym stopniu wzrasta wpływ błędów kątowych ze wzrostem liczby kątów na wielkość odchyłki, który to wpływ w pewnym czasie zaczyna coraz więcej przekraczać wpływ błędów pomiaru boków, przytem w znacznie szybszem tempie, niż to ma miejsce w poligonach zamkniętych.

Dla poligonów zamkniętych stosowanie wzoru

$$M^2 = [m^2 l] + m^2 \left\{ l^2_{1,n} + l^2_{2,n} + \ldots + l^2_{n-1,n} \right\}$$

dla obliczenia odchyłki spowodowałoby konieczność: 1) wykreślenia w małej podziałce całego zamkniętego poligonu, 2) wyznaczenia długości przekątnych, łączących ostatni punkt ze wszystkiemi pozostałemi, 3) obliczenia sumy kwadratów tych przekątnych.

Na większych obszarach decydujący wpływ na wielkość odchyłki linjowej wywierają błędy pomiaru kątów.

Ustalmy obecnie długość takiego wyciągniętego poligonu, w którym wpływ błędów kątowych odpowiada błędom pomiaru boków.

Jeżeli odrzucimy wpływ błędów regularnych na pomiar boków, wówczas długość badanego poligonu wyznaczy się z ilości boków, a mianowicie dla wypadku równych boków:

$$[m_l^2] = \mu^2 n l = l^2 m^2 \left\{ (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots + 1 \right\}$$

Równanie powyższe dla $m = 30''$, granicznego $\mu = 0{,}015$, $l = 200$ zajdzie przy $n = 8$, a więc już na 1600 metrach.

Jeżeli więc wyobrazimy sobie obszar, zbliżony do kwadratu, o boku, większym od 1600 metrów, to obszar ten już jest ujęty w poligon, w którym wpływ błędów kątowych dość znacznie przekracza wpływ błędów po-

miaru długości; skonstatujemy to już dla obszaru około dwustu *ha*. Na większych obszarach stopniowo błędy pomiaru kątów poczynają tak dalece przewyższać błędy pomiaru długości, że na obszarach około 500 *ha*, wpływ błędów pomiaru długości możemy traktować, jako drugorzędny czynnik przy tworzeniu się odchyłki linjowej (o ile niema grubych błędów pomiaru długości)

§ 425. Średni błąd wyrównanych kątów poligonu.

Nie należy zapominać, że wszystko, powyżej omówione, dotyczy poligonów o niewyrównanych kątach. Mamy prawo oczekiwać, że wyrównanie kątów w poligonie, nieznacznie odchylającym się od pewnego głównego kierunku, oraz wyrównanie kątów w poligonie zamkniętym spowoduje zmniejszenie wpływu błędów wyrównanych kątów na wielkość odchyłki.

Zbadajmy więc przedewszystkiem, jak zmieni się średni błąd m kąta po wyrównaniu.

Rozpatrzmy w tym celu zamknięty poligon o n bokach i odchyłce kątowej l; z równania odchyłki kątowej

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + l = 0$$

przy jednakowo dokładnych spostrzeżeniach kątowych otrzymamy dla wielkości poprawek wyrazy:

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_n = -\frac{l}{n}$$

co daje średni błąd spostrzeżonego kąta:

$$m = \pm \sqrt{[v\,v]} = \pm \frac{l}{\sqrt{n}}$$

Gdy rozporządzamy dużym materjałem faktycznym, mając odchyłki z całego szeregu poligonów, pomierzonych jedną metodą, przyrządem jednego typu, wówczas określimy dla każdego poligonu:

$$m_1^2 = \frac{l_1^2}{n_1} \qquad m_2^2 = \frac{l_2}{n_2} \ldots m_r = \frac{l_r^2}{n_r}$$

skąd średnią wartość m^2 określimy ze wzoru:

$$m^2 = \pm \sqrt{\frac{1}{r}\left[\frac{l^2}{n}\right]}$$

Wielkość m zależy tak od typu przyrządu, jak również od metody pomiaru kątów. Znaczne zmniejszenie m można uzyskać przy dwu warunkach: 1) stosowaniu dokładniejszych narzędzi, włącznie do mikroskopowych teodolitów (na pomiarach miejskich i przy wynikającem stąd 2) stosowaniu takiego systemu statywów i sygnałów, przy których błąd centrowania teodolitu i sygnału nie przekracza minimalnych wielkości.

Korzystając z teorji równań przejściowych (patrz Jordan cz. I-sza § 46) możemy określić wielkość średniego błędu kąta po wyrównaniu.

Mianowicie, rozpatrując wielkość wyrównanego kąta α_k

$$F_k = \alpha_k$$

dla określenia jego średniego błędu

$$M = \pm m \sqrt{F F}$$

wyznaczymy wielkość spółczynników

$$f_1 = 0 \quad f_2 = 0 \ldots f_k = 1 \ldots f_n = 0$$

skąd, ponieważ

$$[a\,a] = n \qquad [a\,f] = 1$$

otrzymamy równanie przejściowe:

$$n\,r + 1 = 0$$

oraz

$$r = -\frac{1}{n}$$

co wyznaczy wielkości:

$$F_k = 1 - \frac{1}{n}$$

$$F_1 = -\frac{1}{n}$$

$$F_2 = -\frac{1}{n}$$

— — — —

— — — —

oraz

$$[F\,F] = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + (n-1)\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

Stąd wreszcie średni błąd kąta po wyrównaniu będzie równy:

$$m_n = \pm m \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

Jak więc widzimy, średni błąd kąta po wyrównaniu w przeciętnym poligonie zupełnie prawie się nie różni od średniego błędu kąta przed wyrównaniem.

§ 426. Wpływ wyrównania kątów na położenie ostatniego punktu poligonu.

Wpływ wyrównania kątów na wielkość odchyłki linjowej jest dość znaczny; wyznaczmy wielkość przesunięcia ostatniego punktu poligonu za-

mkniętego, na skutek zmiany wszystkich kątów o v; oznaczając spółrzędne ostatniego punktu poligonu, obliczone przed i po wyrównaniu kątów literami x_p y_p i x_w y_w, będziemy mieli:

$$x_w = l_1 \cos(\gamma_1 - v) + l_2 \cos(\gamma_2 - 2v) + l_3 \cos(\gamma_3 - 3v)...$$

lecz

$$\cos(\gamma_n - nv) = \cos\gamma_n + nv \sin\gamma_n \ldots$$

więc

$$x_w = l_1 \cos\gamma_1 + l_1 v \sin\gamma_1 + l_2 \cos\gamma_2 + 2 l_2 v \sin\gamma_2 + l_3 \cos\gamma_3 + 3 l_3 v \sin\gamma_3 + ...$$

lecz

$$x_p = l_1 \cos\gamma_1 + l_2 \cos\gamma_2 + l_3 \cos\gamma_3$$

stąd przesunięcie punktu po osi x będzie równe:

$$\triangle x = v\{l_1 \sin\gamma_1 + 2 l_2 \sin\gamma_2 + 3 l_3 \sin\gamma_3 + ...\}$$

podobnież:

$$y_w = l_1 \sin(\gamma_1 - v) + l_2 \sin(\gamma_2 - 2v) + l_3 \sin(\gamma_3 - 3v) + \ldots =$$

$$= l_1 \sin\gamma_1 - l_1 v \cos\gamma_1 + l_2 \sin\gamma_2 - 2 l_2 v \cos\gamma_2 + l_3 \sin\gamma_3 - 3 l_3 v \cos\gamma_3 + \ldots$$

lecz

$$y_p = l_1 \sin\gamma_1 + l_2 \sin\gamma_2 + l_3 \sin\gamma_3 + \ldots$$

więc

$$\triangle y = -v\{l_1 \cos\gamma_1 + 2 l_2 \cos\gamma_2 + 3 l_3 \cos\gamma_3 + \ldots.\}$$

A stąd wielkość linjowa przesunięcia będzie

$$r^2 = \triangle x^2 + \triangle y^2 = v^2\{l_1 \sin\gamma_1 + 2 l^2 \sin\gamma_2 + 3 l_3 \sin\gamma_3 + \ldots.\}^2 +$$

$$+ v^2\{l_1 \cos\gamma_1 + 2 l_2 \cos\gamma_2 + 3 l_3 \cos\gamma_3 + \ldots.\}^2$$

Najbardziej wyraźnie występuje wpływ wyrównania kątów na wielkość odchyłki linjowej w jednokierunkowym poligonie, biegnącym od punktu trygonometrycznego A do punktu B.

Spółrzędne tych punktów są dane. Przypuśćmy, że w poligonie AB pomierzono prawe kąty i suma tych kątów okazała się większa, niżby to wypadało dla nawiązania poligonu bez odchyłki kątowej.

Skoro prawe kąty są za duże, więc obliczony koniec poligonu B_1 odchyli się w lewo od punktu B, jeżeli do rachunku wprowadziliśmy niewyrównane kąty.

Rozrzucenie zaś odchyłki kątowej przesunie B_1 w kierunku BB_1 w ogromnej ilości wypadków, zmniejszając znacznie wielkość odchyłki linjowej. W tym więc wypadku, gdy wyrównywamy oddzielnie kąty, oddzielnie zaś przyrosty, może być mowa o przeważającym wpływie błędów pomiaru długości na wielkość odchyłki linjowej; lecz i w tym wypadku nie jest wykluczone, że wpływ błędów pomiaru kątów będzie większy od wpływu błędów pomiaru długości.

§ 427. Przyrządy do ścisłego pomiaru poligonów.

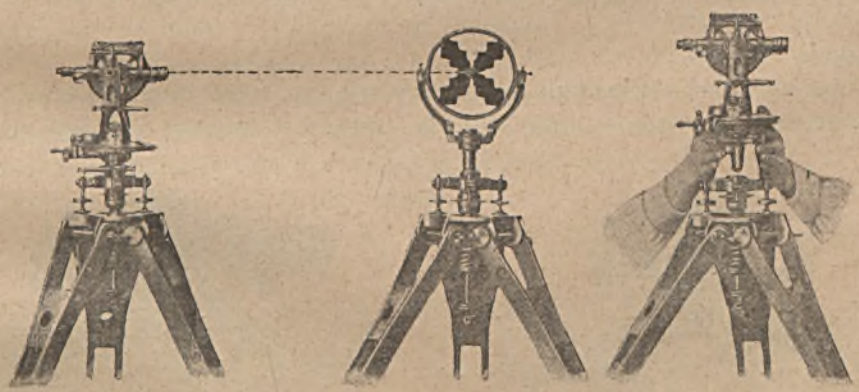
Przy ściślejszych pomiarach poligonowych, jak np. miejskie, górnicze i t. p., należy dążyć do uzyskania możliwie ścisłych wyników.

Do pomiarów długości używamy taśm precyzyjnych lub łat, układanych często przy pomocy sznura. Do pomiaru kątów używa się teodolitów Wilda, Gerlacha lub mikroskopowych. Ponieważ jednak drobne błędy w centrowaniu teodolitu lub sygnałów odbijają się dotkliwie przy użyciu ścisłych teodolitów, więc na odpowiednie centrowanie celu i przyrządu zwraca się wielką uwagę. Stąd wynika potrzeba stosowania tak zwanych pionowników, t. j. przyrządów, służących do wprowadzania sygnałów i teodolitu na piony odpowiednich punktów.

Wzmiankować należy o pionownikach dla sygnałów ze zwykłym pionem, które wymagają trzech statywów o podstawkach jednakowych wymiarów do nóżek teodolitu i sygnałów, dzięki czemu po dokonaniu obserwacji na środkowym statywie teodolit przenosimy na przedni statyw, tylny zaś statyw posuwa się naprzód na kolejny przedni punkt dla obserwacji kąta.

Z takich pionowników zasługuje na wzmiankę pionownik Breithaupta (rys. 853), używany też w górnictwie, sprzęgany z każdym statywem.

Teodolit i sygnał dla celu mogą być wyjmowane i przenoszone. Wskutek tego nawet drobne błędy centrowania pionowników są niezmienne



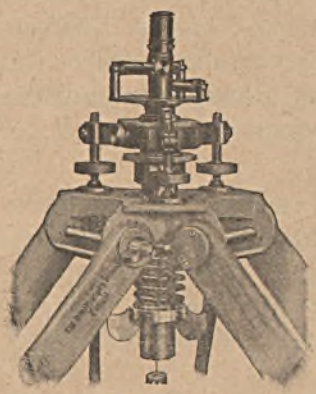
Rys. 853.

dla sygnału i teodolitu. Wyniki są więc dokładniejsze, jakkolwiek odpowiadają nietyle punktom poligonowym, ile osiom pionowników.

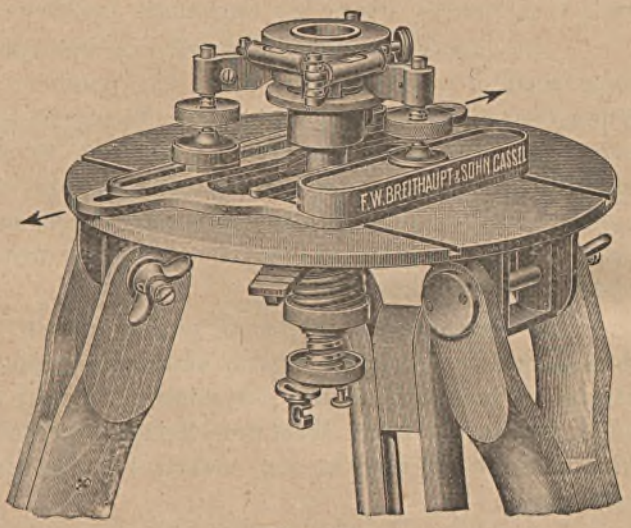
Do właściwego pionowania nad punktem służą prócz pionów t. zw. pionowniki optyczne, w których oś celowa pionowej lunetki sprowadza się do pionowego położenia zapomocą libeli, sprowadzanych do poziomu śrubami nastawowemi pionownika. Lunetka o 8-krotnem powiększeniu osadza się ściśle w tulei pionownika (rys. 854).

Stosowany jest również pionownik Meissnera, w którego głowicy osadzona jest ruchoma kula, połączona trwale z metalowym pionem, sięga-

jącym przy rozstawionym statywie ziemi. Dolne ostrze pionu utrzymuje robotnik nad punktem poligonowym. Spód pionu może się przesunąć wewnątrz zewnętrznej rurki pionu. Nóżki statywu rozstawiamy do czasu, gdy



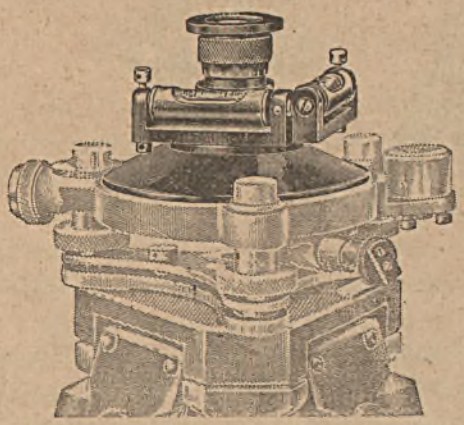
Rys. 854.



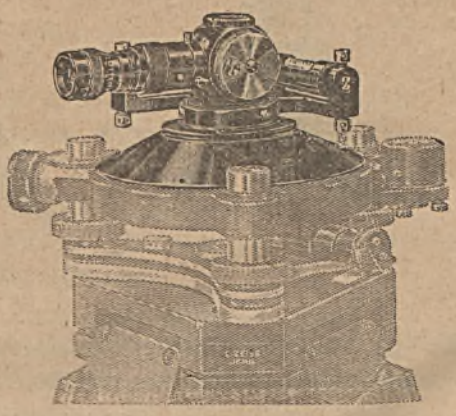
Rys. 855.

przy pionie, utrzymywanym nad właściwym punktem, bańka libeli pudełkowej pionownika wskaże poziom. Można również ustawić przyrząd bez pomocy robotnika, utrzymując ostrze pionu na punkcie zapomocą znajdującego się u dołu metalowego pionu sztyftu, naciskanego stopą. Statyw Breithaupta, umożliwiający większe przesunięcie teodolitu na głowicy, przedstawia rys. 855.

Konieczność stosowania ulepszonych narzędzi do centrowania teodolitu i sygnałów wywołana jest nietyle potrzebą bardzo ścisłego pomiaru



Rys. 856.

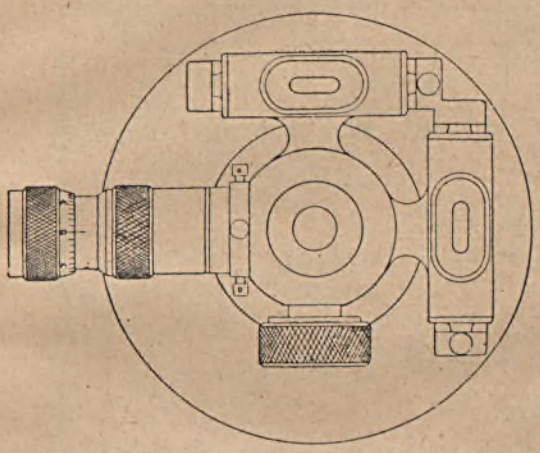


Rys. 857.

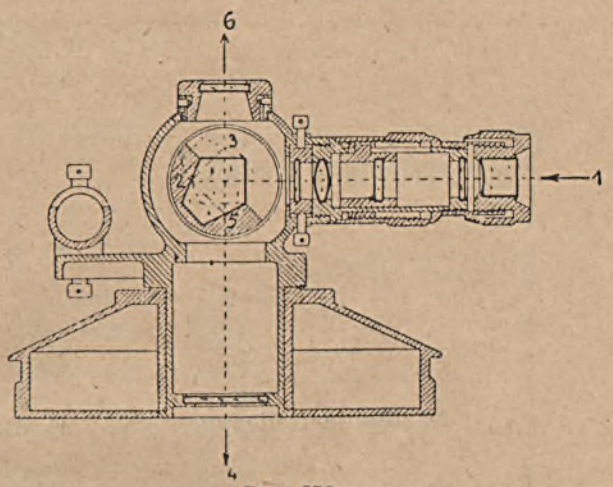
poszczególnych kątów, ile dążeniem do zmniejszenia błędów określanych azymutów. O ile bowiem błąd boku poligonowego nie przenosi się na inne boki, o tyle błąd pomiaru kąta zniekształca azymuty wszystkich dalej położonych boków poligonu, a więc tem samem skręca cały dalej położony

poligon o kąt, równy błędowi pomiaru. Oczywiście wpływa to na powiększenie odchyłki linjowej.

Pionownik Zeissa wskazany jest na rys. 856 — 857, plan i przekrój



Rys. 858.

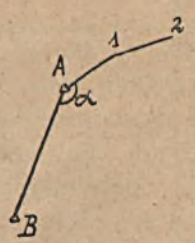


Rys. 859

pionownika — na rysunkach 858 i 859. Wewnętrzny pentagon zmienia kierunek promienia, idącego od punktu poligonowego, o 90°. Obraz więc punktu jest widoczny przez poziomą lunetkę.

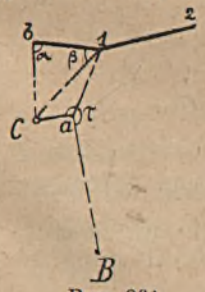
§ 428. Nawiązywanie poligonów do punktów trygonometrycznych.

A. Gdy poligon $A\,1\,2\ldots$ (rys. 860) wychodzi z trygonometrycznego punktu A, wówczas dla zorjentowania go i wyrównania winien być pomierzony łącznikowy kąt α między bokiem poligonu $A\,1$ a bokiem $A\,B$ sieci trygonometrycznej $A\,B$, gdyż azymut, względnie kąt kierunkowy tego boku, jest znany.



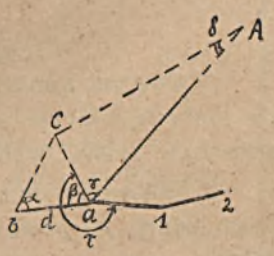
Rys. 860.

B. Nie nasuwa też trudności nawiązanie do sztucznego sygnału, jak np. krzyż na wieży, gdy (rys. 861) centrum C sygnału daje się spionować na poziom stanowiska teodolitu a na balkonie lub w oknie wieży. Wówczas bowiem kąt $B\,C\,1$ (łącznikowy) określi się z pomiaru kąta $B\,a\,1$, oraz kąta dyrekcyjnego $\tau = C\,a\,B$ i mimośrodu $C\,a = m$ (patrz dział o pośrednich pomiarach kątowych § 364 — 365). Długość $1 — c$ określamy trygonometrycznie z bazy $b\,1$ i pomiaru kątów α i β.



Rys. 861.

C. Gdy sygnał jest niedostępny (wieża kościelna bez odpowiednich dla teodolitu okien lub balkonów), wówczas (rys. 862) wpobliżu niedostępnego punktu trygonometrycznego C obieramy w terenie odcinek $a\,b$, dogodny do pomiaru długości, a przytem taki, aby z oby-



Rys. 862.

dwu jego końców można było zaobserwować kąty α i β, oraz aby z jednego z jego końców można było obserwować sąsiedni punkt trygonometryczny A, a więc kąt γ. Gdy kilkakrotnie ściśle określimy $d = ab$ oraz α, β i γ, wówczas:

$$aC = \frac{d \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}$$

ponieważ zaś spółrzędne punktów A i C są dane, więc azymut i długość AC określimy ze wzorów

$$tg\ (CA) = \frac{y_a - y_c}{x_a - x_c}$$

$$AC = \frac{y_a - y_c}{\sin (AC)} = \frac{x_a - x_c}{\cos (AC)}$$

Następnie obliczymy kąt δ ze wzoru:

$$\sin \delta = \frac{Ca}{CA} \sin \gamma,$$

więc azymutem prostej Ca będzie

$$(Ca) = (CA) + 180^0 - \gamma - \delta$$

Spółrzędnemi punktu a będą:

$$x_a = x_c + Ca \cos (Ca)$$

$$y_a = y_c + Ca \sin (Ca).$$

Kątem zaś łącznikowym dla poligonu będzie kąt $\tau = Ca\,1$.

D. W wypadku, gdy zewnętrzny punkt trygonometryczny A (x_a, y_a) zaginął, wówczas, celując do trzech pobliskich punktów trygonometrycznych z domniemanego punktu A (określonego, np., z planu), rozwiążemy zagadnienie Pothenota i obliczymy spółrzędne stanowiska S teodolitu x_s, y_s. Ze spółrzędnych x_a, y_a i x_s, y_s obliczymy długość i azymut prostej, łączącej punkty S i A. Odnalezienie punktu A nie nasunie trudności. (Patrz przykład do tego §-u str. 1085).

§ 429. Zagadnienie Mareka.

Gdy na punkcie P dokonano pomiaru kierunków na kilka przedmiotów stałych, których spółrzędne mogą nawet nie być znane, wówczas punkt P może być ściśle wznowiony, skoro znane jest jego przybliżone położenie.

Obieramy dwa punkty A i B, wzajemnie odległe o 30 m, wpobliżu P. Przypuśćmy, że punkt M jest jednym z dawniej zaobserwowanych punktów stałych.

PRZYKŁAD.

Przeniesienie spółrzędnych

na *P. P.* (punkt poligonowy) 439 z punktu triangulacyjnego *A*

A:	*B*:	*M*: *P. P.* 439	*N*: *P. P.* 391
$b = 118.315$	$\alpha = 64^0\ 45'\ 11''$	$\beta = 29^0\ 28'\ 57''$	$\delta = 131^0\ 5'\ 57''$



Rys. 863.

y_a	−2082,942	lg $(y_a - y_b)$	3.132 9202
y_b	−3441,006	lg sin (BA)	9.999 4636
x_a	− 675,614	lg D	3.133 4566
x_b	− 608,076		
		lg $(x_a - x_b)$	1.829 5482$_n$
		lg cos (BA)	8.696 0776
$(y_a - y_b)$	+1358,064		
$(x_a - x_b)$	− 67,538		
		lg D	3.133 4706
lg $(y_a - y_b)$	3.132 9202		
lg $(x_a - x_b)$	1.829 5482$_n$		
lg tg (BA)	1.303 3720$_n$		
	$87^0\ 9'\ 11''$		

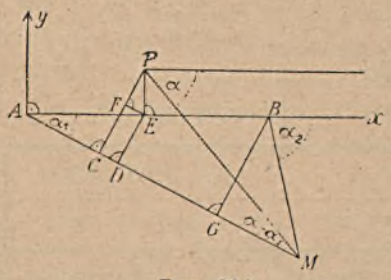
α	$64^0\ 45'\ 11''$	(BA)	$92^0\ 50'\ 49''$	lg n	1.766 3319		
β	29 28 57	ε	1 51 16	lg sin δ	9.877 1253		
				clg D	6.866 5434		
$\alpha + \beta$	94 14 8	(BM)	90 59 33				
		(MB)	270 59 33	lg ε	8.510 0006		
		δ	131 5 57				
lg m	2.030 6256			ε	$1^0\ 51'\ 16''$		
		(MA)	139 53 36				
lg sin α	9.956 3980	α	64 45 11				
lg b	2.073 0398						
col log sin $(\alpha + \beta)$	0.001 1878	(NM)	75 8 25				
lg sin β	9.692 1043	(MN)	255 8 25				
		β	29 28 57				
lg n	1.766 3319						
		(NA)	225 39 28				
		$(NA) - (MA) = 180 - (\alpha + \beta)$	85 45 52				

№ № punkt	Azymuty	lg sin α / lg S / lg cos α	lg Δy / lg Δx	±	Δy / Δx	±	Y	±	X
A						−	2082,942	−	675,614
	319° 53' 36"	9.809 0292$_n$	1.575 3611$_n$	−	37,615				
		1.766 3319	1.649 9061	+	44,659				
M (*N*)		9.883 5742				−	2120,557	−	630,955
		9.985 2273	2.058 2671	+	114,358				
	75 8 25	2.073 0398	1.482 0482	+	30,342				
N (*M*)		9.409 0084				−	2006,199	−	600,613
		9.854 4141$_n$	1.885 0397$_n$	−	76,743				
	225 39 28	2.030 6256	1.875 0670$_n$	−	75,001				
A		9.844 4414$_n$				−	2082,942	−	675,614
				$\Sigma \Delta y$					
				$\Sigma \Delta x$					

Średnie spółrzędne *P. P.* 439 $Y = -2121{,}557$ $X = -630{,}955$

Średni azymut z *P. P.* 439 na *B* : $270^0\ 59'\ 32''$

Uwagi:



Rys. 864.

Oznaczmy:

$$AB = d, \qquad PM = d_1;$$

kąty α_1 i α_2, liczone w prawo od kierunku AB, przyjętego za oś x; oznaczmy literą α kąt, liczony od równoległej do AB do kierunku na punkt M w punkcie P.

Kreśląc:

$$PC \perp AM,\ ED \parallel PC,\ EF \perp CP$$

mamy:

$$PC = d_1 \sin(\alpha - \alpha_1).$$

Jeżeli przyjąć za początek układu punkt A i literami x i y oznaczyć spółrzędne P, wówczas

$$PC = ED + FP = x \sin \alpha_1 + y \cos \alpha_1.$$

Skąd

$$d_1 \sin(\alpha - \alpha_1) = x \sin \alpha_1 + y \cos \alpha_1 \qquad (1).$$

Przypuśćmy, że na punktach A i B mierzymy kierunki do pozostałych niegdyś zaobserwowanych punktów stałych, np. K, L ... Oznaczmy odległości od P do tych stałych punktów literami d_2, d_3 ... azymuty lokalne prostych, łączących P, A i B z temi punktami, literami β, β_1, β_2 oraz γ, γ_1 i γ_2 ... Analogicznie do (1)-ego napiszemy:

$$d_2 \sin(\beta - \beta_1) = x \sin \beta_1 + y \cos \beta_1 \qquad (2)$$

$$d_3 \sin(\gamma - \gamma_1) = x \sin \gamma_1 + y \cos \gamma_1. \qquad (3)$$

Ponieważ możemy przyjąć dla odległego od P punktu M, że

$$PM = BM = d_1$$

więc

$$BG = BM \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = d \sin \alpha_1$$

skąd napiszemy znów trzy równania dla:

$$BG = d_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = d \sin \alpha_1 \qquad (4)$$

$$d_2 \sin(\beta_2 - \beta_1) = d \sin \beta_1 \qquad (5)$$

$$d_3 \sin(\gamma_2 - \gamma_1) = d \sin \gamma_1 \qquad (6)$$

Dzielimy (1) równanie przez (4)-e, (2)-e przez (5)-e, (3)-e przez (6)-e; ponieważ różnice $\alpha_2 - \alpha_1$, $\beta_2 - \beta_1$ ... są nieznaczne, więc sinusy zastąpimy samemi łukami, wyrażonemi w radjanach:

$$\alpha - \alpha_1 = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{d}(x + y\ ctg\ \alpha_1) \qquad (7)$$

$$\beta - \beta_1 = \frac{\beta_2 - \beta_1}{d}(x + y\ ctg\ \beta_1) \qquad (8)$$

$$\gamma - \gamma_1 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{d}(x + y\ ctg\ \gamma_1) \qquad (9)$$

Ponieważ różnice kierunków α, β i γ są znane jako wielkości niegdyś pomierzone, przeto, odejmując od (8)-ego (7)-e równanie, i od (9)-ego (7)-e, otrzymamy:

$$\{(\beta - \alpha) - (\beta_1 - \alpha_1)\}\ d = \{\beta_2 - \alpha_2) - (\beta_1 - \alpha_1)\}\ x +$$

$$+ \{(\beta_2 - \beta_1)\, ctg\, \beta_1 - (\alpha_2 - \alpha_1)\, ctg\, \alpha_1\}\ y$$

$$\{(\gamma - \alpha) - (\gamma_1 - \alpha_1)\}\ d = \{\gamma_2 - \alpha_2) - (\gamma_1 - \alpha_1)\}\ x +$$

$$+ \{(\gamma_2 - \gamma_1)\, ctg\, \gamma_1 - (\alpha_2 - \alpha_1)\, ctg\, \alpha_1\}\ y$$

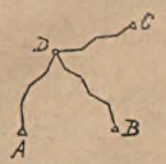
Z tych dwu równań obliczymy obydwie niewiadome x i y. Na ich podstawie odnajdziemy w terenie punkt P.

§ 430. Metody wyrównywania sieci poligonowych.

Jak wiemy, każdy poligon można wyrównać metodą ścisłą lub przybliżoną. To samo można powiedzieć o wyrównywaniu sieci poligonowych, które dzielimy na dwie grupy: 1) siatki, nawiązane do triangulacji, i 2) samodzielne sieci poligonowe.

Przez sieć poligonów, nawiązaną do punktów trygonometrycznych, rozumiemy taki układ poligonów, nawiązanych do punktów o danych spółrzędnych i boków o danych kątach kierunkowych, gdzie mamy punkty węzłowe, t. j. punkty, z których wychodzą co najmniej trzy poligony.

Tak więc, punkt D jest punktem węzłowym poligonów AD, BD i CD; gdybyśmy nie mieli poligonu CD, wówczas punkt D nie byłby punktem węzłowym poligonów AD i BD, lecz punktem załamania poligonu ADB.



Rys. 865.

Z sieci poligonowej eliminujemy poligony, łączące punkty trygonometryczne, a nie przecinające się z innemi poligonami w punktach węzłowych.

Przez poligon w sieci poligonowej rozumieć należy tylko poligony, zawarte: 1) między punktami węzłowemi, lub 2) między punktem trygonometrycznym i węzłowym.

Ponieważ wyrównanie poligonu między dwoma punktami o określonych spółrzędnych i o bokach, przez te punkty przechodzących, a mających określone kąty kierunkowe, nie przedstawia trudności, przeto wyrównanie sieci poligonów sprowadza się do określenia 1) azymutów jednego z boków, przechodzących przez każdy punkt węzłowy, i 2) spółrzędnych punktów węzłowych.

Każdy punkt węzłowy może być określony jednym poligonem, biegnącym ku niemu od danego punktu; tak przy w punktach węzłowych i p poligonach sieci, punkty węzłowe zostaną jednoznacznie określone na podstawie w poligonów, biegnących już to od punktów trygonometrycznych, już to od węzłowych, wcześniej określonych, pozostałe $p - w$ poligonów dają nowe rozwiązania punktów węzłowych, a więc stwarzają $p - w$ wa-

runków. Każdy zaś warunek, tworzony przez te poligony, składa się z warunku azymutu, oraz z dwu warunków na sumy przyrostów, ogólna zatem ilość warunków wyniesie

$$3\,(p - w),$$

w których mamy $p - w$ warunków kątów i $2\,(p - w)$ warunków na sumy przyrostów.

Wzór ten zachowuje swą moc i dla sieci poligonów samodzielnych, t. j. nieopartych na sieci trygonometrycznej, o ile jeden z punktów węzłowych przyjmiemy za dany, a więc ilość wszystkich punktów węzłowych zmniejszymy o jedność. Gdy zaś liczyć będziemy wszystkie punkty węzłowe, wówczas ilość warunków wyniesie

$$3\,(p - w + 1)$$

Zasadniczo uważamy za ilość warunków $p - w$, nie wchodząc w dalsze rozczłonkowanie na poszczególne warunki.

Ponieważ od spostrzeżeń warunkowych możemy przejść do pośrednich, przeto obieramy tę lub inną metodę wyrównania, biorąc pod uwagę nakład pracy, uzależniony od liczby równań normalnych. Przy spostrzeżeniach pośrednich liczba niewiadomych odpowiada liczbie punktów węzłowych, a więc ilość równań normalnych n równa jest ilości punktów węzłowych; przy spostrzeżeniach zaś warunków liczba n równań normalnych odpowiada liczbie $p - w$ warunków. Ilość pracy przy obydwu metodach będzie jednakowa, gdy:

$$n = w = p - w$$

skąd

$$p = 2w$$

gdy $p > 2w$, wówczas opłaca się zastosować wyrównanie metodą spostrzeżeń pośrednich; gdy $p < 2w$, należy stosować metodę spostrzeżeń warunkowych.

Przy wyrównaniu metodą spostrzeżeń warunkowych oddzielnie rozwiązujemy warunki kątów, oddzielnie przyrostów.

Rozpatrzmy przybliżone wyrównanie sieci poligonów, nawiązanych do punktów trygonometrycznych.

§ 431. Przybliżone wyrównanie poligonów, przecinających się w kilku punktach węzłowych.

Rysunek przedstawia sieć poligonów, łączących dane punkty triangulacyjne A, B, C, D, E, i przecinających się w punktach węzłowych H, G, I.

Wyrównania dokonamy grupami — oddzielnie wyrównamy kąty, oddzielnie przyrosty spółrzędnych.

1. Wyrównanie kątów:

Obliczamy azymut prostej $G'G$ z ciągów I, II, IV — III i otrzymujemy trzy wielkości γ_1 γ_2 γ_3 o wagach p_1, p_2, p_3, równych odwrotności

liczby kątów, na zasadzie których każdy poszczególny azymut został obliczony, a więc:

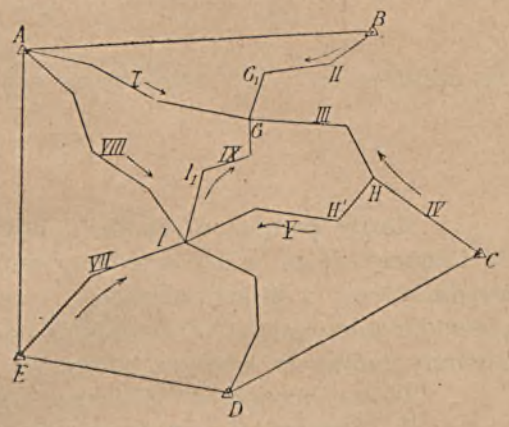
$$p_1 = \frac{1}{n_1}; \quad p_2 = \frac{1}{n_2}; \quad p_3 = \frac{1}{n_{III\,IV}};$$

stąd zaś otrzymamy najprawdopodobniejszy azymut:

$$(G\,G_1) = \frac{[p\,\gamma]}{[p]_1}$$

którego wagą jest

$$[p]_1$$



Rys. 866 *).

Następnie obliczamy azymut $I\,I_1$ z poligonów VIII, VII, VI, IV — V i IX; otrzymamy wyniki

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \quad \beta_4, \quad \beta_5$$

o wagach

$$p_1 = \frac{1}{n_{VIII}}; \quad p_2 = \frac{1}{n_{VII}}; \quad p_3 = \frac{1}{n_{VI}} \quad \text{i t. d.}$$

p_5 zaś obliczymy w zależności:

$$\frac{1}{p_5} = \frac{1}{[p]_1} + \frac{1}{p_{IX}}$$

gdzie p_{IX} oznacza $\frac{1}{n_{IX}}$

skąd najprawdopodobniejszy azymut prostej $I\,I$ będzie równy

$$(II_1) = \frac{[p\,\beta]}{[p]_2}$$

i wagą tego azymutu będzie $[p]_2$.

Wreszcie obliczamy podobnie azymut prostej HH' z ciągów V, III i IV-ego, przyczem p_V wyznaczy się z zależności

$$\frac{1}{p_V} = \frac{1}{[p]_2} + \frac{1}{p_5}$$

w którym to wzorze p_V oznacza wagę (HH'), obliczonego z azymutu II' o wadze $[p]_2$ i poligonu V-ego o sumie kątów z wagą p_5 równą odwrotności liczby kątów tego poligonu, liczonych je między prostemi HH' i II'.

Podobnie

$$\frac{1}{p_{III}} = \frac{1}{[p]_1} + \frac{1}{p_3}$$

gdzie:

$$p_3 = \frac{1}{n_{III}}$$

*) Przy poligonie $D\,I$ dopisać VI i strzałkę, skierowaną ku I.

i

$$p_{IV} = \frac{1}{n_4}$$

(na rysunku $n_4 = 2$) i wyrównany azymut

$$HH' = \frac{[p\delta]}{[p]}$$

Każdy poligon wychodzi z boku o danym lub wyrównanym azymucie i kończy się na boku o wyrównywanym azymucie; obliczając więc azymut, wyrównywany z kilku poligonów, i zestawiając otrzymywane wyniki z najprawdopodobniejszym, otrzymujemy odchyłki, które rozrzucamy na wszystkie azymuty boków w każdym poligonie.

W ten sposób wykańczamy 1-ą część wyrównania.

2. Zestawiamy równania warunkowe dla sum przyrostów spółrzędnych we wszystkich poligonach obliczonych z wyrównanych azymutów i pomierzonych boków; oznaczając

a) zapomocą $[\triangle x]_1$, $[\triangle x]_2 \ldots$ sumy $\triangle x$, zapomocą zaś $[\triangle y]_1$, $[\triangle y]_2 \ldots$ sumy $\triangle y$ w poligonach 1, 2 ...,

b) zapomocą $x_1\ x_2 \ldots$ oraz $y_1\ y_2 \ldots$ szukane poprawki tych sum przyrostów, oraz

c) zapomocą $x_A\ x_B \ldots\ y_A\ y_B \ldots$ spółrzędne punktów triangulacyjnych, napiszmy równanie warunkowe dla poligonów I-ego i II-ego, biorąc pod uwagę kierunek obliczenia przyrostów w każdym poligonie, wskazany strzałką na rysunku.

Powinno być:

$$[\triangle x]_1 + x_1 - [\triangle x]_2 - x_2 = (x_B - x_A):$$

więc, oznaczając wolny wyraz literą l_1^x.

I-e równanie warunkowe:

$$x_1 - x_2 + l_1^x = 0$$

poligonów	analogicznie dla:
IV, III, II:	$-x_2 + x_3 + x_4 + l_2^x = 0$
VI i V-ego	$-x_4 - x_5 + x_6 + l_3^x = 0$
VI i VII	$x_6 - x_7 + l_4^x = 0$
VII i VIII	$-x_7 + x_8 + l_5^x = 0$
I, IX i VIII	$-x_1 \qquad x_8 + x_9 + l_6^x = 0$

Za wagi poprawek $x_1, x_2 \ldots$ przyjmujemy tysiąckrotnie zwiększone odwrotności długości odnośnych poligonów, zaokrąglone do 0,1, zatem:

Ponieważ równań warunkowych mamy 6, szukanych zaś poprawek tylko 9, czyli że liczba równań warunkowych przekracza połowę liczby poprawek, wyrównanie uskutecznimy metodą spostrzeżeń pośrednich.

W tym celu oznaczmy:

$$x_2 = z$$

$$x_4 = u$$

$$x_6 = t$$

Stąd otrzymujemy układ równań błędów:

$$\begin{aligned}
x_1 &= z & & & - l_1^x \\
x_2 &= z & & & \\
x_3 &= z - u & & & - l_2^x \\
x_4 &= & u & & \\
x_5 &= & - u + t & & + l_3^x \\
x_6 &= & & t & \\
x_7 &= & & t & + l_4^x \\
x_8 &= & & t & + l_4^x - l_5^x \\
x_9 &= z & & - t & - l_1^x - l_6^x - l_4^x + l_5^x
\end{aligned}$$

gdyż

$$x_8 = x_7 - l^x{}_5$$

Dla skrócenia wypiszmy ten układ, jak następuje:

$$\begin{aligned}
x_1 &= z & & & + l_1 \\
x_2 &= z & & & \\
x_3 &= z - u & & & + l_3 \\
x_4 &= & u & & \\
x_5 &= & - u & + t & + l_5 \\
x_6 &= & & t & \\
x_7 &= & & t & + l_7 \\
x_8 &= & & t & + l_8 \\
x_9 &= z & & - t & + l_9
\end{aligned}$$

Stąd otrzymamy trzy równania normalne dla określenia wielkości z, u i t:

$$[paa]\, z + [pab]\, u + [pac]\, t + [pal] = 0;$$

$$[pab]\, z + [pbb]\, u + [pbc]\, t + [pbl] = 0;$$

$$[pac]\, z + [pbc]\, u + [pcc]\, t + [pcl] = 0.$$

W tych równaniach wielkości a, b, c i l oznaczają spółczynniki przy z, u, t i wyrazy wolne w równaniach błędów, wagi p są wagami poprawek $x_1\ x_2\ \ldots\ x_9$.

Rozwiązanie równań normalnych pozwoli od odnalezionych wielkości z, u, t przejść do obliczenia $x_1\ x_2\ \ldots\ x_9$, z układu równań błędów.

Analogicznie stworzymy równania warunkowe dla sum przyrostów Δy i odnajdziemy poprawki sum $[\Delta y]$ w każdym poligonie.

3. Wyrównanie punktów każdego poligonu wykonać można po obliczeniu spółrzędnych wszystkich punktów węzłowych na zasadzie wyrównanych sum przyrostów w każdym poligonie.

Tak więc:

$$x_G = x_A + [\Delta x]_1 + x_1 = x_B + [\Delta x]_2 + x_2 \quad \text{i t. d.}$$

$$y_G = y_A + [\Delta y]_1 + y_1 = y_B + [\Delta y]_2 + y_2 \quad \text{i t. d.}$$

Mając zaś spółrzędne punktów węzłowych i triangulacyjnych, wyrównamy poszczególne poligony albo w przybliżeniu, rozrzucając obliczone poprawki sum przyrostów każdego poligonu na boki tegoż proporcjonalnie do ich długości, albo też zastosujemy jedną z metod wyrównania poligonu między punktami stałemi.

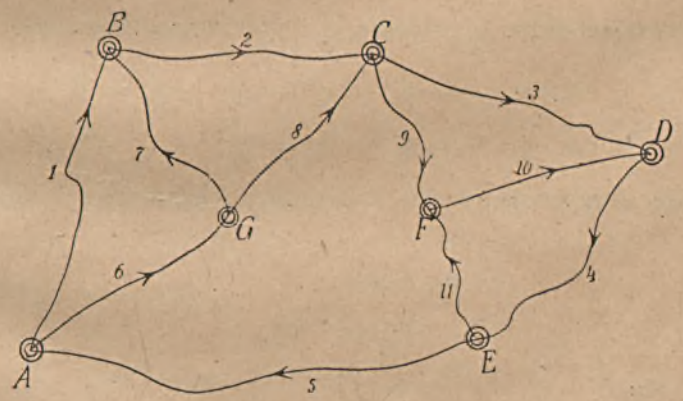
ROZDZIAŁ XVI.

WYRÓWNANIE ZWIĄZKU NIWELACYJNEGO.

§ 432. Wyrównanie sieci niwelacyjnej metodą spostrzeżeń warunkowych.

Przypuśćmy, że pewien teren okryty jest siatką ciągów niwelacyjnych, mających wspólne punkty (zwykle repery) o określanych wysokościach: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* i *G*. Punkty skrzyżowania się ciągów w liczbie *m* połączone są *n* ciągami. Rysunek 867 podaje wypadek $m = 7$ i $n = 11$.

Ustalmy ilość ciągów koniecznych i nadliczbowych. I-szy ciąg daje połączenie dwu punktów węzłowych; dla określenia każdego z następujących



Rys. 867.

punktów węzłowych wystarcza jeden ciąg, takich ciągów będzie tedy $m-2$ więcej I-szy ciąg, a zatem $m - 1$. Przy tej ilości ciągów nigdzie nie zamkniemy niwelacji, gdyż do raz określonego punktu już nie wracamy.

Natomiast każdy dalszy ciąg, poczynając od $m - 1$-go, zamknie w jakimś punkcie węzłowym obwód figury, co tworzy dla niej warunek, polegający na tem, że suma różnic wysokości zamkniętego obwodu niwelacyjnego, liczonych w jednym kierunku w stosunku do środka obwodu,

winna dać zero. Takich nadliczbowych (ponad $m - 1$) ciągów, z których każdy stwarza nowy warunek, będzie

$$n - (m - 1) = n - m + 1$$

Jest to wzór na ilość równań warunkowych w siatce niwelacyjnej o reperach węzłowych, podlegających obliczeniu.

Ułożenie warunków wypływa z zestawienia równań na poprawione różnice wysokości $(h + v)$ w każdym ciągu zamkniętym z równaniami na sumy otrzymanych z niwelacji różnic wysokości.

Oznaczając zapomocą odpowiednich h różnice wysokości w poszczególnych ciągach, dla zamkniętej figury $A\,B\,G$ otrzymujemy:

$$h_1 - h_7 - h_6 - l_1 = 0 \qquad (1)$$

Znaki różnic wysokości h_7 i h_6 są odwrotne w stosunku do znaku h_1 ze względu na inny w stosunku do środka figury kierunek obliczenia niwelacji; wielkość

$$l_1 = + h_1 - h_7 - h_6$$

jest sumą różnic wysokości, obliczoną w ciągu $A\,B\,G\,A$.

Oczywiście, gdybyśmy określili najprawdopodobniejsze poprawki v_1, v_7, v_6 dla różnic wysokości, obliczonych we wszystkich ciągach, wówczas w zamkniętych figurach sumy poprawionych różnic wysokości dawałyby zera, jak np.

$$h_1 + v_1 - (h_7 + v_7) - (h_6 + v_6) = 0$$

Zestawiając układ z ostatniego i pierwszego równania, otrzymujemy:

$$\begin{array}{llll} h_1 + v_1 - h_7 - v_7 - h_6 - v_6 = 0 & & & (1) \\ h_1 \qquad - h_7 \qquad - h_6 \qquad = l_1 & & & \end{array}$$

więc z (1)-ego otrzymujemy 1-e równanie warunkowe i analogicznie następne:

$$\begin{array}{lllllllll} v_1 & & - v_6 - v_7 & & & & + l_1 = 0 \\ & v_2 & & + v_7 - v_8 & & & + l_2 = 0 \\ & & v_3 & & - v_9 - v_{10} & & + l_3 = 0 \\ & & & v_4 & & + v_{10} + v_{11} & + l_4 = 0 \\ & & v_5 + v_6 & & + v_8 + v_9 & - v_{11} & + l_5 = 0 \end{array}$$

Ilość równań wynosi:

$$n - m + 1 = 11 - 7 + 1 = 5$$

Wprowadzenie nowego równania, będącego wynikiem już istniejących, uniemożliwiłoby rozwiązanie.

Przechodząc do układu równań normalnych korelat, zwrócić należy uwagę na wagi poprawek, za które przyjmiemy odwrotności długości ciągów, względnie liczby do nich proporcjonalne, np.:

$$p_1 = \frac{1000}{L_1} \qquad p_2 = \frac{1000}{L_2} \ldots.$$

lub też odwrotności ilości ustawień niwelatora w każdym ciągu.

Z układu równań normalnych korelat

$$\left[\frac{a\,a}{p}\right] k_1 + \left[\frac{a\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{a\,c}{p}\right] k_3 + \left[\frac{a\,d}{p}\right] k_4 + \left[\frac{a\,e}{p}\right] k_5 + l_1 = 0$$

$$\left[\frac{b\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{b\,c}{p}\right] k_3 + \left[\frac{b\,d}{p}\right] k_4 + \left[\frac{b\,e}{p}\right] k_5 + l_2 = 0$$

$$\left[\frac{c\,c}{p}\right] k_3 + \left[\frac{c\,d}{p}\right] k_4 + \left[\frac{c\,e}{p}\right] k_5 + l_3 = 0$$

$$\left[\frac{d\,d}{p}\right] k_4 + \left[\frac{d\,e}{p}\right] k_5 + l_4 = 0$$

$$\left[\frac{e\,e}{p}\right] k_5 + l_5 = 0$$

obliczymy korelaty $k_1\ k_2 \ldots k_5$, a następnie poprawki na mocy zależnośc

$$v_1 = \frac{a_1}{p_1} k_1 + \frac{b_1}{p_1} k_2 + \frac{c_1}{p_1} k_3 + \frac{d_1}{p_1} k_4 + \frac{e_1}{p_1} k_5$$

$$v_2 = \frac{a_2}{p_2} k_1 + \frac{b_2}{p_2} k_2 + \frac{c_2}{p_2} k_3 + \frac{d_2}{p_2} k_4 + \frac{e_2}{p_2} k_5$$

— — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — —

co dla danego wypadku odpowie:

$$v_1 = \frac{1}{p_1} k_1 \qquad v_6 = -\frac{1}{p_6} k_1 + \frac{1}{p_6} k_5$$

$$v_2 = \frac{1}{p_2} k_2 \qquad v_7 = -\frac{1}{p_7} k_1 + \frac{1}{p_7} k_2$$

$$v_3 = \frac{1}{p_3} k_3 \qquad v_8 = -\frac{1}{p_8} k_2 + \frac{1}{p_8} k_5$$

$$v_4 = \frac{1}{p_4} k_4 \qquad v_9 = -\frac{1}{p_9} k_3 + \frac{1}{p_9} k_5$$

$$v_{10} = -\frac{1}{p_{10}} k_3 + \frac{1}{p_{10}} k_4$$

$$v_5 = \frac{1}{p_5} k_5 \qquad v_{11} = -\frac{1}{p_{11}} k_4 + \frac{1}{p_{11}} k_5$$

Przykład.

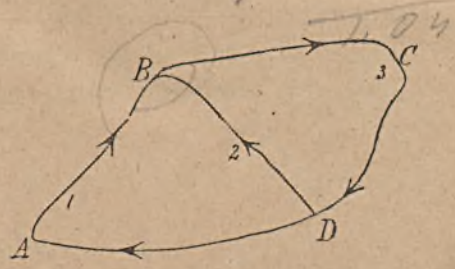
$h_1 = h_{DAB} = +3{,}745 \quad L_1 = L_{DAB} = 3{,}5\ km.$

$h_2 = h_{DB} = +3{,}738 \quad L_2 = L_{DB} = 1{,}9\ km.$

$h_3 = h_{BCD} = -3{,}740 \quad L_3 = L_{BCD} = 4{,}0\ km.$

Za odwrotności wag przyjmiemy zaokrąglone długości ciągów

3,5 , 2,0 i 4,0



Rys. 838.

a za wyrazy wolne:

$l_1 = h_1 - h_2 = +7\ mm$

$l_2 = h_2 + h_3 = -2\ mm.$

Tworzymy równania warunkowe:

$$v_1 - v_2 + 7 = 0$$

$$v_2 + v_3 - 2 = 0$$

i równania normalne korelat

$$5{,}5\,k_1 - 2\,k_2 + 7 = 0$$

$$-2\,k_1 + 6\,k_2 - 2 = 0$$

stąd wynika, że:

$$k_1 = -1{,}3$$

$$k_2 = -0{,}1$$

więc

$$v_1 = -4{,}6$$

$$v_2 = +2{,}4$$

$$v_3 = -0{,}4$$

Sprawdzamy rachunek przez zastosowanie równania:

$$[p\,v\,v] = -[k\,l]$$

co daje

$$+8{,}9 = +8{,}9$$

§ 433. Wyrównanie sieci metodą spostrzeżeń pośrednich.

W wyrazie na liczbę równań warunkowych sieci niwelacyjnej

$$w = n - (m - 1) = n - m + 1$$

liczba $m - 1$ oznacza ilość niezależnych ciągów, które, połączone wzajemnie w odpowiedni sposób, nie zamykają żadnej figury.

Gdybyśmy różnice wysokości we wszystkich n ciągach wyrazili zapomocą powyższych $m - 1$ różnic wysokości, jako niewiadomych, wówczas utworzylibyśmy n równań błędów z $m - 1$ niewiadomemi; przechodząc stąd do $m - 1$ równan normalnych z $m - 1$ niewiadomemi, określimy te niewiadome, a z równań błędów i pozostałe różnice wysokości.

Przy metodzie spostrzeżeń warunkowych mieć będziemy $n - m + 1$ równań normalnych, przy metodzie spostrzeżeń pośrednich $m - 1$ takich równań.

Stosować należy tę metodę wyrównania, przy której oszczędzamy pracy; mianowicie:
przy $n - m + 1 > m - 1$, t. j. przy $n > 2m - 2$, t. j. $n > 2(m - 1)$, stosujemy wyrównanie metodą spostrzeżeń pośrednich, zaś przy $n - m + 1 \leqslant m - 1$, t. j. przy $n \leqslant 2(m - 1)$ stosować będziemy metodę równań warunkowych.

Dla poprzedniego przykładu mamy:

$$n = 3 \qquad m = 2$$

$$n - m + 1 = 2$$

$$m - 1 = 1$$

$$n - m + 1 > m - 1$$

Zastosujmy więc wyrównanie metodą spostrzeżeń pośrednich.
W układzie równań

$$v_1 - v_2 + 7 = 0$$

$$v_2 + v_3 - 2 = 0$$

obierzmy za niewiadomą $v_2 = x$, wówczas otrzymamy trzy równania błędów z jedną niewiadomą:

$$v_1 = x - 7$$

$$v_2 = x$$

$$v_3 = -x + 2$$

gdyż

$$v_3 = -v_2 + 2$$

Tworzymy równanie normalne

$$[paa]\, x + [pal] = 0$$

liczbowo:

$$1{,}04\,x - 2{,}5 = 0$$

$$x = v_2 = + 2{,}4$$

$$v_1 = x - 7 = - 4{,}6$$

$$v_3 = - x - 2 = - 0{,}4$$

a zatem nieco szybciej uzyskaliśmy ten sam wynik.

ROZDZIAŁ XVII.

MIERNICTWO GÓRNICZE.

*(Markszejderja) *).*

§ 434. Warunki pracy.

Miernictwo górnicze jest działem geodezji, mającym stosowanie w górnictwie. Jakkolwiek metody pracy, przyrządy i opracowanie wyników pomiaru są w zasadzie jednakowe tak w górniczem, jak w zwykłem miernictwie, to jednak warunki pracy w podziemiach wyciskają swe piętno na całokształcie pracy o tyle dobitnie, iż osoba, dobrze znająca zwykłe miernictwo, nie może odrazu objąć całokształtu zagadnień, z któremi mierniczy markszajder ma do czynienia.

Warunki pracy w kopalni tak dalece się różnią od pracy na powierzchni, że niegdyś twierdzono, iż „dobry markszajder" powinien się urodzić w kopalni. W zupełnie bowiem odmiennem środowisku trwa praca markszajdra: brak światła dziennego, wolnej przestrzeni, ustawiczne przeszkody, możność poruszania się tylko wzdłuż głównych i drugorzędnych chodników i wyrobisk górniczych, co powoduje konieczność naginania pomiaru poligonowego i niwelacyjnego do bardzo krótkich celowych, pomiary pochyłych wyrobisk, trudności w orjentowaniu pomiaru — wszystko to razem wzięte, daje tysiące nowych szczegółów, których poznanie wymaga dłuższej pracy.

Rys. 869 daje obraz pracy w kopalni. Ograniczona wolność ruchów, sztuczne oświetlenie, swoisty typ punktów, znajdujących się często na stropach, podpory sklepień — krótkie celowe — oto ogólny obraz pracy w kopalni. Jeżeli dodamy, że przebitki są projektowane na podstawie pomiarów i planów górniczych, i że każdy błąd w zaprojektowanej linji powoduje znaczne straty pieniężne, łatwo wysnujemy wniosek, że pod wzglę-

---

*) Die markszeiderei oznacza „ustalenie granic". Płaszczyzna pionowa, oddzielająca dwa nadania górnicze nazywa się po niemiecku „Markscheide".

dem dokładności pomiary górnicze powinny stać bardzo wysoko, co jest tem trudniejsze, że np. trzymetrowe boki poligonów nie są w kopalni wyjątkowem zjawiskiem. Niezbyt dawno markszajderja należała do upośle-



Rys. 869.

dzonych dziedzin geodezji; w powszechnem użyciu były prawie wyłącznie kompasy. Obecnie stosunki się o tyle poprawiły na lepsze, że nawet pomiary drugorzędnych chodników są wykonywane zapomocą teodolitów,

wprawdzie często wiszących, a więc mniejdokładnych w wynikach od zwykłych, ale dających lepsze wyniki od busoli i nie podlegających działaniu mas, wywierających wpływy magnetyczne. Przejdźmy do rozpatrzenia znaków mierniczych, narzędzi i metod pracy w miernictwie górniczem.

§ 435. Znaki miernicze.

Znaki miernicze w górnictwie należą często do typu znaków, stosowanych w w zwykłem miernictwie, jak np.: znaki na granicach nadań górniczych, punkty przy szybach, są zwykle blokami betonowemi z osadzoną rurką gazową lub t. p. Inaczej wyglądają znaki w kopalni. Ze względu na ruch w chodnikach, przesuwanie torów podziemnych kolejek, spływanie wody i t. p. — często punkty górnicze są utrwalone w sklepieniach (rys. 871) jako klamry lub trzpienie żelazne, wbijane w belki poprzeczne, zakończone u dołu uszkiem dla zawieszania pionu. W bezpośredniej bliskości takiego punktu przybija się płytka drewniana, na której wypisuje się miesiąc, rok i numer punktu, jak np. $^{5}/_{25}$ 48 oznacza maj 1925 roku, numer 48. Za punkty mniej ważne obierane są główki ćwieków. Dla łatwiejszego odnalezienia punktu maluje się mlekiem wapiennem dokoła nich koło, które świeci w ciemności. W razie słabej spoistości sklepienia, względnie braku belek, punkty górnicze wbijają się w chodnik, lub niekiedy w ścianki.

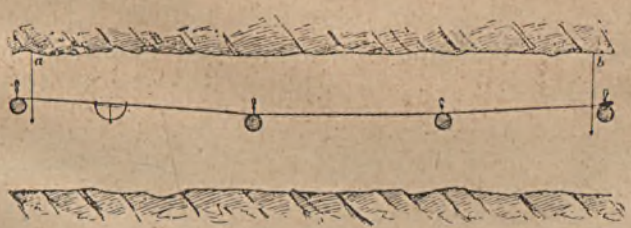


Rys. 871.

§ 436. Przyrządy do pomiaru długości i przebieg pomiaru.

Tyczenie prostych, o ile jest potrzebne, dokonywane jest zapomocą pionów i lamp.

Przy pomiarze długości, przy użyciu t. zw. przyrządów wiszących,

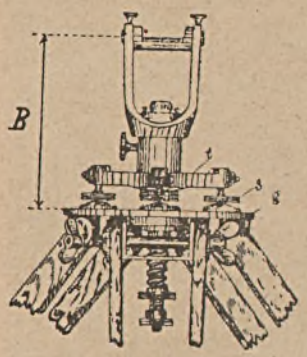


Rys. 871.

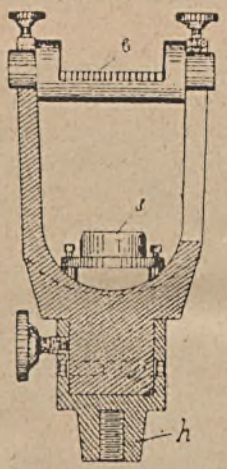
używany był sznur skręcony z konopi, nasycony olejem, o średnicy 3 *mm*. Sznur nawijany jest co 10 — 15 *m*. na śruby, czy trzpienie. Sznur zostaje naciągnięty na odcinku kilku takich punktów (rys. 871). Do samego pomiaru używano dwu łat dwumetrowych, a w bardzo wąskich korytarzach nawet metrowych, z podziałem, biegnącym w obydwu kierunkach. Obecnie stosują się taśmy i tasiemki stalowe. Zwrócić uwagę należy na przyrząd inż. Łukaszewicza, markszajdra.

Przyrząd ten składa się:

1) Z pionowo ustawianej łaty, na trójnożnej podstawce, zaopatrzonej w libelę pudełkową. Od zera łaty w obydwu kierunkach naniesiono milimetrowy podział do 10 *mm*. Zero łaty znajduje się na tej samej wysokości nad statywem, co oś obrotu lunety przyrządu, ustawionego na tym samym statywie. Za pomocą pionu statywu możemy łatę centrować pod punktem poligonowym.

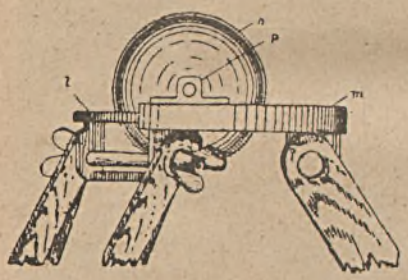


Rys. 872.



Rys. 872a.

2) Z poziomej łaty układanej między widełkami (rys. 872), osadzanemi w trójnożnej podstawce statywu (rys. 872a); łata pozioma może się obracać dokoła osi poziomej i pionowej. Od środka tej łaty milimetrowy podział biegnie ku obydwu końcom łaty. Łata znajduje się nad statywem na tej samej wysokości, na jakiej znajduje się punkt zerowy pionowej łaty.



Rys. 873.

3) statywów z walcami dla zawieszania taśmy. Przednia nóżka statywu jest dłuższą od dwu pozostałych. Walec może się nieco przesuwać w kierunku boku poligonu zapomocą pierścienia *m* (rys. 873).

4) Precyzyjnej stalowej taśmy, podzielonej na całej długości na decymetry.

5) Cęgów dla zawieszania ciężarków, obciążających taśmę.

A. Pomiar długości w poziomych korytarzach przyrządem Łukasiewicza.

Pod punktem poligonowym ustawiamy statywy z poziomemi łatami, których punkty zerowe dokładnie centrujemy pod punktami poligonowemi.



Rys. 874.

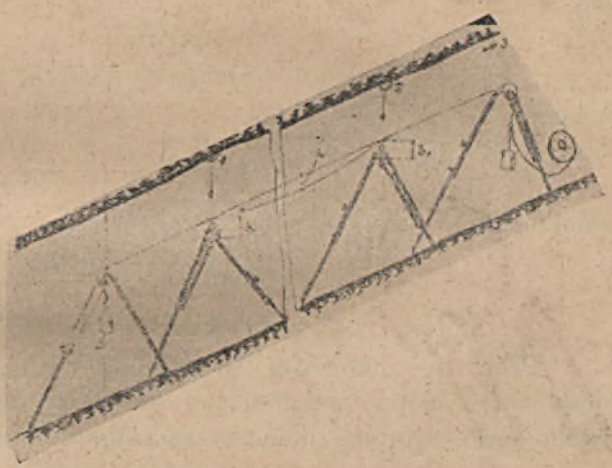
Nazewnątrz tej pary statywów ustawiamy statywy z walcami dla zawieszania taśmy ściśle w linji boku poligonu w ten sposób, aby górna styczna walca znajdowała się o 1,5 — 2 *mm*. wyżej od łaty poziomej. Za-

wieszamy na walcach taśmę, obciążając ją ciężarkami 12,4 kg. Zapomocą milimetrowej podziałki łat poziomych notujemy kilkakrotnie stan ich zer z taśmy, bacząc, by różnice odczytów różniły się mniej niż o 0,6 *mm*. Po dokonaniu odczytów niwelujemy końce i środek taśmy dla obliczenia jej poziomego rzutu. Następnie przedni statyw z łatą poziomą pozostaje na miejscu, drugi zaś przenosimy wprzód i t. d.

Dla stosowania tego przyrządu boki poligonu, dłuższe od 24 *m* należy przetyczyć i zaopatrzyć w pośrednie punkty.

B. *Pomiar w pochyłych korytarzach* (rys. 875).

Pomiar ten jest dokonany równocześnie z pomiarem kątów, a to w celu określenia trygonometrycznego różnic wysokości obydwu poziomych łat. Przy pomiarze kątów pochylenia używamy łaty pionowej, której zerowy punkt znajduje się nad trójnożną podstawką na tej samej wysokości, co zero łaty poziomej i oś obrotu teodolitu. Po dokonaniu pomiaru poziomowego i pionowego kąta, teodolit i pionową łatę zastąpimy poziomemi łatami dla dokonania pomiaru długości; następnie przechodzimy na następny odcinek.



Rys. 875.

Na rys. (875) zwisanie środka obciążonej taśmy zaznaczono w bardzo silnym stopniu dla uwydatnienia wielkości strzałki *h*.

Poprawka na zwisanie wynosi: $-\frac{8h^2}{3l}$ mianowicie: oznaczmy długość łuku zwisającej taśmy literą *l*, strzałkę literą *h*, odległość między końcowemi punktami taśmy literą l_0. Wielkość $l = l_0$ odpowiada więc wypadkowi, gdy $h = 0$. Dalej zastąpimy l_0 przez *l*.

Przypuśćmy (rys. 496 str. 530) że łuk *PSK* odwróconego rysunku jest zwisającą taśmą, oznaczając promień koła literą *r*, kąt środkowy w radjanach $\frac{l}{r}$, otrzymamy:

$$PK = l_0 = 2\ PC = 2\ r \sin \frac{l}{2r}$$

poprawka na zwisanie równa się:

$$\Delta\ l = l - l_0 = l - 2\ r \sin \frac{l}{2r}$$

rozwijając $\sin \frac{l}{2r}$ w szereg:

$$\sin \frac{l}{2r} = \frac{l}{2r} - \frac{1}{6}\left(\frac{l}{2r}\right)^3 \ldots$$

i odrzucając dalsze wyrazy rozwinięcia otrzymamy:

$$\Delta l = l - 2r\left(\frac{l}{2r} - \frac{1}{6}\frac{l^3}{8r^3}\right) = -\frac{l^3}{24r^2}$$

lecz (rys. 496 str. 530): PC jest średnią proporcjonalną między średnicą, a odcinkiem h, a więc:

$$PC^2 = h \cdot 2r$$

oraz

$$PC = \frac{l}{2}$$

więc

$$r = \frac{PC^2}{2h} = \frac{l^2}{8h}$$

a więc:

$$\Delta l = -\frac{l^3}{24} \cdot \frac{8^2 h^2}{l^4}$$

i ostatecznie

$$\Delta l = -\frac{8h^2}{3l}$$

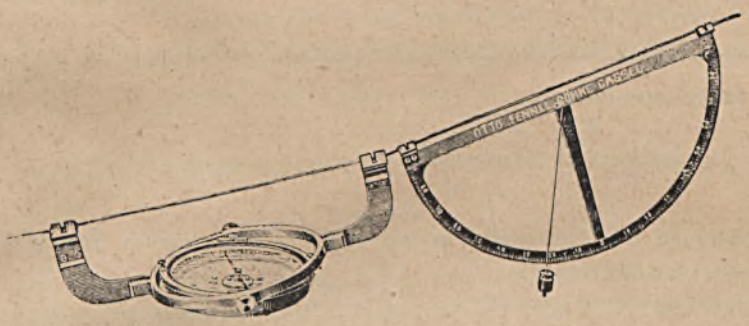
Prócz tej poprawki uwzględniać należy poprawki na pochylenie, temperaturę, błędy podziału i t. p. Przy dwukrotnym pomiarze boków wydajność przyrządu Łukasiewicza sięga 1 *km.* dziennie.

§ 437. Przyrządy do określania azymutu i kąta pochylenia linki.

Przy pomiarach trzeciorzędnych korytarzy (a dawniej wogóle przy pomiarach górniczych) stosowane są kompas fryburski i półkole wiszące (rys. 876) Obydwa te przyrządy posiadają rączki, zakończone łapkami, któremi przyrząd jest zawieszany na lince. Podział na półkolu biegnie od jego środka, zaznaczonego zerem, w obydwu kierunkach do 90°. Odczyt z nitki pionu, zawieszanego centrycznie, daje kąt pochylenia linki, gdyż średnica 90° — 90°, wobec równej wysokości łapek, jest równoległa do odcinka linki między punktami zawieszenia. Zmiana punktów zawieszenia, t. j. odwrócenie półkola o 180°, dokonanie drugiego odczytu z nitki pionu i utworzenie średniej arytmetycznej obydwu odczytów usuwa dopływ błędu nierównoległości średnicy 90° — 90° do linki. Półkole powinno zwisać ściśle pionowo.

Ponieważ zawieszone półkole obciąża linkę, która tworzy wówczas krzywą łańcuchową o maximum strzałki przy dolnym końcu linki, przeto należy wprowadzać pewną poprawkę do odczytu z półkola. Przy poziomej

lince średnica 90° — 90° jest równoległa do linki; natomiast przy pochylonej lince wpływ obciążenia należy uwzględniać. Poprawkę można określać empirycznie metodą Borchersa. Mianowicie: dwie łaty są ustawione wzajemnie prostopadle, jedna poziomo, druga pionowo. Każda łata posiada otwory, znajdujące się w znanej odległości od wierzchołka kąta prostego, utworzonego przez łaty. Oznaczmy literami h_1, $h_2 \ldots h_n$ odległości kolejnych



Rys. 876.

otworów pionowej łaty od wierzchołków kąta prostego, literami d_1 $d_2 \ldots d_n$ odległości otworów łaty poziomej od tego wierzchołka. Nawlekając linkę przez dowolne dwa otwory poziomej i pionowej łaty, obliczymy kąt pochylenia wyciągniętej linki ze wzoru

$$tg\ \alpha_k = \frac{h_k}{d_k}$$

Zawieszając na takiej lince półkole, odczytamy α'_k; różnica $\alpha_k - \alpha'_k$ jest poprawką.

Dla danej linki i półkola można ułożyć w ten sposób tablice, z których należy korzystać przy pomiarze. Tak, np., dla linki 10-metrowej, pochylonej o 85°, nieuwzględnienie takiej poprawki powoduje błąd w rzucie poziomym o 37 *mm.*, dla kąta pochylenia 45° — błąd 12 *mm.*

Kompas fryburski (rys. 876) jest busolą, obracającą się dokoła poziomej osi pierścienia metalowego, połączonego z metalową ramką, zawieszaną zapomocą łapek na lince. Ponieważ rama zajmuje pionowe położenie, środek zaś ciężkości busoli znajduje się pod osią obrotu, więc busola zajmuje położenie poziome. Kompas zawiesza się w taki sposób, aby jego punkt zerowy, oznaczony literą *N*, skierowany był w kierunku na koniec odcinka. Wówczas odczyt północnego końca igły magnetycznej daje azymut lub czwartak, w zależności od podziału koła busolowego. Ze stosowanych dawniej i obecnie podziałów wymienić należy następujące:

Koło podzielone jest na stopnie, każdy stopień na 4 lub 5 części. Stosowany jest również podział na godziny; każda godzina odpowiada $\frac{360^0}{24} = 15^0$ i dzieli się na ósme części, równe $\frac{15^0}{8}$, te zaś dzielą się na ćwiartki.

Kierunek podziału jest albo lewy od 0° do 360°, albo też prawy od 0° do 180° i dalej znów od 0° do 180° lub też czwartakowy.

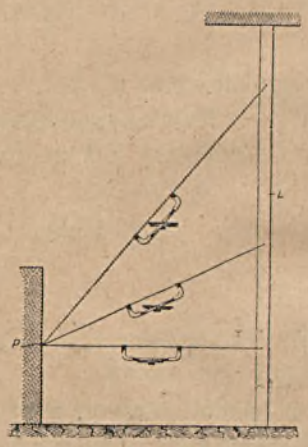
Najważniejszym warunkiem, wymaganym od tego kompasu, pomijając inne, rozpatrzone w dziale o busolach, jest usunięcie t. zw. błędu skrzyżowania, polegającego na nieprostopadłości poziomej osi obrotu busoli do pionowej płaszczyzny zawieszenia.

Wpływ tego błędu na odczytywanie azymutu jest odwrotnie proporcjonalny do cosinusa kąta pochylenia linki, tak, np., przy błędzie skrzyżowania, równym 1°, wpływ tego błędu wyniesie:

przy pochyleniu =	20°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
wielkość =	1°,1	1°,3	1°,6	2°,0	2°,9	5°,7	∞

Również bardzo ważnym warunkiem, stawianym kompasowi, jest poziomość osi obrotu busoli.

Błąd ten tylko przy 80° pochylenia linki wejdzie całkowicie do odczytu, przy mniejszych kątach pochylenia wpływ tego błędu odpowiednio się zmniejsza aż do zera przy poziomej lince. Ostatnim warunkiem jest, aby średnica zerowa podziału znajdowała się w jednej pionowej płaszczyźnie z linką.



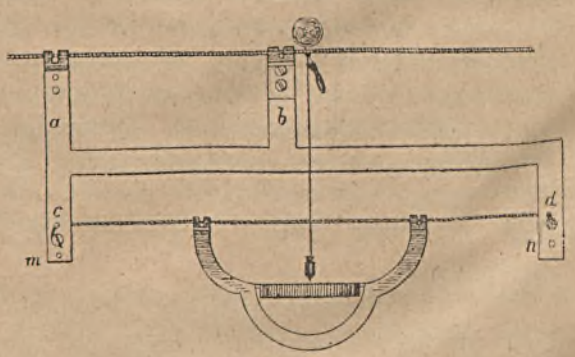
Rys. 877.

Stwierdzenia wielkości wpływu tych błędów można dokonać w następujący sposób (rys. 877):

Na pionowej łacie *L* wbijamy szereg haków na jednym pionie. Zawieszamy kolejno linkę między hakiem *P* i hakami łaty *L*, notując z kompasu odczyty. Wszystkie powinny być jednakowe. Jeżeli jest inaczej, należy kompas poprawić, lub też sporządzić tabelkę poprawek dla poszczególnych kątów pochylenia.

§ 438. Użycie kompasów przy działaniu mas, wywierających wpływy magnetyczne.

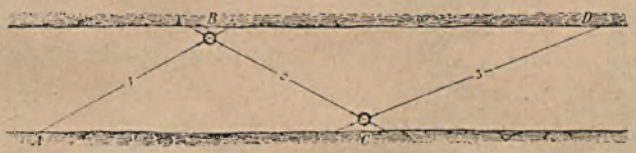
Kompas nie odpowiadał nigdy swym zadaniom w rejonie działania złóż, wywierających wpływy magnetyczne. To też w tych wypadkach mierzono w jednym i tym samym punkcie przy niezmienionej wysokości kompasu odrazu azymuty obydwu boków poligonu i w założeniu, że wpływy magnetyczne nie uległy zmianie, uważano, że obydwa azymuty zostały obarczone błędem o jednakowej wielkości, a więc różnica tych azymutów, t. j. kąt poligonu—został pomierzony prawidłowo.



Rys. 878

Zasługuje na uwagę przyrząd Lehmana (rys. 878), umożli-

wiający taki pomiar. Na lince, zawieszonej wzdłuż pierwszego odcinka, zawieszano przyrząd, jak to przedstawia rys. 878, i notowano odczyt, podsuwając wzdłuż pręta $c\,d$ środek busoli ściśle pod pion wierzchołka poligonu. Następnie od tego samego punktu zawieszano linkę do następnego punktu poligonu, obracano przyrząd o 180° i przesuwano znów środek busoli pod ten sam punkt.



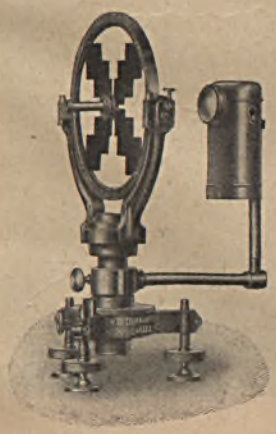
Rys. 879.

W braku przyrządów typu Lehmana stosuje się metoda krzyżujących się sznurów. Mianowicie na odcinkach $A\,B$ i $B\,C$ zawieszamy sznury, stykające się pod punktem B, poczem zawieszamy kompas na lince $A\,B$ dokładnie środkiem pod B, notujemy odczyt, przewieszamy kompas pod punktem B na linkę $B\,C$ i znów notujemy odczyt. Otrzymujemy kąt $A\,B\,C$. Mając w taki sposób obliczone kąty, liczymy azymuty magnetyczne, zaczynając od takiego wierzchołka (np. A), w którym stwierdzono, że wpływów magnetycznych niema.

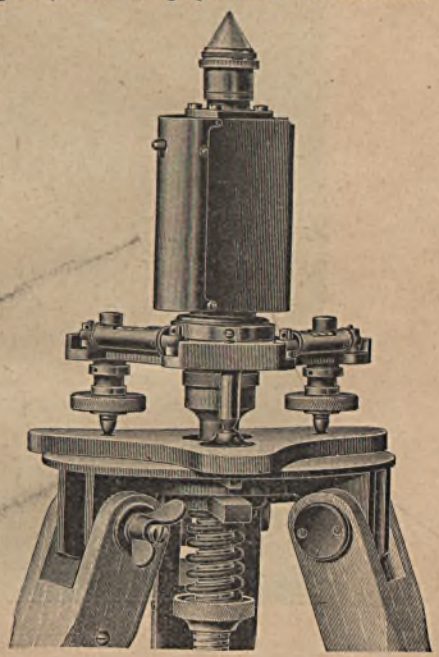
§ 439. Teodolity, stosowane w miernictwie górniczem.

Teodolity te dzielą się na zwykłe i wiszące.

Tak pierwsze, jak drugie, są dostosowane do warunków pracy w kopalniach. Oś obrotu lunety jest wydrążona i pryzmat, umieszczony wewnątrz lunety przesyła promienie światła, przechodzące od lampy przez oś obrotu lunety, do oka przez siatkę nitek. W ten sposób siatka nitek jest wyraźnie widoczna. Teodolity współczes-

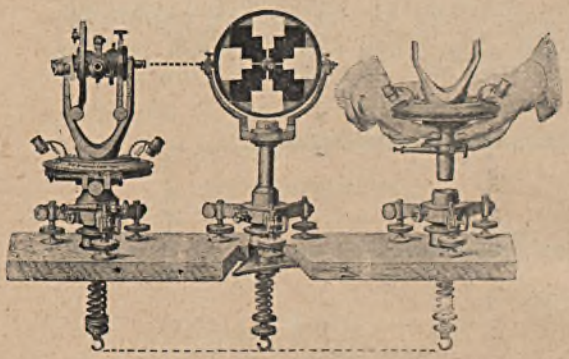


Rys. 880.



Rys. 881.

ne posiadają urządzenie, zapomocą którego włączamy światło elektryczne dla oświetlenia siatki nitek, koła poziomego i pionowego. Również oświetlane są i sygnały (rys. 880), które obracane są dokoła osi poziomej obrotu sygnału i osi pionowej, lub samoświecące sygnały (rys. 881), zakończone u góry stożkiem.



Rys. 882.

Komplet, teodolit i dwa sygnały, jest obecnie w ten sposób wykonywany, że te same trójnożne pod-



Rys. 883.

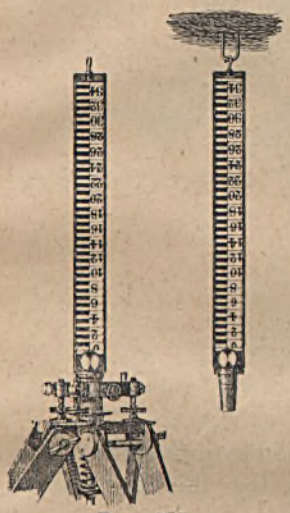


Rys. 884.

stawki mogą być tak dobrze spodarkami teodolitu, jak sygnału, dzięki czemu teodolit może być przeniesiony na spodarkę sygnału i odwrotnie.

Ten typ przedstawiony jest na rys. 882.

Zyskuje się na zmniejszeniu możliwości odmiennego centrowania sygnału i teodolitu w tym samym punkcie. Na rys. 882 mamy obraz przyrządów, ustawianych na prężaczach (rozpórkach), ściśniętych klinami między stemplami (słupami) przy ściankach korytarzy. Pomiar na prężaczach łączy dwa odleglejsze punkty poligonu; stanowiska na prężaczach zwykle nie są utrwalane przeniesieniem na sklepienie lub spód korytarza; są to tak zwane punkty zagubione.



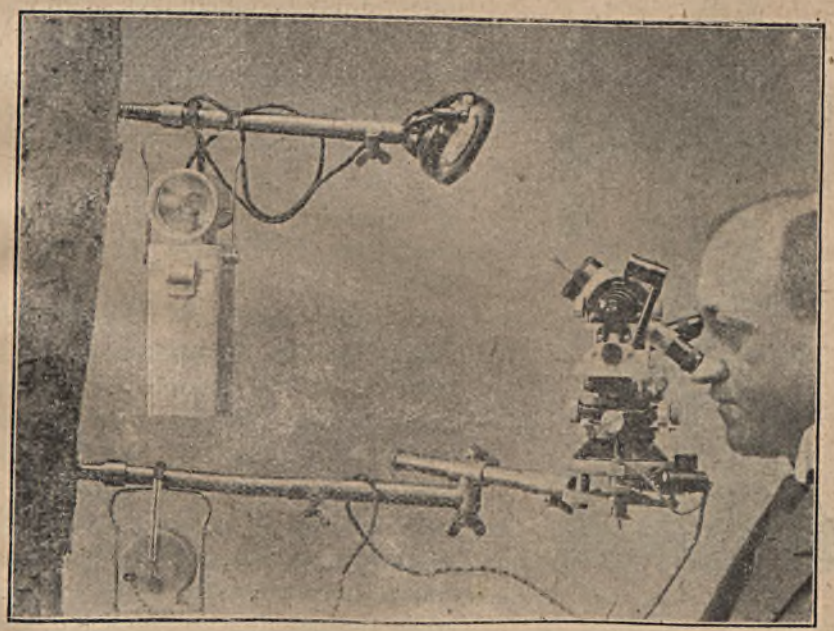
Rys. 885.

Ponieważ teodolity centrujemy często pod punktami, przeto w przecięciu się osi pionowej teodolitu z poziomo ustawioną lunetą oznaczone są punkty, któremi podsuwamy teodolit pod pion, zawieszony na sklepieniu, dla scentrowania.



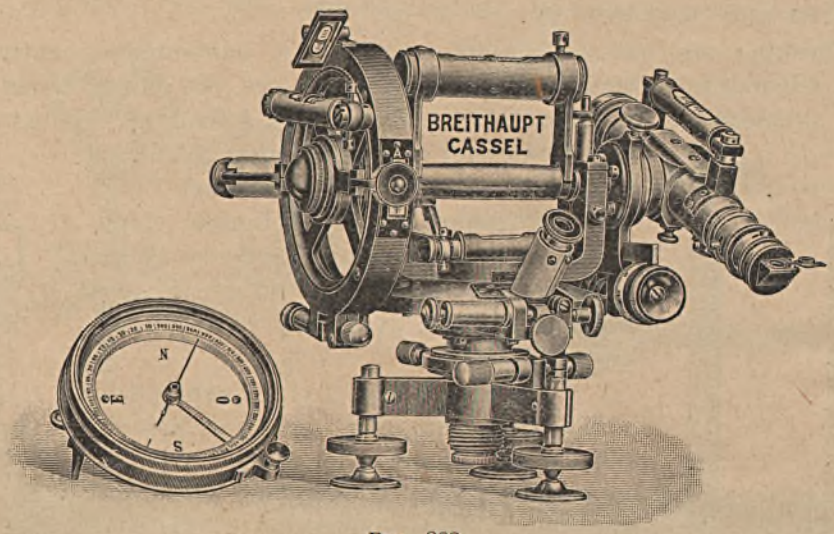
Rys. 886.

Dość często zachodzi potrzeba używania podstawek Borchersa (rys. 883), wkręcanych w stemple do czasu, gdy będą mogły służyć zamiast statywu do teodolitu. W takich wypadkach, wobec trudności scentrowania talerza (tarczy podstawki) pod czy nad punktem, uprzednio ustawia się tę podstawkę, a później tylko stabilizuje się punkt



Rys. 887

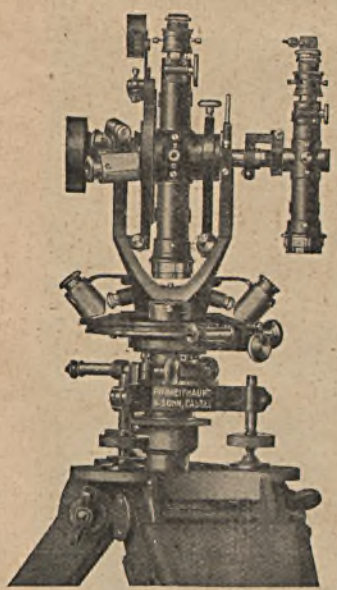
poligonowy. Obraz pomiaru kątów zapomocą kompletu Breithaupta w głównych korytarzach przedstawiony jest na rys. 884.



Rys. 888.

Przy celu do zawieszonych pionów, ustawia się za niemi naklejony na ramę przezroczysty papier, oświetlany ztyłu, lub też mleczne szkło (patrz rys. 869).

Przy pomiarze krótkich boków między zagubionemi punktami określamy długość boków tachymetrycznie, używając do tego celu szklanych łat Breithaupta. Łaty te tak dobrze mogą być ustawiane na statywach, jak zawieszane na punktach w sklepieniach (rys. 885).



Rys. 889.

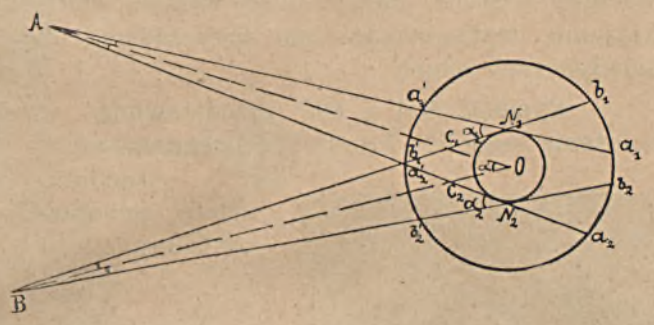
Do pomiaru wysokości osi obrotu lunety służy tasiemka (rys. 886) z podziałem, uwzględniającym odstęp od osi obrotu lunety do punktu zawieszenia tasiemki, t. j. do haczyka śruby, sprzęgającej statyw ze spodarką teodolitu.

Użycie teodolitu przy pomiarach w kopalni przy bliskiej odległości sygnału od kątomierza przedstawia rys. 887.

Prócz teodolitów z centrycznie osadzoną lunetą stosowane są w miernictwie górniczem teodolity z ekscentrycznemi lunetami, jak np. teodolit, przedstawiony na rys. 888, lub rys. 889. Szerokie zastosowanie tych przyrządów wywołane jest potrzebą pomiaru kierunków o znacznym kącie pochylenia, często tak znacznym, że luneta zajmuje prawie pionowe położenie, co zachodzi przy pomiarach pochylni. Rozpatrzmy podstawy użycia takich teodolitów.

§ 440. Ekscentryczność lunety.

Każda luneta jest w mniejszym lub większym stopniu osadzona ekscentrycznie. Znaczy to, że oś pionowa teodolitu nie przecina osi celowej lunety, lecz przechodzi obok niej. W t. zw. centrycznie osadzonych lunetach ekscentryczność wynosi części milimetra i nosi nazwę błędu ekscentryczności lunety. W wielu typach teodolitów luneta dla umożliwienia pomiaru większych kątów pochylenia osadza się na końcu osi obrotu lunety. Pomiar w dwu położeniach lunety usuwa jednak wpływ takiego osadzenia na wyniki, gdyż średnia odczytów z obydwu położeń daje właściwy wynik.



Rys. 890.

Przypuśćmy, że O jest środkiem limbusu; płaszczyzna kolimacyjna przy celu do punktów A i B skierowana jest przy jednem położeniu lunety wzdłuż AN_1 i BN_1, w drugiem — wzdłuż AN_2 i BN_2. Przy pierwszem położeniu lunety uzyskujemy odczyty a_1 i a'_1 oraz b_1 i b'_1, przy drugiem a_2 i a'_2 oraz b_2 i b'_2. Kąt, pierzony w II-em położeniu lunety, jest równy.

$$\sphericalangle A N_2 B = \alpha_2 = \frac{a_2 + a'_2}{2} - \frac{b_2 + b'_2}{2}$$

w I-em zaś:

$$\sphericalangle A N_1 B = \alpha_1 = \frac{a_1 + a'_1}{2} - \frac{b_1 + b'_1}{2}$$

Oznaczając literą A i B połowy kątów przy wierzchołkach A i B, napiszemy:

$$\sphericalangle N_2 C_2 O = \alpha_2 + B = \alpha + A$$

$$\sphericalangle N_1 C_1 O = \alpha_1 + A = \alpha + B$$

dodając, otrzymamy:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + A + B = 2\alpha + A + B$$

skąd

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

co znaczy, że wielkość kąta, zawartego między dwoma kierunkami, w wypadku pomiaru teodolitem z ekscentryczną lunetą jest średnią arytmetyczną wyników, otrzymanych w obydwu położeniach lunety.

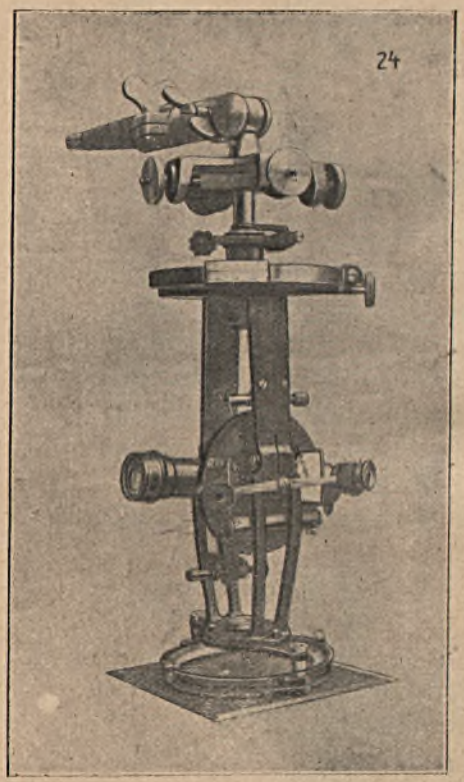
Jak stąd wynika, metoda pomiaru w obydwu położeniach lunety usuwa wpływ ekscentryczności lunety.

§ 441. Teodolity wiszące.

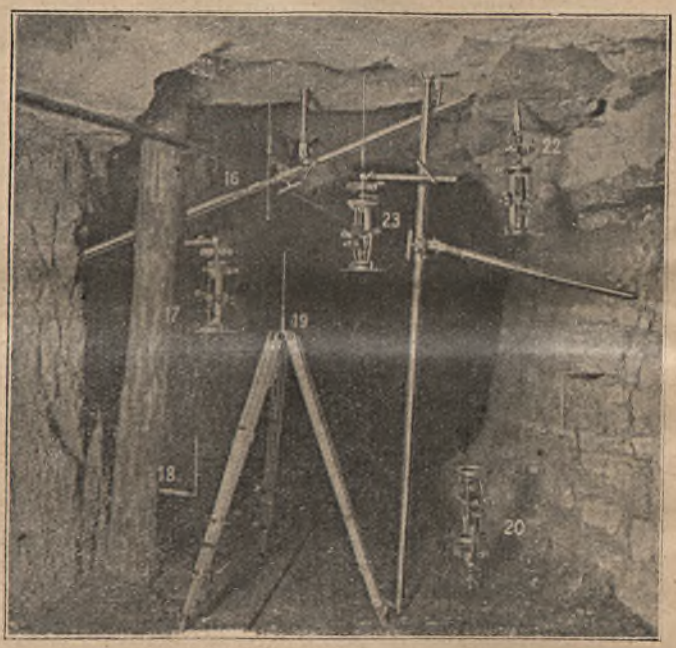
Wpływy magnetyczne złóż, szyny kolejek, kable elektryczne — oto są przyczyny, dzięki którym kompasy zostały wycofane z kopalni. Nawet przy pomiarach drugorzędnych korytarzy obecnie stosują się już t. zw. teodolity wiszące, dające dość wysoką dokładność, gdyż azymutowe nawiązania, wykonywane temi przyrządami, dają błędy, nie przekraczające pojedyńczych minut.

Rysunki 891 i 892 przedstawiają wszelkie możliwe w praktyce położenia teodolitu firmy Hildebrand.

Teodolit ten posiada bardzo ważną zaletę, mianowicie może być zawieszany lub osadzany.



Rys. 891.



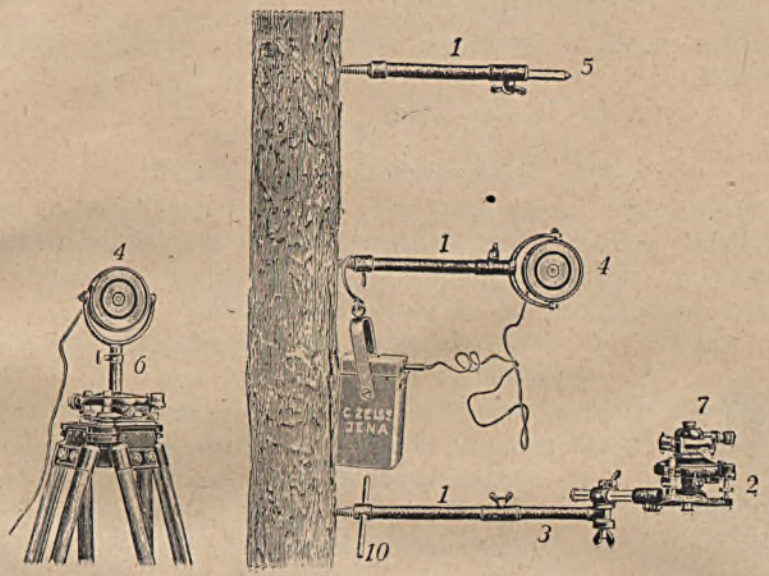
Rys. 892.

Busola teodolitu wiszącego używa się do określania azymutu magnetycznego i to tylko w wyjątkowych wypadkach, mianowicie wtedy, gdy nawiązujemy pomiar teodolitem wiszącym nie do boku, a do punktu.

Metoda pomiaru teodolitem wiszącym ma tę wyższość nad metodą punktów zagubionych, że punkty zawieszenia, czy ustawienia tego teodolitu, mogą być oznaczone, np., czerwoną farbą, a więc w przyszłości wykorzystane. Uzyskanie odpowiednio ścisłych wyników zależy przy użyciu teodolitu wiszącego od należytego ustawienia przyrządu, a więc, np., umocnienia bolca w ścianie.

Przy nawiązaniu do stałych punktów, stabilizowanych w stropach, czy na sklepieniu, teodolit ustawia się na statywie (patrz fig. 19 rys. 892).

Sposób centrowania teodolitu pod punktem przedstawia figura 23 rys. 892.



Rys. 893,



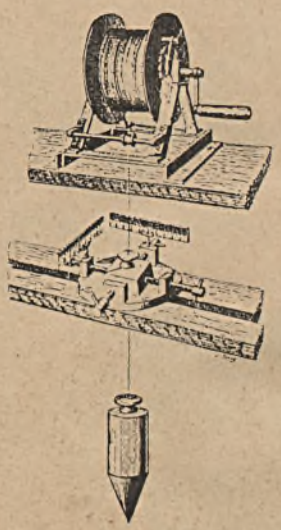
Rys. 894.

Teodolit firmy Zeissa dla pomiarów drugorzędnych poligonów, oraz sygnał w dwu położeniach: 1) wkręcony w stempel i 2) na statywie w połączeniu z baterją przedstawia rys. 893.

Przebieg pomiaru wiszącym teodolitem w kopalni przedstawiony jest na rys. 894.

§ 442. Orjentowanie pomiaru w kopalni.

Pomijając pomiary kompasem, odnoszone do południka magnetycznego, rozpatrzymy nawiązanie pomiaru podziemnego do punktów o danych spółrzędnych, znajdujących się na powierzchni ziemi.

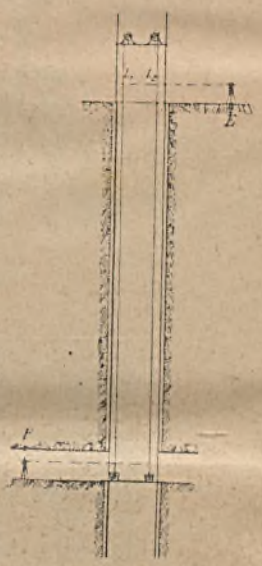


Rys. 895.

Rozpatrzmy nawiązania uskuteczniane za pośrednictwem szybów, a mianowicie dwa wypadki: a) kopalnia łączy się z nawierzchnią jednym szybem i b) dwoma szybami.

A. Nawiązanie za pośrednictwem jednego szybu.

W pobliżu szybu znajduje się zwykle punkt poligonowy o danych spółrzędnych. Rys. 895 przedstawia pion, opuszczany z nawierzchni do szybu.



Rys. 896.

Przez otwór szybu opuszczamy wdół dwa piony. Aby sprawdzić czy druty pionów zwisają swobodnie, dokoła każdego z nich u dołu przesuwamy lampę. Jeżeli patrząc zgóry lampy nic nie zasłania, wówczas pion zwisa prawidłowo.

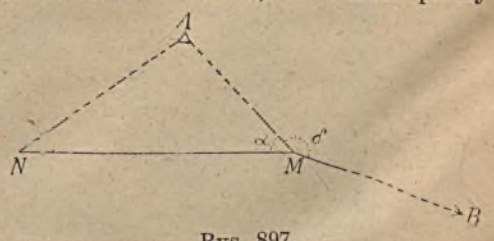
Jeżeli w taki sposób nie można sprawdzić prawidłowości zwisania, wówczas sprawdzamy czas wahania pionu ze wzoru:

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

w którym l oznacza odległość od punktu zawieszenia do spodu pionu, $g = 9{,}81\ m$.

Jeżeli obliczone t zgadza się z zaobserwowanem, wówczas piony zwisają we właściwy sposób.

Przypuśćmy, że M jest punktem poligonowym obok szybu; A i N są zawieszonemi pionami; w punkcie M mierzymy kąt α oraz kąt łącznikowy δ. Punkt B jest sąsiednim punktem poligonowym.



Rys. 897.

Mierzymy wszystkie trzy boki Δ-a AMN i na mocy wzorów trygonometrji płaskiej

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

lub

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

obliczymy wszystkie trzy kąty Δ-a AMN; pomierzony α daje kontrolę rachunku.

Azymut linji pionów wyniesie:

$$(AN) = (BM) - (\alpha + \delta + N)$$

Oczywiście, prosta łącząca obydwa piony, ma ten sam azymut i na spodzie szybu.

Powtarzamy całe postępowanie u spodu szybu, obierając punkt M wpobliżu pionów tak, aby obydwa piony i pobliski punkt poligonowy w kopalni były wyraźnie z punktu M widoczne.

Po obliczeniu z trzech boków Δ-a jego kątów i po sprawdzeniu rachunku zapomocą pomierzonego na dole kąta α, obliczymy z azymutu AN azymut boku MB w kopalni,
mianowicie

$$(MB) = (AN) + (\alpha + \delta + N)$$

Ponieważ na powierzchni ziemi z długości i azymutu MN obliczyliśmy spółrzędne punktu N, więc te samę spółrzędne otrzymuje punkt N na dnie szybu. W ten sposób przeniesienie spółrzędnych i azymutu z powierzchni do szybu jest dokonane.

B. Kopalnia łączy się z powierzchnią ziemi dwoma szybami.

W obydwu szybach opuszczamy po pionie.

Spółrzędne pionów określamy, jak poprzednio.

Jeżeli pierwszy pion nazwiemy literą A, drugi W, wówczas, łącząc te punkty podziemnym niezamkniętym poligonem, w którym pomierzono od A do W wszystkie n boków i $n-1$ kątów (w A i W kątów niema), otrzymamy te wszystkie dane, na podstawie których przeniesiemy azymut. Mianowicie, obliczamy:

$$\operatorname{tg}(AW) = \frac{y_w - y_a}{x_w - x_a}$$

oraz

$$AW = \frac{y_w - y_a}{\sin(AW)} = \frac{x_w - x_a}{\sin(AW)}$$

Następnie zakładamy azymut boku, łączącego punkt A z pierwszym punktem poligonu AB w kopalni, za $0^0\ 0'\ 0''$, obliczymy przyrosty spółrzędnych boków, a więc oznaczając azymuty literami γ:

$$\Delta x_1 = d_1 \cos \gamma_1 = d_1$$

$$\Delta y_1 = d_1 \sin \gamma_1 = 0$$

$$\Delta x_2 = d_2 \cos \gamma_2$$

$$\Delta x_3 = d_3 \cos \gamma_3 \quad \text{itd.}$$

Następnie tworzymy sumy obliczonych przyrostów $[\Delta y]$ i $[\Delta x]$ oraz liczymy

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{[\Delta y]}{[\Delta x]}$$

oraz

$$d_{Aw} = \frac{[\Delta y]}{\sin \tau} = \frac{[\Delta x]}{\cos \tau}$$

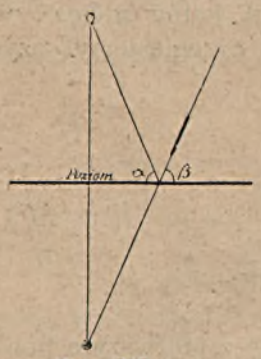
Kąt kierunkowy τ dlatego nie równa się (AW), że założyliśmy dowolnie, iż azymut pierwszego boku równa się $0^0\ 0'\ 0''$.

Różnica $(AW) - \tau$ jest kątem, o który należy obrócić cały poligon; azymutem pierwszego boku $A\ 1$ poligonu kopalni jest więc $(AW) - \tau$. W ten sposób poligon został zorjentowany, a więc odniesiony do tego samego układu spółrzędnych, do którego są odniesione punkty powierzchni ziemi, znajdujące się przy szybach. Dalsze obliczenia punktów poligonowych nie wymagają omówień.

C. Jeżeli kopalnia łączy się z powierzchnią ziemią za pośrednictwem sztolni, czy pochylni, wówczas nawiązania dokonamy za pośrednictwem zwykłego pomiaru poligonu, lub pomiaru w pochylni.

§ 443. Pomiar teodolitowy w pochylniach.

Przy takim pomiarze stosuje się teodolit z ekscentryczną lunetą. Gdy celowanie do góry połączone jest z trudnościami, wówczas stosuje się t. zw. sztuczny poziom (rys. 898). Jest to pudełko napełnione oliwą z domieszką sadzy. Promień idący od sygnału pada i odbija się pod równemi kątami α i β. Promień odbity pod kątem β idzie do obserwatora, umieszczonego przy okularze lunety. Pomierzony kąt β wtedy tylko jest kątem pochylenia odcinka, łączącego dwa stanowiska teodolitu, kiedy sygnał świetlny i sztuczny poziom znajdują się każdy oddzielnie o tę samą wielkość poniżej osi obrotu lunety, umieszczanej w punktach poligonowych. W innym wypadku do kąta β należy wprowadzać odpowiednią poprawkę.



Rys. 898.

W poziomie osi obrotu lunety każdego stanowiska teodolitu wbijasię w ściankę pochylni punkt. Mierzymy odstępy pionowe między każdym punktem a poziomem niżej położonego, odstęp między osiami obrotu lunety a sygnałem świetlnym i sztucznym poziomem (o ile był stosowany) oraz długości rzutów poziomych prostych, łączących stanowiska.

§ 444. Niwelacja w kopalni.

Łaty używane przy tej niwelacji są znacznie krotsze od zwykłych łat niwelacyjnych. Łata jest oświetlana lampką górniczą. Niwelatory ustawiane są zwykle na podstawkach Borchersa, wkręcanych w stemple. Obecnie stosowane są również wiszące niwelatory Cetti-Doleżala przy niwelacji bardzo krótkich odcinków.



Rys. 899.

Rys. 899 przedstawia niwelację niwelatorem wiszącym na pionowym metalowym pręcie (sztanga). Łata z podziałką dwumilimetrową, oświetlona jest lampą acetylenową, zawieszona jest na pręcie długości 1 *m*, zaczepio-

nym na haczyku, wśrubowanym w belkę stropu na 4 *cm*. Tak zawieszona łata sama zajmie pionowe położenie. Pole widzenia niwelatora nie wymaga oświetlenia, gdyż łata jest bardzo silnie oświetlona.

Stosowane są również łaty Breithaupta, Borchersa, Schmidta i t. p.

Przy szybach pochyłych, upadowych chodnikach i t. p. stosujemy trygonometryczną niwelację lub półkole wiszące, czy wreszcie łatę z libelą do trygonometrycznej niwelacji (np. łata Wejsbacha).

Dokładność niwelacji półkolem wiszącem nie powinna być mniejsza od 1 : 1500 niwelowanej długości; przy użyciu niwelatorów — 1 : 20000.

Wysokości punktów w kopalni nawiązane są z reperami na powierzchni za pośrednictwem pomiaru głębokości szybów. Do tego pomiaru używa się sztang Borchersa o średnicy 5 *mm* i długości 1 — 4 *m*. Sztangi te łączą się zapomocą wkręcania. Pierwsza sztanga posiada haczyk do zawieszania. W pochyłych szybach w ściankę szybu pod końcem zwisających sztang wbija się punkt, odmierza się odstęp pionowy do spodu sztangi, wbija się w przeciwległą ściankę punkt na poziomie pierwszego, od którego przedłużamy w dalszym ciągu pomiar głębokości.

Obecnie wprowadzane są do tego celu taśmy stalowe i invarowe o długości do 30 *m*. Miary te pozwalają dokładnie określać głębokości, gdyż spółczynniki rozszerzalności i rozciągliwości tych miar są dokładnie określane.

Wzmiankować jeszcze należy o niwelacji przy użyciu wiszących łat. Jeżeli podział na łatach biegnie ku dołowi, więc różnica wysokości równa jest

$$\triangle h = p - w$$

odczytowi wprzód mniej odczyt wstecz, ponieważ:

$$\triangle h = (-w) - (-p) = p - w.$$

ROZDZIAŁ XVIII.

WYKREŚLANIE ODRYSÓW ZE ZMIANĄ SKALI.

§ 445. Zmiana skali.

Nazwijmi literą o długość boku odrysu, wykonanego w skali $1 : M$, literą p długość boku pierworysu, wykreślonego w skali $1 : N$.

Ponieważ

$$o\,M = p\,N$$

więc

$$\frac{o}{p} = \frac{N}{M} = \frac{1}{M} : \frac{1}{N} \qquad (1)$$

oraz

$$o = p\,\frac{N}{M} \qquad (2)$$

(Przy zmniejszeniu planu $M > N$).

Ustalmy zmiany w powierzchni figur.

Rozpatrzmy powierzchnię P pierworysu (wyrażoną np. w mm^2) i powierzchnię P_0 tej samej figury na odrysie; stosunek podobnych powierzchni jest równy stosunkowi kwadratów odpowiednich boków, tak więc:

$$\frac{P_0}{P} = \frac{o^2}{p^2} = \frac{N^2}{M^2} = \frac{1}{M^2} : \frac{1}{N^2}$$

oznaczając:

$$\frac{1}{M} : \frac{1}{N} = c$$

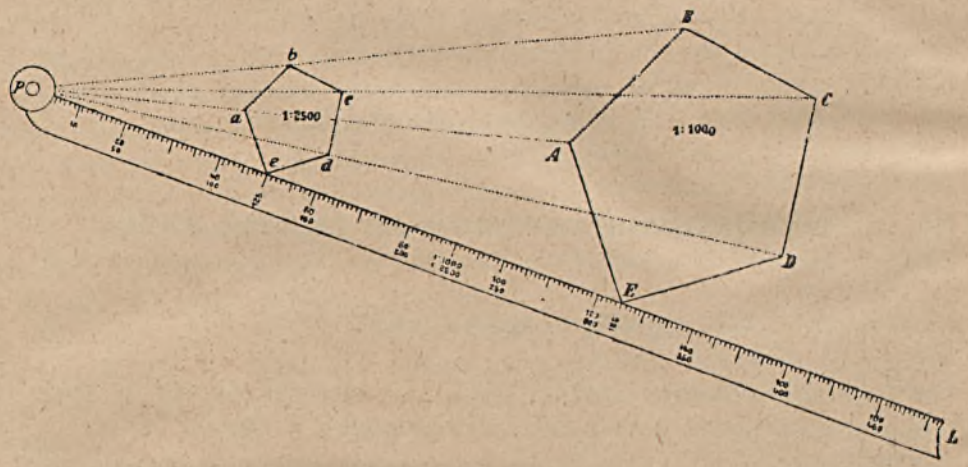
mamy

$$\underline{P_0 : P = c^2}$$

t. j.: zmniejszenie powierzchni równa się kwadratowi zmniejszenia skali.

§ 446. Linjał redukcyjny.

Przy zmniejszaniu niewielkich figur używa się redukcyjny linjał (rys. 900). Linjał ten wciska się punktem P w stół kreślarski, na którym znajduje się plan $ABCDE$ i papier dla odrysu $abcde$. Przypuśćmy, że podziałka linjału posiada opis dla skal $1:N$ np., 1:1000, oraz $1:M$, np. 1:2500, jak na rysunku. Odczytując w położeniu PE linjału np. 125 z opisu dla skali 1:1000, nakłujemy punkt e przy działce 125 opisu skali



Rys. 900.

1:2500 i przesuniemy linjał do położenia PD, gdzie po dokonaniu odczytu dla skali 1:1000 znów nakłujemy punkt d dla skali 1:2500 i t. d. W ten sposób np. w △-ach PED i Ped mamy wspólny kąt przy wierzchołku i proporcjonalne ramiona tego kąta. Trójkąty PED i Ped są więc podobne.

Z ich podobieństwa wynika:

$$\frac{PE}{Pe} = \frac{ED}{ed} = \frac{M}{N} = \frac{1}{N} : \frac{1}{M}$$

Tak więc bok ed, a więc i pozostałe boki odrysu są naniesione w skali odrysu $1:M$.

§ 447. Cyrkiel proporcjonalny.

Cyrkiel ten (rys. 901) posiada zacisk z, sprzęgający obydwie nóżki cyrkla. W położeniu, wskazanem na rys. 901, możemy zacisk z przesuwać wzdłuż nóżek cyrkla. Po przykręceniu z w dowolnym punkcie C (rys. 902), możemy zmniejszać lub zwiększać odległości między końcami każdej pary nóżek, lecz zawsze stosunek $AB : ab$ pozostanie stały, i przytem zachodzić będzie stała proporcja

$$\frac{AB}{ab} = \frac{CA}{Ca}$$

Jeżeli więc stosunek $CA : Ca$ jest równy stosunkowi $p : o$ t. j.

$$\frac{CA}{Ca} = \frac{p}{o} = \frac{1}{N} : \frac{1}{M}$$

t. j.

$$\frac{CA}{Ca} = \frac{M}{N}$$

wówczas zachodzi również i proporcja pochodna:

$$\frac{CA + Ca}{CA} = \frac{M + N}{M}$$



Rys. 901.

lecz

$$CA + Ca = l$$

jest długością cyrkla, więc

$$CA = \frac{M}{M + N} l$$

Jeżeli teraz założymy szereg par dla M i N, np. 2500 i 1000, 5000 i 4000 i t. d. wówczas dla każdej pary obliczymy odpowiednie AC i obliczone odcinki AC zaznaczymy kreskami na jednej nóżce cyrkla, oznaczonej wyrazem „linja" (rys. 901).

Dobieramy takie CA, aby stosunek $o : p$ był równy $1 : 2$, $1 : 3$ . . . i wogóle $1 : n$.

Wówczas:

$$\frac{o}{p} = \frac{1}{n}$$

lecz

$$\frac{o}{p} = \frac{N}{M} = \frac{1}{n}$$

więc

$$\frac{M}{M + N} = \frac{n}{n + 1}$$

i

$$CA = \frac{n}{n + 1} l$$



Rys. 902.

Użycie cyrkla proporcjonalnego jest bardzo proste: ustawiamy zacisk w ten sposób (rys. 902), aby kreska pod zaciskiem znalazła się na przedłużeniu kreski n (np. 4), wówczas (rys. 902)

$$ab : AB = 1 : n$$

Przy zmianie skal $1:n = N:M$ krok cyrkla $A\,B$ ustawiamy wzdłuż dowolnego odcinka pierworysu i odkłujemy odcinek $a\,b$, jako odcinek na odrysie.

Zaznaczyć należy, że powiększenie w ten sposób planów stwarza odrysy, z których miary brane cyrklem, różnią się od odpowiednich miar terenu znacznie więcej, niż wynosi błąd naniesienia w skali odrysu. Należy mieć to na uwadze przy korzystaniu z takich odrysów.

Na drugiej nóżce cyrkla proporcjonalnego widzimy liczby 3, 4 . . . 11, 12. Jeżeli indeks zacisku ustawić na jedną z tych kresek (np. 4) i w krok $A\,B$ cyrkla umieścić promień jakiegoś koła, wówczas krok $a\,b$ odpowie długości boku odpowiedniego prawidłowego wpisanego wielokąta, (np. czworoboku).

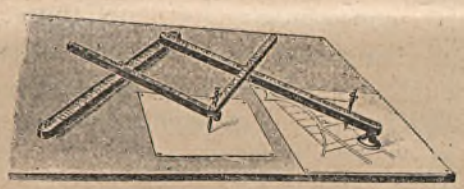
§ 448. Pantograf.

Pantograf jest przyrządem dla mechanicznego odrysowywania planów ze zmianą skali.

Rys. 903 przedstawia pantograf, składający się z czterech listewek jednakowej długości, obracających się w punktach skrzyżowania B, C, D i F na zawiasach. Figura $B\,C\,D\,F$ utworzona przez listwy, połączone śrubkami, przepuszczonemi przez odpowiednie otwory listewek, jest równoległobokiem. Listwa $A\,C$ obraca się dokoła punktu A nieruchomej płytki $A\,H$, przymocowanej do kreślarskiego stołu.



Rys. 903.



Rys. 903 a.

Ponieważ:

1) $B\,C \parallel$ i $= F\,D$ oraz $B\,F \parallel$ i $= C\,D$

2) punkt F osadzony jest na prostej $A\,Z$, i na tej prostej zawsze pozostaje niezależnie od zmian położenia punktu Z,

3) stale zachodzi równość stosunków

$$\frac{A\,B}{A\,C} = \frac{C\,D}{C\,Z} = \frac{A\,F}{A\,Z}$$

przeto przyjmując równość stosunków

$$\frac{A\,F}{A\,Z} = \frac{o}{p}$$

mamy odmianę linjału redukcyjnego, w którym $A\,F$ odpowiada odległości bieguna do punktu na odrysie, zaś $A\,Z$— odległości bieguna do odpowiedniego punktu pierworysu.

Jeżeli tedy punkt Z przesuwać będziemy po pierworysie, wówczas punkt F kreślić będzie odpowiednie linje odrysu.

Ustawienie tego pantografu dla odpowiedniego zmniejszenia wynika z proporcji

$$\frac{AB}{AC} = \frac{o}{p} = \frac{N}{M}$$

należy więc dla skal odrysu $\frac{1}{M}$ i pierworysu $\frac{1}{N}$ $(M > N)$ tak ustawiać śrubki B i D, aby

$$BC = FD$$

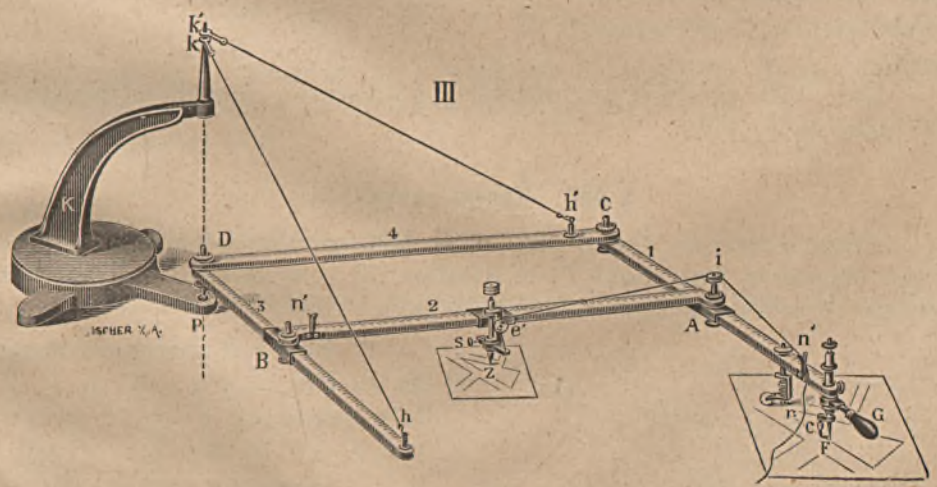
oraz

$$AB = AC\,\frac{N}{M}$$

Dowiedziemy, że ostrze pantografu, przesuwające się po pierworysie i ostrze (ołówek) przesuwające się po odrysie, zawsze znajdują się na prostej, przechodzącej przez biegun, oraz że obydwa ostrza przesuwają się równolegle do siebie. Rozpatrzmy to prawo w zastosowaniu do pantografu konstrukcji Coradiego.

§ 449. Pantograf Coradiego.

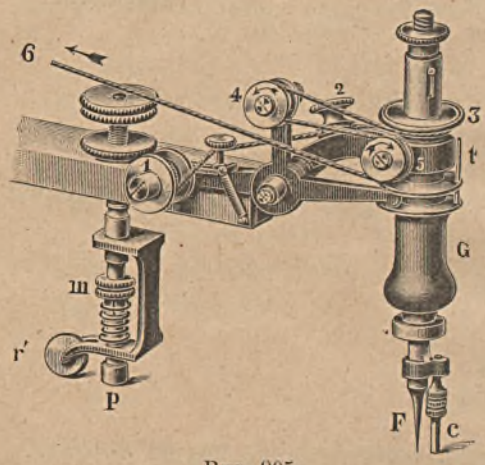
Pantograf ten składa się z metalowych listewek, tworzących równoległobok, którego jeden bok może być przesuwany wzdłuż dwu drugich. Końcu dwu listewek połączone są strunami z wierzchołkiem zgiętej metalowej podstawki. Na pionie punktu k zawieszenia znajduje się pod wierzchoł-



Rys. 904.

kiem równoległoboku kulka metalowa, którą równoległobok osadza się w odpowiednim wydrążeniu P podstawki, zwanem biegunem. Przy użyciu pantografu metalowe listewki powinny zajmować poziome położenie, co usku-

tecznia się zapomocą takiej zmiany długości strun, przy której libela, ustawiana na listewkach, wskaże poziom.



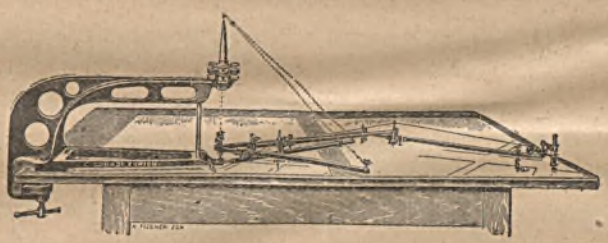
Rys. 905.

Najdalej odsunięty od biegu- na koniec listewki połączony jest z ostrzem F zwanem wodzidłem, które przesuwa się po pierworysie. Ołówek Z posuwający się po odrysie, przytwierdzony jest pionowo do listewki przecinającej prostą biegun—wodzidło.

Wodzidło nie dotyka bezpośrednio papieru, obok bowiem wodzidła znajduje się nieco dłuższy sztyfcik C, którym pantograf dotyka pierworysu. Ołówek może być podnoszony i opuszczany wewnątrz metalowej rurki. Podnoszenie ołówka wykonywa się zapomocą nitki, łączącej spód ołówka z wodzidłem, a przerzuconej przez bloki na listewkach. Tak więc przy próbnem obwodzeniu wodzidła po pierworysie naciągamy nitkę przy wodzidle i ołówek odsunie się wówczas od odrysu. W ten sposób unikniemy kreślenia zbytecznych linji na odrysie.

Przy użyciu pantografu wodzidło, ołówek i biegun powinny się znajdować zawsze we wspólnej płaszczyźnie pionowej.

Na rys. 905 przedstawiony jest udoskonalony przyrząd do podnoszenia i opuszczania ołówka.

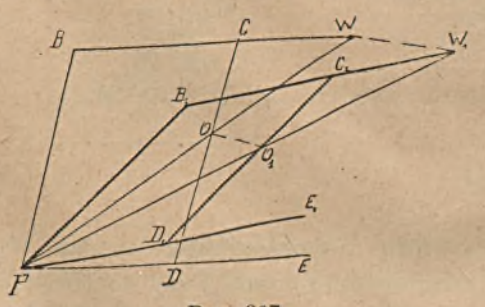


Rys. 906.

Rys. 906 przedstawia podstawę pantografu, umożliwiającą przesuwanie pod nią rysunku.

§ 450, Teorja pantografu.

Przypuśćmy, że $P\,B\,C\;\;W\,O\,D\,E$ jest spoziomowanym pantografem którego biegunem jest punkt P, wodzidłem W i ołówkiem O. Przypuśćmy, że punkt W przesunął się o odcinek $W\,W_1$.



Rys. 907.

Punkt B przesunie się do B_1 tak że $PB_1 = PB$ i $W_1\,B_1 = WB$. Cały pantograf zajmie położenie $P\,B_1\;C_1\;O_1\;D_1\;W_1\;E_1$.

Ponieważ $PB \parallel DC$ więc $\triangle\, PBW \sim OC\,W$, a stąd:

$$\frac{PB}{OC} = \frac{BW}{CW} = \frac{PS}{OS} \qquad (1)$$

Wstawiając do tej proporcji

$$P B_1 = P B,\ O_1 C_1 = O C,\ B_1 W_1 = B W,\ C_1 W_1 = C W$$

napiszemy:

$$\frac{P B_1}{O_1 C_1} = \frac{B_1 W_1}{C_1 W_1} = \frac{P S}{O S} \qquad (2)$$

Lecz $PB_1 \parallel D_1 C_1$ więc $\sphericalangle PB_1 W_1 = \sphericalangle D_1 C_1 W_1$.

Mamy więc w Δ-ach $P B_1 W_1$ i $O_1 C_1 W_1$ równe kąty B_1 i C_1, zawarte między proporcjonalnemi bokami:

$$\frac{P B_1}{B_1 W_1} = \frac{O_1 C_1}{C_1 W_1}$$

są tedy te Δ-y podobne do siebie.

Ponieważ zaś Δ-y $P B_1 W_1$ i $O_1 C_1 W_1$ są do siebie podobne, oraz posiadają wspólny wierzchołek W_1 i dwa proporcjonalne boki $B_1 W_1$ i $C_1 W_1$ położone są na jednej prostej, więc i boki $P W_1$ i $O_1 W_1$ leżą na jednej prostej. Stąd wynika, że jeżeli początkowo ustawiliśmy pantograf w taki sposób, że punkty P, O i W leżały na jednej prostej, to przy dowolnem przesuwaniu punktu W — ołówek, wodzidło i biegun zawsze będą leżeć na wspólnej prostej.

Rozpatrzmy Δ-y $P O O_1$ i $P W W_1$.

Te Δ-y posiadają wspólny kąt, P, ramiona zaś obejmujące ten kąt w obydwu Δ-ach są proporcjonalne.

Stąd wynika, że te Δ-y są podobne,

a więc:

$$O O_1 : W W_1 = P O : P W$$

oraz

$$O O_1 \parallel W W_1$$

A więc ołówek O przesuwa się równolegle do wodzidła W, kreśląc odcinki odrysu proporcjonalne do odcinków pierworysu.

Oznaczmy stałe:

$$B W = d,\ P B = r$$

i zmienne

$$C W = x,\ O C = y$$

Oznaczmy stosunek boku pierworysu do boku odrysu wielkością $\frac{p}{o}$,

mamy

$$\frac{P W}{P O} = \frac{p}{o}$$

a stąd

$$\frac{P W - P O}{P O} = \frac{p - o}{p} = \frac{O W}{P W}$$

lecz z (1)-ego:

$$\frac{r}{y} = \frac{d}{x} = \frac{P W}{O W} = \frac{p}{p - o}$$

stąd

$$y = r \frac{p - o}{p} \qquad (3)$$

$$x = d \frac{p - o}{p}$$

Skoro więc

$$\frac{p}{o} = \frac{M}{N}$$

gdzie M jest mianownikiem ułamka $\frac{1}{M}$ t. j. skali odrysu, zaś N jest mianownikiem skali pierworysu, więc:

$$y = r \frac{M - N}{M}$$

$$x = d \frac{M - N}{M} \qquad (4)$$

Z równań tych, mając M, N oraz d i r obliczymy y i x.

Na listewkach pantografu CD, BW i PE naniesione są kreski, oznaczone ułamkami $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ . . . , oznaczającemi stosunki $\frac{o}{p}$ Przy użyciu pantografu należy punkty C, O i D ustawić na ten sam stosunek $\frac{o}{p}$.

Przerysowywanie zapomocą pantografu Coradi-ego wykonywa się w ten sposób, że kreślimy na odrysie w jego skali jaki większy trójkąt lub kwadrat pierworysu, ustawiamy wodzidło w wierzchołku takiej figury na pierworysie, zaś pod ołówek podsuwamy odpowiedni wierzchołek odrysu, przypinając go następnie igiełką do odrysu. Następnie wodzidło przesuwamy do drugiego wierzchołka figury (△-a czy kwadratu), zaś odrys ostrożnie obracamy dokoła igiełki do czasu, kiedy odpowiedni wierzchołek odrysu znajdzie się pod ołówkiem. Przypinamy wówczas odrys do stołu i sprawdzamy położenie trzeciego wierzchołka odrysu, t. j. sprawdzamy, czy ołówek znajdzie się nad nim, gdy wodzidło przesuniemy do odpowiedniego wierzchołka pierworysu.

UZUPEŁNIENIA i TABELE

TABELA I.

Poprawki długości na pochylenie do poziomu

$$r = 2\ D\ \sin^2 \frac{\tau}{2}$$

Kąt pochylenia		POPRAWKA									Kąt pochylenia	
°	′	10	20	30	40	50	60	70	80	90	°	′
1	00	0,002	0,003	0,005	0,006	0,008	0,009	0,011	0,012	0,014	1	00
1	30	0,003	0,007	0,010	0,014	0,017	0,020	0,024	0,027	0,030	1	30
2	00	0,006	0,012	0,018	0,024	0,030	0 037	0,043	0,049	0,055	2	00
2	30	0,010	0,019	0,029	0,038	0,048	0,057	0,067	0,076	0,086	2	30
3	00	0,014	0,027	0,041	0,055	0,069	0,082	0,096	0,110	0,124	3	00
3	30	0,019	0,037	0,056	0,075	0,094	0,112	0,131	0,149	0,168	3	30
4	00	0,024	0,049	0,073	0,098	0,122	0,146	0,171	0.195	0,220	4	00
4	30	0,031	0,062	0,092	0,123	0,154	0,185	0,216	0,246	0,277	4	30
5	00	0,038	0,076	0,114	0,152	0,190	0,229	0,267	0,305	0,343	5	00
5	30	0,046	0,092	0,138	0,184	0,230	0,276	0,322	0,368	0,414	5	30
6	00	0,055	0,110	0,164	0,219	0,274	0,329	0,384	0,438	0,493	6	00
6	30	0,064	0,129	0,193	0,257	0,322	0,386	0,450	0,514	0,579	6	30
7	00	0,075	0,149	0,224	0,298	0,373	0,447	0,522	0,596	0,671	7	00
7	30	0,086	0,171	0,257	0,342	0,428	0,514	0,599	0,685	0,770	7	30
8	00	0,097	0,195	0,292	0,389	0,487	0,584	0,681	0,778	0,876	8	00
8	30	0,110	0,220	0,329	0,439	0,549	0,659	0,769	0,878	0,988	8	30
9	00	0,123	0,246	0,369	0,492	0,616	0,739	0,862	0,985	1,108	9	00
9	30	0.137	0,274	0,411	0,548	0,686	0,823	0,990	1,097	1,234	9	30
10	00	0,152	0,304	0,456	0,608	0,760	0,912	1 063	1.215	1,367	10	00
10	30	0,168	0,335	0,503	0,670	0,838	1,005	1,173	1,340	1,508	10	30
11	00	0,184	0,367	0,551	0,735	0,919	1,102	1,286	1,470	1,653	11	00
11	30	0,201	0,402	0,602	0,803	1,004	1.205	1,406	1,606	1,807	11	30
12	00	0,219	0,437	0,656	0,874	1,093	1,311	1,530	1,748	1,967	12	00
12	30	0,237	0,474	0,711	0,948	1,185	1,422	1,659	1,896	2,133	12	30
13	00	0,256	0,513	0,769	1,025	1,282	1,538	1,794	2,050	2,307	13	00
13	30	0,276	0,553	0,829	1,105	1,382	1,658	1,934	2,210	2,487	13	30
14	00	0,297	0,594	0,891	1,188	1,485	1,782	2,079	2,376	2,673	14	00
14	30	0,319	0,637	0,956	1,274	1,593	1,911	2,230	2,549	2,867	14	30
15	00	0,341	0,681	1,022	1,363	1,704	2,044	2,385	2,726	3,066	15	00
15	30	0,364	0,727	1,091	1,455	1,819	2,183	2,546	2,910	3,273	15	30

TABELA II.

Największe dopuszczalne różnice dwóch pomiarów linji.

max d = *max* ($l' - l''$); *max d* dane są dla trzech klas terenu.

Długość linji *l* mtr.			*max d* mtr.	Długość linji *l* mtr.			*max d* mtr.
I	II	III		I	II	III	
29	—	—	—	—	—	—	—
35	19	—	0,12	466	327	185	0,48
43	24	—	0,13	496	349	198	0,50
50	29	—	0,14	526	372	212	0,52
58	34	—	0,15	556	394	226	0,54
67	40	—	0,16	586	417	241	0,56
76	46	19	0,17	617	440	256	0,58
85	53	22	0,18	648	464	271	0,60
95	59	26	0,19	680	488	285	0,62
105	66	30	0,20	712	512	301	0,64
126	81	38	0,22	744	536	316	0,66
148	96	46	0,24	777	560	332	0,68
170	112	55	0,26	809	585	348	0,70
194	129	65	0,28	892	647	388	0,75
219	147	75	0,30	976	710	429	0,80
244	165	86	0,32	1061	775	470	0,85
270	184	97	0,34	1146	840	513	0,90
296	203	109	0,36	1234	907	556	0,95
323	223	121	0,38	1322	974	601	1,00
351	243	133	0,40	1411	1042	646	1,05
379	263	146	0,42	1501	1110	691	1,10
407	284	159	0,44	1591	1180	736	1,15
436	306	172	0,46	1682	1250	782	1,20

TABELA IIa.

Średni błąd przy pomiarach długości: dla stosunków terenowych średnich (według Min. Rob. Publ.).

$$\Delta S = 0{,}0002 \sqrt{S^2 + 1000\,S}$$

Długość boku S w metrach	ΔS cm.	Długość boku S w metrach	ΔS cm.	Długość boku S w metrach	ΔS cm.	Długość boku S w metrach	ΔS cm.
1		156		465		823	
	1		9		17		25
6		190		508		870	
	2		10		18		26
16		225		551		916	
	3		11		19		27
30		262		596		963	
	4		12		20		28
49		300		640		1010	
	5		13		21		29
71		340		686		1057	
	6		14		22		30
97		381		731		1105	
	7		15		23		
125		422		777			
	8		16		24		
156		465		823			

Dla stosunków terenowych korzystnych granica zmniejsza się o 20%, zaś dla stosunków niekorzystnych zwiększa się o 20%.

TABELA III.

Największe dopuszczalne linjowe odchyłki poligonów — $max\ f_L$.

$max\ f_L$ obliczono dla średnich warunków (teren II-ej klasy) według wzoru:

$$f_L = 0.00035\ L + 0.0105\ \sqrt{L} + 0.035.$$

(L długość ciągu) oraz wagi

$$p = \frac{1000}{L}$$

Dla terenu I-ej klasy należy brać 0.80 wartości $max\ f_L$ podanych w tablicy, zaś dla terenu III-ej klasy należy brać 1.40 wartości $max\ f_L$, podanych w tablicy.

Długość ciągu L metr	$max\ f_L$ metr	Waga $p = \frac{1000}{L}$	Długość ciągu L metr	$max\ f_L$ metr	Waga $p = \frac{1000}{L}$	Długość ciągu L metr	$max\ f_L$ metr	Waga $p = \frac{1000}{L}$
100	0,18	9,0	695	0,56	1,4	2260	1,35	0,43
124	0,20	7,4	731	0,58	1,33	2369	1,40	0,41
149	0,22	6,4	768	0,60	1,28	2478	1,45	0,39
175	0,24	5,5	806	0,62	1,22	2588	1,50	0,37
202	0,26	4,7	843	0,64	1,16	2810	1,60	0,35
230	0,28	4,1	881	0,66	1,08	3033	1,70	0,32
260	0,30	3,7	958	0,70	1,00	3259	1,80	0,30
289	0,32	3,3	1055	0,75	0,91	3486	1,90	0,28
320	0,34	3,0	1153	0,80	0,83	3714	2,00	0,26
352	0,36	2,8	1253	0,85	0,77	3944	2,10	0,25
384	0,38	2,5	1353	0,90	0,75	4176	2,20	0,23
416	0,40	2,3	1455	0,95	0,7	4408	2,30	0,22
450	0,42	2,2	1559	1,00	0,65	4642	2,40	0,21
483	0,44	2,0	1662	1,05	0,6	4876	2,50	0,20
518	0,46	1,9	1767	1,10	0,55	5112	2,60	0,19
552	0,48	1,8	1873	1,15	0,52	5349	2,70	0,18
587	0,50	1,7	1980	1,20	0,5	5586	2,80	0,17
623	0,52	1,6	2044	1,25	0,47	5825	2,90	0,17
659	0,54	1,5	2151	1,30	0,45	6064	3,00	0,16
695	0,56	1,4	2260	0,35	0,43	6184		

TABELA IV.

Graniczne różnice wyników pomiarów długości i odchyłek poligonowych według pruskiej inkstrukcji katastralnej.

s			*d*	*p*	*s*			*d*	*p*
I	II	III			I	II	III		
m	*m*	*m*	*m*		*m*	*m*	*m*	*m*	
5	3	3	0,05	400	1752	1372	1147	1,50	0,44
22	15	11	0,10	100	1821	1428	1196	1,55	0,42
50	34	26	0,15	44,5	1891	1485	1245	1,60	0,39
86	59	45	0,20	25,0	1961	1541	1293	1,65	0,37
129	90	69	0,25	16,0	2030	1598	1342	1,70	0,35
178	125	97	0,30	11,1	2100	1654	1390	1,75	0,33
231	165	128	0,35	8,18	2170	1711	1439	1,80	0,31
287	207	162	0,40	6,25	2240	1768	1488	1,85	0,29
346	251	198	0,45	4,93	2310	1824	1537	1,90	0,28
406	298	236	0,50	4,00	2380	1881	1586	1,95	0,26
468	346	276	0,55	3,31	2450	1938	1635	2,00	0,250
532	395	317	0,60	2,79	2583	2046	1728	2,10	0,23
596	445	359	0,65	2,37	2723	2160	1826	2,20	0,21
661	497	402	0,70	2,04	2863	2274	1925	2,30	0,19
727	549	446	0,75	1,77	3003	2389	2023	2,40	0,17
793	601	490	0,80	1,56	3144	2503	2122	2,50	0,16
860	655	535	0,85	1,39	3285	2617	2221	2,60	0,15
927	708	580	0,90	1,23	3425	2732	2320	2,70	0,14
995	762	626	0,95	1,10	3566	2846	2419	2,80	0,13
1063	817	672	1,00	1,00	3706	2961	2518	2,90	0,12
1131	871	719	1,05	0,91	3847	3076	2617	3,00	0,11
1199	926	766	1,10	0,83	3988	3190	2716	3,10	0,10
1268	981	813	1,15	0,76	4129	3305	2815	3,20	0,10
1336	1037	860	1,20	0,69	4270	3420	2914	3,30	0,09
1406	1092	908	1,25	0,64	4411	3535	3014	3,40	0,086
1475	1148	955	1,30	0,59	4552	3650	3113	3,50	0,082
1544	1204	1003	1,35	0,55	4693	3765	3212	3,60	0,077
1613	1260	1051	1,40	0,51	4834	3880	3312	3,70	0,073
1682	1316	1099	1,45	0,48	4975	3995	3411	3,80	0,069
1752	1372	1148	1,50	0,44	5116	4110	3511	3,90	0,066

TABELA V

Wagi sum kątów i największe dopuszczalne odchyłki kątowe max f_α ciągów poligonowych.

Liczba kątów n	Waga $p=\frac{10}{n}$	max f_α		Liczba kątów n	Waga $p=\frac{10}{n}$	max f_α	
		$1'.5\sqrt{n}$	$4'\sqrt{n}$			$1'.5\sqrt{n}$	$4'\sqrt{n}$
				23	0,43	7',2	19',2
2	5,00	2',1	5',7	24	0,42	7',3	19',6
3	3,33	2',6	6',9	25	0,40	7',5	20',0
4	2,50	3',0	8',0	26	0,38	7',6	20',4
5	2,00	3',4	8',9	27	0,37	7',8	20',8
6	1,67	3',7	9',8	28	0,36	7',9	21',2
7	1,43	4',0	10'.6	29	0,34	8',1	21',5
8	1,25	4',2	11',3	30	0,33	8',2	21',9
9	1,11	4',5	12',0	31	0,32	8',4	22',3
10	1,00	4',7	12',6	32	0,31	8',5	22',6
11	0,91	5',0	13',3	33	0,30	8',6	23',0
12	0,83	5',2	13',9	34	0,29	8',7	23',3
13	0,77	5',4	14',4	35	0,29	8',9	23',7
14	0,71	5',6	15',0	36	0,28	9',0	24',0
15	0,67	5',8	15',5	37	0,27	9',1	24',3
16	0,62	6',0	16',0	38	0,26	9',2	24',7
17	0,59	6',2	16',5	39	0,26	9',4	25',0
18	0,56	6',4	17',0	40	0,25	9',5	25',3
19	0,53	6',5	17',4	41	0,24	9',6	25',6
20	0,50	6',7	17',9	42	0,24	9',7	25',9
21	0,48	6',9	18',3	43	0,23	9',8	26',3
22	0,45	7',0	18',8	44	0,23	9',9	26',5

TABELA VI.

Granica błędów dla obliczeń powierzchni według Min. Robót Publicznych.

Dla podziałki 1 : 4000, $\Delta F = 0{,}001\ F + 0{\cdot}8\ \sqrt{F}$

„ „ 1 : 2000, $\Delta F = 0{,}001\ F + 0{\cdot}4\ \sqrt{F}$

„ „ 1 : 1000, $\Delta F = 0{,}001\ F + 0{\cdot}2\ \sqrt{F}$

Powierzchnia F			Granica błędu dla planu w podziałce ΔF						Powierzchnia F			Granica błędu dla planu w podziałce ΔF					
			1 : 4000		1 : 2000		1 : 1000					1 : 4000		1 : 2000		1 . 1000	
ha	a	m²	a	m²	a	m²	a	m²	ha	a	m²	a	m²	a	m²	a	m²
1			2		3		4		1			2		3		4	
		20		3,6		1,8		0,9	5	00	00	2	28,8	1	39,4		94,7
		50		5,7		2,9		1,5	6	00	00	2	56,0	1	58,0	1	09,0
	1	00		8,1		4,1		2,1	7	00	00	2	81,6	1	75,8	1	22,9
	2	00		11,7		5,9		3,0	8	00	00	3	06,1	1	93,1	1	36,6
	3	00		14,0		7,2		3,8	9	00	00	3	30,0	2	10,0	1	50,0
	4	00		16,4		8,4		4,4	10	00	00	3	53,1	2	26,5	1	63,2
	5	00		18,2		9,4		5,0	12	00	00	3	97,2	2	58,6	1	89,3
	6	00		20,2		10,4		5,5	14	00	00	4	39,5	2	89,7	2	14,8
	7	00		21,9		11,3		6,0	15	00	00	4	59,7	3	04,9	2	27,5
	8	00		23,3		12,1		6,5	16	00	00	4	80,0	3	20,0	2	40,0
	9	00		24,9		12,9		6,9	18	00	00	5	19,3	3	49,7	2	64,9
	10	00		26,2		13,6		7,3	20	00	00	5	57,9	3	78,9	2	89,4
	12	00		29,1		15,1		8,1	22	00	00	5	95,2	4	07,6	3	13,8
	14	00		31,4		16,4		8,9	24	00	00	6	32,0	4	36,0	3	38,0
	15	00		32,6		17,0		9,2	25	00	00	6	50,0	4	50,0	3	50,0
	16	00		33,6		17,6		9,6	26	00	00	6	68,0	4	64,0	3	62,0
	18	00		35,8		18,8		10,3	28	00	00	7	03,5	4	91,7	3	85,8
	20	00		37,9		19,9		10,9	30	00	00	7	38,3	5	19,1	4	09,5
	22	00		39,8		21,0		11,6	35	00	00	8	23,2	5	86,6	4	68,3
	24	00		41,6		22,0		12,2	40	00	00	9	06,0	6	53,0	5	26,5
	25	00		42,5		22,5		12,5	45	00	00	9	86,5	7	18,3	5	84,2
	26	00		43,4		23,0		12,8	50	00	00	10	65,6	7	82.8	6	41,4
	28	00		45,2		24,0		13,4	60	00	00	12	19,6	9	09,8	7	54,9
	30	00		46,7		24,9		14,0	70	00	00	13	69,2	10	34,6	8	67,3
	35	00		51,0		27,2		15,3	80	00	00	15	15,6	11	57,8	9	78,9
	40	00		54,7		29,3		16,6	90	00	00	16	59,1	12	79,5	10	89,7
	45	00		58,1		31,3		17,9	100	00	00	18	00,0	14	0,00	12	00,0
	50	00		61,7		33,3		19,1	110	00	00	19	38,9	15	19,5	13	09,8
	60	00		68,0		37,0		21.5	120	00	00	20	76,3	16	38,2	14	19,1
	70	00		74,1		40,5		23,7	130	00	00	22	12,3	17	56,1	15	28,0
	80	00		79,6		43,8		25,9	140	00	00	23	46,7	18	73,3	16	36,6
	90	00		84,7		46,9		28,0	150	00	00	24	79,9	19	89,9	17	44,9
1	00	00		90,0		50,0		30,0	160	00	00	26	12,0	21	06,0	18	53,0
1	25	00	1	01,8		57,2		34,9	170	00	00	27	42,9	22	21,5	19	60,8
1	50	00	1	13,0		64,0		39,5	180	00	00	28	73,5	23	36,7	20	68,3
2	00	00	1	33,2		76,6		48,3	190	00	00	30	02,8	24	51,4	21	75,7
3	00	00	1	68,7		99,3		64.6	200	00	00	31	31,1	25	65,7	22	82,8
4	00	00	2	00,0	1	20,0		80,0									

TABELA VII

Poprawka $\frac{1-k}{2r} a^2$, $\log r = 6{,}80489$, $k = 0{,}13$ dla odległości a.

a	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	Diff.
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	+
0	0,000	0,001	0,003	0,006	0,011	0,017	0,025	0,033	0,044	0,055	13
1 000	0 068	0 082	0 098	0 115	0 134	0 153	0 175	0 197	0 221	0 246	27
2 000	0 273	0 30	0 33	0 36	0 39	0 43	0 46	0 50	0 53	0 57	4
3 000	0 61	0 66	0 70	0 74	0 79	0 84	0 88	0 93	0 98	1 04	5
4 000	1 09	1 15	1 20	1 26	1 32	1 38	1 44	1 51	1 57	1 64	6
5 000	1 70	1 77	1 84	1 91	1 99	2 06	2 14	2 21	2 29	2 37	8
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	
6 000	2 45	2 54	2 62	2 71	2 79	2 88	2 97	3 06	3 15	3 25	10
7 000	3 34	3 44	3 53	3 63	3 73	3 83	3 94	4 04	4 15	4 25	11
8 000	4 36	4 47	4 58	4 70	4 81	4 93	5 04	5 16	5 28	5 40	12
9 000	5 52	5 65	5 77	5 90	6 02	6 15	6 28	6 41	6 55	6 68	13
10 000	6 82	6 95	7 09	7 23	7 37	7 52	7 66	7 80	7 95	8 10	15
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	
11 000	8 25	8 40	8 55	8 70	8 86	9 02	9 17	9 33	9 49	9 65	17
12 000	9 82	9 98	10 15	10 31	10 48	10 65	10 82	10 99	11 17	11 34	18
13 000	11 52	11 70	11 88	12 06	12 24	12 42	12 61	12 79	12 98	13 17	19
14 000	13 36	13 55	13 75	13 94	14 14	14 33	14 53	14 73	14 93	15 13	21
15 000	15 34	15 54	15 75	15 96	16 17	16 38	16 59	16 80	17 02	17 23	22

TABELA VIII.

Wysokości barometryczne dla $t = 15^0$.

B	,0	,2	,4	,6	,8	Różnica na 1 *mm*
mm	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*
720	479,6	477,3	474,9	472,6	470,2	11,75
721	467,9	465,5	463,2	460,9	458,5	11,73
722	456,2	453,8	451,5	449,1	446,8	11,72
723	444,4	442,1	439,8	437,4	435,1	11,70
724	432,8	430,4	428,1	425,8	423,4	11,68
725	421,1	418,8	416,4	414,1	411,8	11,67
726	409,4	407,1	404,8	402,4	400,1	11,65
727	397,8	395,4	393,1	390,8	388,5	11,64
728	386,1	383,8	381,5	379,2	376,9	11,62
729	374,5	372,2	369,9	367,6	365,3	11,60
730	362,9	360,6	358,3	356,0	353,7	11,59
731	351,3	349,0	346,7	344,4	342,1	11,57
732	339,8	337,5	335,2	332,9	330,6	11,56
733	328,2	325,9	323,6	321,3	319,0	11,54
734	316,7	314,4	312,1	309,8	307,5	11,53
735	305,2	302,9	300,6	298,3	296,0	11,51
736	293,7	291,4	289,1	286,8	284,5	11,49
737	282,2	279,9	277,6	275,3	273,0	11,48
738	270,7	268,4	266,2	263,9	261,6	11,46
739	259,3	257,0	254,7	252,4	250,1	11,45
740	247,8	245,6	243,3	241,0	238,7	11,43
741	236,4	234,1	231,9	229,6	227,3	11,42
742	225,0	222,7	220,4	218,2	215,9	11,40
743	213,6	211,3	209,1	206,8	204,5	11,39
744	202,2	200,0	197,7	195,4	193,1	11,37
745	190,9	188,6	186,3	184,1	181,8	11,36
746	179,5	177,2	175,0	172,7	170,5	11,34
747	168,2	165,9	163,6	161,4	159,1	11,33
748	156,9	154,6	152,3	150,1	147,8	11,31
749	145,6	143,3	141,1	138,8	136,5	11,30
750	134,3	132,0	129,8	127,5	125,3	11,28
751	123,0	120,8	118,5	116,3	114,1	11,26
752	111,8	109,5	107,3	105,0	102,8	11,25
753	100,5	98,2	96,0	93,8	91,5	11,23
754	89,3	87,0	84,8	82,6	80,3	11,22
755	78,1	75,8	73,6	71,4	69,1	11,20
756	66,9	64,6	62,4	60,2	57,9	11,19
757	55,7	53,5	51,2	49,0	46,8	11,17
758	44,5	42,3	40,1	37,8	35,6	11,16
759	33,4	31,1	28,9	26,7	24,5	11,15
760	22,2	20,0	17,8	15,6	13,3	11,13
761	11,1	8,9	6,7	4,4	2,2	11,13
762	0,0	— 2,2	— 4,4	— 6,7	— 8,9	11,10
763	— 11,1	— 13,3	— 15,5	— 17,7	— 20,0	11,09
764	— 22,2	— 24,4	— 26,6	— 28,8	— 31,0	11,07

TABELA IX.

Barometryczne przyrosty wysokości Δh dla zmian odczytu barometru o 1 *mm*.

$$\Delta h = \frac{8019}{B}(1 + 0{,}003665\ t)$$

Temperatura t	ŚREDNI STAN BAROMETRU B w *mm*.																
	760	750	740	730	720	710	700	690	680	670	660	650	640	630	620	610	600
	m	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*	*m*
— 4°	10,40	10,54	10,68	10,82	10,97	11,13	11,29	11,45	11,62	11,79	11,97	12,16	12,35	12,54	12,74	12,95	13,17
— 2	10,47	10,61	10,76	10,90	11,06	11,21	11,37	11,54	11,71	11,88	12,06	12,25	12,44	12,64	12,84	13,05	13,27
0	10,55	10,69	10,84	10,98	11,14	11,29	11,46	11,62	11,79	11,97	12,15	12,34	12,53	12,73	12,93	13,15	13,36
+ 2	10,63	10,77	10,92	11,07	11,22	11,38	11,54	11,71	11,88	12,06	12,24	12,43	12,62	12,82	13,03	13,24	13,46
4	10,71	10,85	10,99	11,15	11,30	11,46	11,62	11,79	11,97	12,14	12,33	12,52	12,71	12,92	13,12	13,34	13,56
6	10,78	10,93	11,07	11,23	11,38	11,54	11,71	11,88	12,05	12,23	12,42	12,61	12,81	13,01	13,22	13,44	13,66
8	10,86	11,01	11,15	11,31	11,46	11,63	11,79	11,96	12,14	12,32	12,51	12,70	12,90	13,10	13,31	13,54	13,76
10	10,94	11,08	11,23	11,39	11,55	11,71	11,88	12,05	12,23	12,41	12,60	12,79	12,99	13,20	13,41	13,63	13,85
12	11,01	11,16	11,31	11,47	11,63	11,79	11,96	12,13	12,31	12,50	12,68	12,88	13,08	13,29	13,50	13,73	13,95
14	11,09	11,24	11,39	11,55	11,71	11,87	12,04	12,22	12,40	12,58	12,77	12,97	13,17	13,38	13,60	13,83	14,05
16	11,17	11,32	11,47	11,63	11,79	11,96	12,13	12,30	12,48	12,67	12,86	13,06	13,27	13,47	13,69	13,93	14,15
18	11,25	11,40	11,55	11,71	11,87	12,04	12,21	12,39	12,57	12,76	12,95	13,15	13,36	13,57	13,79	14,02	14,25
20	11,32	11,48	11,63	11,79	11,95	12,12	12,30	12,47	12,66	12,85	13,04	13,24	13,45	13,66	13,88	14,12	24,35
22	11,40	11,55	11,71	11,87	12,04	12,20	12,38	12,56	12,74	12,93	13,13	13,33	13,54	13,75	12,98	14,22	14,44
24	11,48	11,63	11,79	11,95	12,12	12,29	12,46	12,64	12,83	13,02	13,22	13,42	13,63	13,85	14,07	14,31	14,54
26	11,56	11,71	11,87	12,03	12,20	12,37	12,55	12,73	12,92	13,11	13,31	13,51	13,72	13,94	14,17	14,41	14,64
28	11,63	11,79	11,95	12,11	12,28	12,45	12,63	12,81	13,00	13,20	13,40	13,60	13,82	14,03	14,26	14,51	14,74
30	11,71	11,87	12,03	12,19	12,36	12,54	12,72	12,90	13,09	13,29	13,49	13,69	13,91	14,13	14,36	14,61	14,84
32	11,79	11,95	12,11	12,27	12,44	12,62	12,80	12,99	13,18	13,37	13,57	13,78	14,00	14,22	14,45	14,70	14,93
34	11,87	12,02	12,19	12,35	12,53	12,70	12,88	13,07	13,26	13,46	13,66	13,87	14,09	14,31	14,55	14,80	15,03

TABELA X.

Trzycyfrowe wartości łuków i funkcyj goniometrycznych.

Arc.	°	Sin.	Cosec.	Tang.	Cotg.	Cos.	Sec.	°	Arc.
0,000	**0**	0,000	∞	0,000	∞	1,000	1,000	**90**	1,571
0,017	1	0,017	57,299	0,017	57,290	1,000	1,000	89	1,553
0,035	2	0,035	28,654	0,035	28,636	0,999	1,001	88	1,536
0,052	3	0,052	19,107	0,052	19,081	0,999	1,001	87	1,518
0,070	4	0,070	14,336	0,070	14,301	0,998	1,002	86	1,501
0,087	5	0,087	11,474	0,087	11,430	0,996	1,004	85	1,484
0,105	6	0,105	9,567	0,105	9,514	0,995	1,006	84	1,466
0,122	7	0,122	8,206	0,123	8,144	0,993	1,008	83	1,449
0,140	8	0,139	7,185	0,141	7,115	0,990	1,010	82	1,431
0,157	9	0,156	6,393	0,158	6,314	0,988	1,012	81	1,414
0,175	**10**	0,174	5,759	0,176	5,671	0,985	1,015	**80**	1,396
0,192	11	0,191	5,241	0,194	5,145	0,982	1,019	79	1,379
0,209	12	0,208	4,810	0,213	4,705	0,978	1,022	78	1,361
0,227	13	0,225	4,445	0,231	4,331	0,974	1,026	77	1,344
0,244	14	0,242	4,134	0,249	4,011	0,970	1,031	76	1,326
0,262	15	0,259	3,864	0,268	3,732	0,966	1,035	75	1,309
0,279	16	0,276	3,628	0,287	3,487	0,961	1,040	74	1,292
0,297	17	0,292	3,420	0,306	3,271	0,956	1,046	73	1,274
0,314	18	0,309	3,236	0,325	3,078	0,951	1,051	72	1,257
0,332	19	0,326	3,072	0,344	2,904	0,946	1,058	71	1,239
0,349	**20**	0,342	2,924	0,364	2,747	0,940	1,064	**70**	1,222
0,367	21	0,358	2,790	0,384	2,605	0,934	1,071	69	1,204
0,384	22	0,375	2,669	0,404	2,475	0,927	1,079	78	1,187
0,401	23	0,391	2,559	0,424	2,356	0,921	1,086	67	1,169
0,419	24	0,407	2,459	0,445	2,246	0,914	1,095	66	1,152
0,436	25	0,423	2,366	0,466	2,145	0,906	1,103	65	1,134
0,454	26	0,438	2,281	0,488	2,050	0,899	1,113	64	1,117
0,471	27	0,454	2,203	0,510	1,963	0,891	1,122	63	1,100
0,489	28	0,469	2,130	0,532	1,881	0,883	1,133	62	1,082
0,506	29	0,485	2,063	0,554	1,804	0,875	1,143	61	1,065
0,524	**30**	0,500	2,000	0,577	1,732	0,866	1,155	**60**	1,047
0,541	31	0,515	1,942	0,601	1,664	0,857	1,167	59	1,030
0,559	32	0,530	1,887	0,625	1'600	0,848	1,179	58	1,012
0,576	33	0,545	1,836	0,649	1,540	0,839	1,192	57	0,995
0,593	34	0,559	1,788	0,675	1,483	0,829	1,206	56	0,977
0,611	35	0,574	1,743	0,700	1,428	0,819	1,221	55	0,960
0,628	36	0,588	1,701	0,727	1,376	0,809	1,236	54	0,942
0,646	37	0,602	1,662	0,754	1,327	0,799	1,252	53	0,925
0,663	38	0,616	1,624	0,781	1,280	0,788	1,269	52	0,908
0,681	39	0,629	1,589	0,810	1,235	0,777	1,287	51	0,890
0,698	**40**	0,643	1,556	0,839	1,192	0,766	1,305	**50**	0,873
0,716	41	0,656	1,524	0,869	1,150	0,755	1,325	49	0,855
0,733	42	0,669	1,494	0,900	1,111	0,743	1,346	48	0,838
0,750	43	0,682	1,466	0,933	1,072	0,731	1,367	47	0,820
0,768	44	0,695	1,440	0,966	1,036	0,719	1,390	46	0,803
0,785	45	0,707	1,414	1,000	1,000	0,707	1,414	45	0,785
Arc.	°	*Cos.*	*Sec.*	*Cotg.*	*Tang.*	*Sin.*	*Cosec.*	°	*Arc.*

TABELA XI

zmian logarytmów deklinacji słońca w każdym dniu na I minutę czasową.

Dzień	Styczeń	Luty	Marzec	Kwiecień	Maj	Czerwiec	Lipiec	Sierpień	Wrzesień	Październik	Listopad	Grudzień	Dzień
	+	+	+	+	+	+	—	—	—	—	—	—	
1	9,283	9,847	9,976	9,985	9,883	9,545	9,192	9,793	9,956	9,988	9,907	9,602	1
2	324	855	978	984	877	525	237	801	959	987	902	583	2
3	362	862	980	982	871	504	277	810	961	986	897	563	3
4	396	869	982	980	864	481	314	818	964	985	891	541	4
5	428	876	984	978	858	457	348	825	966	984	885	518	5
6	458	883	985	976	851	431	379	833	968	983	879	493	6
7	485	889	987	974	844	404	408	840	970	982	873	467	7
8	511	895	988	972	837	375	434	847	972	981	866	439	8
9	535	901	989	970	829	343	460	853	974	979	859	409	9
10	558	906	990	967	821	308	483	860	976	978	852	376	10
11	579	912	991	965	813	271	505	866	977	976	844	340	11
12	599	917	992	962	805	230	526	872	979	974	837	300	12
13	618	922	993	959	796	184	546	878	980	972	829	257	13
14	636	926	993	956	787	132	565	883	982	970	820	208	14
15	653	931	994	953	778	074	583	889	983	968	811	153	15
16	669	935	994	950	768	006	600	894	984	966	802	089	16
17	684	939	995	947	758	8,926	616	899	985	964	792	015	17
18	698	943	995	943	748	827	632	904	986	961	782	8,924	18
19	712	947	995	939	737	698	647	909	987	958	772	809	19
20	726	951	995	936	726	514	661	913	987	955	761	651	20
21	738	954	995	932	714	189	674	918	988	952	750	401	21
22	750	958	994	927	702	— 7,251	687	922	988	949	738	7,746	22
23	762	961	994	923	689	— 8,279	700	926	989	946	726	+ 8,149	23
24	773	964	993	919	676	559	712	930	989	942	713	529	24
25	784	966	993	914	662	727	723	933	989	938	699	729	25
26	794	969	992	909	648	848	734	937	989	935	685	865	26
27	804	972	991	904	632	943	745	941	989	931	670	969	27
28	813	974	990	899	616	— 9,020	755	944	989	926	654	+ 9,053	28
29	822		989	894	600	086	765	947	988	922	638	123	29
30	831		988	888	583	142	775	950	988	917	621	183	30
31	839		987		564		784	953		912		236	31

PROTOKÓŁ POMIARU AZYMUTU

Ciało niebieskie: Słońce ⊙ przed poł.: lewy górny, ppoł.: prawy górny brzeg tarczy

Mierzono: azymut geodet Δ 5 — Δ 1 Szukane: południk punktu Δ 5

Data 25 i 27 sierpnia $\varphi = 52^0\ 28'\ 17''$ Obserwator: N. N.

Pomiar	Stanowisko	Celowa	Kąt wysokościowy h ° ′	Przed południu: Czas pomiaru z	Przed południu: a ° ′ ″	Po południu: Czas pomiaru	Po południu: b ° ′ ″	Średnia $R = \frac{a+b}{2}$ ° ′ ″	dla deklin. maleją cej + dla deklin. rosnącej − $+v'$	$A = R \pm v'$ ° ′ ″	A = Średnia arytmet. z obu poł lunety ° ′ ″	UWAGA
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Pierwszy 25 sierpnia	Δ5	Δ1		$7^h\ 46{\cdot}0$	0 00 00	$4^h\ 15{\cdot}0$	0 0 0	0 0 0				
					180 00 00		180 0 0					
		⊙	25 30	$7^h\ 54{\cdot}7$	244 25 12	$4^h\ 09{\cdot}3$	32 05 12	318 15 12	+6·6	318 21 48		
					64 25 12		212 05 12					
			26 30	$8^h\ 01{\cdot}7$	245 53 00							
					65 53 00							
			28 30	$8^h\ 15{\cdot}8$	248 59 00	$3^h\ 47{\cdot}8$	27 30 00	318 14 30	+6·3	318 20 48		
					68 59 00		207 30 00					
			30 30	$8^h\ 29{\cdot}5$	252 15 30	$3^h\ 33{\cdot}8$	24 12 48	318 14 12	+6·2	318 20 24		
					72 15 30		204 12 48					
			33 30	$8^h\ 51{\cdot}1$	257 29 48	$3^h\ 11{\cdot}6$	19 00 00	318 14 54	+6·0	318 20 54		
					77 29 48		199 00 00					
			35 30	$9^h\ 07{\cdot}1$	261 21 12	$2^h\ 55{\cdot}7$	15 09 00	318 15 06	+5·9	318 21 00		
					81 21 12		195 09 00					
			37 30	$9^h\ 22{\cdot}9$	265 33 12	$2^h\ 39{\cdot}3$	10 56 48	318 15 00	+5·8	318 20 48		
					75 33 12		190 56 48					
		Δ1		$9^h\ 30{\cdot}0$	0 0 0	$2^h\ 30$	0 0 0	0 0 0				
					0 0 0		0 0 0					
Drugi 27 sierpnia	Δ5	Δ1		$7^h\ 50{\cdot}0$	0 00 00	$4^h\ 11{\cdot}0$	0 00 00	0 0 0				
					180 00 00		180 00 00					
		⊙	25 30	$7^h\ 57{\cdot}8$	245 32 12	$4^h\ 06{\cdot}5$	30 58 0	318 15 06	+6·6	3 8 21 42	318 21 45	
					65 32 12		210 58 0					
			28 30	$8^h\ 18{\cdot}8$	250 07 00	$3^h\ 44{\cdot}0$	26 23 0	318 15 0	+6·4	318 21 24	318 21 06	
					70 07 00		206 23 0					
			30 30	$8^h\ 32{\cdot}8$	253 28 30	$3^h\ 29{\cdot}7$	23 01 30	318 15 0	+6·3	318 21 18	318 20 51	
					73 28 30		203 01 30					
			33 30	$8^h\ 54{\cdot}7$	258 48 48	$3^h\ 08{\cdot}0$	17 41 0	318 14 54	+6·1	318 21 0	318 20 57	
					78 48 48		197 41 0					
			35 30	$9^h\ 10{\cdot}7$	262 45 48	$2^h\ 52{\cdot}1$	13 45 0	318 15 24	+6·0	318 21 24	318 21 12	
					82 45 48		193 45 0					
			37 30	$9^h\ 26{\cdot}7$	267 02 00	$2^h\ 35{\cdot}6$	9 28 0	318 15 0	+5·9	318 20 54	318 20 51	
					87 02 00		189 28 0					
		Δ1		$9^h\ 32{\cdot}0$	0 0 0	$2^h\ 28{\cdot}0$	0 0 0					
					0 0 0		0 0 0					
									Średnia ogólna:		318 21 7,0	
										—	180	
								azymut Δ 5 — Δ 1 =			138 21 7	

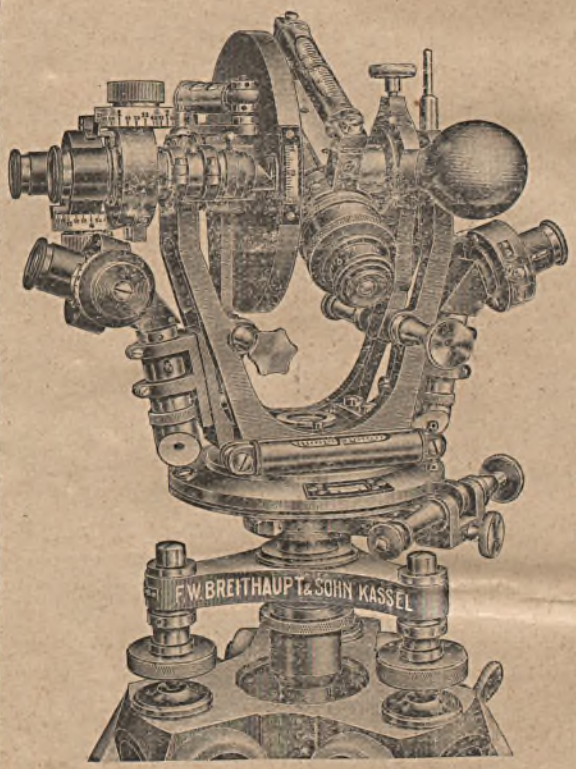
TABELA XII.

Nr. boku	Spółczynnik z dla poligonów o n =												Nr. boku
	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
1	1	1,00	1,0	1,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,0	1,00	1,00	1,00	1
2	1	1,33	1,5	1,6	1,67	1,71	1,75	1,78	1,8	1,82	1,83	1,85	2
3	.	1,00	1,5	1,8	2,00	2,14	2,25	2,33	2,4	2,45	2,50	2,54	3
4	.	.	1,0	1,6	2,00	2,29	2,50	2,67	2,8	2,91	3,00	3,08	4
5	.	.	.	1,0	1,67	2,14	2,50	2,78	3,0	3,18	3,33	3,46	5
6	.	.	.	.	1,00	1,71	2,25	2,67	3,0	3,27	3,50	3,69	6
7	.	.	.	.	.	1,00	1,75	2,33	2,8	3,18	3,50	3,77	7
8	.	.	.	.	.	.	1,00	1,78	2,4	2,91	3,33	3,69	8
9	.	.	.	.	.	.	.	1,00	1,8	2,45	3,00	3,46	9
10	.	.	.	.	.	.	.	.	1,0	1,82	2,50	3,08	10
11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1,00	1,83	2,54	11
12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1,00	1,85	12
13	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1,00	13

	Spółczynniki z dla poligonów o n =												
	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1
2	1,86	1,87	1,87	1,88	1,89	1,89	1,9	1,90	1,91	1,91	1,92	1,92	2
3	2,57	2,60	2,62	2,65	2,67	2,68	2,7	2,71	2,73	2,74	2,75	2,76	3
4	3,14	3,20	3,25	3,29	3,33	3,37	3,4	3,43	3,45	3,48	3,50	3,52	4
5	3,57	3,67	3,75	3,82	3,89	3,95	4,0	4,05	4,09	4,13	4,17	4,20	5
6	3,86	4,00	4,12	4,24	4,33	4,42	4,5	4,57	4,64	4,70	4,75	4,80	6
7	4,00	4,20	4,37	4,53	4,67	4,79	4,9	5,00	5,09	5,17	5,25	5,32	7
8	4,00	4,27	4,50	4,71	4,89	5,05	5,2	5,33	5,45	5,57	5,67	5,76	8
9	3,86	4,20	4,50	4,76	5,00	5,21	5,4	5,57	5,73	5,87	6,00	6,12	9
10	3,57	4,00	4,37	4,71	5,00	5,26	5,5	5,71	5,91	6,09	6,25	6,40	10
11	3,14	3,67	4,12	4,53	4,89	5,21	5,5	5,76	6,00	6,22	6,42	6,60	11
12	2,57	3,20	3,75	4,24	4,67	5,05	5,4	5,71	6,00	6,26	6,50	6,72	12
13	1,86	2,60	3,25	3,82	4,33	4,79	5,2	5,57	5,91	6,22	6,50	6,76	13
14	1,00	1,87	2,62	3,29	3,89	4,42	4,9	5,33	5,73	6,09	6,42	6,72	14
15	.	1,00	1,87	2,65	3,33	3,95	4,5	5,00	5,45	5,87	6,25	6,60	15
16	.	.	1,00	1,88	2,67	3,37	4,0	4,57	5,09	5,57	6,00	6,40	16
17	.	.	.	1,00	1,89	2,68	3,4	4,05	4,64	5,17	5,67	6,12	17
18	.	.	.	.	1,00	1,89	2,7	3,43	4,09	4,70	5,25	5,76	18
19	.	.	.	.	.	1,00	1,9	2,71	3,45	4,13	4,75	5,32	19
20	.	.	.	.	.	.	1,0	1,90	2,73	3,48	4,17	4,80	20
21	.	.	.	.	.	.	.	1,00	1,91	2,74	3,50	4,20	21
22	.	.	.	.	.	.	.	.	1,00	1,91	2,75	3,52	22
23	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1,00	1,92	2,76	23
24	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1,00	1,92	24
25	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	1,00	25

589

BREITHAUPT



$9\frac{1}{2}$ CM.

MIKROSKOPOWY

TEODOLIT

ZE ŚRUBĄ

MIKROMETRYCZNĄ

№ 39 *i*

GEODEZYJNE I ASTRONOMICZNE INSTRUMENTY

o

PRECYZYJNEM WYKOŃCZENIU

KOMPLETY NARZĘDZI

DLA P. INŻYNIERÓW, MIERNICZYCH I EKSPEDYCYJ NAUKOWYCH

F. W. BREITHAUPT & SOHN-KASSEL

EGZYSTUJE OD ROKU 1762.

ADMINISTRACJA „PRZEGLĄDU MIERNICZEGO“

WARSZAWA, ZŁOTA 29

posiada na składzie, wysyła pocztą

wszelkie wzory druków, używanych przy pracach pomiarowych, papier do kreśleń z siatką 10 cm. kwadratów oraz bez siatki.